

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea in Matematica

FUNZIONI ARMONICHE:
CONVERGENZA TANGENZIALE E NON-TANGENZIALE

Relatore: Prof. Marco VIGNATI

Correlatore: Prof.ssa Maura SALVATORI

Tesi di Laurea di:
Alessandro FERRIERO

Anno Accademico 2000-2001

Indice

Introduzione	2
1 Strumenti utilizzati	7
1.1 La convoluzione	7
1.2 Funzioni armoniche	10
1.3 Alcuni teoremi di Analisi Funzionale	11
2 Convergenza non-tangenziale	16
2.1 L'integrale di Poisson	17
2.2 Il problema di Dirichlet	19
2.3 Integrale di Poisson e funzioni armoniche	21
2.4 L'integrale di Poisson converge non-tangenzialmente	23
3 Una funzione armonica che non converge in quasi ogni punto lungo curve tangenti alla circonferenza	28
3.1 Prodotti di Blaschke	29
3.2 Dimostrazione del teorema di Littlewood	34
4 Una funzione armonica che non converge in alcun punto lungo curve tangenti alla circonferenza	36
4.1 Stime per l'integrale di Poisson	37
4.2 Dimostrazione del teorema di Aikawa	39
5 Convergenza tangenziale	47
5.1 Spazi tipo-Dirichlet e regioni d'approccio $\Omega_{K,\alpha}^p$	48
5.2 La funzione massimale di Hardy-Littlewood	52
5.3 La funzione massimale $\mathcal{M}_{K,p,\alpha}$	54

5.4	Il principio di Banach	58
5.5	Gli spazi tipo-Dirichlet ammettono Ω_K^p -convergenza	61
5.6	Il principio di continuità per operatori positivi	63
5.7	La Ω_K^p -convergenza è ottimale	70
5.8	Il nucleo di Bessel	72
5.9	L'integrale di Poisson converge tangenzialmente	74
A Abel-convergenza		77
B Un teorema di fattorizzazione		81
Bibliografia		88

Introduzione

Le funzioni armoniche rivestono un ruolo di fondamentale importanza, sia nell'ambito teorico della matematica sia in quello applicativo. Altrettanto importante è il comportamento alla frontiera di queste particolari funzioni; per esempio, per la risoluzione di equazioni differenziali alle derivate parziali o per lo studio delle serie di Fourier.

In questo lavoro di tesi vogliamo mostrare risultati, sia positivi che negativi, su vari tipi di convergenza di una funzione armonica nei punti della frontiera \mathbf{S} di \mathbf{D} , dove \mathbf{D} è il disco unitario aperto centrato nell'origine di \mathbb{R}^2 . Non consideriamo, però, la totalità delle funzioni armoniche in \mathbf{D} , ma restringiamo la nostra attenzione a quelle ottenute come integrale di Poisson di funzioni $f \in L^p(\mathbf{S})$ con $p \geq 1$.

Il primo tipo di convergenza che esaminiamo è la convergenza non-tangenziale. Se $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{C}$, $\alpha \geq 0$ e $\Gamma_\alpha(0) \in \mathbf{D}$ è il cono con vertice in $1 = e^{i0}$ di apertura $\arctan(\alpha)$, F converge *non-tangenzialmente* in 1 a $\ell \in \mathbb{C}$ se il limite di $F(z)$ per $z \rightarrow 1$, $z \in \Gamma_\alpha(0)$ è uguale a ℓ , per ogni $\alpha \geq 0$. Per $\alpha = 0$ si ha $\Gamma_\alpha(0) = [0, 1)$ e la convergenza non-tangenziale implica la solita convergenza radiale in 1 . Analogamente si può definire la convergenza radiale e non-tangenziale in ogni punto della circonferenza $e^{i\theta} \in \mathbf{S}$ (fig. 1).

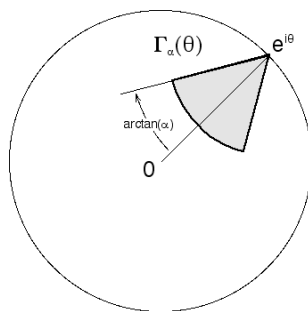


Figura 1: Cono con vertice in $e^{i\theta}$ e apertura $\arctan(\alpha)$.

Nel primo capitolo vengono riportati i principali strumenti matematici utilizzati nella

tesi: introduciamo l'operazione di convoluzione tra funzioni di $L^1(\mathbf{S})$ e ne approfondiamo alcune proprietà basilari, mostriamo alcune relazioni esistenti tra funzioni armoniche e funzioni olomorfe e, nell'ultimo paragrafo, dimostriamo alcuni teoremi fondamentali in Analisi Funzionale.

Nel secondo capitolo, definiamo il nucleo di Poisson per il disco \mathbf{D} e l'integrale di Poisson di funzioni in $L^1(\mathbf{S})$. Presentiamo il problema di Dirichlet per il disco \mathbf{D} e vediamo una caratterizzazione di funzioni armoniche in \mathbf{D} che sono l'integrale di Poisson di funzioni in $L^1(\mathbf{S})$; tale proprietà ci permette di affermare che una funzione armonica in \mathbf{D} è limitata in \mathbf{D} se e solo se è l'integrale di Poisson di una $f \in L^\infty(\mathbf{S})$. Infine, enunciamo un risultato classico dovuto a Fatou (1906): l'integrale di Poisson di una funzione $f \in L^1(\mathbf{S})$ converge non-tangenzialmente in quasi ogni $e^{i\theta} \in \mathbf{S}$ a $f(\theta)$ (poiché $L^p(\mathbf{S})$ è contenuto in $L^1(\mathbf{S})$, il teorema di Fatou rimane valido per ogni $f \in L^p(\mathbf{S})$ con $p > 1$).

Nel terzo e nel quarto capitolo discutiamo alcuni risultati negativi sulla convergenza alla frontiera di funzioni armoniche, risultati che valideranno l'ottimalità del teorema di Fatou.

Fissiamo una regione $\Omega(0) \subset \mathbf{D}$ la cui frontiera è una curva regolare a tratti con $\partial\Omega(0) \cap \mathbf{S} = 1$ e tangente alla circonferenza unitaria in 1. Indichiamo con $\Omega(\theta) = e^{i\theta}\Omega(0)$ la regione ottenuta ruotando la regione $\Omega(0)$ di un angolo θ ; diciamo che F è Ω -convergente in $e^{i\theta}$ se esiste, finito, il limite di $F(z)$ per $z \in \Omega(\theta)$ tendente a $e^{i\theta}$.

Ci chiediamo se l'integrale di Poisson di una funzione $f \in L^1(\mathbf{S})$ ammetta Ω -limite in quasi ogni punto di \mathbf{S} ; in altre parole, aumentando il grado di tangenza tra la regione e la circonferenza (il grado di tangenza tra i coni e la circonferenza è 0), si può garantire l' Ω -convergenza in quasi ogni punto di \mathbf{S} dell'integrale di Poisson di una funzione $f \in L^1(\mathbf{S})$?

La risposta è negativa. Infatti, nel terzo capitolo presentiamo un esempio per cui ciò non accade: se consideriamo una curva chiusa semplice regolare a tratti C_0 tangente alla circonferenza unitaria in 1 e tutte le sue ruotate $C_\theta = e^{i\theta}C_0$, J. E. Littlewood (1927) ha dimostrato che esiste una funzione armonica e limitata in \mathbf{D} che non converge lungo C_θ in quasi ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$, e quindi non ammette Ω -limite in quasi ogni punto di \mathbf{S} , dove $\Omega(\theta)$ è la parte di \mathbf{D} interna alla curva C_θ (fig. 2). Proviamo questo teorema esponendo la dimostrazione proposta da A. Zygmund (1949), che fa uso dei prodotti di Blaschke.

Anche se il teorema di Littlewood è sufficiente per rispondere alla domanda che ci siamo posti, nel quarto capitolo mostriamo una recente costruzione presentata da H. Aikawa nel 1990 di una funzione armonica e limitata in \mathbf{D} che non converge lungo C_θ in alcun $\theta \in [-\pi, \pi)$, e quindi non ammette Ω -limite in alcun punto di \mathbf{S} .

Tale costruzione conclude la trattazione dei risultati negativi sulla convergenza alla fron-

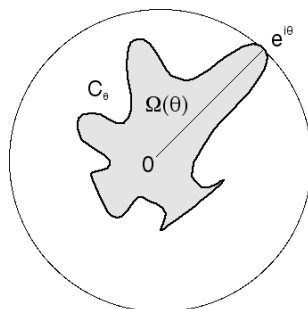


Figura 2: La curva C_θ tangente a \mathbf{S} in $e^{i\theta}$.

tiera di funzioni armoniche e limitate in \mathbf{D} presenti nella tesi: fissata una regione $\Omega(0)$ tangente alla circonferenza unitaria in 1, abbiamo dimostrato che esiste una $f \in L^1(\mathbf{S})$ il cui integrale di Poisson non ammetta Ω -convergenza in quasi punto di \mathbf{S} (per Aikawa, in alcun punto di \mathbf{S}).

Viceversa, se invece di fissare le regioni d'approccio fissiamo una funzione $f \in L^p(\mathbf{S})$ con $p \geq 1$, nel quinto capitolo mostriamo che è possibile trovare una famiglia di regioni $\Omega_\alpha(0)$, dipendenti da $p, \alpha \geq 0$ e f , tangenti a \mathbf{S} in 1, per le quali l'integrale di Poisson di f ammette Ω -convergenza in quasi ogni punto di \mathbf{S} (A. Nagel, W. Rudin, J. H. Shapiro, 1982); diremo che l'integrale di Poisson di f converge *tangenzialmente* in quasi ogni punto di \mathbf{S} .

Per dimostrare questo risultato procediamo per passi. Fissato un nucleo K (una particolare funzione di $L^1(\mathbf{S})$) e un indice $p \geq 1$, consideriamo lo spazio di tipo-Dirichlet associato, ossia lo spazio degli integrali di Poisson delle convoluzioni di funzioni di $L^p(\mathbf{S})$ con K . Per ogni $\alpha \geq 0$, definiamo la regione d'approccio $\Omega_{K,\alpha}^p(0)$, dipendente da K, α e p (fig. 3), e la funzione massimale associata a questa regione e alle sue ruotate; nel paragrafo 5.1, vediamo che queste regioni $\Omega_{K,\alpha}^p(0)$ sono tangenti alla circonferenza unitaria in 1 e che il grado di tangenza con la circonferenza aumenta al crescere di p ed è indipendente da α (lo stesso accade per ogni regione $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta) = e^{i\theta}\Omega_{K,\alpha}^p(0)$ ruotata della regione $\Omega_{K,\alpha}^p(0)$).

Confrontando la funzione massimale associata alle regioni $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta)$ con la funzione massimale di Hardy-Littlewood su \mathbf{S} (par. 5.2), nel paragrafo 5.3 dimostriamo che l'operatore massimale associato alle regioni $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta)$ è di tipo debole e da questo fatto, utilizzando una tecnica classica (principio di Banach, par. 5.4), nel paragrafo 5.5 dimostriamo che ogni funzione appartenente ad uno spazio di tipo-Dirichlet ammette $\Omega_{K,\alpha}^p$ -convergenza in quasi ogni punto di \mathbf{S} , per ogni $\alpha \geq 0$.

Nei paragrafi 5.6 e 5.7, sfruttando il principio di continuità per operatori positivi (\mathbf{S} .

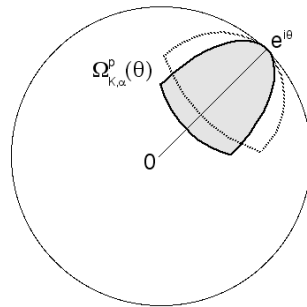


Figura 3: Al variare di α non cambia il grado di tangenza tra la regione e \mathbf{S} .

Sawyer, 1966), mostriamo che le regioni $\Omega_{K,\alpha}^p(0)$ sono ottimali; ciò significa che, se $\Omega'_\alpha(0)$ sono regioni d'approccio con grado di tangenza maggiore di quello delle $\Omega_{K,\alpha}^p(0)$, esiste una funzione appartenente allo spazio di tipo-Dirichlet che non è Ω'_α -convergente in quasi ogni punto di \mathbf{S} , per alcun α . Quindi, come la convergenza non-tangenziale quasi ovunque è ottimale per gli integrali di Poisson di funzioni di $L^1(\mathbf{S})$, la $\Omega_{K,\alpha}^p$ -convergenza quasi ovunque, per ogni $\alpha \geq 0$, è ottimale negli spazi tipo-Dirichlet.

Nel paragrafo 5.8, forniamo una scrittura esplicita di alcune regioni d'approccio utilizzando un particolare nucleo (nucleo di Bessel) in modo da rendere ancora più evidente che queste regioni sono tangenti alla circonferenza unitaria (app. A).

Infine, nel paragrafo 5.9, applicando un teorema astratto di fattorizzazione per algebre di Banach (E. Hewitt, 1964) che riportiamo nell'appendice B, proviamo che l'integrale di Poisson di f converge tangenzialmente in quasi ogni punto di \mathbf{S} .

Capitolo 1

Strumenti utilizzati

In questo capitolo illustriamo sinteticamente gli strumenti matematici di base utilizzati nello svolgimento della tesi (cf. [2], [8]).

In particolare, nel primo paragrafo presentiamo gli integrali di convoluzione che sono necessari per definire gli spazi tipo-Dirichlet. Nel secondo paragrafo riportiamo la definizione di funzione armonica e alcune proprietà di questo tipo di funzioni. Infine, nel terzo paragrafo proviamo dei teoremi fondamentali di Analisi Funzionale: il teorema delle categorie di Baire, il teorema di Banach-Steinhaus e il teorema di Banach-Alaoglu. Questi risultati verranno utilizzati nelle dimostrazioni dei teoremi presenti nei capitoli successivi.

1.1 La convoluzione

In questo paragrafo non vogliamo presentare una trattazione degli integrali di convoluzione su spazi di misura generici, ma considerare un caso particolare che sarà quello utilizzato nell'esposizione della tesi.

Denotiamo con $\mathbf{S} = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$ la circonferenza unitaria di \mathbb{C} . Sia f una funzione definita su \mathbf{S} , a valori complessi. A partire da questa funzione, definiamo la funzione $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ponendo $\tilde{f}(\theta) = f(e^{i\theta})$ per ogni $\theta \in \mathbb{R}$; poiché $e^{i\theta}$ è 2π -periodica, \tilde{f} è 2π -periodica.

Viceversa, se partiamo da una funzione 2π -periodica $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, possiamo definire una funzione f da \mathbf{S} in \mathbb{C} nel modo seguente: per ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$, $f(e^{i\theta}) = \tilde{f}(\theta)$.

Così facendo otteniamo una corrispondenza biunivoca tra le funzioni con dominio \mathbf{S} e codominio \mathbb{C} , e le funzioni 2π -periodica con dominio \mathbb{R} e codominio \mathbb{C} ¹. Utilizzando questa

¹Osserviamo che se la funzione di partenza \tilde{f} non fosse 2π -periodica, questa corrispondenza non sarebbe biunivoca: infatti, la scelta dell'intervallo $[-\pi, \pi)$ rispetto ad un altro dello tipo $[-\pi, \pi) + \theta_0$ darebbe luogo a diverse funzioni f .

corrispondenza, definiamo, per $p \in [1, \infty]$, lo spazio di funzioni $L^p(\mathbf{S}) = \{f : \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{C} \mid \tilde{f} \text{ è Lebesgue-misurabile su } \mathbb{R}, 2\pi\text{-periodiche q.o. su } \mathbb{R} \text{ e } \tilde{f} \in L^p([-\pi, \pi])\}$.

Se $f \in L^1(\mathbf{S})$, allora

$$\int_{\mathbf{S}} f dm = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta, \quad (1.1)$$

dove m è la misura su \mathbf{S} indotta dalla misura di Lebesgue $d\theta$: se $E \subset [-\pi, \pi)$, $m(e^{iE}) = d\theta(E)$ ². Dalla periodicità di \tilde{f} segue che $\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta - \theta_0) d\theta = \int_{-\pi - \theta_0}^{\pi - \theta_0} \tilde{f}(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta$, e quindi $\int_{\mathbf{S}} f dm = \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta - \theta_0) d\theta$, per ogni $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

Se $f \in L^p(\mathbf{S})$ con $p \in [1, \infty)$, la norma p di f è

$$\|f\|_{L^p(\mathbf{S})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{S}} f^p dm \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(\theta)|^p d\theta \right)^{\frac{1}{p}}; \quad (1.2)$$

mentre se $f \in L^\infty(\mathbf{S})$, $\|f\|_{L^\infty(\mathbf{S})} = \left\| \tilde{f} \right\|_{L^\infty([-\pi, \pi])}$.

Analogamente allo spazio $L^p(\mathbf{S})$, possiamo definire lo spazio delle funzioni continue su \mathbf{S} , $C(\mathbf{S}) = \{f : \mathbf{S} \rightarrow \mathbb{C} \mid \tilde{f} \text{ è } 2\pi\text{-periodica e continua su } \mathbb{R}\}$ ³.

La convoluzione di due funzioni f e g in $L^1(\mathbf{S})$ è una funzione di $L^1(\mathbf{S})$, e non è nient'altro che l'integrale del prodotto puntuale di f e g ; la convoluzione funge da prodotto in senso algebrico in $L^1(\mathbf{S})$.

Proposizione 1.1.1 *Siano $f, g \in L^1(\mathbf{S})$. Per quasi ogni $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta - \cdot)g(\cdot) \in L^1(\mathbf{S})$ e*

$$f * g(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)g(t) dt \in L^1(\mathbf{S}). \quad (1.3)$$

Inoltre,

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbf{S})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbf{S})} \|g\|_{L^1(\mathbf{S})}. \quad (1.4)$$

La convoluzione di f con g è la funzione $f * g$.

Dimostrazione. Osserviamo preliminarmente che la funzione $h(\theta, t) = f(\theta - t)g(t)$ è (Lebesgue) misurabile.

Infatti, $(\theta, t) \rightarrow (\theta - t, t)$ è un diffeomorfismo da \mathbb{R}^2 in \mathbb{R}^2 e quindi, per il teorema sul cambiamento di variabile, h è misurabile se e solo se $f(\theta)g(t)$ è misurabile; $f(\theta)g(t)$ è

²Denotiamo con e^{iE} l'insieme $\{e^{i\theta} \mid \theta \in E\}$.

³Di seguito non distingueremo più f e \tilde{f} con due scritture diverse ma, con un abuso di linguaggio, denoteremo entrambe le funzioni con f .

misurabile perchè prodotto di due funzioni misurabili (la funzione $(\theta, t) \rightarrow f(\theta)$ e la funzione $(\theta, t) \rightarrow g(t)$).

Poiché $f(\theta+2\pi-t)g(t) = f(\theta-t)g(t)$ per quasi ogni $(\theta, t) \in \mathbb{R}^2$, se esiste, finito o infinito, $f * g(\theta)$, allora $f * g(\theta) = f * g(\theta + 2\pi)$; quindi, $f * g$ è 2π -periodica.

Per dimostrare che $f(\theta - \cdot)g(\cdot) \in L^1(\mathbf{S})$, per quasi ogni $\theta \in \mathbb{R}$, utilizziamo il teorema di Tonelli:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |h(\theta, t)| d\theta dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t)| d\theta \right) |g(t)| dt = \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| d\theta \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| dt < \infty. \quad (1.5)$$

Infine,

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1(\mathbf{S})} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f * g(\theta)| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(\theta, t) dt \right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |h(\theta, t)| dt \right) d\theta = \|f\|_{L^1(\mathbf{S})} \|g\|_{L^1(\mathbf{S})}, \end{aligned}$$

e quindi, $f * g \in L^1(\mathbf{S})$. □

La disuguaglianza provata nella proposizione precedente ammette una generalizzazione: se g oltre che appartenere a $L^1(\mathbf{S})$ appartiene a $L^p(\mathbf{S})$ con $p > 1$, allora la norma p della convoluzione di f con g è minore del prodotto della norma 1 di f per la norma p di g .

Teorema 1.1.2 (disuguaglianza di Young) *Sia $f \in L^1(\mathbf{S})$ e $g \in L^p(\mathbf{S})$ con $p \in (1, \infty]$. Allora, $f * g \in L^p(\mathbf{S})$ e*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbf{S})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbf{S})} \|g\|_{L^p(\mathbf{S})}. \quad (1.6)$$

Dimostrazione. Come nella dimostrazione del teorema precedente, la funzione $h(\theta, t) = f(\theta - t)g(t)$ è misurabile e $f * g$ è 2π -periodica.

Consideriamo il caso in cui p vale ∞ :

$$|f * g(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t)g(t)| dt \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t)| dt = \|g\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \|f\|_{L^1(\mathbf{S})}, \quad (1.7)$$

per quasi ogni $\theta \in [-\pi, \pi]$; perciò, $\|f * g\|_{L^\infty(\mathbf{S})} = \text{essSup}_{[-\pi, \pi]} |f * g| \leq \|f\|_{L^1(\mathbf{S})} \|g\|_{L^\infty(\mathbf{S})}$.

Invece, se $p \in (1, \infty)$ e $q = p/(p - 1) \in (1, \infty)$ è il suo esponente coniugato, usando la

disuguaglianza di Hölder e osservando che $p/q = p - 1$, otteniamo

$$\begin{aligned}
 \|f * g\|_{L^p(\mathbf{S})}^p &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f * g(\theta)|^p d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t)g(t)dt \right|^p d\theta \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t)|^{\frac{1}{q}} |f(\theta - t)|^{\frac{1}{p}} |g(t)| dt \right)^p d\theta \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(2\pi)^p} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t)| dt \right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t)| |g(t)|^p dt \right) d\theta \\
 &= \|f\|_{L^1(\mathbf{S})}^{p-1} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t)| |g(t)|^p dt \right) d\theta \\
 &= \|f\|_{L^1(\mathbf{S})}^{p-1} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t)| d\theta \right) |g(t)|^p dt \\
 &= \|f\|_{L^1(\mathbf{S})}^{p-1} \|f\|_{L^1(\mathbf{S})} \|g\|_{L^p(\mathbf{S})}^p,
 \end{aligned}$$

che implica, $\|f * g\|_{L^p(\mathbf{S})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbf{S})} \|g\|_{L^p(\mathbf{S})}$. □

Per concludere, osserviamo che la convoluzione è commutativa: utilizzando il cambio di variabile $\tau = \theta - t$,

$$\begin{aligned}
 f * g(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta - t)f(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta+\pi}^{\theta-\pi} f(\tau)g(\theta - \tau)(-1)d\tau \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta - \tau)f(\tau)d\tau = g * f(\theta).
 \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra che è associativa e distributiva rispetto alla somma puntuale di funzioni⁴.

1.2 Funzioni armoniche

In questo paragrafo riportiamo la definizione di funzione armonica e verifichiamo che una funzione olomorfa è armonica. Nel capitolo 2 si proverà una proprietà importante delle funzioni armoniche: ogni funzione armonica ammette localmente una scrittura analoga a quella valida per le funzioni olomorfe (prop. 2.3.1).

Definizione 1.2.1 *Sia $F(x, y)$ una funzione a valori complessi definita in un aperto Ω di \mathbb{R}^2 ; supponiamo che esistano e siano continue le derivate seconde F_{xx} e F_{yy} di F in Ω . Si*

⁴La convoluzione e la somma puntuale di funzioni rendono $L^1(\mathbf{S})$ un'algebra di Banach (cf. [8]).

dice che F è armonica in Ω se, per ogni $(x, y) \in \Omega$, il Laplaciano di F in (x, y) è nullo, cioè

$$\nabla(F)(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}(x, y) + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}(x, y) = 0. \quad (1.8)$$

Se $F(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy)$ è una funzione olomorfa in un aperto Ω di \mathbb{C} , identificando come solito \mathbb{R}^2 e \mathbb{C} tramite la corrispondenza $(x, y) \rightarrow x + iy$, per F valgono le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \quad (1.9)$$

per ogni $(x, y) \in \Omega$. Allora, ricordando che anche F_x è olomorfa,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial^2 y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right) (x, y) = i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) (x, y) = - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) (x, y) = - \frac{\partial^2 F}{\partial^2 x}(x, y), \quad (1.10)$$

ovvero il Laplaciano è nullo. Riscrivendo questa equazione separando parte reale e parte immaginaria otteniamo

$$\nabla(F)(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}(x, y) + i \left[\frac{\partial^2 v}{\partial^2 x}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y}(x, y) \right] = 0, \quad (1.11)$$

che equivale a

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x}(x, y) + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y}(x, y) = 0 \end{cases} \quad (1.12)$$

Quindi, F è armonica se e solo se $u = \Re[F]$ e $v = \Im[F]$ sono armoniche.

Per concludere, osserviamo che se F e G sono armoniche ogni combinazione lineare a coefficienti in \mathbb{C} di F e G è armonica. Infatti, per la linearità del Laplaciano, $\nabla(\lambda F + \mu G) = \lambda \nabla(F) + \mu \nabla(G) = 0$, se $\nabla(F) = \nabla(G) = 0$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

1.3 Alcuni teoremi di Analisi Funzionale

In questo paragrafo dimostriamo alcuni teoremi fondamentali in Analisi. Presentiamo il teorema di Baire, il teorema di Banach-Steinhaus e il teorema di Banach-Alaoglu sulla compattezza delle bolle chiuse nel duale.

Il teorema di Baire afferma che se $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi chiusi con interno vuoto in uno spazio metrico completo X , allora l'unione degli X_n ha interno vuoto. Poiché l'interno di X è diverso dal vuoto, questo implica che se X è uguale all'unione numerabile di insiemi chiusi, allora almeno uno degli insiemi X_n ha interno non vuoto (cf. [2]).

Teorema 1.3.1 (Baire) Sia X uno spazio metrico completo e $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi chiusi in X . Se

$$\overset{\circ}{X}_n = \emptyset \quad , \forall n \in \mathbb{N}, \quad (1.13)$$

allora

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n \right)^{\circ} = \emptyset. \quad (1.14)$$

Dimostrazione. Sia $O_n = X_n^c$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; dalle ipotesi segue che O_n è un aperto denso in X . Dimostrare che $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ è denso in X equivale a dimostrare il teorema.

Sia A un aperto di X : proviamo che $A \cap G \neq \emptyset$. Siano $x_0 \in A$ e $r_0 > 0$ tali che

$$\bar{B}(x_0, r_0) \subset A, \quad (1.15)$$

dove $B(x_0, r_0) = \{x \in X \mid d(x, x_0) < r_0\}$. Siano $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap O_1$ e $r_1 \in (0, r_0/2)$ tali che

$$\bar{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap O_1; \quad (1.16)$$

questo è possibile dal momento che O_1 è denso in X , e quindi $B(x_0, r_0) \cap O_1$ è un aperto diverso dal vuoto.

Per induzione, definiamo due successioni $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tali che $r_{n+1} \in (0, r_n/2) \subset (0, r_0/2^{n+1})$ e

$$\bar{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap O_{n+1}. \quad (1.17)$$

Allora, $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy nello spazio metrico completo X , perciò esiste un $x \in X$ tale che $x_n \rightarrow x$ per $n \rightarrow \infty$. Inoltre, dal fatto che $\{x_{n+m}\}_{m \in \mathbb{N}} \subset B(x_n, r_n)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$, segue che $x \in \bar{B}(x_n, r_n)$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Quindi,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{B}(x_n, r_n) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (B(x_{n-1}, r_{n-1}) \cap O_n) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \cap O_n) = A \cap G \quad (1.18)$$

che implica $A \cap G \neq \emptyset$. □

Come applicazione del teorema di Baire, dimostriamo il teorema di Banach-Steinhaus, o principio di limitatezza uniforme. Sia $\{T_i\}_{i \in I}$ una famiglia (anche non numerabile) di operatori lineari continui tra due spazi di Banach; allora la norma dell'operatore T_i è finita per ogni i . Il teorema di Banach-Steinhaus dice di più: la norma degli operatori T_i è limitata uniformemente in i . Però, perchè questo sia vero, c'è una condizione a cui devono sottostare i T_i , più precisamente:

Teorema 1.3.2 (Banach-Steinhaus) *Siano E e F due spazi di Banach e sia $\{T_i\}_{i \in I}$ una famiglia di operatori lineari continui da E in F . Se*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\|_F < \infty, \quad \forall x \in E, \quad (1.19)$$

allora

$$\sup_{i \in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty. \quad (1.20)$$

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo

$$X_n = \{x \in E \mid \|T_i x\|_F \leq n, \forall i \in I\}; \quad (1.21)$$

gli X_n sono chiusi e dalle ipotesi segue che $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = E$. Per il teorema di Baire, esiste un $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $\overset{\circ}{X}_{n_0} \neq \emptyset$ altrimenti $(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n)^{\circ} = \overset{\circ}{E} = \emptyset$, che è assurdo.

Allora, siano $x_0 \in E$ e $r_0 > 0$ tali che $B(x_0, r_0) \subset X_{n_0}$: questo implica che

$$\left\| T_i \left(x_0 + \frac{r_0}{2} x \right) \right\|_F \leq n_0, \quad \forall i \in I, \quad \forall \|x\|_E = 1. \quad (1.22)$$

Quindi, per ogni $i \in I$,

$$\begin{aligned} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} &= \sup_{\|x\|_E=1} \|T_i x\|_F \leq \sup_{\|x\|_E=1} \left\| T_i \left(x_0 + \frac{r_0}{2} x \right) \right\|_F + \frac{2}{r_0} \sup_{\|x\|_E=1} \|T_i x_0\|_F \\ &= \frac{2}{r_0} \left[\sup_{\|x\|_E=1} \left\| T_i \left(\frac{r_0}{2} x + x_0 \right) \right\|_F + \|T_i x_0\|_F \right] \\ &\leq \frac{2}{r_0} (n_0 + \|T_i x_0\|_F) < \infty, \end{aligned}$$

ovvero la tesi. □

Come corollario al teorema di Banach-Steinhaus, dimostriamo una proposizione che verrà usata nel capitolo successivo. A tal fine, introduciamo la topologia w^* (debole star).

Sia X uno spazio lineare normato e sia X' il suo duale. Per ogni $x \in X$ fissato, possiamo considerare la funzione da X' in \mathbb{R} (o \mathbb{C}) definita da

$$x''(f) = \langle f, x \rangle = f(x), \quad \forall f \in X'. \quad (1.23)$$

Questa funzione è lineare e continua: la linearità segue dalla linearità di f e la continuità segue dalla disuguaglianza

$$|\langle f, x \rangle| \leq \|f\|_{X'} \|x\|_X \quad (1.24)$$

per ogni $f \in X'$, che implica $\|x''\|_{X''} \leq \|x\|_X < \infty$.

Pertanto, lo spazio $\tilde{X} = \{x'' \in X'' \mid x \in X\}$ è un sottospazio di X'' (si dimostra che \tilde{X} è isometricamente isomorfo a X). Se X ha dimensione (algebraica) finita, allora $\tilde{X} = X''$.

Si definisce la topologia w^* come la topologia meno fine che rende continui i funzionali di \tilde{X} . Osservando che i funzionali di \tilde{X} sono continui in norma, la topologia w^* è contenuta nella topologia indotta dalla norma di X' .

Sottolineiamo che la topologia w^* si definisce per spazi che sono duali di spazi lineari normati, e che se lo spazio di partenza ha dimensione finita allora la topologia w^* coincide con la topologia indotta dalla norma del duale.

Tra le proprietà della topologia w^* , ricordiamo che questa topologia è di Hausdorff, quindi si può parlare di limite di successioni sapendo che questo limite, quando esiste, è unico.

Nella proposizione seguente dimostriamo una relazione esistente tra la topologia w^* e la topologia indotta dalla norma: se una successione è w^* -convergente allora è limitata in norma (cf. [2]).

Proposizione 1.3.3 *Sia X uno spazio di Banach e sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X'$ una successione del duale di X . Se f_n tende a $f \in X'$ nella topologia w^* , allora f_n è limitata in norma.*

Dimostrazione. Dalla definizione di w^* -convergenza, per ogni $x \in X$, si ha che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x). \quad (1.25)$$

Quindi, per ogni $x \in X$, la successione numerica $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata, cioè

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty, \quad \forall x \in X. \quad (1.26)$$

Applicando il teorema di Banach-Steinhaus con $E = X$, $F = \mathbb{R}$ (o \mathbb{C}) e $T_n = f_n$, si ha che

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{X'} < \infty, \quad (1.27)$$

ovvero, esiste $C > 0$ tale che $\|f_n\|_{X'} \leq C < \infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

Prima di provare il teorema di Banach-Alaoglu, osserviamo che negli spazi lineari normati infinito dimensionali, al contrario di quel che accade per quelli finito dimensionali, le bolle chiuse in norma non sono compatte.

Sotto questo punto di vista si può dire che il teorema di Banach-Alaoglu permette il recupero della compattezza, che è però w^* -compattezza, delle bolle chiuse in norma del duale (cf. [2]).

Teorema 1.3.4 (Banach-Alaoglu) *Sia X uno spazio lineare normato. La bolla unitaria chiusa di X' , $B_{X'} = \{f \in X' \mid \|f\|_{X'} \leq 1\}$, è compatta nella topologia w^* .*

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio prodotto $Y = \mathbb{R}^X$ (o \mathbb{C}^X), cioè $Y = \{\omega : X \rightarrow \mathbb{R}\}$; Y è dotato della topologia prodotto che è la topologia meno fine che rende continue le proiezioni $p_x(\omega) = \omega(x)$ al variare di x in X .

Per come sono definiti X' e Y , X' è un sottoinsieme di Y ; dimostriamo che l'inclusione $i : (X', w^*) \rightarrow Y$ è un omeomorfismo sull'immagine.

L'inclusione i è biettiva sull'immagine. Per provare che i è continua, proviamo che $p_x \circ i$ è continua per ogni $x \in X$; questo segue dall'uguaglianza $p_x \circ i = \langle \cdot, x \rangle : X' \rightarrow \mathbb{R}$.

Verifichiamo che i^{-1} è continua. Come prima, i^{-1} è continua se, per ogni $x \in X$, $\langle \cdot, x \rangle \circ i^{-1}$ è continua; questo segue dall'uguaglianza $\langle \cdot, x \rangle \circ i^{-1} = p_x$.

Se proviamo che $i(B_{X'})$ è compatto, abbiamo la tesi.

Ma $i(B_{X'}) = K_1 \cap K_2$, dove

$$\begin{aligned} K_1 &= \{\omega \in Y \mid |\omega(x)| \leq \|x\|_X, \forall x \in X\}, \\ K_2 &= \{\omega \in Y \mid \omega(x+y) = \omega(x) + \omega(y), \omega(\lambda x) = \lambda\omega(x), \forall x, y \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Ricordando che $p_x(\omega) = \omega(x)$, si ha

$$K_2 = \left(\bigcap_{x,y \in X} A_{x,y} \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{x \in X \\ \lambda \in \mathbb{R}}} B_{x,\lambda} \right), \quad (1.28)$$

dove $A_{x,y} = \{\omega \in Y \mid p_{x+y}(\omega) - p_x(\omega) - p_y(\omega) = 0\}$ e $B_{x,\lambda} = \{\omega \in Y \mid p_{\lambda x}(\omega) - \lambda p_x(\omega) = 0\}$; allora, dalla continuità delle p_x , segue che K_2 è chiuso.

Inoltre, osservando che $p_x(K_1) = [-\|x\|_X, \|x\|_X]$ è compatto, per ogni $x \in X$, segue che K_1 è compatto (Tychonoff).

Perciò, $i(B_{X'})$ è compatto, e quindi, $B_{X'}$ è w^* -compatto. □

Capitolo 2

Convergenza non-tangenziale

In questo capitolo vogliamo dimostrare che l'integrale di Poisson ammette convergenza non-tangenziale (cf. [5], [8]).

Chiariamo cosa si intende per convergenza non-tangenziale. Consideriamo un punto $e^{i\theta} \in \mathbf{S}$ ed una funzione F definita su \mathbf{D} .

Sia $\Gamma_\alpha(0)$ la regione del disco definita da $\{z = re^{i\theta} \in \mathbf{D} \mid |\theta|/(1-r) \leq \alpha\}$ e $\Gamma_\alpha(\theta) = e^{i\theta}\Gamma_\alpha(0)$ la ruotata di un angolo θ della regione $\Gamma_\alpha(0)$; queste regioni hanno un punto angoloso in $e^{i\theta}$ (fig. 2.1). Poiché le tangenti a $\Gamma_\alpha(\theta)$ in $e^{i\theta}$ formano un angolo di ampiezza $\arctan(\alpha)$ con il raggio con vertice in $e^{i\theta}$, chiamiamo ogni regione $\Gamma_\alpha(\theta)$ cono con vertice in $e^{i\theta}$ e apertura $\arctan(\alpha)$.

Diciamo che F converge non-tangenzialmente in $e^{i\theta} \in \mathbf{S}$ se esiste il limite di $F(z)$ per $z \rightarrow e^{i\theta}$, $z \in \Gamma_\alpha(\theta)$, per ogni $\alpha > 0$; poiché il raggio di \mathbf{S} con vertice in $e^{i\theta}$ è contenuto in $\Gamma_\alpha(\theta)$, questa convergenza implica quella radiale.

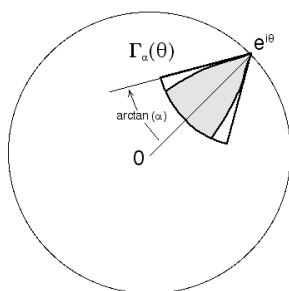


Figura 2.1: La regione $\Gamma_\alpha(\theta)$.

Prima di discutere la convergenza non-tangenziale alla frontiera dell'integrale di Poisson, affrontiamo il problema di Dirichlet e diamo una caratterizzazione delle funzioni armoniche

che sono l'integrale di Poisson di una funzione definita sulla circonferenza unitaria; questi risultati verranno usati nel capitolo 5.

2.1 L'integrale di Poisson

L'integrale di Poisson di una funzione $f \in L^1(\mathbf{S})$ è la convoluzione di f con una particolare funzione \mathbf{P}_r , dipendente da un parametro continuo $r \in [0, 1)$, chiamata nucleo di Poisson per il disco \mathbf{D} .

Definizione 2.1.1 Si definisce nucleo di Poisson per il disco \mathbf{D} la funzione

$$\mathbf{P}_r(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N r^{|n|} e^{in\theta}, \quad (2.1)$$

per $r \in [0, 1)$ e per ogni $\theta \in \mathbb{R}$.

Osserviamo che $\mathbf{P}_r(\theta)$ è ben definita; infatti, se $r_0 \in (0, 1)$, $|r^{|n|} e^{in\theta}| \leq r^{|n|} \leq r_0^{|n|}$, per ogni $r \in [0, r_0]$ e per ogni $\theta \in \mathbb{R}$. Perciò, per un teorema di Weierstrass, la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta}$ converge uniformemente sui compatti di \mathbf{D} .

La funzione $\mathbf{P}_r(\theta)$ può essere scritta esplicitamente: sia $z = re^{i\theta} \in \mathbf{D}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_r(\theta) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \Re \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} z^n \right] = \Re \left[\frac{1+z}{1-z} \right] \\ &= \frac{\Re[(1+z)(1-\bar{z})]}{|1-z|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \\ &= \frac{1-r^2}{|1-re^{i\theta}|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}. \end{aligned}$$

Dalla terza uguaglianza, si ottiene che $\mathbf{P}_r(\theta)$ è armonica in \mathbf{D} essendo la parte reale della funzione $(1+z)/(1-z)$ olomorfa in \mathbf{D} (par. 1.2).

Il grafico di \mathbf{P}_r ha la forma di una campana con il massimo sull'asse delle ordinate; più r è vicino a 1, più la campana si stringe e si alza.

Proposizione 2.1.2 $\{\mathbf{P}_r\}_{r \in [0,1)}$ gode delle seguenti proprietà:

- (i) $\mathbf{P}_r(\theta) \geq 0$, per ogni $r \in [0, 1)$, per ogni $\theta \in \mathbb{R}$;
- (ii) \mathbf{P}_r è pari, per ogni $r \in [0, 1)$;
- (iii) $\mathbf{P}_r(\delta) > \mathbf{P}_r(\theta)$, per $0 < \delta < |\theta| \leq \pi$;

(iv) per ogni $\delta \in (0, \pi)$, $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sup_{\delta \leq |\theta| < \pi} \mathbf{P}_r(\theta) = 0$;

(v) $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(\theta) dt = 1$, per ogni $r \in [0, 1)$.

Dimostrazione. Per provare (i) usiamo l'identità trigonometrica $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2(\theta/2)$, quindi riscriviamo \mathbf{P}_r in questo modo

$$\mathbf{P}_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}} \geq 0, \quad (2.2)$$

per ogni $r \in [0, 1)$; \mathbf{P}_r è pari perché la funzione coseno è pari.

Per (iii) e (iv) usiamo la disuguaglianza $\sin^2(\delta/2) < \sin^2(\theta/2)$ valida per ogni $0 < \delta < |\theta| \leq \pi$. Allora, per ogni $0 < \delta < |\theta| \leq \pi$,

$$\mathbf{P}_r(\delta) = \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\delta}{2}} > \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \mathbf{P}_r(\theta), \quad (2.3)$$

e

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sup_{\delta \leq |\theta| < \pi} \mathbf{P}_r(\theta) \leq \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1 - r^2}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\delta}{2}} = 0, \quad (2.4)$$

per ogni $\delta \in (0, \pi)$.

Per (v), ricordiamo che

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{m\theta} dt = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 0 & , n \neq 0 \end{cases}; \quad (2.5)$$

dalla convergenza uniforme sui compatti di \mathbf{D} della serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{m\theta}$, segue che $(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(\theta) d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{m\theta} d\theta = 1$. \square

Definizione 2.1.3 Sia $f \in L^1(\mathbf{S})$; l'integrale di Poisson di f è la funzione $P[f] : \mathbf{D} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$P[f](re^{i\theta}) = \mathbf{P}_r * f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(\theta - t) f(t) dt. \quad (2.6)$$

Proposizione 2.1.4 Per ogni $f \in L^1(\mathbf{S})$, $P[f]$ è una funzione armonica in \mathbf{D} .

Dimostrazione. Supponiamo che f sia a valori reali. Osserviamo che

$$\left| \sum_{n=-N}^N r^{|n|} e^{m(\theta-t)} f(t) \right| \leq \sum_{n=-N}^N r^{|n|} |f(t)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} |f(t)| \leq \frac{1+r}{1-r} |f(t)|, \quad (2.7)$$

per ogni $N \in \mathbb{Z}$ e per ogni $re^{i(\theta-t)} \in \mathbf{D}$.

Poiché $|f|(1+r)/(1-r) \in L^1(\mathbf{S})$, per il teorema di convergenza dominata (cf. [8]),

$$\begin{aligned} P[f](re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in(\theta-t)} f(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|} e^{in\theta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) r^{|n|} e^{in\theta} = \Re \left[\hat{f}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)) z^n \right], \end{aligned}$$

dove $z = re^{i\theta} \in \mathbf{D}$ e $\hat{f}(n) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt$ è l' n -esimo coefficiente di Fourier di f . Per il lemma di Riemann-Lebesgue (cf. [6]), $\hat{f}(n) \rightarrow 0$ per $|n| \rightarrow \infty$. Allora, esiste una costante $C > 0$ tale che $|\hat{f}(n)| \leq C$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Quindi, $\sum_{n=1}^{\infty} (\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)) z^n$ è olomorfa in \mathbf{D} da cui segue che $P[f]$ è armonica in \mathbf{D} .

Se f è a valori complessi, possiamo scrivere $f = u + iv$ dove u e v sono funzioni reali. Poiché $P[f] = P[u] + iP[v]$, $P[f]$ è armonica perchè somma di funzioni armoniche. \square

2.2 Il problema di Dirichlet

In questo paragrafo vogliamo considerare il problema dell'estensione di una funzione definita sul cerchio \mathbf{S} ad una funzione armonica nel disco \mathbf{D} .

Questo problema è conosciuto come problema di Dirichlet: data una funzione f continua su \mathbf{S} , esiste una funzione continua in $\bar{\mathbf{D}}$ e armonica in \mathbf{D} che coincide con f sul cerchio \mathbf{S} ?

Nel teorema 2.2.1 proveremo che $\mathbf{P}_r * f$ converge uniformemente a f per r tendente a 1^- e, perciò, che $P[f]$ risolve il problema di Dirichlet. Infatti, abbiamo visto che $P[f]$ è armonica in \mathbf{D} ; quindi, se $\mathbf{P}_r * f$ converge uniformemente a f , $P[f]$ può essere prolungata con continuità in $\bar{\mathbf{D}}$ con valori alla frontiera uguali a f .

Dimostriamo inoltre che se f non appartiene allo spazio delle funzioni continue su \mathbf{S} ma appartiene ad uno spazio $L^p(\mathbf{S})$, con $p \in [1, \infty)$, allora, $\mathbf{P}_r * f$ converge a f in norma $L^p(\mathbf{S})$ (cf. [5]).

Teorema 2.2.1 *Valgono:*

- (i) Se $f \in C(\mathbf{S})$, allora $\mathbf{P}_r * f \rightarrow f$ uniformemente, per $r \rightarrow 1^-$;
- (ii) Se $f \in L^p(\mathbf{S})$ con $p \in [1, \infty)$, allora $\mathbf{P}_r * f \rightarrow f$ nella norma di $L^p(\mathbf{S})$, per $r \rightarrow 1^-$;
- (iii) Se $f \in L^\infty(\mathbf{S})$, allora $\mathbf{P}_r * f \rightarrow f$ nella topologia w^* di $L^\infty(\mathbf{S})$, per $r \rightarrow 1^-$.

Dimostrazione. Dimostriamo (i). Per $\delta > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_r * f(\theta) - f(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(t) f(\theta - t) dt - f(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(t) [f(\theta - t) - f(\theta)] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta \leq |t| < \pi} \right) \mathbf{P}_r(t) [f(\theta - t) - f(\theta)] dt = I_{\delta}^1(\theta) + I_{\delta}^2(\theta) \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il punto (v) della proposizione 2.1.2.

Per ipotesi, f è continua e 2π -periodica in \mathbb{R} , quindi è uniformemente continua in \mathbb{R} . Sia $\epsilon_0 > 0$; allora, esiste un $\delta_0 > 0$ tale che $|f(\theta - t) - f(\theta)| < \epsilon_0$, per ogni $t \in (-\delta_0, \delta_0)$ e per ogni $\theta \in \mathbb{R}$. Quindi,

$$\begin{aligned} |I_{\delta_0}^1(\theta) + I_{\delta_0}^2(\theta)| &\leq \epsilon_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \mathbf{P}_r(t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta_0 \leq |t| < \pi} |f(\theta - t) - f(\theta)| dt \sup_{\delta_0 \leq |t| < \pi} \mathbf{P}_r(t) \\ &\leq \frac{\epsilon_0}{2\pi} + 2 \|f\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \sup_{\delta_0 \leq |t| < \pi} \mathbf{P}_r(t) \end{aligned}$$

Utilizzando il punto (iv) della proposizione 2.1.2, esiste $r_0 \in [0, 1)$ tale che $\sup_{\delta_0 \leq |t| < \pi} \mathbf{P}_r(t) \leq \epsilon_0$, per ogni $r \in [r_0, 1)$.

Perciò, dato $\epsilon_0 > 0$, esiste $r_0 \in [0, 1)$ tale che

$$|\mathbf{P}_r * f(\theta) - f(\theta)| \leq |I_{\delta_0}^1(\theta) + I_{\delta_0}^2(\theta)| \leq \epsilon_0 \left(\frac{1}{2\pi} + 2 \|f\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \right), \quad (2.8)$$

per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ e per ogni $r \in [r_0, 1)$, e quindi, $\lim_{r \rightarrow 1^-} \|\mathbf{P}_r * f - f\|_{\infty} = 0$.

Dimostriamo (ii). Stimiamo $\|\mathbf{P}_r * f - f\|_{L^p(\mathbf{S})}$. Poiché $C(\mathbf{S})$ è denso in $L^p(\mathbf{S})$ (cf. [8]), per ogni $\epsilon > 0$, esiste $g \in C(\mathbf{S})$ tale che $\|f - g\|_{L^p(\mathbf{S})} \leq \epsilon$. Allora,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{P}_r * f - f\|_{L^p(\mathbf{S})} &= \|\mathbf{P}_r * f - \mathbf{P}_r * g + \mathbf{P}_r * g - g + g - f\|_{L^p(\mathbf{S})} \\ &\leq \|\mathbf{P}_r * f - \mathbf{P}_r * g\|_{L^p(\mathbf{S})} + \|\mathbf{P}_r * g - g\|_{L^p(\mathbf{S})} + \|g - f\|_{L^p(\mathbf{S})} \\ &\leq 2 \|g - f\|_{L^p(\mathbf{S})} + \|\mathbf{P}_r * g - g\|_{L^p(\mathbf{S})} \leq 2\epsilon + \|\mathbf{P}_r * g - g\|_{L^\infty(\mathbf{S})}. \end{aligned}$$

Per il punto (i), $\lim_{r \rightarrow 1^-} \|\mathbf{P}_r * g - g\|_{L^p(\mathbf{S})} = 0$ e la tesi segue dall'arbitrarietà di ϵ .

Dimostriamo (iii). Osserviamo che

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [\mathbf{P}_r * f(s) - f(s)]g(s)ds \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(s-t) - f(s)]g(s)dsdt \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(t) \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(s-t) - f(s)]g(s)ds \right| dt \\
 &\leq \sup_{-\delta < t < \delta} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(s-t) - f(s)]g(s)ds \right| + \\
 &\quad + 2 \|g\|_{L^1(\mathbf{S})} \|f\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \sup_{\delta \leq |t| < \pi} \mathbf{P}_r(t),
 \end{aligned}$$

per ogni $g \in L^1(\mathbf{S})$ ($L^\infty(\mathbf{S}) = [L^1(\mathbf{S})]^*$). Da

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(s-t) - f(s)]g(s)ds \right| = \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(y)[g(y-t) - g(y)]dy \right| \leq 2\pi \|f\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \|g_t - g\|_{L^1(\mathbf{S})}, \tag{2.9}$$

segue che, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} [\mathbf{P}_r * f(s) - f(s)]g(s)ds \right| &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \sup_{-\delta < t < \delta} \|g_t - g\|_{L^1(\mathbf{S})} + \\
 &\quad + 2 \|g\|_{L^1(\mathbf{S})} \|f\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \sup_{\delta \leq |t| < \pi} \mathbf{P}_r(t) \leq \epsilon
 \end{aligned}$$

per r vicino 1^- ; allora, $\mathbf{P}_r * f \xrightarrow{w^*} f$. □

2.3 Integrale di Poisson e funzioni armoniche

In questo paragrafo vogliamo dare una caratterizzazione delle funzioni armoniche che sono l'integrale di Poisson di una funzione definita su \mathbf{S} .

Proviamo preliminarmente che una funzione armonica in \mathbf{D} e continua in $\bar{\mathbf{D}}$ è l'integrale di Poisson della restrizione della funzione a \mathbf{S} (cf. [8]); questo è il teorema di unicità relativo al teorema 2.2.1 che afferma che a partire da una funzione continua su \mathbf{S} esiste una funzione armonica in \mathbf{D} continua in $\bar{\mathbf{D}}$ con valori alla frontiera uguali a f .

Proposizione 2.3.1 *Sia F una funzione continua in $\bar{\mathbf{D}}$ e armonica in \mathbf{D} . Allora, per $re^{i\theta} \in \mathbf{D}$,*

$$F(re^{i\theta}) = P[F|\mathbf{s}](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(\theta - t)F(e^{it})dt. \tag{2.10}$$

Dimostrazione. Supponiamo che F sia reale.

La funzione $F_1 = P[F |_{\mathbf{S}}](re^{i\theta})$ è armonica in \mathbf{D} per la proposizione 2.1.4 e continua in $\bar{\mathbf{D}}$ per il teorema 2.2.1. Consideriamo la funzione $H = F - F_1$; H è continua in $\bar{\mathbf{D}}$ e armonica in \mathbf{D} .

Sia, per assurdo, $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbf{D}$ tale che $H(z_0) > 0$; quindi, esiste un ϵ tale che $0 < 4\epsilon < H(z_0)$.

Poniamo, per $z = x + iy \in \bar{\mathbf{D}}$, $g(z) = H(z) + \epsilon[(x - x_0)^2 - 4]$; allora, $g(z_0) = H(z_0) - 4\epsilon > 0$ e se $z = x + iy \in \mathbf{S}$, da $|x - x_0| < 2$ e $H(z) = F(z) - F_1(z) = F |_{\mathbf{S}}(z) - F |_{\mathbf{S}}(z) = 0$, segue che $g(z) = \epsilon[(x - x_0)^2 - 4] < 0$.

Essendo g continua in $\bar{\mathbf{D}}$, g ha un massimo relativo in un punto $z_1 \in \mathbf{D}$. Questo implica che $g_{xx}(z_1) \leq 0$ e $g_{yy}(z_1) \leq 0$, che è in contraddizione con $\nabla(g) = 2\epsilon > 0$. Quindi, $H(z) = F(z) - F_1(z) \leq 0$ per ogni $z \in \mathbf{D}$.

Lo stesso ragionamento mostra che $F_1(z) - F(z) \leq 0$, e perciò $F(z) = F_1(z)$ per ogni $z \in \mathbf{D}$.

Nel caso di F a valori complessi, applicando il teorema alle funzioni reali armoniche $\Re[F]$ e $\Im[F]$, $P[(\Re[F] + i\Im[F]) |_{\mathbf{S}}] = P[\Re[F] |_{\mathbf{S}}] + iP[\Im[F] |_{\mathbf{S}}] = \Re[F] + i\Im[F] = F$. \square

Questa proposizione mostra che una funzione F continua in $\bar{\mathbf{D}}$ e armonica in \mathbf{D} ammette la scrittura

$$F(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(\theta - t) F(e^{it}) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}, \quad (2.11)$$

per ogni $re^{i\theta} \in \mathbf{D}$, dove $c_n = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} F |_{\mathbf{S}}(t) e^{-int} dt$.

Teorema 2.3.2 *Sia F una funzione armonica in \mathbf{D} ; indichiamo con $F_r(\theta) = F(re^{i\theta})$. Per $p \in (1, \infty]$, F è l'integrale di Poisson di una $f \in L^p(\mathbf{S})$ se e solo se $\{F_r\}_{r \in [0,1)}$ è limitata in $L^p(\mathbf{S})$.*

Dimostrazione. Osserviamo che l'implicazione nel verso \Rightarrow segue direttamente del teorema 2.2.1. Infatti, se $p \in (1, \infty)$, per il punto (ii) del teorema 2.2.1, $\{F_r\}_{r \in [0,1)}$ è limitata in norma $L^p(\mathbf{S})$; se $p = \infty$, per il punto (ii) del teorema 2.2.1 e per la proposizione 1.3.3, $\{F_r\}_{r \in [0,1)}$ è limitata in norma $L^\infty(\mathbf{S})$.

Dimostriamo ora l'implicazione nel verso opposto. Per la proposizione precedente, $F(re^{i\theta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$.

Osserviamo che

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} F_r(\theta) d\theta = c_m; \quad (2.12)$$

infatti, l' m -esimo coefficiente di Fourier di $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|} e^{in\theta}$ è $r^{|m|} c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\theta} F_r(\theta) d\theta$.

Supponiamo allora che $\|F_r\|_{L^p(\mathbf{S})} \leq c$ per ogni $r \in [0, 1)$ con $p \in (1, \infty]$.

Essendo $L^p(\mathbf{S})$ il duale di $L^q(\mathbf{S})$ con $q \in [1, \infty)$, le bolle di $L^p(\mathbf{S})$ sono w^* -compatte. Quindi, esiste una $f \in L^p(\mathbf{S})$ tale che per ogni w^* -intorno di f cadono infinite F_r , cioè, per ogni $g \in L^q(\mathbf{S})$, i numeri $(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} F_r(\theta) g(\theta) d\theta$ sono vicini a $(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) g(\theta) d\theta$, per infiniti r vicino a 1^- . Se come particolare g prendiamo $e^{-imt} \in L^q(\mathbf{S})$, allora $c_m = \hat{f}(m)$, e quindi $F = P[f]$. \square

Dal teorema precedente segue che una funzione armonica nel disco \mathbf{D} è limitata se e solo se è l'integrale di Poisson di una funzione $f \in L^\infty(\mathbf{S})$.

2.4 L'integrale di Poisson converge non-tangenzialmente

Dimostriamo il teorema di Fatou (1906) che prova la convergenza non-tangenziale quasi ovunque dell'integrale di Poisson di una funzione di $L^1(\mathbf{S})$.

Teorema 2.4.1 (Fatou) *Sia $f \in L^1(\mathbf{S})$, e sia $P[f]$ l'integrale di Poisson di f . Allora, per quasi ogni $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$,*

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} P[f](re^{i\theta_0}) = f(\theta_0). \quad (2.13)$$

Più in generale, $P[f](re^{i\theta})$ converge a $f(\theta_0)$ in modo non-tangenziale.

Dimostrazione. Poiché la convergenza non-tangenziale implica quella radiale, dimostriamo la convergenza non-tangenziale.

Sia $\psi(t) = \int_0^t f(\theta) d\theta$ per $t \in [-\pi, \pi)$. Questa funzione è derivabile con derivata uguale a f quasi ovunque in $[-\pi, \pi)$. Inoltre, $\psi(0) = 0$.

Senza perdere di generalità, possiamo supporre che $\psi(\pi) - \psi(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 0$ e che $\theta_0 = 0$ sia un punto in cui $\psi'(0) = f(0)$. Allora $\psi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) / \sin t$.

Si ha

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}'_r(\theta - t) \psi(t) dt = - \left[\frac{1}{2\pi} \mathbf{P}_r(\theta - t) \psi(t) \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(\theta - t) f(t) dt, \quad (2.14)$$

allora

$$P[f](re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}'_r(\theta - t) \psi(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_{r,\theta}(t) \frac{\psi(t)}{\sin t} dt, \quad (2.15)$$

dove $K_{r,\theta}(t) = \sin t \mathbf{P}'_r(\theta - t)$.

Passo 1. Dimostriamo che $\{K_{r,\theta}\}_{re^{i\theta} \in \mathbb{D}_{\neq \alpha}(0)}$ soddisfa le seguenti proprietà:

1. $\int_{-\pi}^{\pi} |K_{r,\theta}(t)| dt$ è limitato per $re^{i\theta} \in \Gamma_{\alpha}(0)$;
2. $\lim_{\substack{re^{i\theta} \rightarrow 1 \\ re^{i\theta} \in \Gamma_{\alpha}(0)}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_{r,\theta}(t) dt = 1$;
3. per ogni $\delta \in (0, \pi)$, $\lim_{\substack{re^{i\theta} \rightarrow 1 \\ re^{i\theta} \in \Gamma_{\alpha}(0)}} \sup_{\delta \leq |t| < \pi} |K_{r,\theta}(t)| = 0$.

Verifichiamo la terza proprietà. Per definizione

$$\begin{aligned} K_{r,\theta}(t) = \sin t \mathbf{P}'_r(\theta - t) &= 2r(1 - r^2) \frac{\sin t \sin(\theta - t)}{[1 - 2r \sin(\theta - t) + r^2]^2} \\ &= \frac{2r \sin t \sin(\theta - t)}{1 - 2r \sin(\theta - t) + r^2} \mathbf{P}_r(\theta - t), \end{aligned}$$

allora, se $\delta \leq |t| < \pi$ e $\theta \rightarrow 0$, esiste $\bar{\delta} \in (0, |\theta - t|]$ e quindi

$$|K_{r,\theta}(t)| \leq \frac{2}{4r \sin^2 \frac{\bar{\delta}}{2}} \mathbf{P}_r(\bar{\delta}), \quad (2.16)$$

che tende a 0 per $r \rightarrow 1^-$. La proprietà 2 segue dalla catena di uguaglianze

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \mathbf{P}'_r(\theta - t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos t \mathbf{P}_r(\theta - t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \mathbf{P}_r(\theta - t) dt \\ &= \frac{re^{-i\theta}}{2} + \frac{re^{i\theta}}{2} = r \cos \theta. \end{aligned}$$

Proviamo la prima proprietà: ricordando l'identità trigonometrica $\sin(\theta + t) = \sin \theta \cos t - \sin t \cos \theta$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_{r,\theta}(t)| dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(\theta + t) \mathbf{P}'_r(t)| dt \\ &\leq |\sin \theta| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathbf{P}'_r(t)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t \mathbf{P}'_r(t)| dt. \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il secondo addendo al terzo membro osserviamo che

$$\sin t \mathbf{P}'_r(t) = \frac{2r \sin^2 t}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{t}{2}} \mathbf{P}_r(t) \leq \frac{\sin^2 t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \mathbf{P}_r(t) \quad (2.17)$$

e che $\sin^2 t / [2 \sin^2(t/2)]$ è una funzione continua in $t = 0$. Allora, per ogni $r \in [0, 1)$,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t \mathbf{P}'_r(t)| dt \leq \frac{C}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(t) dt = \frac{C}{2\pi}, \quad (2.18)$$

dove C è una costante positiva. Per il primo addendo si ha:

$$\begin{aligned} |\sin \theta| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\mathbf{P}'_r(t)| dt &= |\sin \theta| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 |\mathbf{P}'_r(t)| dt = |\sin \theta| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \mathbf{P}'_r(t) dt \\ &= |\sin \theta| \frac{1}{\pi} [\mathbf{P}_r(0) - \mathbf{P}_r(-\pi)] = |\sin \theta| \frac{1}{\pi} \left[\frac{1+r}{1-r} - \frac{1-r}{1+r} \right] \\ &\leq \frac{1+r}{\pi} \frac{|\theta|}{1-r}. \end{aligned}$$

Allora, il primo punto è dimostrato dopo aver osservato che $|\theta|/(1-r)$ è limitato in $\Gamma_\alpha(0)$.

Passo 2. Dimostriamo il teorema.

Siano $\Psi(t) = \psi(t)/\sin t - \psi'(0)$ e $I(r, \theta) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} K_{r,\theta}(t) dt$:

$$\begin{aligned} P[f](re^{i\theta}) - I(r, \theta)\psi'(0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(t) K_{r,\theta}(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta \leq |t| < \pi} \right) \Psi(t) K_{r,\theta}(t) dt \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Usando le proprietà 1 e 3 di $K_{r,\theta}(t)$ dimostrate nel *Passo 1*, possiamo affermare che I_1 e I_2 sono piccoli per δ piccolo. Infatti, se $\epsilon > 0$, poiché Ψ è continua in 0 e $\Psi(0) = 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che $\sup_{|t| \leq \delta} |\Psi(t)| \leq \epsilon$. Quindi,

$$\begin{aligned} |I_1 + I_2| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} |\Psi(t) K_{r,\theta}(t)| dt + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |t| < \pi} |\Psi(t) K_{r,\theta}(t)| dt \\ &\leq \epsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_{r,\theta}(t)| dt + \sup_{\delta \leq |t| < \pi} |K_{r,\theta}(t)| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi(t)| dt \\ &\leq C_1 \epsilon + C_2 \sup_{\delta \leq |t| < \pi} |K_{r,\theta}(t)| \rightarrow C_1 \epsilon \end{aligned}$$

per $re^{i\theta} \rightarrow 1$ con $re^{i\theta} \in \Gamma_\alpha(0)$, dove C_1 e C_2 sono due costanti positive.

Applicando la proprietà 2 del *Passo 1*,

$$\left| \lim_{\substack{re^{i\theta} \rightarrow 1 \\ re^{i\theta} \in \Gamma_\alpha(0)}} P[f](re^{i\theta}) - f(0) \right| = \lim_{\substack{re^{i\theta} \rightarrow 1 \\ re^{i\theta} \in \Gamma_\alpha(0)}} |P[f](re^{i\theta}) - I(r, \theta)\psi'(0)| \leq C_1 \epsilon \quad (2.19)$$

e la tesi segue dall'arbitrarietà di ϵ .

Se $\theta_0 \neq 0$ è un punto in cui $\psi'(\theta_0) = f(\theta_0)$ e $A = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta \neq 0$, consideriamo la funzione $\tilde{f}(\theta) = f_{(-\theta_0)}(\theta) - A$, dove $f_{(-\theta_0)}(\theta) = f(\theta + \theta_0)$ è la funzione traslata di f ; allora, $\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta) d\theta = 0$ e $\tilde{\psi}(t) = \int_0^t \tilde{f}(\theta) d\theta$ è derivabile in 0 con derivata uguale a $\tilde{f}(0)$.

Osservando che

$$P[\tilde{f}](re^{i\theta}) = P[f_{(-\theta_0)} - A](re^{i\theta}) = P[f_{(-\theta_0)}](re^{i\theta}) - P[A](re^{i\theta}) = P[f](re^{i(\theta+\theta_0)}) - A^1,$$

segue che

$$f(\theta_0) - A = \tilde{f}(0) = \lim_{\substack{re^{i\theta} \rightarrow 1 \\ re^{i\theta} \in \Gamma_\alpha(0)}} P[\tilde{f}](re^{i\theta}) = \lim_{\substack{re^{i\theta} \rightarrow 1 \\ re^{i\theta} \in \Gamma_\alpha(0)}} P[f](re^{i(\theta+\theta_0)}) - A. \quad (2.20)$$

Questo equivale a

$$\lim_{\substack{re^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta_0} \\ re^{i\theta} \in \Gamma_\alpha(\theta_0)}} P[f](re^{i\theta}) = f(\theta_0), \quad (2.21)$$

che è quello che volevamo provare. □

I corollari che seguono sono conseguenza diretta del teorema 2.3.2 e del teorema di Fatou.

Corollario 2.4.2 *Sia F una funzione armonica in \mathbf{D} ; indichiamo con $F_r(\theta) = F(re^{i\theta})$.*

Se $\{F_r\}_{r \in [0,1)}$ è limitata in $L^p(\mathbf{S})$ con $p \in (1, \infty)$, allora F ammette limite non-tangenziale quasi ovunque uguale a $\tilde{f} \in L^p(\mathbf{S})$ e F è l'integrale di Poisson di \tilde{f} .

Dimostrazione. Per il teorema 2.3.2, F è l'integrale di Poisson di una $f \in L^p(\mathbf{S}) \subset L^1(\mathbf{S})$, quindi il limite non-tangenziale di F esiste quasi ovunque per il teorema 2.4.1 ed è uguale ad f , cioè $\tilde{f} = f \in L^p(\mathbf{S})$. □

Corollario 2.4.3 *Sia F una funzione armonica in \mathbf{D} .*

Se F è limitata, allora F ammette limite non-tangenziale quasi ovunque uguale a $\tilde{f} \in L^\infty(\mathbf{S})$ e F è l'integrale di Poisson di \tilde{f} .

Dimostrazione. Per il teorema 2.3.2, F è l'integrale di Poisson di una $f \in L^\infty(\mathbf{S}) \subset L^1(\mathbf{S})$, quindi il limite non-tangenziale di F esiste quasi ovunque per il teorema 2.4.1 ed è uguale ad f , cioè $\tilde{f} = f \in L^\infty(\mathbf{S})$. □

L'ultimo corollario afferma che una funzione F armonica e limitata in \mathbf{D} ammette limite non-tangenziale in quasi ogni punto di \mathbf{S} .

Nei prossimi due capitoli dimostriamo dei risultati di tipo negativo: nel capitolo 3 proviamo che esiste una funzione armonica limitata che non ammette limite in quasi ogni punto di

¹Osserviamo che $P[f_{(-\theta_0)}](re^{i\theta}) = \mathbf{P}_r * f_{(-\theta_0)}(\theta) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(\theta - t) f(t + \theta_0) dt = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(\theta + \theta_0 - s) f(s) dt = P[f](re^{i(\theta+\theta_0)})$.

S lungo curve tangenti alla circonferenza, e nel capitolo 4 presentiamo un risultato recente, proposto nel 1990 da Aikawa, ovvero la costruzione di una funzione armonica limitata che non ammette limite in alcun punto di **S** lungo curve tangenti alla circonferenza.

Capitolo 3

Una funzione armonica che non converge in quasi ogni punto lungo curve tangenti alla circonferenza

Sia C_0 una curva chiusa semplice passante per $z = 1 \in \mathbf{S}$, tale che $C_0 \setminus \{1\} \subset \mathbf{D}$ e tangente a \mathbf{S} in $z = 1$. Denotiamo con $C_\theta = e^{i\theta}C_0$ la ruotata della curva C_0 .

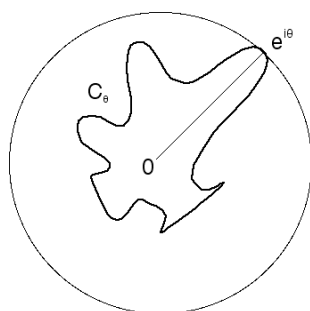


Figura 3.1: La curva C_θ .

In questo capitolo vogliamo dimostrare che esiste una funzione armonica limitata in \mathbf{D} che per quasi ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$ non ammette limite per $z \rightarrow e^{i\theta}$ lungo almeno uno dei due archi di C_θ ; questo è il teorema di Littlewood ed è l'argomento del paragrafo 3.2 (cf. [10]). Nel paragrafo 3.1 introduciamo i prodotti di Blaschke che servono per provare il teorema di Littlewood (cf. [8]).

3.1 Prodotti di Blaschke

Sia $0 < |\zeta| < 1$. Consideriamo la funzione

$$b(z, \zeta) = \frac{\bar{\zeta}(\zeta - z)}{|\zeta|(1 - z\bar{\zeta})} \quad (3.1)$$

per $z \in \bar{\mathbf{D}}$; $b(z, \zeta)$ è olomorfa in \mathbf{D} . Infatti, $1 - z\bar{\zeta} = 0$ se e solo se $z = 1/\bar{\zeta}$, che implica $|z| > 1$.

Osserviamo che $b(z, \zeta) = 0$ solo per $z = \zeta$ e che, per $|z| = 1$,

$$|b(z, \zeta)| = \frac{|\bar{\zeta}||\zeta - z|}{|\zeta||z\bar{z} - z\bar{\zeta}|} = \frac{|\zeta - z|}{|z(\bar{z} - \bar{\zeta})|} = 1. \quad (3.2)$$

Quindi, per il principio del massimo modulo, $|b(z, \zeta)| < 1$ in \mathbf{D} .

Poniamo, per $\zeta = 0$, $b(z, 0) = z$.

Proposizione 3.1.1 *Sia $\{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{D}$ tale che $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\zeta_n|) < \infty$. Il prodotto infinito*

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} b(z, \zeta_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N b(z, \zeta_n) \quad (3.3)$$

è una funzione olomorfa in \mathbf{D} che vale zero nei punti ζ_n . B viene chiamato prodotto di Blaschke.

Dimostrazione. Osserviamo che se proviamo la convergenza uniforme di $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - b(z, \zeta_n)|$ sui compatti di \mathbf{D} , abbiamo la tesi.

Infatti, supponiamo che $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - b(z, \zeta_n)| < \infty$ uniformemente per z appartenente ad un sottoinsieme di \mathbf{D} . Allora $|1 - b(z, \zeta_n)|$ tende a zero (uniformemente in z), quindi, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $|b(z, \zeta_n)| \neq 0$ e $|\log |b(z, \zeta_n)|| \leq 2|1 - |b(z, \zeta_n)||$ ¹, per ogni $n \geq N$. Perciò, la serie $\sum_{n=N}^{\infty} \log |b(z, \zeta_n)|$ converge assolutamente.

Ricordando che, per $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $|x_1 - x_2| \leq 1$, si ha $|e^{x_1} - e^{x_2}| \leq e^{1+x_2}|x_1 - x_2|$ ², ricaviamo, per ogni $R > S \geq M$,

$$\begin{aligned} \left| \prod_{n=1}^R b(z, \zeta_n) - \prod_{n=1}^S b(z, \zeta_n) \right| &= \prod_{n=1}^{N-1} |b(z, \zeta_n)| \left| e^{\sum_{n=N}^R \log |b(z, \zeta_n)|} - e^{\sum_{n=N}^S \log |b(z, \zeta_n)|} \right| \\ &\leq e^{1 + \sum_{n=N}^S \log |b(z, \zeta_n)|} \left| \sum_{n=N}^R \log |b(z, \zeta_n)| - \sum_{n=N}^S \log |b(z, \zeta_n)| \right|, \end{aligned}$$

¹Segue da $|\log(1 - x)| = |x \sum_{n=0}^{\infty} x^n / (n+1)| \leq |x| \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n \leq 2|x|$, per $|x| \leq 1/2$.

²Infatti, per ogni $|x| \leq 1$, $|e^x - 1| = |x| \sum_{n=0}^{\infty} x^n / [(n+1)!] \leq |x|e^x \leq |x|e$. Sostituendo x con $x_1 - x_2$ si ottiene la maggiorazione $|e^{x_1} - e^{x_2}| \leq e^{1+x_2}|x_1 - x_2|$.

dove $M \in \mathbb{N}$ è tale che $|\sum_{n=N}^R \log |b(z, \zeta_n)| - \sum_{n=N}^S \log |b(z, \zeta_n)|| \leq 1$, per ogni $R, S \geq M$ (un tale M esiste essendo $\sum_{n=N}^{\infty} \log |b(z, \zeta_n)|$ di Cauchy).

Se $C > 0$ è tale che $|\sum_{n=N}^{\infty} \log |b(z, \zeta_n)|| \leq C$,

$$\left| \prod_{n=1}^R b(z, \zeta_n) - \prod_{n=1}^S b(z, \zeta_n) \right| \leq e^{1+C} \left| \sum_{n=N}^R \log |b(z, \zeta_n)| - \sum_{n=N}^S \log |b(z, \zeta_n)| \right|, \quad (3.4)$$

da cui segue che $\prod_{n=1}^{\infty} b(z, \zeta_n)$ è di Cauchy.

Allora, la convergenza uniforme della serie $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - b(z, \zeta_n)|$ implica la convergenza uniforme del prodotto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} b(z, \zeta_n)$.

Per dimostrare che $\sum_{n=1}^{\infty} |1 - b(z, \zeta_n)| < \infty$, osserviamo che, per ogni $|z| \leq r < 1$, si ha

$$|1 - b(z, \zeta_n)| = \left| \frac{(|\zeta_n| + z\bar{\zeta}_n)(1 - |\zeta_n|)}{|\zeta_n|(1 - z\bar{\zeta}_n)} \right| \leq \frac{1 + |z|}{|1 - z\bar{\zeta}_n|} (1 - |\zeta_n|) \leq \frac{1 + r}{1 - r} (1 - |\zeta_n|), \quad (3.5)$$

e la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\zeta_n|)$ è convergente per ipotesi. \square

Abbiamo dimostrato che un prodotto di Blaschke è una funzione olomorfa in \mathbf{D} e che ha zeri solo nei punti ζ_n .

Proviamo che il valora assoluto del limite radiale di un prodotto di Balschke è quasi ovunque uguale a 1; per dimostrarlo abbiamo bisogno della formula di Poisson-Jensen.

Teorema 3.1.2 (formula di Poisson-Jensen) *Sia f una funzione olomorfa in \mathbf{D} con $f(0) \neq 0$ e ζ_1, \dots, ζ_N gli zeri di f in $\{|z| \leq r < 1\}$ presenti secondo le loro molteplicità. Allora, vale la formula*

$$|f(0)| \prod_{n=1}^N \frac{r}{|\zeta_n|} = \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \right\}. \quad (3.6)$$

Dimostrazione. Siano $\zeta_{m+1} = re^{i\theta_{m+1}}, \dots, \zeta_N = re^{i\theta_N}$ gli zeri di f su $\{|z| = r\}$. Consideriamo la funzione

$$g(z) = f(z) \prod_{n=1}^m b\left(\frac{z}{r}, \frac{\zeta_n}{r}\right)^{-1} \prod_{n=m+1}^N \frac{\zeta_n}{\zeta_n - z} = f(z) \prod_{n=1}^m \frac{|\zeta_n|(r^2 - z\bar{\zeta}_n)}{r\bar{\zeta}_n(\zeta_n - z)} \prod_{n=m+1}^N \frac{\zeta_n}{\zeta_n - z} \quad (3.7)$$

Dal fatto che gli ζ_n sono in numero finito, esiste un $\delta > 0$ tale che g è olomorfa e priva di zeri in $\{|z| < r + \delta\}$. Allora, la funzione $\log |g|$ è armonica in $\{|z| < r + \delta\}$ perché parte reale della funzione olomorfa $\log g$ (par. 1.2); quindi, per la proposizione 2.3.1,

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |g(re^{i\theta})| d\theta. \quad (3.8)$$

Il primo membro di questa uguaglianza è uguale a

$$\log |f(0)| + \sum_{n=1}^m \log(r/|\zeta_n|) = \log |f(0)| + \sum_{n=1}^N \log(r/|\zeta_n|), \quad (3.9)$$

mentre il secondo è uguale a

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\log |f(re^{i\theta})| - \sum_{n=1}^m \log \left| b \left(\frac{re^{i\theta}}{r}, \frac{\zeta_n}{r} \right) \right| - \sum_{n=m+1}^N \log |1 - e^{i(\theta-\theta_n)}| \right] d\theta. \quad (3.10)$$

Ricordando che, per $|z|/r = 1$, $|b(z/r, \zeta_n/r)| = 1$, si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \left| b \left(\frac{re^{i\theta}}{r}, \frac{\zeta_n}{r} \right) \right| d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \log 1 d\theta = 0. \quad (3.11)$$

Allora, se dimostriamo che anche $\int_{-\pi}^{\pi} \log |1 - e^{i(\theta-\theta_n)}| d\theta = 0$, abbiamo la tesi.

Supponiamo $\theta_n = 0$ e consideriamo la funzione $\log(1 - z)/(iz)$ olomorfa in $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$. Sia $\delta \in (0, \pi)$. Consideriamo la curva $\Gamma_\delta = \{e^{it} \mid t \in [\delta, 2\pi - \delta]\}$ orientata in senso antiorario, e $\gamma_\delta = \{1 - r_\delta e^{it} \mid t \in [-\theta_\delta, \theta_\delta]\} \subset \mathbf{D}$ l'arco circolare avente centro nel punto 1, con punto iniziale $e^{-i\delta}$ e punto finale $e^{i\delta}$.

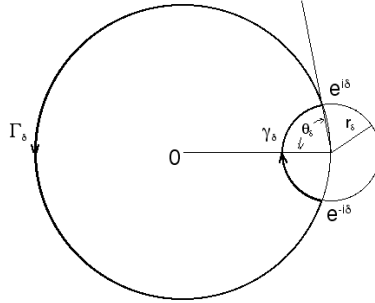


Figura 3.2: Le curve Γ_δ e γ_δ .

Per il teorema di Cauchy (cf. [8]),

$$\int_{\Gamma_\delta} \frac{\log(1 - z)}{iz} dz = - \int_{\gamma_\delta} \frac{\log(1 - z)}{iz} dz. \quad (3.12)$$

Osservando che $\log |1 - e^{i\theta}| = \Re[\log |1 - e^{i\theta}| + i \arg(1 - e^{i\theta})] = \Re[\log(1 - e^{i\theta})]$, si ha

$$\Re \left[\int_{\Gamma_\delta} \frac{\log(1 - z)}{iz} dz \right] = \Re \left[\int_\delta^{2\pi-\delta} \frac{\log(1 - e^{i\theta})}{ie^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta \right] = \int_\delta^{2\pi-\delta} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta. \quad (3.13)$$

Allora,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_\delta}^{2\pi-\delta} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta \right| &= \left| \Re \left[\int_{\gamma_\delta} \frac{\log(1-z)}{iz} dz \right] \right| \leq \left| \int_{\gamma_\delta} \frac{\log(1-z)}{iz} dz \right| \\ &\leq \sup_{z \in \gamma_\delta} \frac{|\log(1-z)|}{|z|} \int_{\gamma_\delta} dz \leq \frac{\sqrt{(\log |r_\delta|)^2 + \theta_\delta^2}}{1-r_\delta} \pi r_\delta. \end{aligned}$$

Osservando che r_δ tende a 0 per δ tendente a 0, si ha

$$\frac{\sqrt{(\log |r_\delta|)^2 + \theta_\delta^2}}{1-r_\delta} \pi r_\delta \sim |\log |r_\delta|| \pi r_\delta \rightarrow 0 \quad (3.14)$$

per $\delta \rightarrow 0$, e quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = \int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = 0. \quad (3.15)$$

Se $\theta_n \neq 0$, usando il fatto che $\log |1 - e^{i\theta}|$ è 2π -periodica, possiamo concludere che $\int_{-\pi}^{\pi} \log |1 - e^{i(\theta-\theta_n)}| d\theta = \int_{-\pi-\theta_n}^{\pi-\theta_n} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = 0$. \square

Proposizione 3.1.3 *Se B è un prodotto di Blaschke, allora*

$$\left| \lim_{r \rightarrow 1^-} B(re^{i\theta}) \right| = 1 \quad (3.16)$$

per quasi ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$.

Dimostrazione. Proviamo che, se f è una funzione olomorfa limitata in \mathbf{D} , vale la disuguaglianza

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta}) \right| d\theta. \quad (3.17)$$

Senza perdere di generalità, supponiamo $|f| \leq 1$; osserviamo che, per il corollario 2.4.3, esiste $\lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta})$ per quasi ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$. Inoltre, poiché il primo membro della formula di Poisson-Jensen è non decrescente in r , $(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta$ è non decrescente in r , allora esiste il limite per r tendente a 1^- .

Applichiamo il lemma di Fatou a $\log(1/|f|) \geq 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{1}{|\lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta})|} d\theta &= \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{1}{|\liminf_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta})|} d\theta \\ &\leq \liminf_{r \rightarrow 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{1}{|f(re^{i\theta})|} d\theta = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{1}{|f(re^{i\theta})|} d\theta, \end{aligned}$$

che implica

$$-\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta \geq -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \lim_{r \rightarrow 1^-} f(re^{i\theta}) \right| d\theta, \quad (3.18)$$

ovvero la disuguaglianza cercata.

Sia $B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} b(z, \zeta_n)$; ricordando che $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\zeta_n|) < \infty$, esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che $\zeta_n \neq 0$ per ogni $n \geq N$. Denotiamo $B_N(z) = \prod_{n=N}^{\infty} b(z, \zeta_n)$.

Siano $r \in (0, 1)$ e ζ_N, \dots, ζ_M gli zeri di B_N in $\{|z| \leq r\}$; dalla formula di Poisson-Jensen segue la disuguaglianza di Jensen

$$\log |B_N(0)| \leq \log |B_N(0)| + \sum_{n=N}^M \log \frac{r}{|\zeta_n|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B_N(re^{i\theta})| d\theta. \quad (3.19)$$

Poiché $\log |B/B_N|$ è una funzione continua in un insieme aperto contenente \mathbf{S} , per il teorema di convergenza dominata, vale l'uguaglianza

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \frac{B(re^{i\theta})}{B_N(re^{i\theta})} \right| d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{r \rightarrow 1^-} \log \left| \frac{B(re^{i\theta})}{B_N(re^{i\theta})} \right| d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \log 1 d\theta = 0, \quad (3.20)$$

da cui segue, applicando la disuguaglianza di Jensen a B_N ,

$$\log |B_N(0)| \leq \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B_N(re^{i\theta})| d\theta = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(re^{i\theta})| d\theta \quad (3.21)$$

per ogni $N \in \mathbb{N}$.

Utilizzando l'osservazione fatta all'inizio di questa dimostrazione,

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |B(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \lim_{r \rightarrow 1^-} B(re^{i\theta}) \right| d\theta \leq 0, \quad (3.22)$$

dove l'ultima disuguaglianza è giustificata dal fatto che $|B| \leq 1$; allora, facendo tendere N a ∞ , otteniamo

$$0 = \lim_{N \rightarrow \infty} \log |B_N(0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \lim_{r \rightarrow 1^-} B(re^{i\theta}) \right| d\theta \leq 0. \quad (3.23)$$

Poiché $\int_{-\pi}^{\pi} \log \left| \lim_{r \rightarrow 1^-} B(re^{i\theta}) \right| d\theta = 0$ e $\log \left| \lim_{r \rightarrow 1^-} B(re^{i\theta}) \right| \leq 0$, $\log \left| \lim_{r \rightarrow 1^-} B(re^{i\theta}) \right| = 0$ per quasi ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$, da cui segue che $\left| \lim_{r \rightarrow 1^-} B(re^{i\theta}) \right| = 1$ per quasi ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$. \square

3.2 Dimostrazione del teorema di Littlewood

Sia C_0 è una curva chiusa semplice passante per $z = 1 \in \mathbf{S}$, tale che $C_0 \setminus \{1\} \subset \mathbf{D}$ e non tangente a \mathbf{S} in $z = 1$. Supponiamo che $(r(s), \theta(s))$, per $s \in [-1, 1]$, sia una parametrizzazione di questa curva con $(r(0), \theta(0)) = (1, 0)$.

Allora, il fatto che la curva non sia tangente a \mathbf{S} in $z = 1$ vuol dire che esiste $\alpha > 0$ tale che $|\theta(s)|/[1 - r(s)] \leq \alpha$ per ogni $s \in [-1, 1]$. Infatti, siano

$$\begin{cases} x(s) = r(s) \cos \theta(s) \\ y(s) = r(s) \sin \theta(s) \end{cases} \quad (3.24)$$

le coordinate cartesiane della curva. Il vettore tangente in $z = 1$ è

$$\begin{cases} x'(0) = r'(0) \\ y'(0) = \theta'(0) \end{cases} \cdot \quad (3.25)$$

Quindi la curva è tangente a \mathbf{S} in $z = 1$ se e solo se $r'(0) = 0$ ovvero $|s/[1 - r(s)]| \rightarrow \infty$ che, poiché $\theta'(0) \neq 0$ se $r'(0) = 0$, è equivalente a

$$\frac{|\theta(s)|}{1 - r(s)} = \left| \frac{\theta(s)}{s} \right| \left| \frac{s}{1 - r(s)} \right| \rightarrow \infty \quad (3.26)$$

per $s \rightarrow 0$.

In questo senso, l'esistenza di una funzione armonica limitata non convergente quasi ovunque lungo curve tangenti alla circonferenza implica che le regioni Γ_α sono ottimali.

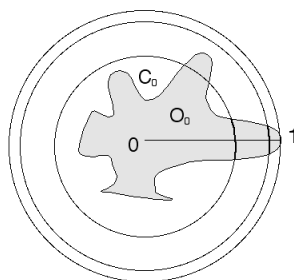
Di seguito presentiamo la dimostrazione del teorema di Littlewood utilizzando la costruzione proposta da Zygmund (1949) di una funzione armonica e limitata in \mathbf{D} che non converge in quasi ogni punto di \mathbf{S} lungo curve tangenti alla circonferenza.

Teorema 3.2.1 (Littlewood) *Sia C_0 una curva chiusa semplice passante per $z = 1 \in \mathbf{S}$ tale che $C_0 \setminus \{1\} \subset \mathbf{D}$ e tangente a \mathbf{S} in $z = 1$. Denotiamo con $C_\theta = e^{i\theta}C_0$ la curva ruotata della curva C_0 .*

Esiste una funzione olomorfa limitata in \mathbf{D} che non ammette limite in $e^{i\theta}$ lungo C_θ per quasi ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$.

Dimostrazione. Consideriamo il sottoinsieme di \mathbf{D} interno alla curva C_0 ; denotiamo questo insieme con O_0 .

Sia u una funzione armonica limitata in \mathbf{D} . Osserviamo che, poiché u è continua in \mathbf{D} , se u non ammette limite in 1 per $re^{i\theta} \in O_0$ allora u non ammette limite in 1 per $re^{i\theta} \in C_0$.



Sia $\{|z| = 1 - 1/n\}$ la circonferenza di raggio $1 - 1/n$. Denotiamo con l_n la lunghezza dell'arco contenuto in $\{|z| = 1 - 1/n\} \cap O_0$ che interseca il raggio di \mathbf{S} con vertice $z = 1$.

Denotiamo con m_n il numero intero $[2\pi/l_n] + 1$. Sia S_n il sottoinsieme formato da m_n punti di $\{|z| = 1 - 1/n\}$ equidistanti tra loro.

La lunghezza dell'arco tra due punti adiacenti di S_n è minore di l_n , in questo modo ogni C_θ contiene al suo interno un punto di S_n .

La distanza da ogni punto di S_n e \mathbf{S} è $1/n$. Allora, la somma delle distanza dei punti di S_n da \mathbf{S} è uguale a

$$\sigma_n = \frac{m_n}{n} = \frac{1}{n} \left(\left[\frac{2\pi}{l_n} \right] + 1 \right) \leq \frac{2\pi}{nl_n} + \frac{1}{n}. \quad (3.27)$$

L'ultimo termine tende a 0; infatti, $nl_n \sim 2\theta_n/(1 - r_n) \rightarrow \infty$ dove $r_n e^{i\theta_n} = \{|z| = 1 - 1/n, \Im[z] > 0\} \cap C_0$.

Sia $\{\sigma_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sottosuccessione di $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_{n_k} < \infty$. Allora, per la proposizione 3.1.1, il prodotto di Blaschke B con zeri nei punti $\bigcup_{k=1}^{\infty} S_{n_k}$ è una funzione olomorfa limitata in \mathbf{D} .

Per la proposizione 3.1.3, il limite radiale di B esiste quasi ovunque ed è uguale ad 1 in valore assoluto. D'altra parte, per ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$, O_θ contiene infiniti zeri di B che si accumulano a $e^{i\theta}$. Quindi, il limite di B in $e^{i\theta}$ lungo C_θ può esistere solo in un insieme di misura nulla. □

Nel prossimo capitolo miglioriamo sensibilmente il teorema di Littlewood proponendo la costruzione di Aikawa (1990) di una funzione armonica limitata in \mathbf{D} che non ammette limite in alcun punto di \mathbf{S} lungo curve tangenti alla circonferenza.

Capitolo 4

Una funzione armonica che non converge in alcun punto lungo curve tangenti alla circonferenza

Consideriamo una curva C_0 con punto finale 1, tangente alla circonferenza unitaria in 1 e tale che $C_0 \setminus \{1\} \subset \mathbf{D}$. Sia C_θ la ruotata di C_0 di un angolo θ .

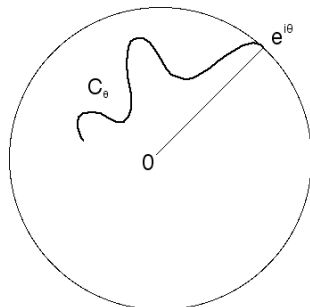


Figura 4.1: La curva C_θ .

Abbiamo dimostrato che esiste una funzione armonica limitata in \mathbf{D} che non ammette limite in $e^{i\theta}$ lungo C_θ , per quasi ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$.

In questo capitolo dimostreremo che possiamo sostituire il quasi ogni con ogni: esiste una funzione armonica limitata in \mathbf{D} che non ammette limite in $e^{i\theta}$ lungo C_θ , per ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$ (Aikawa, 1990, cf. [1]).

4.1 Stime per l'integrale di Poisson

In questo paragrafo stimiamo l'integrale di Poisson; queste stime serviranno per dimostrare il teorema di Aikawa.

Lemma 4.1.1 *Siano $\delta \in (0, 1)$ e $M > \pi/2$. Consideriamo $f \in L^\infty(\mathbf{S})$, con $\|f\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \leq 1$ e $f(\theta) = 0$ per quasi ogni $\theta \in (-M\delta, M\delta)$. Allora,*

$$|P[f](r)| \leq \frac{2}{M\pi} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{M} \right)^{-2}, \quad (4.1)$$

per ogni $r \in [1 - \delta, 1)$.

Dimostrazione. Supponiamo $(-M\delta, M\delta) \subset (-\pi, \pi)$ (altrimenti $P[f]$ sarebbe la funzione nulla e non ci sarebbe niente da dimostrare).

Per ipotesi, f è quasi ovunque nulla in $(-M\delta, M\delta)$; allora

$$P[f](r) = \frac{1}{2\pi} \int_{M\delta \leq |\theta| < \pi} \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2} f(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{M\delta \leq |\theta| < \pi} \frac{1-r^2}{|1-e^{i\theta}|^2} f(\theta) d\theta. \quad (4.2)$$

Sia $r \in [1 - \delta, 1)$. Utilizzando la maggiorazione $|\theta/\pi| \leq |\sin(\theta/2)|$ per $\theta \in (-\pi, \pi)$, si osserva che

$$\begin{aligned} |r - e^{i\theta}| &= |1 - e^{i\theta} - (1-r)| \geq |e^{i\theta} - 1| - (1-r) \\ &\geq 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right| - \frac{1}{M} |\theta| \\ &\geq \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{M} \right) |\theta| \end{aligned}$$

per ogni $M\delta \leq |\theta| < \pi$. Quindi, ricordando che $\|f\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \leq 1$ e che, per $r \in [1 - \delta, 1)$, $1 - r^2 \leq \delta(2 - \delta) \leq 2\delta$, si ha

$$\begin{aligned} |P[f](r)| &\leq \frac{1-r^2}{2\pi} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{M} \right)^{-2} \int_{M\delta \leq |\theta| < \pi} \frac{1}{|\theta|^2} |f(\theta)| d\theta \\ &\leq \frac{\delta}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{M} \right)^{-2} 2 \left[-\frac{1}{\theta} \right]_{M\delta}^{\pi} = \frac{\delta}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{M} \right)^{-2} 2 \left(\frac{\pi - M\delta}{\pi M\delta} \right) \\ &\leq \frac{\delta}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{M} \right)^{-2} \frac{2}{M\delta} = \frac{2}{M\pi} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{M} \right)^{-2} \end{aligned}$$

per $r \in [1 - \delta, 1)$. □

Il lemma seguente è un corollario del lemma 4.1.1.

Lemma 4.1.2 *Siano $\delta \in (0, 1)$ e $M_1 > \pi/2$ tale che*

$$\frac{2}{M_1\pi} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{M_1} \right)^{-2} \leq \frac{1}{4}. \quad (4.3)$$

Consideriamo $f \in L^\infty(\mathbf{S})$, con $\|f\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \leq 1$ e $f(\theta) = 1$ per quasi ogni $\theta \in (-M_1\delta, M_1\delta)$. Allora,

$$|P[f](r)| \geq \frac{1}{2}, \quad (4.4)$$

per ogni $r \in [1 - \delta, 1)$.

Dimostrazione. Supponiamo $(-M\delta, M\delta) \subset (-\pi, \pi)$ (altrimenti $P[f]$ sarebbe la funzione identicamente uguale a 1 e non ci sarebbe niente da dimostrare).

Osserviamo che $P[f](r) = 1 + 2P[(f-1)/2](r)$. Inoltre, $\|(f-1)/2\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \leq 1$ e $(f-1)/2 = 0$ quasi ovunque in $(-M_1\delta, M_1\delta)$. Allora, applicando il lemma precedente a $(f-1)/2$, otteniamo

$$P[f](r) \geq 1 - 2 \frac{2}{M_1\pi} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{M_1} \right)^{-2} \geq 1 - 2 \frac{1}{4} = \frac{1}{2}. \quad (4.5)$$

per $r \in [1 - \delta, 1)$. □

Lemma 4.1.3 *Siano $\delta \in (0, 1)$ e $\epsilon \in (0, 1/4)$. Consideriamo $f \in L^\infty(\mathbf{S})$, con $\|f\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \leq 1$ e*

$$\frac{1}{\delta} \int_{|\theta - \theta_0| < \delta} |f(\theta)| d\theta \leq \epsilon, \quad (4.6)$$

per ogni $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$. Allora,

$$\sup_{|z| \leq 1 - \delta} |P[f](z)| \leq M_2 \sqrt{\epsilon}, \quad (4.7)$$

dove $M_2 = 2/\pi + (2/\pi)(2/\pi - 1/2)^{-2}$.

Dimostrazione. Siano $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$ e $r = 1 - \delta$. Decomponiamo f in $f_1 + f_2$, dove $f_1 = f \chi_{(\theta_0 - \delta/\sqrt{\epsilon}, \theta_0 + \delta/\sqrt{\epsilon})}$.

Denotiamo con $[1/\sqrt{\epsilon}]$ la parte intera di $1/\sqrt{\epsilon}$. Osserviamo che l'intervallo $(\theta_0 - \delta/\sqrt{\epsilon}, \theta_0 + \delta/\sqrt{\epsilon})$, di lunghezza $2\delta/\sqrt{\epsilon}$, è ricoperto al più da $1 + [1/\sqrt{\epsilon}]$ intervalli del tipo $(\theta_k - \delta, \theta_k + \delta)$, di lunghezza 2δ .

Sia $I = \bigcup_{k=1}^{1+\lceil 1/\sqrt{\epsilon} \rceil} (\theta_k - \delta, \theta_k + \delta)$. Allora, utilizzando le richieste fatte su f e che, da $1/\sqrt{\epsilon} \geq 2$ segue $1 + \lceil 1/\sqrt{\epsilon} \rceil \leq 2/\sqrt{\epsilon}$, si ha

$$\begin{aligned} |P[f_1](re^{i\theta_0})| &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{(1-r)^2} \int_{|\theta-\theta_0| < \frac{\delta}{\sqrt{\epsilon}}} |f(\theta)| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2}{\delta} \int_I |f(\theta)| d\theta \\ &\leq \frac{1}{\pi\delta} \sum_{k=1}^{1+\lceil \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \rceil} \delta\epsilon = \frac{\epsilon}{\pi} \left(1 + \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right\rceil \right) \leq \frac{2}{\pi} \sqrt{\epsilon}. \end{aligned}$$

Per stimare $|P[f_2](re^{i\theta_0})|$, consideriamo la funzione $(f_2)_{(-\theta_0)}(\theta) = f_2(\theta + \theta_0)$.

Osserviamo che $\|(f_2)_{(-\theta_0)}\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \leq 1$ e che $(f_2)_{(-\theta_0)} = 0$ quasi ovunque in $(-\delta/\sqrt{\epsilon}, \delta/\sqrt{\epsilon})$. Quindi, applicando il primo lemma a $(f_2)_{(-\theta_0)}$ con $M = 1/\sqrt{\epsilon}$, otteniamo

$$|P[f_2](re^{i\theta_0})| = |P[(f_2)_{(-\theta_0)}](r)| \leq \frac{2\sqrt{\epsilon}}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} - \sqrt{\epsilon} \right)^{-2} \leq \frac{2\sqrt{\epsilon}}{\pi} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right)^{-2}, \quad (4.8)$$

dove abbiamo usato l'ipotesi $\epsilon \in (0, 1/4)$. Allora,

$$|P[f](re^{i\theta_0})| \leq |P[f_1](re^{i\theta_0})| + |P[f_2](re^{i\theta_0})| \leq M_2\sqrt{\epsilon} \quad (4.9)$$

per $r = 1 - \delta$. Dal principio del massimo applicato alla funzione $P[f]$ armonica in \mathbf{D} (cf. [8]),

$$\sup_{|z| \leq 1-\delta} |P[f](z)| = \sup_{|z|=1-\delta} |P[f](z)| \leq M_2\sqrt{\epsilon}, \quad (4.10)$$

ovvero la tesi. □

4.2 Dimostrazione del teorema di Aikawa

Consideriamo una curva C_0 passante per 1, tangente alla circonferenza unitaria e tale che $C_0 \setminus \{1\} \subset \mathbf{D}$. Sia C_θ la ruotata di C_0 di un angolo θ .

Sia γ_0 una sottocurva¹ di C_0 . Denotiamo con γ_θ la ruotata di γ_0 di un angolo θ .

Definizione 4.2.1 *Definiamo l'applicazione $T : \mathbf{D} \rightarrow \mathcal{P}([-\pi, \pi])$ ² in questo modo*

$$T(z) = \{\theta \in [-\pi, \pi] \mid z \in C_\theta\}. \quad (4.11)$$

¹Sia C una curva, γ è una sottocurva di C se γ è una curva e se il supporto di γ è contenuto nel supporto di C .

²Dove $\mathcal{P}([-\pi, \pi])$ indica l'insieme delle parti di $[-\pi, \pi]$.

Analogamente, definiamo l'applicazione $T_\gamma : \mathbf{D} \rightarrow \mathcal{P}([-\pi, \pi])$

$$T_\gamma(z) = \{\theta \in [-\pi, \pi) \mid z \in \gamma_\theta\}. \quad (4.12)$$

Se A è un sottoinsieme di \mathbf{D} , definiamo $T(A) = \bigcup_{z \in A} T_\gamma(z)$ e, allo stesso modo, definiamo $T_\gamma(A) = \bigcup_{z \in A} T_\gamma(z)$.

Denotiamo con γ_θ^* la proiezione radiale di γ_θ su \mathbf{S} . Osserviamo che γ_θ^* è un arco o un punto di \mathbf{S} ; questo segue dal fatto che la proiezione radiale è continua e che γ_θ è connessa.

Denotiamo con $l(\gamma_\theta^*)$ la lunghezza di γ_θ^* .

Lemma 4.2.2 *Sia γ_0 una sottocurva di C_0 con punto iniziale $ae^{i\alpha}$ e punto finale $be^{i\beta}$, dove $0 < a < b \leq 1$ e tale che, se $z \in \gamma_0$, allora $|z| \in [a, b]$. Fissiamo $\eta \in \mathbb{R}$ e denotiamo con $[ae^{i\eta}, be^{i\eta}]$ l'insieme $\{re^{i\eta} \in \mathbf{D} \mid r \in [a, b]\}$.*

Se $\gamma_0^ = \{e^{i\theta} \in \mathbf{S} \mid \theta \in [\theta_1, \theta_2]\}$, allora $T_\gamma([ae^{i\eta}, be^{i\eta}]) = \{\theta \in [-\pi, \pi) \mid e^{i\theta} \in e^{i[\eta-\theta_2, \eta-\theta_1]}\}$.*

Dimostrazione. Osserviamo che se $\pi + 2k\pi$, per ogni $k \in \mathbb{Z}$, non è un punto interno di $[\eta - \theta_2, \eta - \theta_1]$, allora $\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid e^{i\theta} \in e^{i[\eta-\theta_2, \eta-\theta_1]}\}$ è uguale ad un intervallo chiuso di $[-\pi, \pi)$ che è un opportuno traslato di $[\eta - \theta_2, \eta - \theta_1]$; invece, se esiste un $k \in \mathbb{Z}$ per cui $\pi + 2k\pi$ è un punto interno di $[\eta - \theta_2, \eta - \theta_1]$, allora $\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid e^{i\theta} \in e^{i[\eta-\theta_2, \eta-\theta_1]}\}$ è del tipo $[-\pi, \theta'_1] \cup [\theta'_2, \pi)$ ³.

Se $\gamma_0^* = \{e^{i\theta} \in \mathbf{S} \mid \theta \in [\theta_1, \theta_2]\}$ segue che, per ogni $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, esiste un $r_\theta \in [a, b]$ tale che $r_\theta e^{i\theta} \in \gamma_0$ o, equivalentemente, $r_\theta e^{i\eta} \in \gamma_{\eta-\theta}$. Sia $\theta' \in [-\pi, \pi)$ tale che $e^{i\theta'} = e^{i(\eta-\theta)}$; allora $\theta' \in T_\gamma([ae^{i\eta}, be^{i\eta}])$ che implica

$$\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid e^{i\theta} \in e^{i[\eta-\theta_2, \eta-\theta_1]}\} \subset T_\gamma([ae^{i\eta}, be^{i\eta}]). \quad (4.13)$$

Viceversa, se $\theta \in T_\gamma([ae^{i\eta}, be^{i\eta}])$, esiste un $r_\theta \in [a, b]$ tale che $r_\theta e^{i\eta} \in \gamma_\theta$ o, equivalentemente, $r_\theta e^{i(\eta-\theta)} \in \gamma_0$. Ma se $\gamma_0^* = \{e^{i\theta} \in \mathbf{S} \mid \theta \in [\theta_1, \theta_2]\}$, allora $r_\theta e^{i(\eta-\theta)} \in \gamma_0$ implica $e^{i(\eta-\theta)} \in e^{i[\theta_1, \theta_2]}$, che equivale a $e^{i\theta} \in e^{i[\eta-\theta_2, \eta-\theta_1]}$. Quindi

$$T_\gamma([ae^{i\eta}, be^{i\eta}]) \subset \{\theta \in [-\pi, \pi) \mid e^{i\theta} \in e^{i[\eta-\theta_2, \eta-\theta_1]}\}, \quad (4.14)$$

da cui segue la tesi. □

³Esplicitamente $\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid e^{i\theta} \in e^{i[\eta-\theta_2, \eta-\theta_1]}\} = \{\theta - 2[(\theta + \pi)/(2\pi)]\pi \mid \theta \in [\eta - \theta_2, \eta - \theta_1]\}$ dove $[(\theta + \pi)/(2\pi)]$ è il più piccolo intero relativo minore di $(\theta + \pi)/(2\pi)$. Impropriamente si può scrivere che $\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid e^{i\theta} \in e^{i[\eta-\theta_2, \eta-\theta_1]}\} = [\eta - \theta_2, \eta - \theta_1]$.

Se $z \in C_0$, denotando con $C_0(z)$ la sottocurva di C_0 con punto iniziale z e punto finale 1, allora

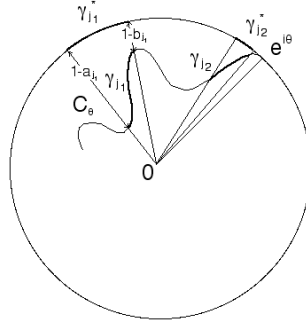
$$\frac{l(C_0(re^{i\theta})^*)}{1 - |re^{i\theta}|} = \frac{|\theta|}{1 - r} \rightarrow \infty \quad (4.15)$$

per $re^{i\theta} \in C_0$ tendente a 1; questo è conseguenza del fatto che C_0 è tangente a \mathbf{S} in 1.

Da questa osservazione segue:

Lemma 4.2.3 *Per ogni $M > 1$, esiste una successione di sottocurve γ_j di C_0 , con punto iniziale $a_j e^{i\alpha_j}$ e punto finale $b_j e^{i\beta_j}$, per ogni $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tale che:*

- (i) se $z \in \gamma_j$, allora $z \in [a_j, b_j]$;
- (ii) $l(\gamma_j^*) > j(1 - a_j)$, per ogni $j \geq 0$;
- (iii) $1 - a_j < \frac{1 - b_{j-1}}{M}$, per ogni $j > 0$.



Dimostrazione. Definiamo le γ_j per induzione su j . Supponiamo di aver definito $\gamma_0, \dots, \gamma_{j-1}$ con le proprietà dell'enunciato. Esiste un $a_j > 0$ tale che

$$0 < 1 - a_j < \frac{1 - b_{j-1}}{M}, \quad l(\gamma_j^*) > 2j(1 - a_j) \quad (4.16)$$

dove γ_j^* è la sottocurva di C_0 con punto finale 1 e il punto iniziale $a_j e^{i\alpha_j}$, che è il punto in cui C_0 interseca $\{|z| = a_j\}$ per l'ultima volta.

Infatti, questa è una conseguenza dell'osservazione precedente al lemma: per ogni $K \geq 0$, esiste un $\delta > 0$ tale che, per ogni $re^{i\theta} \in C_0$ con $(r, \theta) \in (1 - \delta, 1) \times (-\delta, \delta)$, si ha $l(C_0(re^{i\theta})^*) / (1 - r) > K$.

Nel nostro caso, fissiamo $K = 2j$; esiste $a_j > 0$, con $0 < 1 - a_j < \min\{(1 - b_{j-1})/M, \delta\}$ tale che, per ogni $\alpha \in \{\theta \in (-\delta, \delta) \mid a_j e^{i\theta} \in C_0\}$ ⁴,

$$\frac{l(C_0(a_j e^{i\alpha})^*)}{1 - a_j} > 2j. \quad (4.17)$$

⁴Poiché C_0 passa per il punto 1, a_j può essere scelto in modo tale che $\{\theta \in (-\delta, \delta) \mid a_j e^{i\theta} \in C_0\} \neq \emptyset$.

Poiché C_0 ha un'orientazione, possiamo definire α_j come l'elemento di $\{\theta \in (-\delta, \delta) \mid a_j e^{i\theta} \in C_0\}$ tale che $a_j e^{i\alpha_j}$ è il punto in cui C_0 interseca $\{|z| = a_j\}$ per l'ultima volta; allora, $\gamma'_j = C_0(a_j e^{i\alpha_j})$.

Sia γ''_j una sottocurva di γ'_j con punto iniziale $a_j e^{i\alpha_j}$ e punto finale vicino a 1, tale che $l(\gamma''_j) > l(\gamma'_j)/2$. Sia $b_j \in (\sup_{z \in \gamma''_j} |z|, 1)$; denotiamo con γ_j la sottocurva di C_0 con punto iniziale $a_j e^{i\alpha_j}$ e punto finale $b_j e^{i\beta_j}$, che è il punto in cui C_0 interseca $\{|z| = b_j\}$ per la prima volta. Allora, $1 - b_j < 1 - a_j$ e $|z| \in [a_j, b_j]$, per $z \in \gamma_j$. Inoltre, γ''_j è una sottocurva di γ_j , quindi $l(\gamma_j) > l(\gamma''_j) > l(\gamma'_j)/2 > j(1 - a_j)$. Quindi valgono (i)-(iii).

Per definire γ_0 , usiamo lo stesso procedimento partendo da un qualunque $b_{-1} \in (0, 1)$. \square

Sfruttando questi lemmi possiamo mostrare il teorema di Aikawa.

Teorema 4.2.4 *Sia C_0 una curva con punto finale $1 \in \mathbf{S}$, tangente a \mathbf{S} in 1 e tale che $C_0 \setminus \{1\} \subset \mathbf{D}$. Denotiamo con $C_\theta = e^{i\theta} C_0$ la curva ruotata della curva C_0 .*

Esiste una funzione $f \in L^\infty(\mathbf{S})$ per la quale non esiste

$$\lim_{|z| \rightarrow 1, z \in C_\theta} P[f](z) \quad (4.18)$$

per ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$.

Dimostrazione. Applichiamo il lemma precedente con $M = M_1$, dove M_1 è la costante che appare nel lemma 4.1.2. Quindi, siano γ_j , a_j e b_j come nell'enunciato del lemma precedente.

Passo 1. Vogliamo costruire una successione di insiemi $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset [-\pi, \pi)$ tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} |E_i| < \infty \quad (4.19)$$

e

$$\sup_{|z| \leq b_{i-1}} P[\chi_{E_i}](z) \leq \frac{1}{9^i} \quad (4.20)$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Fissiamo $j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Applichiamo il lemma 4.2.2 a γ_j e a $[a_j e^{i\eta}, b_j e^{i\eta}]$. Allora

$$T_{\gamma_j}([a_j e^{i\eta}, b_j e^{i\eta}]) = \{\theta \in [-\pi, \pi) \mid e^{i\theta} \in e^{i[\eta - \theta_2^j, \eta - \theta_1^j]}\} \quad (4.21)$$

è un insieme di misura $l(\gamma_j)$.

Siano $N = 1 + [2\pi/l(\gamma_j^*)]$ e $\eta_k = 2\pi k/N$ per $k \in \{1, \dots, N\}$. Da $|\eta_k - \eta_{k+1}| = 2\pi/N \leq l(\gamma_j^*)$, segue che

$$[-\pi, \pi) = \bigcup_{k=1}^N T_{\gamma_j}([a_j e^{i\eta_k}, b_j e^{i\eta_k}]). \quad (4.22)$$

Infatti, $[-\pi, \pi) \supset \bigcup_{k=1}^N T_{\gamma_j}([a_j e^{i\eta_k}, b_j e^{i\eta_k}]) = \bigcup_{k=1}^N \{\theta \in [-\pi, \pi) \mid e^{i\theta} \in e^{i[\eta_k - \theta_2^j, \eta_k - \theta_1^j]}\} = \{\theta \in [-\pi, \pi) \mid e^{i\theta} \in e^{i\bigcup_{k=1}^N [\eta_k - \theta_2^j, \eta_k - \theta_1^j]}\} \supset \{\theta \in [-\pi, \pi) \mid e^{i\theta} \in e^{i[\theta_j^j, \theta_j^j + 2\pi]}\} \supset [-\pi, \pi)$.

Consideriamo gli insiemi

$$\begin{aligned} R_j &= \bigcup_{k=1}^N [a_j e^{i\eta_k}, b_j e^{i\eta_k}], \\ I_k^j &= [\eta_k - M_1(1 - a_j), \eta_k + M_1(1 - a_j)] \quad , k \in \{1, \dots, N\}, \\ E_j &= \bigcup_{k=1}^N I_k^j; \end{aligned} \quad (4.23)$$

si ha che $[-\pi, \pi) = T_{\gamma_j}(R_j) = T(R_j)$ e, poiché $2\pi/l(\gamma_j^*) \geq 1$ implica $N = 1 + [2\pi/l(\gamma_j^*)] \leq 4\pi/l(\gamma_j^*)$, per gli insieme E_j vale la disuguaglianza

$$|E_j| = 2M_1(1 - a_j)N \leq 2M_1(1 - a_j) \frac{4\pi}{l(\gamma_j^*)}. \quad (4.24)$$

Allora, per il punto (ii) del lemma precedente, $|E_j| \rightarrow 0$. Quindi, esiste una sottosuccessione di $\{\gamma_j\}_{j \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, che indicheremo con $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} |E_i| < \infty. \quad (4.25)$$

Per provare la disuguaglianza

$$\sup_{|z| \leq b_{i-1}} P[\chi_{E_i}](z) \leq \frac{1}{g_i}, \quad (4.26)$$

utilizziamo il lemma 4.1.3; verifichiamo le ipotesi richieste dal lemma.

Un intervallo in $[-\pi, \pi)$ di lunghezza $2(1 - b_{i-1})$ contiene al più ν punti η_k , dove

$$\nu \leq 1 + 2(1 - b_{i-1}) \frac{N}{2\pi}. \quad (4.27)$$

Poiché $l(\gamma_i^*)$ tende a 0, passando al più ad una sottosuccessione di $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $N = 1 + [2\pi/l(\gamma_i^*)] \geq \pi/(1 - b_{i-1})$, per ogni $i \in \mathbb{N}$. Allora,

$$1 + \frac{N(1 - b_{i-1})}{\pi} \leq \frac{2}{\pi}(1 - b_{i-1}) \left(1 + \frac{2\pi}{l(\gamma_i^*)}\right) \leq 8 \frac{1 - b_{i-1}}{l(\gamma_i^*)}. \quad (4.28)$$

La lunghezza degli I_k^i è $2M_1(1 - a_i)$, che è minore di $2(1 - b_{i-1})$ per il punto (iii) del lemma precedente. Quindi, se I è un intervallo in $[-\pi, \pi)$ di lunghezza $2(1 - b_{i-1})$, il numero di I_k^i che intersecano I è minore di $8(1 - b_{i-1})/l(\gamma_i^*)$. Allora,

$$\frac{1}{1 - b_{i-1}} \int_{|\theta - \theta_0| < 1 - b_{i-1}} \chi_{E_i}(\theta) d\theta \leq \frac{1}{1 - b_{i-1}} 2M_1(1 - a_i) 8 \frac{1 - b_{i-1}}{l(\gamma_i^*)} \leq 16M_1 \frac{1 - a_i}{l(\gamma_i^*)}, \quad (4.29)$$

per ogni $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$.

Poiché $16M_1(1 - a_i)/l(\gamma_i^*)$ tende a 0 per il punto (ii) del lemma precedente, applicando il lemma 4.1.3 con $f = \chi_{E_i}$ e $\delta = 1 - b_{i-1}$, si ha

$$\sup_{|z| \leq b_{i-1}} P[\chi_{E_i}](z) \leq M_2 \sqrt{16M_1 \frac{1 - a_i}{l(\gamma_i^*)}} \quad (4.30)$$

per i tale che $16M_1(1 - a_i)/l(\gamma_i^*) < 1/4$.

Quindi, esiste una sottosuccessione di $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, che indicheremo ancora con $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, tale che

$$\sup_{|z| \leq b_{i-1}} P[\chi_{E_i}](z) \leq \frac{1}{9^i} \quad (4.31)$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Passo 2. Utilizzando $\{E_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, costruiamo due successioni di insiemi $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}, \{G_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset [-\pi, \pi)$ induttivamente su i .

Siano $F_1 = \emptyset$ e $G_1 = E_1$; definiamo, per $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} F_{2i} &= F_{2i-1} \cup E_{2i}, & G_{2i} &= G_{2i-1} \setminus E_{2i}, \\ F_{2i+1} &= F_{2i} \setminus E_{2i+1}, & G_{2i+1} &= G_{2i} \cup E_{2i+1}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Per esempio,

$$\begin{aligned} F_2 &= E_2, & G_2 &= E_1 \setminus E_2, \\ F_3 &= E_2 \setminus E_3, & G_3 &= (E_1 \setminus E_2) \cup E_3, \\ F_4 &= (E_2 \setminus E_3) \cup E_4, & G_4 &= [(E_1 \setminus E_2) \cup E_3] \setminus E_4, \\ & \vdots & & \end{aligned} \quad (4.33)$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} F_i \cap G_i &= \emptyset, \\ F_i \cup G_i &= \bigcup_{k=1}^i E_k, \\ E_i &\subset \begin{cases} F_i & , i \text{ pari} \\ G_i & , i \text{ dispari} \end{cases} . \end{aligned} \quad (4.34)$$

Per $i \in \mathbb{N}$, definiamo la funzione

$$f_i(\theta) = \begin{cases} 1 & , \theta \in F_i \\ -1 & , \theta \in G_i \\ 0 & , [-\pi, \pi) \setminus \bigcup_{k=1}^i E_k \end{cases} . \quad (4.35)$$

Allora, poiché $f_i = (-1)^i$ su E_i , per $\theta \notin \limsup_{i \rightarrow \infty} E_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ si ha

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_i(\theta) = f(\theta) = \begin{cases} 1 & , \theta \in E_{2n} \setminus \bigcup_{k=2n+1}^{\infty} E_k \\ -1 & , \theta \in E_{2n-1} \setminus \bigcup_{k=2n}^{\infty} E_k \\ 0 & , \theta \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \end{cases} . \quad (4.36)$$

Infatti, se $\theta \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$, allora $\theta \in [-\pi, \pi) \setminus \bigcup_{k=1}^i E_k$ e $f_i(\theta) = 0$, per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\theta \in E_{2n} \setminus \bigcup_{k=2n+1}^{\infty} E_k$, allora $\theta \in E_{2n} \subset F_{2n} \subset F_{2n+1} = F_{2n} \setminus E_{2n+1} \subset F_{2n+2} \subset \dots$ e quindi $f_i(\theta) = 1$, per ogni $i \geq 2n$; infine, se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $\theta \in E_{2n-1} \setminus \bigcup_{k=2n}^{\infty} E_k$, allora $\theta \in E_{2n-1} \subset G_{2n-1} \subset G_{2n} = G_{2n-1} \setminus E_{2n} \subset G_{2n+1} \subset \dots$ e quindi $f_i(\theta) = -1$, per ogni $i \geq 2n - 1$.

Da $\sum_{i=1}^{\infty} |E_i| < \infty$, segue che $|\limsup_{i \rightarrow \infty} E_i| = 0$ ⁵. Allora f_i converge a f quasi ovunque su $[-\pi, \pi)$.

Passo 3. Dimostriamo il teorema.

Osserviamo che $f, f_i \in L^{\infty}(\mathbf{S})$ e che $|P[f]|, |P[f_i]| \leq 1$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Nel *Passo 2* abbiamo visto che, in $E_i = \bigcup_{k=1}^N [\eta_k - M_1(1 - a_i), \eta_k + M_1(1 - a_i)]$, $f_i = 1$ se i è pari, e $-f_i = 1$ se i è dispari. Allora, applicando il lemma 4.1.2 a $(-1)^i f_i$ con $\delta = 1 - a_i$, abbiamo che

$$P[f_i](z) \begin{cases} \geq \frac{1}{2} & , i \text{ pari} \\ \leq -\frac{1}{2} & , i \text{ dispari} \end{cases} \quad (4.37)$$

per $z \in R_i = \bigcup_{k=1}^N [a_i e^{\eta_k}, b_i e^{\eta_k}]$.

Inoltre, per come sono definite le f_i , possiamo osservare che $|f_i - f_{i+1}| \leq 2\chi_{E_{i+1}}$ in $[-\pi, \pi)$.

Infatti, per ogni $i \in \mathbb{N}$, $|f_i - f_{i+1}| \leq 2$, mentre per provare che se $\theta \notin E_{i+1}$, allora $|f_i - f_{i+1}| = 0$, consideriamo tutti i casi possibili.

Se $\theta \in [-\pi, \pi) \setminus \bigcup_{k=1}^i E_k$, allora $\theta \in [-\pi, \pi) \setminus \bigcup_{k=1}^{i+1} E_k$, e quindi $f_i = f_{i+1} = 0$.

Sia i dispari: se $\theta \in F_i$, allora $\theta \in F_{i+1} = F_i \cup E_{i+1}$, e quindi $f_i = f_{i+1} = 1$; se $\theta \in G_i$, allora $\theta \in G_{i+1} = G_i \setminus E_{i+1}$, e quindi $f_i = f_{i+1} = -1$.

Analogamente, sia i pari: se $\theta \in F_i$, allora $\theta \in F_{i+1} = F_i \setminus E_{i+1}$, e quindi $f_i = f_{i+1} = 1$; se $\theta \in G_i$, allora $\theta \in G_{i+1} = G_i \cup E_{i+1}$, e quindi $f_i = f_{i+1} = -1$.

Otteniamo, per ogni $i \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{|z| \leq b_i} |P[f_i](z) - P[f_{i+1}](z)| \leq 2 \sup_{|z| \leq b_i} P[\chi_{E_{i+1}}](z) \leq \frac{2}{9^{i+1}}, \quad (4.38)$$

che implica

$$\sum_{k=i}^{\infty} \sup_{|z| \leq b_i} |P[f_k](z) - P[f_{k+1}](z)| \leq \sum_{k=i}^{\infty} \frac{2}{9^{k+1}} \leq \frac{1}{4}. \quad (4.39)$$

⁵Infatti, $|\limsup_{i \rightarrow \infty} E_i| = |\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k| \leq |\bigcup_{k=n}^{\infty} E_k| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |E_k|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$; da $\sum_{i=1}^{\infty} |E_i| < \infty$ segue che $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} |E_k| = 0$ e quindi $|\limsup_{i \rightarrow \infty} E_i| = 0$.

Osserviamo che, per il teorema di convergenza dominata, $P[f_i]$ converge a $P[f]$ uniformemente sui sottoinsiemi compatti di \mathbf{D} .

Infatti, sia $r_0 \in (0, 1)$, dalla maggiorazione $\sup_{re^{i\theta} \in \{|z| \leq r_0\}} \mathbf{P}_r(\theta - t) |f_i(t) - f(t)| \leq 2(1+r_0)/(1-r_0) \in L^1(\mathbf{S})$, per ogni $i \in \mathbb{N}$ e per quasi ogni $t \in [-\pi, \pi)$, segue che

$$\sup_{re^{i\theta} \in \{|z| \leq r_0\}} |P[f_i](re^{i\theta}) - P[f](re^{i\theta})| \leq (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \sup_{re^{i\theta} \in \{|z| \leq r_0\}} \mathbf{P}_r(\theta - t) |f_i(t) - f(t)| \quad (4.40)$$

che tende a 0, per i tendente a ∞ , perché f_i tende quasi ovunque a f .

Da questo segue che, per $z \in R_i$,

$$P[f](z) = P[f_i](z) + \sum_{k=1}^{\infty} (P[f_{k+1}](z) - P[f_k](z)) \begin{cases} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} & , i \text{ pari} \\ \leq -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} & , i \text{ dispari} \end{cases} \quad (4.41)$$

Poiché $T(R_i) = [-\pi, \pi)$, per ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$ esiste un $\bar{z} \in R_i$ tale che $\bar{z} \in C_\theta$, quindi

$$\sup_{a_i \leq |z| \leq b_i, z \in C_\theta} P[f](z) \geq \frac{1}{4} \quad \text{per } i \text{ pari}, \quad (4.42)$$

$$\inf_{a_i \leq |z| \leq b_i, z \in C_\theta} P[f](z) \leq -\frac{1}{4} \quad \text{per } i \text{ dispari}. \quad (4.43)$$

Allora,

$$\liminf_{|z| \rightarrow 1, z \in C_\theta} P[f](z) \leq -\frac{1}{4} < \frac{1}{4} \leq \limsup_{|z| \rightarrow 1, z \in C_\theta} P[f](z), \quad (4.44)$$

per ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$, ovvero non esiste $\lim_{|z| \rightarrow 1, z \in C_\theta} P[f](z)$, per ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$. \square

Capitolo 5

Convergenza tangenziale

In questo capitolo vogliamo studiare la convergenza tangenziale dell'integrale di Poisson di una funzione $f \in L^p(\mathbf{S})$ con $p \in [1, \infty)$ (cf. [7]).

Fissiamo una regione $\Omega(0) \subset \mathbf{D}$ la cui frontiera è una curva regolare a tratti con $\partial\Omega(0) \cap \mathbf{S} = 1$ e tangente alla circonferenza unitaria in 1. Indichiamo con $\Omega(\theta) = e^{i\theta}\Omega(0)$ la regione ottenuta ruotando la regione $\Omega(0)$ di un angolo θ ; data una funzione u definita su \mathbf{D} , diciamo che u è Ω -convergente in $e^{i\theta}$ se esiste, finito, il limite di $u(z)$ per $z \in \Omega(\theta)$ tendente a $e^{i\theta}$.

Abbiamo dimostrato nel capitolo 4 che, fissata una regione $\Omega(0)$ tangente ad \mathbf{S} in 1, esiste una funzione $f \in L^\infty(\mathbf{S})$ per la quale $P[f]$ non ammette Ω -limite in ogni punto di \mathbf{S} ¹.

Viceversa, fissiamo una funzione $f \in L^p(\mathbf{S})$ con $p \in [1, \infty)$. In questo capitolo mostriamo che è possibile trovare una famiglia di regioni $\Omega_\alpha(0)$, dipendenti da p , $\alpha \geq 0$ e f , tangenti a \mathbf{S} in 1, per le quali l'integrale di Poisson di f ammette Ω -convergenza in quasi ogni punto di \mathbf{S} (A. Nagel, W. Rudin, J. H. Shapiro, 1982); diremo che l'integrale di Poisson di f converge *tangenzialmente* in quasi ogni punto di \mathbf{S} .

Per dimostrare questo risultato procediamo per passi.

Fissato un nucleo K (una particolare funzione di $L^1(\mathbf{S})$) e un indice $p \geq 1$, consideriamo lo spazio di tipo-Dirichlet associato, ossia lo spazio degli integrali di Poisson delle convoluzioni di funzioni di $L^p(\mathbf{S})$ con K .

Per ogni $\alpha \geq 0$, definiamo la regione d'approccio $\Omega_{K,\alpha}^p(0)$, dipendente da K , α e p , e la funzione massimale associata a questa regione e alle sue ruotate; nel paragrafo 5.1, vediamo che queste regioni $\Omega_{K,\alpha}^p(0)$ sono tangenti alla circonferenza unitaria in 1 e che il grado di

¹Se $\Omega(\theta)$ è tangente ad \mathbf{S} , esiste una curva C_θ tangente ad \mathbf{S} contenuta in $\Omega(\theta)$; quindi si applica il teorema 4.2.4.

tangenza con la circonferenza aumenta al crescere di p ed è indipendente da α (lo stesso accade per ogni regione $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta) = e^{i\theta}\Omega_{K,\alpha}^p(0)$ ruotata della regione $\Omega_{K,\alpha}^p(0)$).

Confrontando la funzione massimale associata alle regioni $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta)$ con la funzione massimale di Hardy-Littlewood su \mathbf{S} (par. 5.2), nel paragrafo 5.3 dimostriamo che l'operatore massimale associato alle regioni $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta)$ è di tipo debole e da questo fatto, utilizzando una tecnica classica (principio di Banach, par. 5.4), nel paragrafo 5.5 dimostriamo che ogni funzione appartenente ad uno spazio di tipo-Dirichlet ammette $\Omega_{K,\alpha}^p$ -convergenza in quasi ogni punto di \mathbf{S} , per ogni $\alpha \geq 0$.

Nei paragrafi 5.6 e 5.7, sfruttando il principio di continuità per operatori positivi (S. Sawyer, 1966), mostriamo che le regioni $\Omega_{K,\alpha}^p(0)$ sono ottimali; ciò significa che, se $\Omega'_\alpha(0)$ sono regioni d'approccio con grado di tangenza maggiore di quello delle $\Omega_{K,\alpha}^p(0)$, esiste una funzione appartenente allo spazio di tipo-Dirichlet che non è Ω'_α -convergente in quasi ogni punto di \mathbf{S} , per alcun α . Quindi, come la convergenza non-tangenziale quasi ovunque è ottimale per gli integrali di Poisson di funzioni di $L^1(\mathbf{S})$, la $\Omega_{K,\alpha}^p$ -convergenza quasi ovunque, per ogni $\alpha \geq 0$, è ottimale negli spazi tipo-Dirichlet.

Nel paragrafo 5.8, forniamo una scrittura esplicita di alcune regioni d'approccio utilizzando un particolare nucleo (nucleo di Bessel) in modo da rendere ancora più evidente che queste regioni sono tangenti alla circonferenza unitaria (app. A).

Infine, nel paragrafo 5.9, applicando un teorema astratto di fattorizzazione per algebre di Banach (E. Hewitt, 1964) che riportiamo nell'appendice B, proviamo che l'integrale di Poisson di f converge tangenzialmente in quasi ogni punto di \mathbf{S} .

5.1 Spazi tipo-Dirichlet e regioni d'approccio $\Omega_{K,\alpha}^p$

In questo paragrafo definiamo lo spazio tipo-Dirichlet e le regioni d'approccio associate ad nucleo in $L^1(\mathbf{S})$; dimostriamo che queste regioni sono tangenti alla circonferenza unitaria.

Definizione 5.1.1 *Definiamo nucleo una funzione $K \in L^1(\mathbf{S})$ con $\|K\|_{L^1(\mathbf{S})} = 1$, non negativa in \mathbb{R} , pari in \mathbb{R} e non crescente in $[0, \pi)$.*

Il grafico di un nucleo K in $[-\pi, \pi)$ ha la forma di una campana con vertice sull'asse delle ordinate.

Sia $p \in [1, \infty)$, denotiamo con $L_K^p(\mathbf{S})$ lo spazio $\{K * F \mid F \in L^p(\mathbf{S})\}$ e se $f \in L_K^p(\mathbf{S})$ denotiamo con $\|f\|_{K,p} = \inf\{\|f\|_p \mid f = K * F\}$.

Osserviamo che $\|f\|_{K,p}$ è una norma su $L_K^p(\mathbf{S})$ che rende $L_K^p(\mathbf{S})$ uno spazio completo e che $L_K^p(\mathbf{S})$, con questa norma, è isometricamente isomorfo a $L^p(\mathbf{S})/N$, dove $N = \{F \in L^p(\mathbf{S}) \mid K * F = 0\}$.

Poiché $K \in L^1(\mathbf{S})$ e $F \in L^p(\mathbf{S})$, allora $K * F \in L^p(\mathbf{S})$ e quindi $L_K^p(\mathbf{S}) \subset L^p(\mathbf{S})$.

Definizione 5.1.2 Sia $K_r(\theta) = \mathbf{P}_r * K(\theta)$ per $re^{i\theta}$ l'estensione armonica del nucleo K nel disco, dove \mathbf{P}_r è il nucleo di Poisson.

Sia $p \in [1, \infty)$. Lo spazio tipo-Dirichlet associato al nucleo K e all'indice p è l'insieme

$$h_K^p(\mathbf{D}) = \{P[f] \mid f \in L_K^p(\mathbf{S})\}. \quad (5.1)$$

Osserviamo che se $u \in h_K^p(\mathbf{D})$, allora, esistono $f \in L_K^p(\mathbf{S})$ e $F \in L^p(\mathbf{S})$ tali che

$$u(re^{i\theta}) = P[f](re^{i\theta}) = \mathbf{P}_r * f(\theta) = \mathbf{P}_r * K * F(\theta) = K_r * F(\theta), \quad (5.2)$$

per ogni $re^{i\theta} \in \mathbf{D}$. Da $f \in L^p(\mathbf{S})$ segue che u è armonica in \mathbf{D} , cioè $h_K^p(\mathbf{D})$ è un insieme di funzioni armoniche in \mathbf{D} .

Gli spazi $h_K^p(\mathbf{D})$ di tipo-Dirichlet sono gli spazi che stavamo cercando. Ad ognuno di questi spazi vengono associate le regioni d'approccio

$$\Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0) = \{re^{i\theta} \in \mathbf{D} \mid |\theta - \theta_0|^{\frac{1}{p}} \|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})} < \alpha\}, \quad (5.3)$$

per ogni $\alpha > 0$, dove $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$ e $q \in (1, \infty]$ è l'esponente coniugato a p ($q = \infty$, se p vale 1).

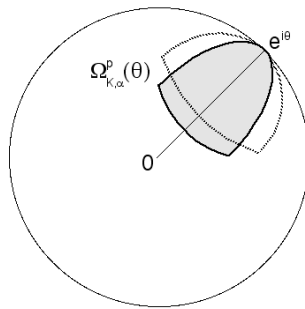


Figura 5.1: La regione $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta)$.

Osserviamo che per $r \in [0, 1)$ fissato, i $\theta \in [-\pi, \pi)$ tali che $re^{i\theta} \in \Omega_{K,\alpha}^p(0)$ sono un intervallo aperto centrato in 0 e di semiampiezza $\alpha^p d(r)$, dove $d(r) = 1/\|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})}^p$.

Proposizione 5.1.3 Sia $p \in [1, \infty)$, $q \in (1, \infty]$ l'esponente coniugato a p e $K \notin L^q(\mathbf{S})$ un nucleo. Allora

- (i) d è decrescente in $[0, 1)$;
- (ii) $d(r) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 1^-$;
- (iii) $\frac{d(r)}{1-r} \rightarrow \infty$ per $r \rightarrow 1^-$;
- (iv) esistono due costanti γ_1, γ_2 tali che

$$\begin{aligned} \frac{d(r)}{1-r} &> \gamma_1 > 0, \quad \forall r \in [0, 1), \\ \frac{d(r)}{1-r} &< \gamma_2 < \infty, \quad \forall r \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Osserviamo che, per $0 \leq r_1 \leq r_2 < 1$, $\mathbf{P}_{r_1} = \mathbf{P}_{\frac{r_1}{r_2}} * \mathbf{P}_{r_2}$; infatti, $r_1/r_2 \leq 1$ e $(\mathbf{P}_{\frac{r_1}{r_2}} * \mathbf{P}_{r_2})^\wedge(n) = \hat{\mathbf{P}}_{\frac{r_1}{r_2}}(n)\hat{\mathbf{P}}_{r_2}(n) = (r_1/r_2)^{|n|}r_2^{|n|} = r_1^{|n|} = \hat{\mathbf{P}}_{r_1}(n)$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$ (cf. [6]).

Quindi,

$$\|K_{r_1}\|_{L^q(\mathbf{S})} = \|\mathbf{P}_{r_1} * K\|_{L^q(\mathbf{S})} \leq \|\mathbf{P}_{r_2} * K\|_{L^q(\mathbf{S})} = \|K_{r_2}\|_{L^q(\mathbf{S})}, \quad (5.4)$$

che implica $d(r_1) \geq d(r_2)$, ovvero (i).

Dimostriamo (ii). Osserviamo che $\{\|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})}\}_{r \in [0,1)}$ ammette limite $\ell \in (0, \infty]$ per $r \rightarrow 1^-$.

Infatti, questa successione è monotona crescente per il punto precedente.

Se, per assurdo, $\lim_{r \rightarrow 1^-} \|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})} = \ell < \infty$, allora $\|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})} \leq \ell$ per ogni $r \in [0, 1)$. Quindi, per il corollario 2.4.2, si avrebbe che $K_r(\theta) \rightarrow K(\theta)$ per quasi ogni θ in $[-\pi, \pi)$ e $K \in L^q(\mathbf{S})$, contro le nostre ipotesi.

Dimostriamo (iii). Calcoliamo il limite di

$$\left[\frac{1-r}{d(r)}\right]^{\frac{1}{p}} = (1-r)^{\frac{1}{p}} \|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})} = (1-r)^{\frac{1}{p}} \|K * \mathbf{P}_r\|_{L^q(\mathbf{S})}. \quad (5.5)$$

Ricordando che $L^\infty(\mathbf{S})$ è denso in $L^1(\mathbf{S})$ (cf. [8]), per ogni $\epsilon > 0$, possiamo scrivere $K = H + G$, con $\|H\|_{L^1(\mathbf{S})} < \epsilon$ e $G \in L^\infty(\mathbf{S})$; inoltre, $\|G * \mathbf{P}_r\|_{L^q(\mathbf{S})} \leq \|G\|_{L^q(\mathbf{S})} \leq \|G\|_{L^\infty(\mathbf{S})}$. Allora, la successione $\{\|G * \mathbf{P}_r\|_{L^q(\mathbf{S})}\}_{r \in [0,1)}$ è limitata.

Sia $p = 1$, allora

$$\begin{aligned} \|K * \mathbf{P}_r\|_{L^\infty(\mathbf{S})} &\leq \|H * \mathbf{P}_r\|_{L^\infty(\mathbf{S})} + \|G * \mathbf{P}_r\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \\ &\leq \epsilon \|\mathbf{P}_r\|_{L^\infty(\mathbf{S})} + c \\ &\leq \epsilon \frac{1+r}{1-r} + c \end{aligned}$$

dove $c > 0$. Quindi, per ogni $\epsilon > 0$, $(1-r) \|K * \mathbf{P}_r\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \leq 2\epsilon + c(1-r)$ e, facendo il limite su r , si ha che $\lim_{r \rightarrow 1^-} (1-r) \|K * \mathbf{P}_r\|_{L^q(\mathbf{S})} \leq 2\epsilon$, che implica la tesi per $p = 1$.

Sia $p \in (1, \infty)$:

$$\begin{aligned} \|K * \mathbf{P}_r\|_{L^q(\mathbf{S})} &\leq \|H * \mathbf{P}_r\|_{L^q(\mathbf{S})} + \|G * \mathbf{P}_r\|_{L^q(\mathbf{S})} \\ &\leq \epsilon \|\mathbf{P}_r\|_{L^q(\mathbf{S})} + c. \end{aligned}$$

Per migliorare $\|\mathbf{P}_r\|_{L^q(\mathbf{S})}$, osserviamo che

$$\|\mathbf{P}_r\|_{L^q(\mathbf{S})}^q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{P}_r(\theta)^{q-1} \mathbf{P}_r(\theta) d\theta \leq \|\mathbf{P}_r\|_{L^\infty(\mathbf{S})}^{q-1} \|\mathbf{P}_r\|_{L^1(\mathbf{S})} = \|\mathbf{P}_r\|_{L^\infty(\mathbf{S})}^{q-1}, \quad (5.6)$$

che implica

$$\|\mathbf{P}_r\|_{L^q(\mathbf{S})} \leq \|\mathbf{P}_r\|_{L^\infty(\mathbf{S})}^{1-\frac{1}{q}} = \|\mathbf{P}_r\|_{L^\infty(\mathbf{S})}^{\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (5.7)$$

Allora, per ogni $\epsilon > 0$,

$$(1-r)^{\frac{1}{p}} \|K * \mathbf{P}_r\|_{L^q(\mathbf{S})} \leq \left[\epsilon \left(\frac{1+r}{1-r} \right)^{\frac{1}{p}} + c \right] (1-r)^{\frac{1}{p}} \leq 2\epsilon + c(1-r)^{\frac{1}{p}}; \quad (5.8)$$

perciò, $\lim_{r \rightarrow 1^-} (1-r)^{\frac{1}{p}} \|K * \mathbf{P}_r\|_{L^q(\mathbf{S})} \leq 2\epsilon$, ovvero la tesi.

Dimostriamo (iv). Proviamo la prima disuguaglianza dell'enunciato. Sia $p = 1$,

$$\frac{1-r}{d(r)} = (1-r) \|K * \mathbf{P}_r\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \leq (1-r) \|K\|_{L^1(\mathbf{S})} \|\mathbf{P}_r\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \leq 1+r \leq \frac{1}{\gamma_1} \quad (5.9)$$

dove $\gamma_1 = 1/2$. Se $p \in (1, \infty)$,

$$\left[\frac{1-r}{d(r)} \right]^{\frac{1}{p}} = (1-r)^{\frac{1}{p}} \|K * \mathbf{P}_r\|_{L^q(\mathbf{S})} \leq \left[\left(\frac{1+r}{1-r} \right)^{\frac{1}{p}} + c \right] (1-r)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{1}{\gamma_1} \quad (5.10)$$

dove $\gamma_1 = 1/(2+c)$.

La seconda disuguaglianza dell'enunciato, per $p \in [1, \infty)$, segue da

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \|K_0\|_{L^q(\mathbf{S})} \leq (1-r) \|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})} \leq (1-r)^{\frac{1}{p}} \|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})} = \left[\frac{1-r}{d(r)} \right]^{\frac{1}{p}} \quad (5.11)$$

per $r \in [0, 1/2]$ ². Allora, segue la tesi con $\gamma_2 = 2$. □

²Ricordando che \mathbf{P}_0 è costante uguale a 1 su $[-\pi, \pi)$, si ha $K_0(\theta) = K * \mathbf{P}_0(\theta) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} K(\theta-t) dt = 1$.

Il caso $K \in L^q(\mathbf{S})$ è stato escluso perché, per ogni $f \in L^p_K(\mathbf{S})$, $f = K * F$ con $F \in L^p(\mathbf{S})$, quindi f è continua. Infatti, usando la disuguaglianza di Hölder e la continuità dell'operatore di traslazione (cf. [8]), per $\theta, \theta_0 \in [-\pi, \pi)$,

$$|f(\theta) - f(\theta_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\theta_0} |F(\theta - t) - F(\theta_0 - t)| K(t) dt \leq \|F_{\theta-\theta_0} - F\|_{L^p(\mathbf{S})} \|K\|_{L^q(\mathbf{S})} \quad (5.12)$$

che tende a 0, per θ tendente a θ_0 .

Quindi, f è continua e perciò $P[f]$ converge uniformemente a f ; la convergenza è più che tangenziale.

Il punto (iii) della proposizione precedente prova che le regioni d'approccio $\Omega_{K,\alpha}^p(0)$ sono tangenti alla circonferenza unitaria, mentre il punto (iv) dimostra che le regioni $\Omega_{K,\alpha}^p(0)$ contengono i coni $|\theta| < (\gamma_1/\alpha)r$ e che la parte delle $\Omega_{K,\alpha}^p(0)$ con $r \in [0, 1/2]$ sono contenute nei coni $|\theta| < (\gamma_2/\alpha)r$. Poiché le regioni $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0)$ sono semplicemente le ruotate di $\Omega_{K,\alpha}^p(0)$, queste proprietà valgono per tutte le $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0)$.

5.2 La funzione massimale di Hardy-Littlewood

In questo paragrafo dimostriamo che l'operatore massimale di Hardy-Littlewood su \mathbf{S} è di tipo debole (cf. [6]).

Utilizzeremo questo risultato per provare che l'operatore massimale associata alle regioni $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta)$, che definiremo nel prossimo paragrafo, è di tipo debole, e quindi, utilizzando il principio di Banach (par. 5.4), nel paragrafo 5.5 dimostriamo che ogni funzione appartenente ad uno spazio di tipo-Dirichlet ammette $\Omega_{K,\alpha}^p$ -convergenza in quasi ogni punto di \mathbf{S} , per ogni $\alpha \geq 0$.

Ricordiamo come è definita la funzione massimale di Hardy-Littlewood di una funzione $F \in L^p(\mathbf{S})$, con $p \in [1, \infty)$:

Definizione 5.2.1 *Sia $p \in [1, \infty)$. La funzione massimale di Hardy-Littlewood di $F \in L^p(\mathbf{S})$ è definita da*

$$M_p(F)(\theta_0) = \sup_{d \in (0, \pi]} \left[\frac{1}{2d} \int_{\theta_0-d}^{\theta_0+d} |F(\theta)|^p d\theta \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (5.13)$$

per $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$.

Dimostriamo che $M_p F$ è un operatore di tipo debole (p, p) , cioè esiste una costante $A_p > 0$ tale che

$$|\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid M_p F(\theta) > \lambda\}| \leq A_p \frac{\|F\|_{L^p(\mathbf{S})}^p}{\lambda^p}, \quad (5.14)$$

per ogni $F \in L^p(\mathbf{S})$ e per ogni $\lambda > 0$.

A tal fine, abbiamo bisogno del seguente lemma:

Lemma 5.2.2 *Sia $F = \{I_\beta\}_\beta$ una famiglia di intervalli di \mathbf{S} . Allora, esiste una successione di intervalli $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset F$ disgiunti due a due e tali che*

$$\left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right| > \frac{1}{4} \left| \bigcup_{\beta} I_\beta \right|. \quad (5.15)$$

Dimostrazione. Sia $a_1 = \sup_{I \in F} |I|$. Ricordando che \mathbf{S} ha misura finita, allora $a_1 < \infty$.

Sia $I_1 \in F$ tale che $|I_1| > (3/4)a_1$ e F_1 la sottofamiglia di intervalli di F che non intersecano I_1 . Sia $a_2 = \sup_{I \in F_1} |I|$, $I_2 \in F_1$ tale che $|I_2| > (3/4)a_2$ e F_2 la sottofamiglia di intervalli di F_1 che non intersecano I_1 e I_2 . Quindi definiamo la successione di intervalli $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ per induzione su n . Proviamo che $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soddisfa l'enunciato.

L'intersezione di due intervalli di $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è vuota per costruzione. Sia $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la successione di intervalli di lunghezza $4|I_n|$ con il punto centrale coincidente con il punto centrale di I_n . Se proviamo che $\bigcup_{\beta} I_\beta \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$, allora abbiamo la tesi; infatti, $(1/4)|\bigcup_{\beta} I_\beta| \leq (1/4)|\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n| \leq (1/4) \sum_{n=1}^{\infty} |J_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = |\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n|$.

Osserviamo che, per costruzione, a_n tende a 0 e quindi $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Per $I \in F$, sia k il primo intero tale che $I \notin F_k$ (le famiglie F_k sono inscatolate: $F_{k+1} \subset F_k$). Allora da $I \cap I_k \neq \emptyset$ (infatti $I, I_k \in F_{k-1} \setminus F_k$) e $|I_k| \geq (3/4)a_k \geq (3/4)|I|$, segue che $I \subset J_k$, e quindi $\bigcup_{\beta} I_\beta \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$. \square

Osserviamo che, se $M_1 F$ è un operatore di tipo debole $(1, 1)$, allora $M_p F$ è un operatore di tipo debole (p, p) . Infatti, $M_p F = (M_1 |F|^p)^{\frac{1}{p}}$, quindi esiste una costante $A > 0$ tale che

$$|\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid M_p F(\theta) = [M_1 |F|^p(\theta)]^{\frac{1}{p}} > \lambda\}| \leq A \frac{\| |F|^p \|_{L^1(\mathbf{S})}}{\lambda^p} = A \frac{\| F \|_{L^p(\mathbf{S})}^p}{\lambda^p}, \quad (5.16)$$

per ogni $F \in L^p(\mathbf{S})$ e per ogni $\lambda > 0$.

Dimostriamo che $M_1(F)$ è di tipo debole $(1, 1)$.

Proposizione 5.2.3 *Per ogni $F \in L^1(\mathbf{S})$, $M_1(F)$ è di tipo debole $(1, 1)$.*

Dimostrazione. Sia $\lambda > 0$ e $\theta \in [-\pi, \pi)$ tale che $M_1(F)(\theta) > \lambda$, allora esiste un intervallo I_θ centrato in θ tale che

$$\int_{I_\theta} f(t) dt > \lambda |I_\theta|. \quad (5.17)$$

Sia $\{I_\theta\}_\theta$ una copertura di $\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid M_1(F)(\theta) > \lambda\}$ fatta in questo modo. Applicando il lemma precedente a $\{I_\theta\}_\theta$, si ottiene

$$\begin{aligned} |\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid M_1(F)(\theta) > \lambda\}| &\leq \left| \bigcup_\theta I_\theta \right| \leq 4 \left| \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \right| = 4 \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \\ &\leq \frac{4}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{I_n} f(t) dt = \frac{4}{\lambda} \int_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n} f(t) dt \\ &\leq \frac{4}{\lambda} \int_{\mathbf{S}} f(t) dt, \end{aligned}$$

ovvero la tesi. □

5.3 La funzione massimale $\mathcal{M}_{K,p,\alpha}$

In questo paragrafo, definiamo la funzione massimale $\mathcal{M}_{K,p,\alpha}$ associata alla regione d'approccio $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0)$. Dimostriamo che l'operatore che associa ad ogni funzione di $L_K^p(\mathbf{S})$ la sua funzione massimale è di tipo debole (p, p) .

Utilizzando il principio di Banach, che vedremo nel prossimo paragrafo, in 5.5 dimostriamo che ogni funzione appartenente ad uno spazio di tipo-Dirichlet ammette $\Omega_{K,\alpha}^p$ -convergenza in quasi ogni punto di \mathbf{S} , per ogni $\alpha \geq 0$.

Definizione 5.3.1 *Sia K un nucleo e $f \in L_K^p(\mathbf{S})$ con $p \in [1, \infty)$; definiamo la funzione massimale associata a $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0)$, la funzione a valori in $[0, \infty]$ definita da*

$$\mathcal{M}_{K,p,\alpha}(f)(\theta_0) = \sup_{re^{i\theta} \in \Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0)} |P[f](re^{i\theta})| \tag{5.18}$$

per $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$.

Quello che vogliamo dimostrare è che $\mathcal{M}_{K,p,\alpha}$ è un operatore di tipo debole (p, p) su $L_K^p(\mathbf{S})$. A tal fine, proviamo i seguenti lemmi.

Lemma 5.3.2 *Sia $F \in L^1(\mathbf{S})$ e sia $g : \mathbf{S} \rightarrow [0, \infty]$ Lebesgue misurabile, pari in \mathbb{R} e decrescente in $[0, \pi)$, allora*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F(\theta)|g(\theta)d\theta \leq M_1(F)(0) \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)d\theta. \tag{5.19}$$

Dimostrazione. Se $g(\theta) = \sum_{k=1}^n \chi_{(-d_k, d_k)}(\theta)$ per ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$, allora

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |F(\theta)|g(\theta)d\theta &= \sum_{k=1}^n \int_{-d_k}^{d_k} |F(\theta)|d\theta \\ &\leq \sum_{k=1}^n 2d_k M_1(F)(0) = M_1(F)(0) \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)d\theta \end{aligned}$$

quindi la tesi.

Il caso generale segue dal teorema di convergenza monotona (cf. [8]) dopo aver osservato che esiste una successione crescente di funzioni $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, convergente a g , definita da $g_n(\theta) = \sum_{k=1}^n \chi_{(-d_k, d_k)}(\theta)$. \square

Lemma 5.3.3 *Sia $p \in [1, \infty)$ e $q \in (1, \infty]$ l'esponente coniugato a p , allora esiste $A_p > 0$ tale che*

$$|K * F(\theta)| \leq A_p [M_p(F)(\theta_0) |\theta - \theta_0|^{\frac{1}{p}} \|K\|_{L^q(\mathbf{S})} + M_1(F)(\theta_0) \|K\|_{L^1(\mathbf{S})}], \quad (5.20)$$

per ogni $\theta, \theta_0 \in [-\pi, \pi)$, per ogni $F \in L^p(\mathbf{S})$ e per ogni $K : \mathbf{S} \rightarrow [0, \infty]$ Lebesgue-misurabile, pari in \mathbb{R} e decrescente in $[0, \pi)$.

Dimostrazione. Consideriamo $\theta_0 = 0$ e sia $\theta \in [-\pi, \pi)$; allora

$$|K * F(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K(\theta - t) |F(t)| dt = I_{\{|t| \leq 2|\theta|\}} + I_{\{2|\theta| < |t| < \pi\}}, \quad (5.21)$$

dove $I_{\{|t| \leq 2|\theta|\}}$ e $I_{\{2|\theta| < |t| < \pi\}}$ sono gli integrali di $(2\pi)^{-1} K(\theta - \cdot) |F(\cdot)|$ rispettivamente su $\{|t| \leq 2|\theta|\}$ e $\{2|\theta| < |t| < \pi\}$.

Se $K \notin L^q(\mathbf{S})$, la tesi è vera perchè $\|K\|_{L^q(\mathbf{S})} = \infty$. Sia, allora, $K \in L^q(\mathbf{S})$ e consideriamo il primo integrale; usando la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$I_{\{|t| \leq 2|\theta|\}} \leq \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-2\theta}^{2\theta} K(\theta - t)^q dt \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_{-2\theta}^{2\theta} |F(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \leq \|K\|_{L^q(\mathbf{S})} \left(\frac{2}{\pi} |\theta| \right)^{\frac{1}{p}} M_p(F)(0). \quad (5.22)$$

Per il secondo integrale usiamo il fatto che, in $\{2|\theta| < |t| < \pi\}$, $|\theta - t| \geq |t|/2$ (infatti, $|t - \theta| \geq |t| - |\theta| > |t| - |t|/2 = |t|/2$); per le ipotesi su K e per il lemma precedente, segue che

$$I_{\{2|\theta| < |t| < \pi\}} \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K\left(\frac{t}{2}\right) |F(t)| dt \leq \frac{1}{\pi} M_1(F)(0) \|K\|_{L^1(\mathbf{S})}. \quad (5.23)$$

Quindi,

$$|K * F(\theta)| \leq \max \left\{ \left(\frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{p}}, \frac{1}{\pi} \right\} [M_p(F)(0) |\theta|^{\frac{1}{p}} \|K\|_{L^q(\mathbf{S})} + M_1(F)(0) \|K\|_{L^1(\mathbf{S})}]. \quad (5.24)$$

Se $\theta_0 \neq 0$, applichiamo quanto visto a $F_{(-\theta_0)}$; sia $A_p = \max\{(2/\pi)^{\frac{1}{p}}, 1/\pi\}$,

$$\begin{aligned} |K * F(\theta)| &= |K * F_{(-\theta_0)}(\theta - \theta_0)| \\ &\leq A_p [M_p(F_{(-\theta_0)})(0) |\theta - \theta_0|^{\frac{1}{p}} \|K\|_{L^q(\mathbf{S})} + M_1(F_{(-\theta_0)})(0) \|K\|_{L^1(\mathbf{S})}] \\ &= A_p [M_p(F)(\theta_0) |\theta - \theta_0|^{\frac{1}{p}} \|K\|_{L^q(\mathbf{S})} + M_1(F)(\theta_0) \|K\|_{L^1(\mathbf{S})}], \end{aligned}$$

ovvero la tesi. □

Lemma 5.3.4 *Sia $p \in [1, \infty)$ e $q \in (1, \infty]$ l'esponente coniugato a p . Esiste $A_p > 0$ tale che*

$$|P[f](re^{i\theta})| \leq A_p M_p(F)(\theta_0) [1 + |\theta - \theta_0|^{\frac{1}{p}} \|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})}] \quad (5.25)$$

per ogni $\theta, \theta_0 \in [-\pi, \pi)$, per ogni nucleo K e per ogni $f \in L_K^p(\mathbf{S})$.

Dimostrazione. Osserviamo che la convoluzione di due funzioni definite in \mathbf{S} non negative, pari in \mathbb{R} e non crescenti in $[0, \pi)$ è una funzione definita in \mathbf{S} non negativa, pari in \mathbb{R} e non crescente in $[0, \pi)$. Infatti, questo è evidente per la convoluzione di combinazioni lineari a coefficienti positivi di funzioni caratteristiche. Il caso generale segue dal teorema di convergenza monotona.

Sia $F \in L^p(\mathbf{S})$ tale che $f = K * F$ e applichiamo il lemma precedente sostituendo K_r a K :

$$\begin{aligned} |P[f](re^{i\theta})| = |K_r * F(\theta)| &\leq A_p [M_1(F)(\theta_0) \|K_r\|_{L^1(\mathbf{S})} + M_p(F)(\theta_0) |\theta - \theta_0|^{\frac{1}{p}} \|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})}] \\ &\leq A_p M_p(F)(\theta_0) [\|K_r\|_{L^1(\mathbf{S})} + |\theta - \theta_0|^{\frac{1}{p}} \|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})}] \\ &= A_p M_p(F)(\theta_0) [1 + |\theta - \theta_0|^{\frac{1}{p}} \|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})}] \end{aligned}$$

per ogni $\theta, \theta_0 \in [-\pi, \pi)$.

Infatti, la seconda disuguaglianza è giustificata dal fatto che $M_1(F) \leq M_p(F)$ (per la disuguaglianza di Hölder), mentre l'ultima uguaglianza segue dal teorema di Fubini: $\|K_r\|_{L^1(\mathbf{S})} = \|K * \mathbf{P}_r\|_{L^1(\mathbf{S})} = \|K\|_{L^1(\mathbf{S})} \|\mathbf{P}_r\|_{L^1(\mathbf{S})} = 1$. □

Dal lemma precedente, $|P[f](re^{i\theta})|$ è limitata su $\{re^{i\theta} \in \mathbf{D} \mid |\theta - \theta_0|^{\frac{1}{p}} \|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})} < \alpha\}$; questo insieme coincide con la regione $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0)$, e questo spiega perché vengono considerate le regioni d'approccio $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0)$.

Usando il lemma precedente si può dimostrare che $\mathcal{M}_{K,p,\alpha}$ è di tipo debole (p, p) su $L_K^p(\mathbf{S})$:

Teorema 5.3.5 *Siano $p \in [1, \infty)$, $\alpha > 0$ e K un nucleo. Esiste una costante $A_{p,\alpha} > 0$ tale che*

$$|\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid \mathcal{M}_{K,p,\alpha}(f)(\theta) > \lambda\}| \leq A_{p,\alpha} \frac{\|f\|_{K,p}^p}{\lambda^p}, \quad (5.26)$$

per ogni $f \in L_K^p(\mathbf{S})$ e per ogni $\lambda > 0$.

Dimostrazione. Sia $F \in L^p(\mathbf{S})$ tale che $f = K * F$; per il lemma precedente si ha

$$|P[f](re^{i\theta})| \leq A_p(1 + \alpha)M_p(F)(\theta), \quad (5.27)$$

per ogni $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$ e per ogni $re^{i\theta} \in \Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0)$. Allora,

$$\mathcal{M}_{K,p,\alpha}(f)(\theta_0) = \sup_{re^{i\theta} \in \Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0)} |P[f](re^{i\theta})| \leq A_p(1 + \alpha)M_p(F)(\theta_0), \quad (5.28)$$

per ogni $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$.

Poiché M_p è di tipo debole (p, p) , esiste $\bar{A}_p > 0$ tale che

$$\begin{aligned} |\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid \mathcal{M}_{K,p,\alpha}(f)(\theta) > \lambda\}| &\leq \left| \left\{ \theta \in [-\pi, \pi) \mid M_p(F)(\theta) > \frac{\lambda}{A_p(1 + \alpha)} \right\} \right| \\ &\leq \bar{A}_p A_p^p (1 + \alpha)^p \frac{\|F\|_{L^p(\mathbf{S})}^p}{\lambda^p}, \end{aligned}$$

per ogni $\lambda > 0$ e per ogni $F \in L^p(\mathbf{S})$ tale che $f = K * F$.

Ricordando che $\|f\|_{K,p} = \inf\{\|F\|_{L^p(\mathbf{S})} \mid f = K * F, F \in L^p(\mathbf{S})\}$, si ha

$$|\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid \mathcal{M}_{K,p,\alpha}(f)(\theta) > \lambda\}| \leq \bar{A}_p A_p^p (1 + \alpha)^p \frac{\|f\|_{K,p}^p}{\lambda^p}, \quad (5.29)$$

ovvero la tesi. □

5.4 Il principio di Banach

In questo paragrafo, dimostriamo il principio di Banach (cf. [3]). Questo principio ci consente di dimostrare che, data una funzione $f \in L^p_K(\mathbf{S})$, $P[f](z)$ converge in $e^{i\theta}$ per $z \rightarrow e^{i\theta}$, $z \in \Omega_{K,\alpha}^p(\theta)$ per quasi ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$ e per ogni α (par. 5.5).

Consideriamo uno spazio misurato X con σ -algebra Σ e misura μ .

Definizione 5.4.1 *Sia $p \in [1, \infty)$ e sia $T : L^p(X, \Sigma, \mu) \rightarrow L^p(X, \Sigma, \mu)$ un operatore lineare; T è continuo in misura se, per ogni successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(X, \Sigma, \mu)$ convergente a $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ nella norma di $L^p(X, \Sigma, \mu)$, accade che*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x \in X \mid |T(f_n)(x) - T(f)(x)| > \epsilon\} \rightarrow 0, \quad (5.30)$$

cioè, se f_n converge a f in norma, allora $T(f_n)$ converge a $T(f)$ in misura μ .

Data una successione $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(L^p(X, \Sigma, \mu))$ ³ di operatori continui in misura tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$, $|T_n(f)(x)| < \infty$ per quasi ogni $x \in X$, denotiamo per ogni $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$,

$$\begin{aligned} T^*(f)(x) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n(f)(x)|, \\ T_N^*(f)(x) &= \sup_{1 \leq n \leq N} |T_n(f)(x)|, \end{aligned}$$

per ogni $x \in X$; $T^*(f), T_N^*(f)$ sono funzioni a valori in $[0, \infty]$.

Teorema 5.4.2 (principio di Banach) *Sia $p \in [1, \infty)$ e sia $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(L^p(X, \Sigma, \mu))$ una successione di operatori continui in misura tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$, $|T_n(f)(x)| < \infty$, per quasi ogni $x \in X$.*

Se $T^(f)(x) < \infty$, per quasi ogni $x \in X$ e per ogni $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$, allora, esiste una funzione decrescente $C(\lambda) : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, tendente a 0 per $\lambda \rightarrow \infty$, tale che*

$$\mu\{x \in X \mid T^*(f)(x) > \lambda \|f\|_p\} \leq C(\lambda), \quad (5.31)$$

per ogni $\lambda \in (0, \infty)$ e per ogni $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ con $\|f\|_p = 1$.

³Con $\mathcal{L}(L^p(X, \Sigma, \mu))$ si intende l'insieme degli operatori lineari continui da $L^p(X, \Sigma, \mu)$ in $L^p(X, \Sigma, \mu)$.

Definiamo $\tilde{C}(\lambda) = \sup_{\|g\|_p \leq 1} \mu\{x \in X \mid T^*(g)(x) > \lambda\}$, quindi

$$\mu\{x \in X \mid T^*(f)(x) > \lambda\} \leq \tilde{C}(\lambda); \quad (5.32)$$

resta da dimostrare che $\tilde{C}(\lambda) \rightarrow 0$ per $\lambda \rightarrow \infty$.

Il fatto che $T^*(f)(x) < \infty$, per quasi ogni $x \in X$, implica che, fissato $\epsilon > 0$, per ogni $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu\{x \in X \mid T^*(f)(x) > n\} \leq \epsilon, \quad (5.33)$$

quindi

$$L^p(X, \Sigma, \mu) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{f \in L^p(X, \Sigma, \mu) \mid \mu\{x \in X \mid T^*(f)(x) > n\} \leq \epsilon\}. \quad (5.34)$$

Osserviamo che, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} H_n &= \{f \in L^p(X, \Sigma, \mu) \mid \mu\{x \in X \mid T^*(f)(x) > n\} \leq \epsilon\} \\ &= \bigcap_{N=1}^{\infty} \{f \in L^p(X, \Sigma, \mu) \mid \mu\{x \in X \mid T_N^*(f)(x) > n\} \leq \epsilon\} = \bigcap_{N=1}^{\infty} F_N. \end{aligned}$$

Poiché i T_n sono continui in misura per ipotesi, allora T_N^* sono continui in misura, quindi gli F_N sono chiusi e perciò anche gli H_n sono chiusi.

Per il teorema di Baire (par. 1.3), uno degli H_n contiene una bolla chiusa di raggio $\delta > 0$ centrata in un $f_0 \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ o, equivalentemente,

$$\mu\{x \in X \mid T^*(f_0 + \delta g)(x) > n\} \leq \epsilon, \quad \forall g \in L^p(X, \Sigma, \mu), \|g\|_p \leq 1. \quad (5.35)$$

Osservando che

$$T^*(g) \leq \frac{1}{\delta} T^*(f_0 + \delta g) + \frac{1}{\delta} T^*(f_0), \quad (5.36)$$

si ha

$$\begin{aligned} \mu\left\{x \in X \mid T^*(g)(x) > \frac{2n}{\delta}\right\} &\leq \mu\{x \in X \mid T^*(f_0 + \delta g)(x) > n\} + \\ &\quad + \mu\{x \in X \mid T^*(f_0)(x) > n\} \\ &\leq 2\epsilon, \end{aligned}$$

per ogni $g \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ con $\|g\|_p \leq 1$; per l'arbitrarietà di ϵ , abbiamo la tesi per $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ con $\|f\|_p = 1$.

Se $\|f\|_p \neq 1$, allora, esistono $g \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ con $\|g\|_p = 1$ e $\delta > 0$ tali che $f = \delta g$. Quindi scriviamo

$$\mu\{x \in X \mid T^*(f)(x) > \lambda\} = \mu\left\{x \in X \mid T^*(g)(x) > \frac{\lambda}{\delta}\right\} \leq \tilde{C}\left(\frac{\lambda}{\delta}\right) = C(\lambda). \quad (5.37)$$

La tesi segue osservando che C è decrescente, poiché \tilde{C} è decrescente, e che $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} C(\lambda) = 0$, poiché $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{C}(\lambda) = 0$. \square

Come applicazione, dimostriamo il seguente teorema che verrà usato nel paragrafo successivo.

Teorema 5.4.3 *Sia $C(\lambda) : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una funzione decrescente, tendente a 0 per $\lambda \rightarrow \infty$. Sia $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di operatori tale che*

$$\mu\{x \in X \mid T^*(f)(x) > \lambda \|f\|_p\} \leq C(\lambda), \quad (5.38)$$

per ogni $\lambda \in (0, \infty)$ e per ogni $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$. Allora, l'insieme \mathcal{C} delle funzioni in $L^p(X, \Sigma, \mu)$ per le quali la successione $T_n(f)$ converge μ -quasi ovunque in X è chiuso.

Dimostrazione. Dimostriamo che se $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ è tale che, per ogni $\epsilon > 0$, esiste un $g \in \mathcal{C}$ con $\|f - g\|_p < \epsilon$, allora $f \in \mathcal{C}$. Definiamo

$$R(f)(x) = \limsup_{n, m \rightarrow \infty} |T_n(f)(x) - T_m(f)(x)|; \quad (5.39)$$

poiché $R(f)(x) \leq 2T^*(f)$, si ha

$$\mu\{x \in X \mid R(f)(x) > \lambda \|f\|_p\} \leq C\left(\frac{\lambda}{2}\right). \quad (5.40)$$

Per $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ e $g \in \mathcal{C}$, $R(f)(x) = R(f - g)(x)$, per quasi ogni $x \in X$, quindi

$$\mu\{x \in X \mid R(f)(x) > \lambda \|f - g\|_p\} \leq C\left(\frac{\lambda}{2}\right). \quad (5.41)$$

Scegliendo $\lambda = 1/\epsilon$ a prendendo $g \in \mathcal{C}$ tale che $\|f - g\|_p \leq \epsilon^2$,

$$\mu\{x \in X \mid R(f)(x) > \epsilon\} \leq C\left(\frac{1}{2\epsilon}\right), \quad (5.42)$$

e quindi $R(f)(x) = 0$ quasi ovunque in X , cioè $\{T_n(f)(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, per quasi ogni $x \in X$, che implica $f \in \mathcal{C}$. □

Usando questo teorema, se si riesce a dimostrare che la successione $T_n(f)$ converge μ -quasi ovunque in X per f appartenente ad un insieme denso di $L^p(X, \Sigma, \mu)$, si ottiene che l'insieme delle funzioni in $L^p(X, \Sigma, \mu)$ per le quali la successione $T_n(f)$ converge μ -quasi ovunque in X è l'intero $L^p(X, \Sigma, \mu)$.

5.5 Gli spazi tipo-Dirichlet ammettono Ω_K^p -convergenza

Alla fine del paragrafo 5.3 abbiamo dimostrato che l'operatore massimale $\mathcal{M}_{K,p,\alpha}$ è un operatore di tipo debole (p, p) su $L_K^p(\mathbf{S})$. Da questo e da i risultati del paragrafo 5.4 si può dimostrare che, data $f \in L_K^p(\mathbf{S})$, $P[f](z)$ converge per $z \rightarrow e^{i\theta}$, $z \in \Omega_{K,\alpha}^p(\theta)$, per quasi ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$ e per ogni α .

Definizione 5.5.1 *Sia u una funzione a valori complessi definita in \mathbf{D} . Diciamo che u ammette Ω_K^p -limite $\ell \in \mathbb{C}$ in $\theta \in [-\pi, \pi)$ se, per ogni $\alpha > 0$,*

$$\lim_{\substack{z \rightarrow e^{i\theta} \\ z \in \Omega_{K,\alpha}^p(\theta)}} u(z) = \ell. \quad (5.43)$$

Osserviamo che questa definizione di Ω_K^p -convergenza è la stessa data per convergenza non-tangenziale se si sostituisce alle regioni $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta)$ le regioni $\Gamma_\alpha(\theta)$ definite nel capitolo 2. Ricordiamo che, al contrario delle $\Gamma_\alpha(\theta)$, le regioni d'approccio $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta)$ sono tangenti alla circonferenza unitaria in $e^{i\theta}$ (prop. 5.1.3).

Dimostriamo che gli spazi tipo-Dirichlet ammettono Ω_K^p -convergenza.

Teorema 5.5.2 *Sia $p \in [1, \infty)$ e K un nucleo. Per ogni $f \in L_K^p(\mathbf{S})$, $P[f]$ ammette Ω_K^p -limite $f(\theta_0)$ per quasi ogni $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$.*

Dimostrazione. Sia $f = K * F$ dove $F \in L^p(\mathbf{S})$, allora $P[f](re^{i\theta}) = \mathbf{P}_r * f(\theta) = \mathbf{P}_r * K * F(\theta) = K_r * F(\theta)$ per $re^{i\theta} \in \mathbf{D}$.

Sia $\{r_n e^{i\theta_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega_{K,\alpha}^p(0)$ convergente a 1. Definiamo la successione di operatori $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in questo modo

$$T_n(f)(\theta_0) = P[f](r_n e^{i(\theta_n - \theta_0)}), \quad (5.44)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$. Osserviamo che

$$\lim_{\substack{re^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta_0} \\ re^{i\theta} \in \Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0)}} P[f](re^{i\theta}) = \ell \quad (5.45)$$

se e solo se, per ogni $\{r_n e^{i\theta_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega_{K,\alpha}^p(0)$ convergente a 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n(f)(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P[f](r_n e^{i(\theta_n - \theta_0)}) = \ell. \quad (5.46)$$

Vogliamo applicare il teorema 5.4.3. Come insieme \mathcal{C} consideriamo l'insieme delle funzioni continue $f \in L_K^p(\mathbf{S})$. Allora, $P[f](re^{i\theta}) = \mathbf{P}_r * f(\theta) \rightarrow f(\theta_0)$ uniformemente su \mathbf{D} per $re^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta_0}$, quindi, $T_n(f)(\theta_0)$ converge a $f(\theta_0)$, per quasi ogni $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$. Dobbiamo verificare che vale la disuguaglianza

$$|\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid T^*(f)(\theta) > \lambda \|f\|_p\}| \leq C(\lambda). \quad (5.47)$$

con $C(\lambda) : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ una funzione non negativa, decrescente e tendente a 0 per $\lambda \rightarrow \infty$.

Ma questo è il teorema 5.3.5 con $C(\lambda) = A_{p,\alpha}(\|f\|_{K,p}/\lambda)^p$. Infatti, si ha

$$T^*(f)(\theta_0) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n(f)(\theta_0)| = \sup_{n \in \mathbb{N}} P[f](r_n e^{i(\theta_n - \theta_0)}) \leq \mathcal{M}_{K,p,\alpha}(f)(\theta_0), \quad (5.48)$$

allora

$$\begin{aligned} |\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid T^*(f)(\theta) > \lambda \|f\|_p\}| &\leq |\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid \mathcal{M}_{K,p,\alpha}(f)(\theta) > \lambda \|f\|_p\}| \\ &\leq A_{p,\alpha} \frac{\|f\|_{K,p}^p}{\lambda^p}. \end{aligned}$$

I T_n sono lineari; da questo e dalla disuguaglianza appena dimostrata segue che i T_n sono continui in misura. Quindi, applichiamo il teorema 5.4.3; per la generalità della successione $\{r_n e^{i\theta_n}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega_{K,\alpha}^p(0)$ (convergente a 1) abbiamo dimostrato che

$$\lim_{\substack{re^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta_0} \\ re^{i\theta} \in \Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0)}} P[f](re^{i\theta}) = \ell_{\theta_0} < \infty \quad (5.49)$$

per quasi ogni $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$ e per ogni $f \in \bar{\mathcal{C}}^{\|\cdot\|_{K,p}} = L_K^p(\mathbf{S})$ (cf. [8]).

Per provare che $\ell_{\theta_0} = f(\theta_0)$, per quasi ogni $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$, osserviamo che $f \in L_K^p(\mathbf{S}) \subset L^p(\mathbf{S})$, quindi, $\lim_{r \rightarrow 1^-} \|\mathbf{P}_r * f - f\|_{L^p(\mathbf{S})} = 0$; allora, esiste una successione $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset [0, 1)$ convergente a 1 tale che $\mathbf{P}_{r_n} * f(\theta_0) \rightarrow f(\theta_0)$, per quasi ogni $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$. Quindi,

$$f(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}_{r_n} * f(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P[f](r_n e^{i\theta_0}) = \lim_{\substack{re^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta_0} \\ re^{i\theta} \in \Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0)}} P[f](re^{i\theta}) = \ell_{\theta_0}, \quad (5.50)$$

per quasi ogni $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$. □

5.6 Il principio di continuità per operatori positivi

In questo paragrafo proviamo il principio di continuità per operatori positivi, o teorema di Sawyer (cf. [3]).

Utilizzando questo risultato, nel prossimo paragrafo mostriamo che le regioni $\Omega_{K,\alpha}^p(0)$ sono ottimali; ciò significa che, se $\Omega'_\alpha(0)$ sono regioni d'approccio con grado di tangenza maggiore di quello delle $\Omega_{K,\alpha}^p(0)$, esiste una funzione appartenente allo spazio di tipo-Dirichlet che non è Ω'_α -convergente in quasi ogni punto di \mathbf{S} , per alcun α . Quindi, come la convergenza non-tangenziale quasi ovunque è ottimale per gli integrali di Poisson di funzioni di $L^1(\mathbf{S})$, la $\Omega_{K,\alpha}^p$ -convergenza quasi ovunque, per ogni $\alpha \geq 0$, è ottimale negli spazi tipo-Dirichlet.

Consideriamo uno spazio misurato X con σ -algebra Σ e misura μ finita, e sia $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(L^p(X, \Sigma, \mu))$ una successione di operatori continui in misura.

Definizione 5.6.1 *Sia \mathcal{E} una famiglia di funzioni biunivoche da X in X . Diciamo che \mathcal{E} conserva la misura μ se, per ogni $E \in \mathcal{E}$ e per ogni $A \subset X$, A è μ -misurabile se e solo se $E(A)$ è μ -misurabile; inoltre, chiediamo che $\mu(A) = \mu(E(A))$ e che la famiglia \mathcal{E} sia chiusa rispetto la composizione di funzioni.*

Definizione 5.6.2 *Sia \mathcal{E} una famiglia che conserva la misura μ . Diciamo che \mathcal{E} è mixing se, per ogni $A, B \in \Sigma$ e per ogni $\beta > 1$, esiste una $E \in \mathcal{E}$ tale che*

$$\mu(X)\mu\left(A \cap E^{-1}(B)\right) \leq \beta\mu(A)\mu(B). \quad (5.51)$$

Supponiamo che le funzioni di \mathcal{E} commutano con i T_n , cioè

$$T_n(fE) = T_n(f)E, \quad (5.52)$$

per ogni $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$, con $p \in [1, \infty)$, per ogni $E \in \mathcal{E}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ ⁴. Questo implica

$$T^*(fE) = T^*(f)E, \quad (5.53)$$

per ogni $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ e per ogni $E \in \mathcal{E}$ (ricordiamo che $T^*(f) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |T_n(f)|$).

Per dimostrare il principio di continuità per gli operatori positivi, ci serve una condizione meno restrittiva:

$$T^*(fE) \geq T^*(f)E, \quad (5.54)$$

per ogni $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ e per ogni $E \in \mathcal{E}$.

⁴Per fE intendiamo la funzione $fE(x)=f(E(x))$.

Per avere un'idea di come è fatta una famiglia \mathcal{E} , e di cosa significano le proprietà precedenti, vediamo un esempio.

Consideriamo lo spazio $[-\pi, \pi)$ con la misura di Lebesgue; per $f \in L^p(\mathbf{S})$, sia $S_n(f)$ la somma parziale della serie di Fourier di f arrestata all'ordine n :

$$S_n(f)(\theta) = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ik\theta}. \quad (5.55)$$

dove $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$. Quindi, $S^*(\theta) = \sup_n |S_n(f)(\theta)|$.

Definiamo \mathcal{E} in questo modo: $E_t \in \mathcal{E}$ è la traslazione $E_t(\theta) = \theta + t$, dove $\theta \in [-\pi, \pi)$ è tale che $e^{i\theta t} = e^{i(\theta-t)t}$ ⁵. Allora, \mathcal{E} conserva la misura di Lebesgue, essendo la misura di Lebesgue invariante per traslazione.

La famiglia \mathcal{E} commuta con gli S_n :

$$S_n(f E_t)(\theta) = \sum_{k=-n}^n (\widehat{f E_t})(k) e^{ik\theta} = \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ik(\theta-t)} = E_t S_n(f)(\theta). \quad (5.56)$$

Dimostriamo che la famiglia \mathcal{E} è mixing (cf. [9]).

Proposizione 5.6.3 *La famiglia \mathcal{E} delle traslazioni di $[-\pi, \pi)$ è mixing.*

Dimostrazione. Dimostriamo la proposizione in tre passi.

Passo 1. Consideriamo l'intervallo $[0, 1)$ di \mathbb{R} con la misura di Lebesgue e \mathcal{E} è la famiglia delle traslazioni di $[0, 1)$. Proviamo che, per ogni $A \in [0, 1)$ con misura di Lebesgue $|A| = a \in (0, 1)$, esiste un intervallo I di $[0, 1)$ ed un traslato $E_t(I)$ di I contenuto in $[0, 1) \setminus I$ tale che

$$|A \cap I| > a|I| \quad (5.57)$$

e

$$|A \cap E_t(I)| < a|E_t(I)| = a|I|. \quad (5.58)$$

Supponiamo, per assurdo, che questo non sia vero, cioè $|A \cap I| \leq a|I|$ per ogni intervallo I . Poiché A è misurabile, fissato $\epsilon > 0$, esiste un insieme aperto G di $[0, 1)$, contenente A , tale che $|G| = |A| + \epsilon$. Poiché G può essere scritto come unione disgiunta in misura di intervalli chiusi I_n ⁶,

$$a = |A| = |A \cap G| = \left| \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap I_n) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} |A \cap I_n| \leq a \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = a|G| = a(a + \epsilon), \quad (5.59)$$

⁵Impropriamente si può scrivere che $E_t(\theta) = \theta - t$.

⁶In breve, sia $\mathcal{I}_k = \{[i/2^{-k}, 2^{-k} + i/2^{-k}] \cap [0, 1) \mid i \in \{0, \dots, 2^k - 1\}\}$ un ricoprimento finito di $[0, 1)$ con intervalli chiusi disgiunti in misura di lunghezza 2^{-k} . Se $\mathcal{J}_k = \{I \in \mathcal{I}_k \mid I \subset G\} \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{J}_i$ e $\mathcal{J} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{J}_k$, allora $G = \bigcup_{I \in \mathcal{J}} I$ è una unione numerabile di intervalli chiusi disgiunti in misura.

che implica $1 \leq a + \epsilon$. Scegliendo $\epsilon = (1 - a)/2$, otterremmo un assurdo.

Consideriamo il complementare di questo intervallo, ovvero $[0, 1] \setminus I$; osserviamo che, poiché

$$a = |A| = \left| A \cap I \right| + \left| A \cap ([0, 1] \setminus I) \right| > a|I| + \left| A \cap ([0, 1] \setminus I) \right|, \quad (5.60)$$

si ha $|A \cap ([0, 1] \setminus I)| < a - a|I|$. Se, per assurdo, tutti i traslati di I contenuti in $[0, 1] \setminus I$ avessero misura maggiore o uguale di $a|I|$, allora

$$\begin{aligned} \left| A \cap ([0, 1] \setminus I) \right| &= \left| \bigcup_{n=1}^{|I|^{-1}-1} (A \cap E_{t_n}(I)) \right| = \sum_{n=1}^{|I|^{-1}-1} \left| A \cap E_{t_n}(I) \right| \\ &\geq a|I|(|I|^{-1} - 1) = a(1 - |I|), \end{aligned}$$

(per la nota 6, $[0, 1] \setminus I$ è l'unione disgiunta degli $E_{t_n}(I)$) che contraddice la disuguaglianza $|A \cap ([0, 1] \setminus I)| < a(1 - |I|)$.

Passo 2. Proviamo che, per ogni $A \in [0, 1)$ con misura di Lebesgue $|A| = a \in (0, 1)$, esiste un $E_t \in \mathcal{E}$ tale che

$$\left| A \cap E_t^{-1}(A) \right| < |A|. \quad (5.61)$$

Per il *Passo 1* possiamo scrivere che

$$\begin{aligned} \left| A \cap E_t^{-1}(A) \right| &= \left| A \cap E_t^{-1}(A) \cap I \right| + \left| A \cap E_t^{-1}(A) \cap ([0, 1] \setminus I) \right| \\ &\leq \left| E_t^{-1}(A) \cap I \right| + |A \cap ([0, 1] \setminus I)| \\ &< \left| A \cap E_t(I) \right| + a(1 - |I|) = a|I| + a(1 - |I|) = a = |A|, \end{aligned}$$

che è quello che volevamo dimostrare.

Osserviamo che questa dimostrazione rimane valida, e si dimostra allo stesso modo, considerando l'intervallo $[-\pi, \pi)$ al posto di $[0, 1)$.

Passo 3. Dobbiamo dimostrare che, per ogni $A, B \subset [-\pi, \pi)$ Lebesgue-misurabili e per ogni $\beta > 1$, esiste una $E_t \in \mathcal{E}$ tale che

$$2\pi \left| A \cap E_t^{-1}(B) \right| \leq \beta |A| |B|. \quad (5.62)$$

Per assurdo, supponiamo che, per ogni $E_t \in \mathcal{E}$, $2\pi |A \cap E_t^{-1}(B)| > \beta |A| |B|$. Sia $E_t \in \mathcal{E}$ e consideriamo la funzione $f(\theta) = \chi_B E_t(\theta)$, per ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$; allora

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = |E_t^{-1}(B)| = |B| \quad (5.63)$$

e

$$\frac{1}{2\pi} \int_A f(\theta) d\theta = \left| A \cap E_t^{-1}(B) \right| > \beta |A| |B|. \quad (5.64)$$

Per ogni $E_t \in \mathcal{E}$, la funzione $\chi_B E_t$ appartiene a $L^2(\mathbf{S})$ ⁷; sia $Q \in L^2(\mathbf{S})$ la chiusura dell'involucro convesso dell'insieme $\{\chi_B E_t \mid E_t \in \mathcal{E}\}$. Poichè Q è un insieme chiuso e convesso di uno spazio di Hilbert, esiste un elemento $q(\theta) \in Q$ di norma minima (cf. [8]). Ma se consideriamo la funzione $r(\theta) = qE(\theta)$, allora $r(\theta)$ appartiene a Q e ha la stessa norma di $q(\theta)$. Quindi, $r(\theta) = q(\theta)$ per quasi ogni $\theta \in [-\pi, \pi)$; sia $x \in \mathbb{R}$, allora

$$\Omega = \{\theta \in [-\pi, \pi) \mid q(\theta) > x\} = \{\theta \in [-\pi, \pi) \mid qE(\theta) > x\} = E^{-1}(\Omega) \quad (5.65)$$

in misura.

Per il *Passo 2*, da $|\Omega \cap E^{-1}(\Omega)| = |\Omega|$ segue che $|\Omega|$ vale 0 o 1, che implica che $q(\theta)$ è quasi ovunque costante in $[-\pi, \pi)$. Ma, per l'uguaglianza $(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} q(\theta) d\theta = |B|$, $q(\theta)$ è quasi ovunque uguale a $2\pi|B|$, da cui segue

$$|A| |B| = \frac{1}{2\pi} \int_A q(\theta) d\theta > \beta |A| |B|, \quad (5.66)$$

che è assurdo⁸. □

Definizione 5.6.4 *Sia $T \in \mathcal{L}(L^p(X, \Sigma, \mu))$. Diciamo che T è definito positivo se*

$$f \geq 0, \mu - q.o. \quad \Rightarrow \quad T(f) \geq 0, \mu - q.o. \quad (5.67)$$

Teorema 5.6.5 (principio di continuità per operatori positivi) *Sia X uno spazio misurato con σ -algebra Σ e misura μ finita, $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(L^p(X, \Sigma, \mu))$, con $p \in [1, \infty)$, una successione di operatori continui in misura definiti positivi e \mathcal{E} una famiglia di funzioni biunivoche da X in X che conserva la misura μ . Supponiamo che \mathcal{E} sia mixing e che*

$$T^*(fE) \geq T^*(f)E, \quad (5.68)$$

per ogni $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ e per ogni $E \in \mathcal{E}$.

Sotto queste ipotesi,

$$T^*(f)(x) < \infty, \mu - q.o. \quad \Leftrightarrow \quad \mu\{x \in X \mid T^*(f)(x) > \lambda\} \leq C \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}. \quad (5.69)$$

⁷Nel paragrafo 1.1, abbiamo definito $L^2(\mathbf{S})$ per funzioni a valori complessi; allo stesso modo si può definire $L^2(\mathbf{S})$ per funzioni a valori reali. Solo per questa proposizione, $L^2(\mathbf{S})$ denota quest'ultimo caso.

⁸In questo caso, vale la proprietà di essere mixing con $\beta = 1$.

Dimostrazione L'implicazione \Leftarrow segue da

$$\begin{aligned} \mu\{x \in X \mid T^*(f)(x) = \infty\} &= \mu\left(\bigcap_n \{x \in X \mid T^*(f)(x) > n\}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu\{x \in X \mid T^*(f)(x) > n\} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} C \frac{\|f\|_p^p}{n^p} = 0. \end{aligned}$$

Proviamo l'implicazione opposta. Osserviamo che, per il principio di Banach, abbiamo che esiste una funzione non decrescente $C(\lambda) : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ e tendente a 0 per $\lambda \rightarrow \infty$ tale che

$$\mu\{x \in X \mid T^*(f)(x) > \lambda \|f\|_p\} \leq C(\lambda) \quad (5.70)$$

per ogni $\lambda \in (0, \infty)$ e per ogni $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$. Dobbiamo dimostrare che $C(\lambda) = C/\lambda^p$ dove C è una costante positiva.

Supponiamo $\mu(X) = 1$.

Passo 1. Sia $A \in \Sigma$; dimostriamo che esistono $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$ tali che

$$\mu\left(\bigcup_{\nu=1}^n E_\nu^{-1}(A)\right) \geq \frac{1}{2}, \quad (5.71)$$

se $n\mu(A) \geq 1$.

Definiamo le E_ν per induzione. Siano $B = A^c$, $E_1 \in \mathcal{E}$ e $B_1 = E_1^{-1}(B)$. Siccome \mathcal{E} conserva la misura μ , $\mu(B_1) = \mu(B)$.

Usiamo il fatto che \mathcal{E} è mixing: per $\beta > 1$, esiste $E_2 \in \mathcal{E}$ tale che

$$\mu\left(B_1 \cap E_2^{-1}(B)\right) \leq \beta \mu(B_1) \mu(B) = \beta \mu(B) \mu(B). \quad (5.72)$$

Sia $B_2 = E_2^{-1}(B)$; esiste $E_3 \in \mathcal{E}$ tale che

$$\mu\left(\left(B_1 \cap B_2\right) \cap E_3^{-1}(B)\right) \leq \beta \mu\left(B_1 \cap B_2\right) \mu(B) = \beta^2 \mu(B)^3. \quad (5.73)$$

Per induzione, esistono $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$ tali che

$$\mu\left(B_1 \cap \dots \cap B_n\right) \leq \beta^{n-1} \mu(B)^n. \quad (5.74)$$

Sia $A_\nu = E_\nu^{-1}(A)$ per $\nu \in \{1, \dots, n\}$. Osserviamo che $A_\nu^c = E_\nu^{-1}(A^c) = E_\nu^{-1}(B) = B_\nu$ e quindi che $\left(\bigcup_{\nu=1}^n A_\nu\right)^c = \bigcap_{\nu=1}^n B_\nu$. Prendiamo $\beta = (e/2)^{\frac{1}{n-1}} > 1$; allora

$$\mu\left(\bigcup_{\nu=1}^n A_\nu\right) = 1 - \mu\left(B_1 \cap \dots \cap B_n\right) \geq 1 - \frac{e}{2} \mu(B)^n = 1 - \frac{e}{2} (1 - \mu(A))^n. \quad (5.75)$$

Usando la disuguaglianza $1 - x \leq e^{-x}$, otteniamo

$$\mu \left(\bigcup_{\nu=1}^n A_\nu \right) \geq 1 - \frac{e}{2} e^{-n\mu(A)} \geq 1 - \frac{e}{2} e^{-1} = \frac{1}{2} \quad (5.76)$$

per $n\mu(A) \geq 1$.

Passo 2. Dimostriamo il teorema.

Sia $A = \{x \in X \mid T^*(f)(x) > \lambda\}$ e siano $E_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}$ tali che

$$\mu \left(\bigcup_{\nu=1}^n E_\nu^{-1}(A) \right) \geq \frac{1}{2}, \quad (5.77)$$

se $n\mu(A) \geq 1$. Sia $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$. Per $M > 0$, definiamo

$$F(x) = \frac{1}{M} \max_{\nu \in \{1, \dots, n\}} f E_\nu(x); \quad (5.78)$$

allora,

$$|F(x)|^p \leq \frac{1}{M^p} \sum_{\nu=1}^n |f E_\nu(x)|^p, \quad (5.79)$$

che implica $\|F\|_p^p \leq n(\|f\|_p/M)^p$, cioè $F \in L^p(X, \Sigma, \mu)$, e $\|F\|_p \leq \|f\|_p$ se $n \leq M^p$. Siccome i T_n sono definiti positivi

$$T_k(F)(x) \geq \frac{1}{M} T_k(f E_\nu)(x), \quad (5.80)$$

per ogni $\nu \in \{1, \dots, n\}$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$. Quindi, se f è non negativa,

$$T^*(F)(x) \geq \frac{1}{M} T^*(f E_\nu)(x), \quad (5.81)$$

per ogni $\nu \in \{1, \dots, n\}$.

Denotiamo $A_\nu = E_\nu^{-1}(A)$; per ogni $\nu \in \{1, \dots, n\}$, si ha

$$\begin{aligned} \mu \left\{ x \in X \mid T^*(F)(x) > \frac{\lambda}{M} \right\} &\geq \mu \left\{ x \in X \mid \max_{\nu \in \{1, \dots, n\}} T^*(f E_\nu)(x) > \lambda \right\} \\ &\geq \mu \left\{ x \in X \mid \max_{\nu \in \{1, \dots, n\}} T^*(f)(E_\nu(x)) > \lambda \right\} \\ &\geq \mu \left(\bigcup_{\nu=1}^n \{x \in X \mid T^*(f)(E_\nu(x)) > \lambda\} \right) \\ &= \mu \left(\bigcup_{\nu=1}^n E_\nu^{-1}(\{x \in X \mid T^*(f)(x) > \lambda\}) \right) \\ &= \mu \left(\bigcup_{\nu=1}^n A_\nu \right) \geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

se $n\mu(A) \geq 1$. Usando il principio di Banach, esiste una costante $C > 0$ tale che

$$\mu \left\{ x \in X \mid T^*(F)(x) > \frac{\lambda}{M} \right\} \leq \mu \{ x \in X \mid T^*(F)(x) > C \|F\|_p \} < \frac{1}{2}, \quad (5.82)$$

se $\lambda/M \geq C \|F\|_p$. Perciò, definiamo $M = \lambda/(C \|F\|_p)$ e $n = \lceil \lambda^p/(C \|F\|_p)^p \rceil$; in questo modo, $n \leq \lambda^p/(C \|F\|_p)^p = M^p$ e quindi $\|F\|_p \leq \|f\|_p$. Inoltre, deve essere $n\mu(A) < 1$ altrimenti si avrebbe

$$\frac{1}{2} > \mu \left\{ x \in X \mid T^*(F)(x) > \frac{\lambda}{M} \right\} \geq \frac{1}{2}. \quad (5.83)$$

Allora,

$$\mu \{ x \in X \mid T^*(f)(x) > \lambda \} < \left[\frac{\lambda^p}{(C \|F\|_p)^p} \right]^{-1} \leq \frac{C^p \|F\|_p^p}{2 \lambda^p} \leq \frac{C^p \|f\|_p^p}{2 \lambda^p}, \quad (5.84)$$

ovvero la tesi per f non negativa.

Per $f \in L^p(X, \Sigma, \mu)$ generica, osserviamo che

$$|T_n(f)| \leq T_n(|f|) \quad (5.85)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti, T_n è positivo e $|f| + f \geq 0$, $|f| - f \geq 0$. Quindi,

$$|T^*(f)| \leq T^*(|f|), \quad (5.86)$$

che implica, per $\lambda > 0$,

$$\mu \{ x \in X \mid T^*(f)(x) > \lambda \} \leq \mu \{ x \in X \mid T^*(|f|)(x) > \lambda \} \leq \frac{C^p \|f\|_p^p}{2 \lambda^p}. \quad (5.87)$$

Abbiamo dimostrato il teorema per uno spazio con misura totale 1. In generale, possiamo ricondurci a questo caso definendo $\tilde{\mu} = \mu/\mu(X)$. Allora,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(X)} \mu \{ x \in X \mid T^*(f)(x) > \lambda \} &= \tilde{\mu} \{ x \in X \mid T^*(f)(x) > \lambda \} \\ &\leq C \frac{\|f\|_{\tilde{\mu}, p}^p}{\lambda^p} = \frac{C}{\mu(X)} \frac{\|f\|_p^p}{\lambda^p}, \end{aligned}$$

che implica la tesi. □

5.7 La Ω_K^p -convergenza è ottimale

Mostriamo che il teorema 5.3.5 è ottimale per quello che riguarda le regioni d'approccio $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0)$.

Ricordiamo l'enunciato del teorema 5.3.5: *se $p \in [1, \infty)$, $\alpha > 0$ e K è un nucleo, esiste una costante $A_{p,\alpha} > 0$ tale che*

$$|\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid \mathcal{M}_{K,p,\alpha}(f)(\theta) > \lambda\}| \leq A_{p,\alpha} \frac{\|f\|_{K,p}^p}{\lambda^p}, \quad (5.88)$$

per ogni $f \in L_K^p(\mathbf{S})$ e per ogni $\lambda > 0$, cioè $\mathcal{M}_{K,p,\alpha}$ è di tipo debole (p, p) .

Sia $\rho(r) : [0, 1) \rightarrow [0, \infty)$ una funzione continua e consideriamo

$$\Omega_\rho(\theta_0) = \{re^{i\theta} \in \mathbf{D} \mid |\theta - \theta_0| < \rho(r)\}, \quad (5.89)$$

$$\mathcal{N}_\rho(f)(\theta_0) = \sup_{re^{i\theta} \in \Omega_\rho(\theta_0)} |P[f](re^{i\theta})| \quad (5.90)$$

dove K è un nucleo di $L^1(\mathbf{S})$ e $f \in L_K^p(\mathbf{S})$, con $p \in [1, \infty)$.

Facendo riferimento al paragrafo 5.1, sia $d(r) = 1/\|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})}^p$, per $r \in [0, 1)$, con q l'esponente coniugato a p .

Proposizione 5.7.1 *Sia $p \in [1, \infty)$. Se \mathcal{N}_ρ è di tipo debole (p, p) , allora $\rho(r)/d(r)$ è limitato per $r \in [0, 1)$.*

Dimostrazione. Esplicitando le ipotesi, esiste una costante $A > 0$ tale che

$$|\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid \mathcal{N}_\rho(f)(\theta) \geq \lambda\}| \leq A \frac{\|f\|_{K,p}^p}{\lambda^p}, \quad (5.91)$$

per ogni $f \in L_K^p(\mathbf{S})$ e per ogni $\lambda > 0$.

Sia $F \in L^p(\mathbf{S})$ di norma p uguale a 1 e non negativa quasi ovunque in $[-\pi, \pi)$. Consideriamo $f = K * F$ e $re^{i\theta} \in \Omega_\rho(0)$; allora, $P[f](r) \leq \mathcal{N}_\rho(f)(0)$, cioè, per $r \in [0, 1)$ fissato, l'insieme $\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid \mathcal{N}_\rho(f)(\theta) \geq P[f](r)\}$ contiene l'intervallo di raggio $\rho(r)$ e centrato in 0. Quindi,

$$2\rho(r) \leq |\{\theta \in [-\pi, \pi) \mid \mathcal{N}_\rho(f)(\theta) \geq P[f](r)\}| \leq \frac{A}{P[f](r)^p}. \quad (5.92)$$

Infatti, l'ultima disuguaglianza segue dal fatto che \mathcal{N}_ρ è di tipo debole (p, p) e che $\|f\|_{K,p} \leq \|F\|_p = 1$. Possiamo riscrivere la disuguaglianza in questo modo:

$$\left(\frac{A}{2\rho(r)}\right)^{\frac{1}{p}} \geq P[f](r) = K_r * F(0). \quad (5.93)$$

Osserviamo che $K_r * (\cdot)(0) \in [L^p(\mathbf{S})]^* = L^q(\mathbf{S})$. Quindi, facendo l'estremo superiore su $\|F\|_{L^p(\mathbf{S})} = 1$,

$$\left(\frac{A}{2\rho(r)}\right)^{\frac{1}{p}} \geq P[f](r) = \|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})} = \frac{1}{d(r)^{\frac{1}{p}}}. \quad (5.94)$$

Allora, $\rho(r)/d(r) \leq A/2$, per ogni $r \in [0, 1)$. □

Dal teorema precedente segue che, se $\rho(r)/d(r)$ è illimitato per $r \rightarrow 1^-$, \mathcal{N}_ρ non è di tipo debole (p, p) . Allora, non possiamo dimostrare l' Ω_ρ -convergenza quasi ovunque applicando il teorema 5.5.2. Possiamo garantire comunque l' Ω_ρ -convergenza quasi ovunque dell'integrale di Poisson di funzioni di $L_K^p(\mathbf{S})$?

La risposta viene data dal principio di continuità (par. 5.6). Questo principio afferma che \mathcal{N}_ρ è di tipo debole (p, p) se e solo se, per ogni $f \in L_K^p(\mathbf{S})$, $\mathcal{N}_\rho(f) < \infty$ quasi ovunque.

Quindi, se \mathcal{N}_ρ non è di tipo debole (p, p) , esiste una $f \in L_K^p(\mathbf{S})$ tale che $\mathcal{N}_\rho(f) = \infty$ in un insieme di misura positiva; perciò, $P[f]$ non può ammettere Ω_ρ -limite quasi ovunque.

Vediamo una condizione sotto la quale l'enunciato del teorema 5.3.5 non è più valido. Esplicitiamo la dipendenza di $d(r)$ da p e denotiamo $d(r) = d_p(r) = 1/\|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})}^p$.

Osserviamo che, per ogni $r \in [0, 1)$,

$$\|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})}^p = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_r^{q-1}(\theta) K_r(\theta) d(\theta) \right]^{\frac{1}{q-1}} \quad (5.95)$$

è crescente per $q \in (1, \infty]$.

Infatti, $K_r(\theta)d\theta$ è una misura finita, quindi $\|K_r\|_{L^{q_1-1}(\mathbf{S})} \leq \|K_r\|_{L^{q_2-1}(\mathbf{S})}$, per $1 < q_1 \leq q_2 \leq \infty$. Allora, $\|K_r\|_{L^q(\mathbf{S})}^p$ è decrescente per $p \in [1, \infty)$, e quindi $d_p(r)$ è una funzione crescente per $p \in [1, \infty)$. Questo implica che $\Omega_{K,\alpha}^{p_1}(\theta_0) \subset \Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0)$ per $1 \leq p_1 < p < \infty$. L'inclusione opposta non è però garantita. Anzi, dimostriamo che, se $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0) \not\subset \Omega_{K,\alpha}^{p_1}(\theta_0)$, allora $\mathcal{M}_{K,p,\alpha}$ non è di tipo debole (p_1, p_1) .

Proposizione 5.7.2 *Siano $1 \leq p_1 < p < \infty$. Supponiamo che*

$$\limsup_{r \rightarrow 1^-} \frac{d_p(r)}{d_{p_1}(r)} = \infty, \quad (5.96)$$

allora $\mathcal{M}_{K,p,\alpha}$ non è di tipo debole (p_1, p_1) .

Dimostrazione. Basta applicare la proposizione precedente con d_{p_1} , d_p , $\mathcal{M}_{K,p,\alpha}$ rispettivamente al posto di d , ρ , \mathcal{N}_ρ .

Infatti, se, per assurdo, $\mathcal{M}_{K,p,\alpha}$ fosse di tipo debole (p_1, p_1) , applicando la proposizione precedente si avrebbe che $d_p(r)/d_{p_1}(r) \leq A$, per $r \in [0, 1)$, contro le ipotesi. \square

5.8 Il nucleo di Bessel

In questo paragrafo vogliamo scrivere esplicitamente le regioni d'approccio $\Omega_{K,\alpha}^p(\theta_0)$ nel caso in cui $K = G$ è il nucleo di Bessel:

$$G(\theta) = 1 + \log \frac{1}{2|\sin \frac{\theta}{2}|} \quad (5.97)$$

per $\theta \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. Dimostriamo che G è effettivamente un nucleo.

Proposizione 5.8.1 G è un nucleo di $L^1(\mathbf{S})$.

Dimostrazione. Dobbiamo verificare che G soddisfa le proprietà di un nucleo.

G è pari perchè $|\sin(\theta/2)|$ è pari.

G è non negativa:

$$0 < 1 - \log 2 \leq 1 + \log \frac{1}{2|\sin \frac{\theta}{2}|} \quad (5.98)$$

per ogni $\theta \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

Infine, $G \in L^1(\mathbf{S})$:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(\theta) d\theta &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} G(\theta) d\theta \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 + \log \frac{\pi}{2\theta}\right) d\theta \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 + \frac{C}{\sqrt{\theta}}\right) d\theta < \infty. \end{aligned}$$

dove C è un'opportuna costante positiva. \square

Diamo un'altra scrittura del nucleo di Bessel. A tal fine consideriamo la funzione

$$g(re^{i\theta}) = 1 - \log(1 - re^{i\theta}) \quad (5.99)$$

per $re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus [1, \infty)$.

In \mathbf{D} , g è sviluppabile nella serie di potenze

$$g(re^{i\theta}) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} e^{in\theta}. \quad (5.100)$$

Allora, abbiamo che esiste il $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} (r^n/n)e^{in\theta}$ ed è uguale a $-\log(1 - e^{i\theta})$ per $\theta \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi)$, cioè $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{in\theta}/n)$ è Abel-convergente.

Osserviamo inoltre che $|e^{in\theta}/n| = 1/n$; per un teorema di Littlewood (app. A), segue che $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{in\theta}/n)$ è convergente a $-\log(1 - e^{i\theta})$, per $\theta \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

In conclusione, possiamo riscrivere il nucleo di Bessel nel seguente modo:

$$\begin{aligned} G(\theta) &= 1 - \frac{1}{2} \log \left(4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = 1 - \frac{1}{2} \log(2 - 2 \cos \theta) \\ &= 1 - \log |1 - e^{i\theta}| = \Re[1 - \log(1 - e^{i\theta})] \\ &= \Re \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} \right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}. \end{aligned}$$

Ricordiamo che le regioni d'approccio associate al nucleo G sono definite da $\Omega_{G,\alpha}^p(\theta_0) = \{re^{i\theta} \in \mathbf{D} \mid |\theta - \theta_0|^{\frac{1}{p}} \|\mathbf{P}_r * G\|_{L^q(\mathbf{S})} < \alpha\}$. Se riusciamo a maggiorare $\|\mathbf{P}_r * G\|_{L^q(\mathbf{S})}$ con una funzione $b(r)$ per $r \in [0, 1)$, possiamo scrivere $\Omega_{\alpha}^p(\theta_0) = \{re^{i\theta} \in \mathbf{D} \mid |\theta - \theta_0|^{\frac{1}{p}} b(r) < \alpha\} \subset \Omega_{G,\alpha}^p(\theta_0)$. Questo implica che se una funzione u definita su \mathbf{D} ammette $\Omega_{G,\alpha}^p$ -convergenza, allora u ammette Ω^p -convergenza.

Proposizione 5.8.2 Per ogni $f \in L_G^1(\mathbf{S})$ e per quasi ogni $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$, $P[f](re^{i\theta})$ converge a $f(\theta_0)$ per $re^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta_0}$ e

$$1 - r > \frac{e}{e^{\alpha|\theta - \theta_0|^{-\frac{1}{p}}}}, \quad (5.101)$$

dove α è una costante positiva.

Dimostrazione. Ricordando che $\mathbf{P}_r * G(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{G}(n)r^{|n|}e^{in\theta}$, possiamo scrivere

$$\mathbf{P}_r * G(\theta) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n} \cos(n\theta) = 1 - \log |1 - re^{i\theta}|. \quad (5.102)$$

Per ogni $\theta \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi)$,

$$|\mathbf{P}_r * G(\theta)| = 1 - \frac{1}{2} \log \left[(1 - r)^2 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \leq 1 - \log(1 - r) \quad (5.103)$$

per $r \in [0, 1)$, che implica $\|\mathbf{P}_r * G\|_{L^\infty(\mathbf{S})} \leq 1 - \log(1 - r)$.

La funzione $1 - \log(1 - r)$ è la funzione $b(r)$ che stavamo cercando. Quindi, siano $\alpha > 0$ e $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$:

$$\begin{aligned} |\theta - \theta_0|^{\frac{1}{p}} [1 - \log(1 - r)] < \alpha &\Leftrightarrow 1 - \log(1 - r) < \alpha |\theta - \theta_0|^{-\frac{1}{p}} \\ &\Leftrightarrow \log(1 - r) > 1 - \alpha |\theta - \theta_0|^{-\frac{1}{p}} \\ &\Leftrightarrow 1 - r > e^{1 - \alpha |\theta - \theta_0|^{-\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Denotiamo con $\Omega_\alpha^1(\theta_0)$ l'insieme dei punti $re^{i\theta} \in \mathbf{D}$ che soddisfano questa disuguaglianza.

Applicando il teorema 5.5.2 abbiamo che, per $f \in L_G^1(\mathbf{S})$ e per quasi ogni $\theta_0 \in [-\pi, \pi)$, $P[f](re^{i\theta})$ converge a $f(\theta_0)$ per $re^{i\theta} \rightarrow e^{i\theta_0}$ nella regione $\Omega_{G,\alpha}^1(\theta_0)$. L'enunciato del teorema segue dal teorema 5.5.2 e dall'inclusione $\Omega_\alpha^1(\theta_0) \subset \Omega_{G,\alpha}^1(\theta_0)$. \square

5.9 L'integrale di Poisson converge tangenzialmente

In questo paragrafo vogliamo dimostrare che, per ogni $f \in L^p(\mathbf{S})$, l'integrale di Poisson di f converge tangenzialmente in quasi ogni punto di \mathbf{S} .

Consideriamo un nucleo di K . Nel paragrafo 5.5, abbiamo dimostrato che, per $f \in L_K^p(\mathbf{S})$, l'integrale di Poisson di f è Ω_K^p -convergente in quasi ogni punto di \mathbf{S} . Perciò, per ogni $f \in L_K^p(\mathbf{S})$, $P[f]$ converge tangenzialmente quasi ovunque.

Se, per ogni $F \in L^p(\mathbf{S})$, esiste un nucleo K e una $F_K \in L^p(\mathbf{S})$ tale che $F = K * F_K$, allora, $F \in L_K^p(\mathbf{S})$ e quindi l'integrale di Poisson di F converge tangenzialmente quasi ovunque. Ma questa scrittura per F deriva da un teorema astratto di fattorizzazione per algebre di Banach (appendice B).

Teorema 5.9.1 *Siano \tilde{A} , A due algebre di Banach complesse. Consideriamo una funzione $\bullet : \tilde{A} \times A \rightarrow A$ che soddisfa le seguenti proprietà:*

1. $(\tilde{x} + \tilde{y}) \bullet z = \tilde{x} \bullet z + \tilde{y} \bullet z$ per ogni $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{A}$, $z \in A$;
2. $(\lambda \tilde{x}) \bullet y = \lambda(\tilde{x} \bullet y) = \tilde{x} \bullet (\lambda y)$ per ogni $\tilde{x} \in \tilde{A}$, $y \in A$;
3. $(\tilde{x}\tilde{y}) \bullet z = \tilde{x} \bullet (\tilde{y} \bullet z)$ per ogni $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{A}$, $z \in A$;
4. esiste una costante $C \geq 1$ tale che $\|\tilde{x} \bullet y\|_A \leq C \|\tilde{x}\|_{\tilde{A}} \|y\|_A$, $\forall \tilde{x} \in \tilde{A}$, $\forall y \in A$;

5. esiste una costante $D > 0$ tale che, per ogni $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\} \in \tilde{A}$, $x \in A$ e $a > 0$, esiste $\tilde{\nu} \in \tilde{A}$ con $\|\tilde{\nu}\|_{\tilde{A}} \leq D$ tale che $\|\tilde{\nu}\tilde{x}_i - \tilde{x}_i\|_{\tilde{A}} < a$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ e $\|\tilde{\nu} \bullet x - x\|_A < a$.

Allora, esistono $\tilde{\sigma} \in \tilde{A}$ e y appartenente ad A tali che

$$z = \tilde{\sigma} \bullet y. \quad (5.104)$$

Applichiamo il teorema precedente con $\tilde{A} = L^1(\mathbf{S})$, $A = L^p(\mathbf{S})$ con $p \in [1, \infty)$ e $\bullet = *$.

Osserviamo che $L^p(\mathbf{S})$ è un'algebra di Banach in cui la somma è la somma puntuale di funzioni e il prodotto è la convoluzione di funzioni. Inoltre, consideriamo $*$: $L^1(\mathbf{S}) \times L^p(\mathbf{S}) \rightarrow L^p(\mathbf{S})$.

Allora $*$ soddisfa le proprietà 1-4 (per la proposizione 1.1.1, la proprietà 4 vale con $C = 1$).

Dimostriamo la proprietà 5. Siano $\{f_1, \dots, f_n\} \in L^1(\mathbf{S})$, $f_0 \in L^p(\mathbf{S})$ e $a > 0$. Sia $j \in \{1, \dots, n\}$; per assoluta continuità dell'integrale, esiste $\delta_j > 0$ tali che, per ogni $E \subset [-\pi, \pi)$ misurabile con $|E| < \delta_j$, si ha

$$\frac{1}{2\pi} \int_E f_j(\theta) d\theta < a. \quad (5.105)$$

Inoltre, $|f_0|^p \in L^1(\mathbf{S})$; quindi, esiste $\delta_0 > 0$ tali che, per ogni $E \subset [-\pi, \pi)$ misurabile con $|E| < \delta_0$, si ha

$$\frac{1}{2\pi} \int_E |f_0|^p(\theta) d\theta < a. \quad (5.106)$$

Se $\delta = \min\{\delta_0, \dots, \delta_n\}$ e $g = \chi_{[-\pi, \pi) \setminus (-\delta/2, \delta/2)} \in L^1(\mathbf{S})$, allora

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} f_j(\theta) d\theta = \|g * f_j - f_j\|_{L^1(\mathbf{S})} < a \quad (5.107)$$

per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$, e

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} |f_0|^p(\theta) d\theta = \|g * f_0 - f_0\|_{L^p(\mathbf{S})} < a. \quad (5.108)$$

Cioè vale la proprietà 5 con $D = 1$ ($\|g\|_{L^1(\mathbf{S})} \leq 1$).

Dalla dimostrazione del teorema di fattorizzazione, si può prendere

$$\tilde{\sigma} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \chi_{[-\pi, \pi) \setminus (-\delta_k/2, \delta_k/2)} \quad (5.109)$$

dove la convergenza è in norma di $L^1(\mathbf{S})$.

Allora, $\tilde{\sigma} \in L^1(\mathbf{S})$ è non negativa, pari e non decrescente in $[0, \pi)$, cioè $\tilde{\sigma} = K$ è un nucleo. Questo segue dal fatto che la convergenza in norma $L^1(\mathbf{S})$ della serie $\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{2}{3})^k \chi_{[-\pi, \pi] \setminus (-\delta_k/2, \delta_k/2)}$ implica l'esistenza di una sottosuccessione della successione delle somme parziali convergente quasi ovunque a $\tilde{\sigma}$ e dal fatto che ogni $\sum_{k=1}^m (\frac{2}{3})^k \chi_{[-\pi, \pi] \setminus (-\delta_k/2, \delta_k/2)}$ è una funzione non negativa, pari e non decrescente in $[0, \pi)$.

Corollario 5.9.2 *Sia F una funzione armonica in \mathbf{D} ; indichiamo con $F_r(\theta) = F(re^{i\theta})$. Se $\{F_r\}_{r \in [0,1)}$ è limitata in $L^p(\mathbf{S})$ con $p \in (1, \infty)$, allora F ammette limite tangenziale quasi ovunque uguale a $\tilde{f} \in L^p(\mathbf{S})$ e F è l'integrale di Poisson di \tilde{f} .*

Dimostrazione. Per il teorema 2.3.2, F è l'integrale di Poisson di una $f \in L^p(\mathbf{S}) \subset L^1(\mathbf{S})$, quindi il limite tangenziale di F esiste quasi ovunque per le osservazioni precedenti ed è uguale ad f , cioè $\tilde{f} = f \in L^p(\mathbf{S})$. □

Corollario 5.9.3 *Sia F una funzione armonica in \mathbf{D} .*

Se F è limitata, allora F ammette limite tangenziale quasi ovunque uguale a $\tilde{f} \in L^\infty(\mathbf{S})$ e F è l'integrale di Poisson di \tilde{f} .

Dimostrazione. Per il teorema 2.3.2, F è l'integrale di Poisson di una $f \in L^\infty(\mathbf{S}) \subset L^1(\mathbf{S})$, quindi il limite tangenziale di F esiste quasi ovunque per le osservazioni precedenti ed è uguale ad f , cioè $\tilde{f} = f \in L^\infty(\mathbf{S})$. □

Appendice A

Abel-convergenza

In questa appendice dimostriamo un teorema, dovuto a Littlewood, sulla convergenza di una serie Abel-convergente (cf. [11]).

Questo risultato viene utilizzato nel paragrafo 5.8 per scrivere esplicitamente le regioni d'approccio $\Omega_{G,\alpha}^p(\theta)$, dove G è il nucleo di Bessel.

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \subset \mathbb{C}$ una successione tale che $\sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n < \infty$, per $r \in [0, 1)$; diciamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è Abel-convergente a $\ell \in \mathbb{C}$ se $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n = \ell$. In altre parole, una serie è $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Abel-convergente se la serie di potenze, che ha per coefficienti gli a_n , converge in 1.

La Abel-convergenza di una serie non implica, in generale, la convergenza della serie. Infatti, consideriamo la successione $\{(-1)^n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$. Allora, $\sum_{n=0}^N (-1)^n$ vale 0 se N è pari e 1 se N è dispari, quindi la $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ non converge. Mentre, se consideriamo la serie di potenze $\sum_{n=0}^N (-r)^n = 1/(1+r)$, questa tende a $1/2$ per r tendente a 1^- .

Esistono, comunque, delle condizioni sulla successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ di una serie Abel-convergente che garantiscono la convergenza della serie.

Supponiamo esista una costante $C > 0$ tale che $a_n \leq C/n$ per n tendente a ∞ ; il teorema di Littlewood afferma che la Abel-convergenza della serie implica la convergenza della serie.

Teorema A.0.4 (Littlewood) *Sia $C > 0$. Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Abel-convergente con $a_n \leq C/n$ per ogni $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ è convergente.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n = 0$.

Questo non è restrittivo. Infatti, possiamo sempre ricondurci a questo caso: sia $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n = \ell \neq 0$, allora la serie $(a_0 - \ell) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è Abel-convergente a 0.

Passo 1. Dimostriamo che, per ogni $\eta \in (0, 1/2)$ e per ogni $\delta > 0$, esiste un polinomio

omogeneo $P(r)$ tale che:

- (i) $0 \leq P(r) \leq 1$, per $r \in [0, 1]$;
- (ii) $P(r) \leq \delta r$, per $r \in \left[0, \frac{1}{2} - \eta\right]$;
- (iii) $1 - P(r) \leq \delta(1 - r)$, per $r \in \left[\frac{1}{2} + \eta, 1\right]$.

Definiamo $R_k(r) = [4r(1 - r)]^k$ e

$$P_k(r) = \frac{\int_0^r R_k(x) dx}{\int_0^1 R_k(x) dx}, \quad (\text{A.1})$$

per $r \in [0, 1]$ e $k \in \mathbb{N}$.

La funzione $P_k(r)$ è un polinomio perché integrale di un polinomio, ed è omogeneo perché $P_k(0) = 0$.

La prima proprietà segue dalla definizione.

Per provare (ii) e (iii), osserviamo che $4r(1 - r)$ è una parabola con vertice in $r = 1/2$ e concavità rivolta verso il basso. Quindi, per $r \in [0, 1] \setminus (1/2 - \eta, 1/2 + \eta)$, vale $R_k(r) \leq (1 - 4\eta^2)^k$. Inoltre,

$$\int_0^1 R_k(x) dx \geq \int_{\frac{1}{2}-\frac{k}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{k}{2}} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^k dx = \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^k \frac{1}{k} \quad (\text{A.2})$$

e $(1 - 1/k^2)^k/k \sim 1/k$ per $k \rightarrow \infty$. Allora,

$$P_k(r) \leq \sup_{r \in [0, \frac{1}{2}-\eta]} R_k(r) \frac{\int_0^r dx}{\int_0^1 R_k(x) dx} \leq (1 - 4\eta^2)^k \frac{r}{\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^k \frac{1}{k}} \quad (\text{A.3})$$

e

$$1 - P_k(r) = \frac{\int_r^1 R_k(x) dx}{\int_0^1 R_k(x) dx} \leq \sup_{r \in [0, \frac{1}{2}-\eta]} R_k(r) \frac{\int_r^1 dx}{\int_0^1 R_k(x) dx} \leq (1 - 4\eta^2)^k \frac{1 - r}{\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^k \frac{1}{k}}. \quad (\text{A.4})$$

Osservando che

$$\frac{(1 - 4\eta^2)^k}{\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)^k \frac{1}{k}} \sim (1 - 4\eta^2)^k k \rightarrow 0 \quad (\text{A.5})$$

per $k \rightarrow \infty$, esiste un $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{(1 - 4\eta^2)^{k_0}}{\left(1 - \frac{1}{k_0^2}\right)^{k_0} \frac{1}{k_0}} \leq \delta. \quad (\text{A.6})$$

Perciò, per $r \in [0, 1/2 - \eta]$, $P_{k_0}(r) \leq \delta r$ e, per $r \in [1/2 + \eta, 1]$, $P_{k_0}(r) \leq \delta r$.

Allora, abbiamo provato (ii) e (iii) per $P(r) = P_{k_0}(r)$, cioè $P_{k_0}(r)$ è il polinomio cercato.
Passo 2. Dimostriamo l'enunciato del teorema.

Sia $P(r) = c_1 r + \dots + c_d r^d$ un polinomio di grado d omogeneo. Osserviamo che, per $r \in [0, 1)$, essendo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Abel-convergente, vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P(r^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (c_1 r^n + \dots + c_d r^{nd}) = c_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n + \dots + c_d \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r^d)^n. \quad (\text{A.7})$$

Allora, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n P(r^n) \rightarrow 0$ per $r \rightarrow 1^-$.

Per $r \in (0, 1)$, sia $N = N(r)$ il più grande intero tale che $N \leq \log(\frac{1}{2} - \eta)/\log r$ e sia $N' = N'(r)$ il più piccolo intero tale che $N' \geq \log(\frac{1}{2} + \eta)/\log r$.

Osserviamo che N e N' sono crescenti, assumono tutti i valori di \mathbb{N} e $N < N'$. Inoltre, per definizione, valgono le disuguaglianze $N - 1 > \log(\frac{1}{2} - \eta)/\log r$ e $N' + 1 < \log(\frac{1}{2} + \eta)/\log r$; quindi, $N \sim \log(\frac{1}{2} - \eta)/\log r$ e $N' \sim \log(\frac{1}{2} + \eta)/\log r$ per $r \rightarrow 1^-$.

Sia $\epsilon > 0$; osservando che

$$\frac{N' - N}{N} \sim \frac{\log(\frac{1}{2} + \eta)}{\log(\frac{1}{2} - \eta)} - 1 \quad (\text{A.8})$$

per $r \rightarrow 1^-$, esiste un $\eta \in (0, \frac{1}{2})$ tale che $(N' - N)/N < \epsilon$. Sia $\epsilon > \delta > 0$ e $P(r)$ come nel passo precedente. Allora,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n P(r^n) - \sum_{n=0}^N a_n &= \sum_{n=1}^N a_n [P(r^n) - 1] + \sum_{n=N+1}^{N'} a_n P(r^n) + \sum_{n=N'+1}^{\infty} a_n P(r^n) \\ &= A(r) + B(r) + C(r). \end{aligned}$$

Stimiamo $A(r)$, $B(r)$ e $C(r)$:

$$|A(r)| \leq \delta \sum_{n=1}^N \frac{C}{n} (1 - r^n) \leq C\delta \sum_{n=1}^N (1 - r) = C\delta N(1 - r),$$

$$|B(r)| \leq \sum_{n=N+1}^{N'} \frac{C}{n} < C \frac{N' - N}{N},$$

$$|C(r)| \leq C\delta \sum_{n=N'+1}^{\infty} \frac{r^n}{n} < C\delta \frac{1}{N'(1 - r)}.$$

Siccome $(N' - N)/N \sim \log(\frac{1}{2} + \eta)/\log(\frac{1}{2} - \eta) - 1$, $\limsup_{r \rightarrow 1^-} |B(r)| \leq C\epsilon$. Osservando che $N(1 - r)$ e $N'(1 - r)$ hanno limite finito diverso da zero, $\limsup_{r \rightarrow 1^-} |A(r)| \leq C_1\epsilon$ e $\limsup_{r \rightarrow 1^-} |C(r)| \leq C_2\epsilon$ dove $C_1, C_2 > 0$. Da $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} r^n a_n = 0$, si ha che $\limsup_{r \rightarrow 1^-} |\sum_{n=0}^N a_n| \leq D\epsilon$ con $D > 0$. La tesi segue dal fatto che ϵ è arbitrario. \square

Appendice B

Un teorema di fattorizzazione

In questa appendice dimostriamo un teorema di fattorizzazione astratto per algebre di Banach (cf. [4]).

Nel paragrafo 5.9, utilizzando questo risultato, proviamo che l'integrale di Poisson di f converge tangenzialmente in quasi ogni punto di \mathbf{S} .

Definizione B.0.5 *Un'algebra complessa A è uno spazio vettoriale complesso in cui è definito un prodotto che soddisfa le proprietà*

$$\begin{aligned}x(yz) &= (xy)z \\(x + y)z &= xz + yz, x(y + z) = xy + xz \\ \lambda(xy) &= (\lambda x)y = x(\lambda y)\end{aligned}$$

per ogni $x, y, z \in A$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Inoltre, se A è uno spazio di Banach e la norma soddisfa la disuguaglianza

$$\|xy\|_A \leq \|x\|_A \|y\|_A \tag{B.1}$$

per ogni $x, y \in A$, allora diciamo che A è un'algebra di Banach complessa.

Siano \tilde{A} , A due algebre di Banach complesse. Consideriamo una funzione $\bullet : \tilde{A} \times A \rightarrow A$ che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $(\tilde{x} + \tilde{y}) \bullet z = \tilde{x} \bullet z + \tilde{y} \bullet z$ per ogni $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{A}$, $z \in A$;
2. $(\lambda \tilde{x}) \bullet y = \lambda(\tilde{x} \bullet y) = \tilde{x} \bullet (\lambda y)$ per ogni $\tilde{x} \in \tilde{A}$, $y \in A$;
3. $(\tilde{x}\tilde{y}) \bullet z = \tilde{x} \bullet (\tilde{y} \bullet z)$ per ogni $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{A}$, $z \in A$;

4. esiste una costante $C \geq 1$ tale che $\|\tilde{x} \bullet y\|_A \leq C \|\tilde{x}\|_{\tilde{A}} \|y\|_A, \forall \tilde{x} \in \tilde{A}, \forall y \in A$;
5. esiste una costante $D > 0$ tale che, per ogni $\{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n\} \in \tilde{A}, x \in A$ e $a > 0$, esiste $\tilde{\nu} \in \tilde{A}$ con $\|\tilde{\nu}\|_{\tilde{A}} \leq D$ tale che $\|\tilde{\nu}\tilde{x}_i - \tilde{x}_i\|_{\tilde{A}} < a$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ e $\|\tilde{\nu} \bullet x - x\|_A < a$.

Consideriamo $\tilde{A}_{(1)}$ l'algebra complessa ottenuta aggiungendo ad \tilde{A} l'algebra complessa \mathbb{C} , cioè $\tilde{A}_{(1)} = \mathbb{C} \oplus \tilde{A} = \{\lambda \oplus \tilde{x} \mid \tilde{x} \in \tilde{A}, \lambda \in \mathbb{C}\}$.

La somma, il prodotto ed il prodotto scalare su $\tilde{A}_{(1)}$ sono definiti da

$$\begin{aligned} \lambda_1 \oplus \tilde{x}_1 + \lambda_2 \oplus \tilde{x}_2 &= (\lambda_1 + \lambda_2) \oplus (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2) \\ (\lambda_1 \oplus \tilde{x}_1)(\lambda_2 \oplus \tilde{x}_2) &= (\lambda_1 \lambda_2) \oplus (\tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + \tilde{x}_1 \lambda_2 + \tilde{x}_2 \lambda_1) \\ \mu(\lambda \oplus \tilde{x}) &= (\mu \lambda) \oplus (\mu \tilde{x}). \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che queste operazioni rendono $\tilde{A}_{(1)}$ effettivamente un'algebra complessa.

Inoltre, se \tilde{A} è un'algebra di Banach, anche $\tilde{A}_{(1)}$ si dimostra essere un'algebra di Banach dove la norma è definita da $\|\lambda \oplus \tilde{x}\|_{\tilde{A}_{(1)}} = \|\tilde{x}\|_{\tilde{A}} + |\lambda|$.

Consideriamo la funzione $\bullet : \tilde{A}_{(1)} \times A \rightarrow A$ definita da $(\lambda \oplus \tilde{x}) \bullet y = \tilde{x} \bullet y + \lambda y$ (questa funzione è l'estensione di $\bullet : \tilde{A} \times A \rightarrow A$ a $\tilde{A}_{(1)} \times A$).

Le proprietà 1, 2 e 3 per la nuova funzione \bullet seguono dalla definizione data per le operazioni in $\tilde{A}_{(1)}$.

Dimostriamo che vale la 4:

$$\begin{aligned} \|(\lambda \oplus \tilde{x}) \bullet y\|_A = \|\tilde{x} \bullet y + \lambda y\|_A &\leq \|\tilde{x} \bullet y\|_A + \|\lambda y\|_A \\ &\leq C \|\tilde{x}\|_{\tilde{A}} \|y\|_A + |\lambda| \|y\|_A = C \left(\|\tilde{x}\|_{\tilde{A}} + \frac{|\lambda|}{C} \right) \|y\|_A \\ &\leq C(\|\tilde{x}\|_{\tilde{A}} + |\lambda|) \|y\|_A = \|\lambda \oplus \tilde{x}\|_{\tilde{A}_{(1)}} \|y\|_A, \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è valida perché $C \geq 1$.

Lemma B.0.6 *Sia $D \geq 1$. Per ogni $\tilde{x} \in \tilde{A}$ con $\|\tilde{x}\|_{\tilde{A}} \leq D$, consideriamo $\tilde{\varphi}_{\tilde{x}} \in \tilde{A}_{(1)}$ l'elemento*

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{x}} = \frac{2D+1}{2D} \left[1 \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2D)^n} \tilde{x}^n \right]. \quad (\text{B.2})$$

Allora:

$$(i) \left[\frac{2D}{2D+1} \oplus \frac{1}{2D+1} \tilde{x} \right] \tilde{\varphi}_{\tilde{x}} = 1 \oplus 0_{\tilde{A}};$$

$$(ii) \|\tilde{\varphi}_{\tilde{x}} \bullet y - y\|_A \leq \left(2 + \frac{1}{D}\right) C \|\tilde{x} \bullet y - y\|_A;$$

$$(iii) \|\tilde{\varphi}_{\tilde{x}}\|_{\tilde{A}(1)} \leq 2 + \frac{1}{D}.$$

Dimostrazione. Dimostriamo che $\tilde{\varphi}_{\tilde{x}}$ è ben definito, cioè che $\sum_{n=1}^{\infty} (-2D)^{-n} \tilde{x}^n$ converge in \tilde{A} .

Infatti, questa serie converge totalmente per la disuguaglianza $\|\tilde{x}^n\|_{\tilde{A}} \leq D^n$ e dalla convergenza della serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$.

Dimostriamo (i). Dall'uguaglianza

$$\frac{2D+1}{2D} \left[1 \oplus \frac{\tilde{x}}{2D}\right] \left[1 \oplus \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(2D)^k} \tilde{x}^k\right] = \frac{2D+1}{2D} \left[1 \oplus \frac{(-1)^{n+1}}{(2D)^{n+1}} \tilde{x}^{n+1}\right], \quad (B.3)$$

facendo il limite su n , si ottiene

$$\left[\frac{2D}{2D+1} \oplus \frac{1}{2D+1} \tilde{x}\right] \tilde{\varphi}_{\tilde{x}} = 1 \oplus 0_{\tilde{A}}. \quad (B.4)$$

Dimostriamo (ii). Segue dalla definizione di $\tilde{\varphi}_{\tilde{x}}$:

$$\tilde{\varphi}_{\tilde{x}} \bullet y - y = \frac{2D+1}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2D)^n} (\tilde{x}^n \bullet y - y), \quad (B.5)$$

allora

$$\|\tilde{\varphi}_{\tilde{x}} \bullet y - y\|_A \leq \frac{2D+1}{2D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2D)^n} \|\tilde{x}^n \bullet y - y\|_A. \quad (B.6)$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}_{\tilde{x}} \bullet y - y\|_A &\leq \sum_{k=1}^n \|\tilde{x}^k \bullet y - \tilde{x}^{k-1} \bullet y\|_A \leq \sum_{k=1}^n C \|\tilde{x}^{k-1}\|_{\tilde{A}} \|\tilde{x} \bullet y - y\|_A \\ &\leq nCD^n \|\tilde{x} \bullet y - y\|_A. \end{aligned}$$

Allora, si ottiene

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}_{\tilde{x}} \bullet y - y\|_A &\leq \frac{2D+1}{2D} \left(\sum_{n=1}^{\infty} nC2^{-n} \right) \|\tilde{x} \bullet y - y\|_A \\ &= C \left(2 + \frac{1}{D}\right) \|\tilde{x} \bullet y - y\|_A. \end{aligned}$$

Dimostriamo (iii). Ricordando che $\|\tilde{x}\|_{\tilde{A}} \leq D$,

$$\|\tilde{\varphi}_{\tilde{x}}\|_{\tilde{A}_{(1)}} = \left\| \frac{2D+1}{2D} \left[1 \oplus \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2D)^n} \tilde{x}^n \right] \right\|_{\tilde{A}_{(1)}} \leq \frac{2D+1}{2D} 2 = 2 + \frac{1}{D},$$

ovvero la tesi. □

Lemma B.0.7 *Sia $a > 0$, $y \in A$ e $D > 0$ una costante che soddisfi le richieste della proprietà 5. Allora, esiste una successione $\{\tilde{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \tilde{A}$ in norma limitata da D , tale che*

$$\|\tilde{\sigma}_n^{-1} \bullet y - \tilde{\sigma}_{n-1}^{-1} \bullet y\|_A \leq \frac{a}{2^n}, \quad (\text{B.7})$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, dove $\tilde{\sigma}_0 = 1 \oplus 0_{\tilde{A}}$ e

$$\tilde{\sigma}_n = \frac{(2D)^n}{(2D+1)^n} \oplus \frac{1}{2D} \sum_{k=1}^n \frac{(2D)^k}{(2D+1)^k} \tilde{x}_k, \quad (\text{B.8})$$

per $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. Dimostriamolo per induzione. Poiché D è tale per cui vale la proprietà 5, esiste un $\tilde{x}_1 \in \tilde{A}$ con $\|\tilde{x}_1\|_{\tilde{A}} \leq D$ e $\|\tilde{x}_1 \bullet y - y\|_A \leq aD/[2C(2D+1)]$.

Allora, definiamo

$$\tilde{\sigma}_1 = \frac{2D}{2D+1} \oplus \frac{1}{2D+1} \tilde{x}_1. \quad (\text{B.9})$$

Osserviamo che $\tilde{\sigma}_1^{-1} = \tilde{\varphi}_{\tilde{x}}$ (per il lemma precedente). Quindi $\tilde{\sigma}_1$ ha inverso in $\tilde{A}_{(1)}$ e

$$\|\tilde{\sigma}_1^{-1} \bullet y - \tilde{\sigma}_0^{-1} \bullet y\|_A \leq \left(2 + \frac{1}{D}\right) C \|\tilde{x}_1 \bullet y - y\|_A \leq \frac{a}{2}. \quad (\text{B.10})$$

Perciò vale la tesi per $n = 1$.

Supponiamo, per induzione, di aver definito $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_m$, e che valga la tesi per $n \in \{1, \dots, m\}$; definiamo \tilde{x}_{m+1} . Fissiamo $\epsilon > 0$. Per la proprietà 5, esiste $\tilde{x}' \in \tilde{A}$ con $\|\tilde{x}'\|_{\tilde{A}} \leq D$ tale che

$$\left\| \tilde{x}' \tilde{x}_n - \tilde{x}_n \right\|_{\tilde{A}} < \epsilon, \quad (\text{B.11})$$

per $n \in \{1, \dots, m\}$, e

$$\left\| \tilde{x}' \bullet y - y \right\|_A < \epsilon. \quad (\text{B.12})$$

Consideriamo l'elemento $\tilde{\sigma}'_{m+1} \in \tilde{A}_{(1)}$ definito da

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}'_{m+1} &= \frac{(2D)^{m+1}}{(2D+1)^{m+1}} \oplus \left[\frac{1}{2D} \sum_{k=1}^m \frac{(2D)^k}{(2D+1)^k} \tilde{x}_k + \frac{1}{2D} \frac{(2D)^{m+1}}{(2D+1)^{m+1}} \tilde{x}' \right] \\ &= \left(\frac{2D}{2D+1} \oplus \frac{1}{2D+1} \tilde{x}' \right) \tilde{\tau}'_m,\end{aligned}$$

dove

$$\tilde{\tau}'_m = \frac{(2D)^m}{(2D+1)^m} \oplus \frac{1}{2D} \sum_{k=1}^m \frac{(2D)^k}{(2D+1)^k} \tilde{\varphi}_{\tilde{x}'} \tilde{x}_k. \quad (\text{B.13})$$

Affinchè valga la tesi, questo $\tilde{\sigma}'_{m+1}$ deve soddisfare la disuguaglianza dell'enunciato. Se $\tilde{\tau}'_m$ fosse invertibile, potremmo scrivere

$$\begin{aligned}\|(\tilde{\sigma}'_{m+1})^{-1} \bullet y - \tilde{\sigma}_m^{-1} \bullet y\|_A &= \|(\tilde{\tau}'_m)^{-1} \tilde{\varphi}_{\tilde{x}'} \bullet y - \tilde{\sigma}_m^{-1} \bullet y\|_A \\ &\leq \|(\tilde{\tau}'_m)^{-1} \tilde{\varphi}_{\tilde{x}'} \bullet y - (\tilde{\sigma}_m^{-1} \tilde{\varphi}_{\tilde{x}'} \bullet y)\|_A + \|(\tilde{\sigma}_m^{-1} \tilde{\varphi}_{\tilde{x}'} \bullet y - \tilde{\sigma}_m^{-1} \bullet y)\|_A \\ &\leq C \|\tilde{\tau}'_m^{-1} - \tilde{\sigma}_m^{-1}\|_{\tilde{A}} \|\tilde{\varphi}_{\tilde{x}'}\|_{\tilde{A}_{(1)}} \|y\|_A + C \|\tilde{\sigma}_m^{-1}\|_{\tilde{A}} \|\tilde{\varphi}_{\tilde{x}'} \bullet y - y\|_A.\end{aligned}$$

Proviamo che $\tilde{\tau}'_m$ è invertibile. Osserviamo che l'insieme degli elementi invertibili di $\tilde{A}_{(1)}$ è aperto e che l'applicazione $\tilde{\chi} \rightarrow \tilde{\chi}^{-1}$ è un omeomorfismo su questo insieme. Ricordiamo che $\tilde{\sigma}_m$ è invertibile per ipotesi di induzione; quindi esiste una bolla di raggio $\delta > 0$ tale che, per ogni elemento di $\tilde{A}_{(1)}$ che dista da $\tilde{\sigma}_m$ meno di δ , questo elemento è invertibile. Perciò, se $\tilde{\tau}'_m$ è tale che $\|\tilde{\tau}'_m - \tilde{\sigma}_m\|_{\tilde{A}_{(1)}} < \delta$, $\tilde{\tau}'_m$ è invertibile. Inoltre, poiché $\tilde{\chi} \rightarrow \tilde{\chi}^{-1}$ è un omeomorfismo, $\|\tilde{\tau}'_m^{-1} - \tilde{\sigma}_m^{-1}\|_{\tilde{A}_{(1)}} < \eta(\delta)$ dove $\eta(\delta) > 0$ e $\lim_{\delta \rightarrow 0} \eta(\delta) = 0$.

Applichiamo il punto (ii) del lemma precedente con \tilde{A} al posto di A , e dove \bullet è il prodotto di \tilde{A} (allora $C = 1$):

$$\begin{aligned}\|\tilde{\tau}'_m^{-1} - \tilde{\sigma}_m^{-1}\|_{\tilde{A}_{(1)}} &= \left\| 0 \oplus \frac{1}{2D} \sum_{k=1}^m \frac{(2D)^k}{(2D+1)^k} (\tilde{\varphi}_{\tilde{x}'} \tilde{x}_k - \tilde{x}_k) \right\|_{\tilde{A}_{(1)}} \\ &\leq \frac{1}{2D} \sum_{k=1}^m \frac{(2D)^k}{(2D+1)^k} \|\tilde{\varphi}_{\tilde{x}'} \tilde{x}_k - \tilde{x}_k\|_{\tilde{A}} \\ &\leq \frac{1}{D} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2D)^k}{(2D+1)^k} \|\tilde{x}' \tilde{x}_k - \tilde{x}_k\|_{\tilde{A}} < \epsilon m C_1.\end{aligned}$$

Quindi, oltre ad aver provato che $\tilde{\tau}'_m$ è invertibile, abbiamo ottenuto la maggiorazione

$$\|\tilde{\tau}'_m^{-1} - \tilde{\sigma}_m^{-1}\|_{\tilde{A}_{(1)}} < \eta(\epsilon m C_1), \quad (\text{B.14})$$

che implica

$$\begin{aligned} \left\| (\tilde{\sigma}'_{m+1})^{-1} \bullet y - \tilde{\sigma}_m^{-1} \bullet y \right\|_A &\leq C \left\| \tilde{\tau}'_m^{-1} - \tilde{\sigma}_m^{-1} \right\|_{\tilde{A}} \|\tilde{\varphi}_{\tilde{x}'}\|_{\tilde{A}_{(1)}} \|y\|_A + C \|\tilde{\sigma}_m^{-1}\|_{\tilde{A}} \|\tilde{\varphi}_{\tilde{x}'} \bullet y - y\|_A \\ &\leq \eta(\epsilon m C_1) C \left(2 + \frac{1}{D}\right) \|y\|_A + \epsilon C \left(2 + \frac{1}{D}\right) \|\tilde{\sigma}_m^{-1}\|_{\tilde{A}}. \end{aligned}$$

Infatti, $\|\tilde{\varphi}_{\tilde{x}'}\|_{\tilde{A}_{(1)}} \leq 2 + 1/D$ per il punto (iii) del lemma precedente; per il punto (ii) dello stesso lemma

$$\|\tilde{\varphi}_{\tilde{x}'} \bullet y - y\|_A \leq \left(2 + \frac{1}{D}\right) C \|\tilde{x}' \bullet y - y\|_A < \left(2 + \frac{1}{D}\right) C \epsilon. \quad (\text{B.15})$$

Quindi, fissando $\epsilon > 0$ tale che

$$\eta(\epsilon m C_1) C \left(2 + \frac{1}{D}\right) \|y\|_A + \epsilon C \left(2 + \frac{1}{D}\right) \|\tilde{\sigma}_m^{-1}\|_{\tilde{A}} < \frac{a}{2^{m+1}}, \quad (\text{B.16})$$

si ottiene

$$\left\| (\tilde{\sigma}'_{m+1})^{-1} \bullet y - \tilde{\sigma}_m^{-1} \bullet y \right\|_A \leq \frac{a}{2^{m+1}}, \quad (\text{B.17})$$

ovvero la tesi. □

Teorema B.0.8 *Sia $z \in A$. Allora, esistono $\tilde{\sigma} \in \tilde{A}$ e y appartenente alla chiusura di $\tilde{A} \bullet z$ in A tali che*

$$z = \tilde{\sigma} \bullet y. \quad (\text{B.18})$$

Dimostrazione. Se $z = 0_A$, allora basta prendere $y = 0_A$ e $\tilde{\sigma} \in \tilde{A}$.

Sia $z \neq 0_A$; definiamo $y_n = \tilde{\sigma}_n^{-1} \bullet z$, per $n \in \mathbb{N}$, dove $\tilde{\sigma}_n^{-1}$ sono definite nel lemma precedente. Allora,

$$\|y_m - y_{m+k}\|_A \leq \frac{a}{2^m}, \quad (\text{B.19})$$

per ogni $m, k \in \mathbb{N}$.

Quindi, $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy in A , da cui segue che $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge ad un $y \in A$. Inoltre, la proprietà 5 implica che z appartiene alla chiusura di $A \bullet y$, quindi vi appartengono y_n e y .

Osserviamo che il limite per $n \rightarrow \infty$ di $\tilde{\sigma}_n$ è

$$\tilde{\sigma} = 0 \oplus \frac{1}{2D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2D)^k}{(2D+1)^k} \tilde{x}_k = \frac{1}{2D} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2D)^k}{(2D+1)^k} \tilde{x}_k, \quad (\text{B.20})$$

che appartiene a \tilde{A} .

Per come abbiamo definito gli y_n , $z = \tilde{\sigma}_n \bullet y_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora,

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{\sigma}_n \bullet y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\sigma}_n \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sigma \bullet y, \quad (\text{B.21})$$

ovvero la tesi. □

Bibliografia

- [1] Aikawa, H.: *Harmonic functions having no tangential limits*, Proc. Amer. Math. Soc. **108**(1990), 457-464.
- [2] Brezis, H.: *Analisi Funzionale*, Liguori Editore, 1990.
- [3] Garsia, A.: *Topics in almost everywhere convergence*, Markham Publishing Company, 1970.
- [4] Hewitt, E.: *The ranges of certain convolution operators*, Math. Scand. **15**(1964), 147-155.
- [5] Hoffman, K.: *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, Inc., 1962.
- [6] Katznelson, Y. *An introduction to Harmonic Analysis*, Wiley, New York, 1968.
- [7] Nagel, A., Rudin, W. and Shapiro, J. H.: *Tangential boundary behavior of function in Dirichlet-type spaces*, Ann. of Math. **116**(1982), 331-360.
- [8] Rudin, W.: *Analisi reale e complessa*, Bollati Boringhieri, 1974.
- [9] Sawyer, S.: *Maximal inequalities of weak type*, Ann. Math. **84**(1966), 157-173.
- [10] Zygmund, A.: *On a theorem of Littlewood*, Summa Brasiliensis Math. **2**(1949), 1-7.
- [11] Zygmund, A.: *Trigonometric series*, Cambridge University Press, 1959.