Grandezza topologica: teorema di Baire, gioco di Banach-Mazur e applicazioni

Andrea Marchese

Queste note raccolgono il contenuto di un mini-corso di tre lezioni, per un totale di sei ore, tenuto nella primavera 2026 per studenti del primo anno del corso di laurea in Matematica dell'Università di Trento.
Le conoscenze richieste sono essenziali: sono sufficienti le nozioni di base di topologia degli spazi metrici, successioni, continuità e completezza, oltre agli strumenti del primo semestre di Analisi.

Obiettivo della prima lezione. In questa lezione introduciamo le classi di insiemi G_δ e F_σ, le nozioni di insieme mai denso, magro e residuale, e dimostriamo il teorema di Baire per spazi metrici completi. Come prima applicazione mostreremo che $\mathbb{Q}$ non è un G_δ in $\mathbb{R}$.

1 Richiami e notazioni

Sia (X, d) uno spazio metrico. Per $x \in X$ e $r > 0$ indichiamo con

$$B(x, r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

la *palla aperta* di centro x e raggio r, e con

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$$

la *palla chiusa* di centro x e raggio r.

Se $A \subseteq X$, scriviamo $\mathrm{int}(A)$ per l'interno di A, $\mathrm{cl}(A)$ per la sua chiusura, e

$$\mathrm{dist}(x, A) := \inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

per la distanza di un punto x dall'insieme A, con la convenzione $\mathrm{dist}(x, \varnothing) = +\infty$.

Ricordiamo che un insieme $D \subseteq X$ si dice *denso* in X se $\mathrm{cl}(D) = X$.

Lemma 1.1. *Sia (X, d) uno spazio metrico.*

(i) Se $F \subseteq X$ è chiuso, allora per ogni $x \in X$

$$\mathrm{dist}(x, F) = 0 \iff x \in F.$$

(ii) Se $U \subseteq X$ è aperto e denso, e $A \subseteq X$ è aperto non vuoto, allora $A \cap U \neq \varnothing$. Inoltre esistono $x \in X$ e $r > 0$ tali che

$$\overline{B}(x, r) \subseteq A \cap U.$$

Dimostrazione. (i) Se $x \in F$, allora ovviamente $\mathrm{dist}(x, F) = 0$. Viceversa, se $\mathrm{dist}(x, F) = 0$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $y_n \in F$ tale che

$$d(x, y_n) < \frac{1}{n}.$$

Quindi $y_n \to x$. Poiché F è chiuso, segue $x \in F$.

(ii) Se per assurdo $A \cap U = \varnothing$, allora A è un aperto non vuoto contenuto in $X \setminus U$, in contraddizione con il fatto che $X \setminus U$ ha interno vuoto, perché un punto interno a $X \setminus U$ non starebbe in $\mathrm{cl}(U) = X$. Inoltre $A \cap U$ è aperto, essendo intersezione di due aperti; quindi contiene una palla aperta, quindi anche una palla chiusa di raggio più piccolo. □

2 Insiemi G_δ e F_σ

Definizione 2.1. Sia (X, d) uno spazio metrico.

- Un insieme $A \subseteq X$ si dice G_δ se esistono aperti $U_1, U_2, \dots \subseteq X$ tali che $A = \bigcap_{m=1}^{\infty} U_m$.
- Un insieme $A \subseteq X$ si dice F_σ se esistono chiusi $F_1, F_2, \dots \subseteq X$ tali che $A = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$.

La notazione è storica: G deriva dal tedesco *Gebiet* ("aperto") e δ richiama *Durchschnitt* ("intersezione"); analogamente, F deriva dal francese *Fermé* ("chiuso"), mentre σ richiama il tedesco *Summe* e indica un'unione numerabile.

Proposizione 2.2. *In ogni spazio metrico valgono i fatti seguenti.*

(i) Ogni chiuso è un G_δ (e naturalmente anche un F_σ).

(ii) Il complementare di un G_δ è un F_σ e viceversa.

Dimostrazione. (i) Sia $F \subseteq X$ chiuso. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$U_n := \{x \in X : \mathrm{dist}(x, F) < 1/n\}.$$

La funzione $x \mapsto \mathrm{dist}(x, F)$ è continua, quindi U_n è aperto. Inoltre

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{x \in X : \mathrm{dist}(x, F) = 0\} = F$$

per il Lemma 1.1(i).

(ii) Segue immediatamente dalle leggi di De Morgan:

$$\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\Big)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c, \qquad \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c.$$

□

Esempio 2.3. In $\mathbb{R}$ valgono i fatti seguenti.

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è un G_δ, perché $\mathbb{Q}$ è numerabile, dunque è un F_σ.
- L'intervallo $[a, b)$ è sia G_δ sia F_σ:

  $$[a, b) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - 1/n, b)$$

  e anche

  $$[a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a, b - 1/n].$$

3 Una domanda naturale: i razionali sono un G_δ?

Fissiamo una numerazione dei razionali,

$$\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, q_3, \dots\},$$

e per ogni $j \in \mathbb{N}$ consideriamo l'insieme aperto

$$U_j := \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(q_i - 2^{-(i+j)},\ q_i + 2^{-(i+j)}\right).$$

È chiaro che $\mathbb{Q} \subseteq U_j$ per ogni j, e quindi $\mathbb{Q} \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$. Poiché per j grande gli intervalli sono molto piccoli, si potrebbe essere tentati di concludere che $\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j = \mathbb{Q}$. Questa conclusione, però, è falsa.

Proposizione 3.1. *Esiste una numerazione* $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ *tale che* $\sqrt{2} \in \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$.

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ scegliamo un razionale r_n tale che

$$|r_n - \sqrt{2}| < 2^{-(n^2+n)}.$$

Questo è possibile perché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

Ora costruiamo una numerazione dei razionali imponendo che

$$q_{n^2} = r_n \qquad \text{per ogni } n \in \mathbb{N},$$

e completando poi la numerazione con tutti gli altri razionali.

Fissato $j \in \mathbb{N}$, scegliamo $i = j^2$. Allora

$$|q_i - \sqrt{2}| = |q_{j^2} - \sqrt{2}| = |r_j - \sqrt{2}| < 2^{-(j^2+j)} = 2^{-(i+j)}.$$

Quindi $\sqrt{2}$ appartiene all'intervallo

$$\left(q_i - 2^{-(i+j)}, q_i + 2^{-(i+j)}\right) \subseteq U_j.$$

Poiché questo vale per ogni j, segue che $\sqrt{2} \in \bigcap_j U_j$. $\square$

Osservazione 3.2. La proposizione precedente mostra dov'è l'errore nella "falsa dimostrazione": il fatto che gli intorni attorno ai razionali diventino piccoli non implica che un irrazionale venga escluso a un certo passo.

4 Insiemi mai densi, magri e residuali

Definizione 4.1. Sia (X, d) uno spazio metrico.

- Un insieme $A \subseteq X$ si dice *mai denso* se

$$\operatorname{int}(\operatorname{cl}(A)) = \varnothing.$$

- Un insieme $M \subseteq X$ si dice *magro* o *di prima categoria* se è contenuto in un'unione numerabile di insiemi mai densi.
- Un insieme $R \subseteq X$ si dice *residuale* se $X \setminus R$ è magro.

Osservazione 4.2. Se A è mai denso, allora non è denso in nessun aperto non vuoto. Inoltre, un insieme numerabile di punti in $\mathbb{R}$ è magro, perché ogni singoletto è mai denso.

Osservazione 4.3. Un insieme magro può essere denso. L'esempio più semplice è $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

5 Il teorema di Baire

Teorema 5.1 (Teorema di Baire)**.** *Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Se $G_1, G_2, \dots \subseteq X$ sono aperti densi, allora $\bigcap_{m=1}^{\infty} G_m$ è denso in X. In particolare, è non vuoto.*

Dimostrazione. Per mostrare che l'intersezione è densa, prendiamo un aperto non vuoto $O \subseteq X$ e dimostriamo che

$$O \cap \bigcap_{m=1}^{\infty} G_m \neq \varnothing.$$

Poiché G_1 è aperto e denso, il Lemma 1.1(ii) applicato a $A = O$ implica l'esistenza di $x_1 \in X$ e $r_1 > 0$ tali che

$$\overline{B}(x_1, r_1) \subseteq O \cap G_1.$$

Possiamo anche richiedere $r_1 < 1/2$.

Supponiamo ora di avere costruito $x_n \in X$ e $r_n > 0$ tali che

$$\overline{B}(x_n, r_n) \subseteq G_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \qquad (n \geq 2)$$

e inoltre $r_n < 2^{-n}$.

Poiché G_{n+1} è aperto e denso, il Lemma 1.1(ii), applicato all'aperto non vuoto $B(x_n, r_n)$, implica l'esistenza di $x_{n+1} \in X$ e $r_{n+1} > 0$ tali che

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n) \cap G_{n+1},$$

con $r_{n+1} < 2^{-(n+1)}$.

Abbiamo così costruito una successione di palle chiuse inscatolate. Per ogni $m \geq n$ si ha $x_m \in B(x_n, r_n)$, quindi

$$d(x_m, x_n) < r_n < 2^{-n}.$$

Dunque (x_n) è di Cauchy. Poiché X è completo, esiste $x_\infty \in X$ tale che $x_n \to x_\infty$.

Fissato n, la coda $(x_m)_{m \geq n}$ è contenuta in $\overline{B}(x_n, r_n)$, che è chiusa, da cui deduciamo

$$x_\infty \in \overline{B}(x_n, r_n) \subseteq G_n.$$

Poiché questo vale per ogni n, segue che $x_\infty \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Inoltre $x_\infty \in \overline{B}(x_1, r_1) \subseteq O$. Quindi

$$x_\infty \in O \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

come volevamo. □

Osservazione 5.2. L'intersezione numerabile di aperti densi *non è necessariamente densa* in uno spazio metrico arbitrario. Un controesempio semplice si ottiene nello spazio metrico $X = \mathbb{Q}$ con la metrica euclidea.

Fissiamo una numerazione $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$. Per ogni n, poniamo

$$E_n := \mathbb{Q} \setminus \{q_n\}.$$

Allora ogni E_n è aperto e denso in $\mathbb{Q}$, ma $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \varnothing$.

Proposizione 5.3. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Per un sottoinsieme $R \subseteq X$ sono equivalenti:*

(i) R è residuale;

(ii) R contiene un insieme G_δ denso.

Dimostrazione. (i) $\Rightarrow$ (ii). Poiché R è residuale, l'insieme $X \setminus R$ è magro. Dunque esistono insiemi $A_n \subseteq X$ mai densi tali che

$$X \setminus R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Poniamo

$$G_n := X \setminus \mathrm{cl}(A_n).$$

Allora ogni G_n è aperto e denso: è aperto perché complementare di un chiuso, ed è denso perché A_n è mai denso, cioè $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(A_n)) = \varnothing$. Inoltre

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{cl}(A_n) \subseteq X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq R.$$

Per il teorema di Baire, $\bigcap_n G_n$ è denso. Dunque R contiene un G_δ denso.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Supponiamo che $R \supseteq G$, dove $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, con ogni G_n aperto e denso. Allora

$$X \setminus R \subseteq X \setminus G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus G_n).$$

Ogni $X \setminus G_n$ è chiuso e ha interno vuoto, perché G_n è denso. Quindi $X \setminus G_n$ è mai denso. Ne segue che $X \setminus R$ è magro, cioè R è residuale. □

Definizione 5.4. In uno spazio metrico completo X, se l'insieme dei punti di X per cui vale una proprietà (P) è residuale, si dice che il *tipico* elemento di X soddisfa la proprietà (P).

Corollario 5.5. *L'insieme $\mathbb{Q}$ non è un G_δ di $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\mathbb{Q} = \bigcap_{m=1}^{\infty} V_m$, con ciascun V_m aperto in $\mathbb{R}$. Siccome $\mathbb{Q}$ è denso, ogni V_m deve essere denso: infatti contiene $\mathbb{Q}$, dunque contiene un insieme denso.

D'altra parte $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è anch'esso denso in $\mathbb{R}$. Se fissiamo una numerazione $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ e poniamo

$$E_n := \mathbb{R} \setminus \{q_n\},$$

oteniamo che ogni E_n è aperto e denso e che

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Applicando il teorema di Baire agli aperti densi $V_1, V_2, \dots, E_1, E_2, \dots$, otteniamo che l'intersezione totale

$$\Big(\bigcap_{m=1}^{\infty} V_m\Big) \cap \Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$$

dovrebbe essere densa, quindi in particolare non vuota: assurdo. □

Osservazione 5.6. Il corollario precedente implica subito che $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non è un F_σ.

6 Esercizi per casa

Esercizio 6.1. Sia $F \subseteq X$ chiuso. Mostrare senza usare la continuità della funzione distanza che l'insieme

$$U_n := \{x \in X : \operatorname{dist}(x, F) < 1/n\}$$

è aperto.

Esercizio 6.2. Mostrare che l'insieme

$$A := (\mathbb{Q} \cap (0,1)) \cup ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [1,2])$$

non è né G_δ né F_σ come sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Esercizio 6.3. Sia (F_n) una successione di chiusi a interno vuoto in uno spazio metrico completo X. Mostrare che l'unione $\bigcup_n F_n$ non può contenere alcun aperto non vuoto.

Esercizio 6.4. Sia $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ una numerazione arbitraria. Per ogni j sia

$$U_j := \bigcup_{i=1}^{\infty} (q_i - 2^{-(i+j)}, q_i + 2^{-(i+j)}).$$

Mostrare che l'insieme $\bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ contiene un G_δ denso di numeri irrazionali.

Esercizio 6.5. Mostrare che ogni insieme residuale di $\mathbb{R}$ è non numerabile.

Esercizio 6.6. Costruiamo l'insieme di Cantor.

1. Poniamo $C_0 = [0,1]$. Ottenuto C_n, definiamo C_{n+1} togliendo da ciascun intervallo chiuso I che compone C_n l'intervallo aperto centrale di lunghezza un terzo della lunghezza di I.
2. Definiamo l'insieme di Cantor come $C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. Mostrare che C è chiuso.
3. Mostrare che C ha interno vuoto.
4. Dedurre che C è un insieme mai denso in $[0,1]$, e quindi anche in $\mathbb{R}$.
5. Mostrare che C è non numerabile.

Esercizio 6.7. Consideriamo lo spazio metrico

$$C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ continua}\}$$

munito della distanza uniforme

$$d_\infty(f,g) = \|f - g\|_\infty := \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Sia

$$E := \{f \in C([0,1]) : f(q) \neq r \text{ per ogni } (q,r) \in (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times \mathbb{Q}\}.$$

Mostrare che E è residuale in $C([0,1])$.

Esercizio 6.8. Sia $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (l'insieme di tutte le successioni di numeri reali) e definiamo

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, |x_n - y_n|\}, \qquad x = (x_n),\ y = (y_n) \in X.$$

1. Mostrare che d è una metrica su X.
2. Mostrare che (X, d) è completo.

3. Per ogni $m \in \mathbb{N}$, sia

$$B_m := \{x = (x_n) \in X : |x_n| \leq m \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\}.$$

   Mostrare che B_m è chiuso e ha interno vuoto.

4. Dedurre che l'insieme delle successioni limitate è magro in X.
5. Concludere che l'insieme delle successioni illimitate è residuale in X.

Obiettivo della seconda lezione. Introduciamo il gioco di Banach-Mazur e lo colleghiamo alla nozione di insieme residuale. Usiamo poi il gioco in situazioni in cui trovare una strategia vincente semplifica la dimostrazione di residualità.

7 Residualità relativa e gioco di Banach-Mazur

Definizione 7.1. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $O \subseteq X$ un aperto non vuoto. Un insieme $A \subseteq X$ si dice *residuale in* O se $O \setminus A$ è magro nel sottospazio metrico O, cioè è contenuto in un'unione numerabile di sottoinsiemi mai densi in O.

Osservazione 7.2. Se (X, d) è completo e $O \subseteq X$ è aperto non vuoto, allora il teorema di Baire vale anche nel sottospazio metrico O. Infatti la dimostrazione del Teorema 5.1 si adatta senza modifiche sostanziali: già dal primo passo si lavora nella palla chiusa $\overline{B}(x_1, r_1)$ che è un sottospazio completo di O.

Proposizione 7.3. *Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $O \subseteq X$ un aperto non vuoto. Per un insieme $A \subseteq X$ sono equivalenti:*

(i) A è residuale in O;

(ii) $A \cap O$ contiene un G_δ denso del sottospazio metrico O.

Dimostrazione. La dimostrazione è identica a quella della Proposizione 5.3, lavorando però nel sottospazio metrico O invece che nello spazio X. L'unico punto da osservare è che, poiché O è aperto in X e X è completo, il teorema di Baire vale anche in O, come visto nell'Osservazione 7.2. □

Definizione 7.4. Uno spazio metrico X si dice *separabile* se ammette un sottoinsieme denso numerabile.

Lemma 7.5. *Sia X uno spazio metrico separabile. Allora ogni famiglia di aperti non vuoti a due a due disgiunti è al più numerabile.*

Dimostrazione. Sia $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ un sottoinsieme denso numerabile di X. Se $\mathcal{U}$ è una famiglia di aperti non vuoti a due a due disgiunti, ogni $U \in \mathcal{U}$ contiene almeno un punto di D che non sta in nessun altro aperto di $\mathcal{U}$. Dunque $\mathcal{U}$ è al più numerabile. □

Definizione 7.6. Siano (X, d) uno spazio metrico completo e separabile, $O \subseteq X$ un aperto non vuoto e $A \subseteq X$. Nel *gioco di Banach-Mazur* $BM(O, A)$ i due giocatori, che denoteremo con β e α, scelgono a turno palle aperte non vuote

$$B_0 \supseteq A_0 \supseteq B_1 \supseteq A_1 \supseteq B_2 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$$

con le seguenti regole:

- β sceglie per primo una palla aperta $B_0 \subseteq O$;
- α sceglie una palla aperta $A_0 \subseteq B_0$ tale che $\overline{A_0} \subseteq B_0$ e il raggio di A_0 sia minore di 1;
- in generale, se è stata giocata la palla A_{n-1}, il giocatore β sceglie una palla aperta $B_n \subseteq A_{n-1}$ tale che $\overline{B_n} \subseteq A_{n-1}$ e il raggio di B_n sia minore di 2^{-n};
- poi α sceglie una palla aperta $A_n \subseteq B_n$ tale che $\overline{A_n} \subseteq B_n$ e il raggio di A_n sia minore di 2^{-n}.

Il giocatore α vince se il punto finale della partita appartiene ad A.

Osservazione 7.7. Le chiusure $\overline{A_n}$ sono inscatolate e i loro diametri tendono a zero. Poiché X è completo, usando lo stesso argomento usato nella dimostrazione del teorema di Baire, si può mostrare che l'intersezione $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{A_n}$ contiene esattamente un punto. Lo chiameremo *punto finale* della partita.

Definizione 7.8. Una *strategia* per uno dei due giocatori è una regola che assegna una mossa legale a ogni sequenza di mosse precedenti. Una strategia è *vincente* se garantisce la vittoria qualunque siano le mosse dell'avversario.

Teorema 7.9 (Teorema di Banach-Mazur)**.** *Siano (X, d) uno spazio metrico completo e separabile, $O \subseteq X$ un aperto non vuoto e $A \subseteq X$. Allora sono equivalenti:*

(i) A è residuale in O;

(ii) il giocatore α ha una strategia vincente nel gioco $BM(O, A)$.

Dimostrazione. (i) ⇒ (ii). Per ipotesi esistono aperti $G_1, G_2, \dots \subseteq X$ tali che ciascun $G_n \cap O$ sia denso in O e

$$O \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \subseteq A.$$

Descriviamo una strategia vincente per α. Se β ha appena giocato B_n, allora $B_n \subseteq O$ è un aperto non vuoto. Poiché $G_{n+1} \cap O$ è denso in O, l'insieme $B_n \cap G_{n+1}$ è un aperto non vuoto di X. Dunque esistono un punto $y_n \in X$ e un raggio $s_n > 0$ tali che

$$\overline{B}(y_n, s_n) \subseteq B_n \cap G_{n+1}.$$

Scegliendo eventualmente un raggio più piccolo, possiamo inoltre supporre $s_n < 2^{-n}$. Il giocatore α risponde allora con la palla $A_n := B(y_n, s_n)$. Questa è una mossa legale.

Se α segue sempre questa regola, il punto finale della partita appartiene a ogni G_n, dunque appartiene a A. Quindi la strategia è vincente.

(ii) ⇒ (i). Supponiamo che α abbia una strategia vincente σ. Costruiremo per induzione famiglie numerabili di palle aperte non vuote $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \dots$ con le proprietà seguenti:

(a) ogni elemento di $\mathcal{W}_n$ è una possibile mossa di α al passo $n-1$ in una partita compatibile con σ;

(b) gli elementi di $\mathcal{W}_n$ sono a due a due disgiunti;

(c) se poniamo

$$G_n := \bigcup_{W \in \mathcal{W}_n} W,$$

allora G_n è aperto e denso in O;

(d) per ogni $W \in \mathcal{W}_n$, l'unione dei figli di W al livello successivo è densa in W.

Passo base. Consideriamo tutte le possibili prime mosse B_0 di β e le relative risposte $\sigma(B_0)$ di α. Tra queste scegliamo una sottofamiglia massimale[1] di palle a due a due disgiunte, e la chiamiamo $\mathcal{W}_1$. Per il Lemma 7.5, essa è numerabile.

Sia

$$G_1 := \bigcup_{W \in \mathcal{W}_1} W.$$

[1] Sia $\mathscr{P}$ l'insieme di tutte le sottofamiglie di palle aperte non vuote, a due a due disgiunte, ordinato per inclusione (una sottofamiglia $P_1 \in \mathscr{P}$ precede una sottofamiglia $P_2 \in \mathscr{P}$ nell'ordinamento parziale se tutte le palle che appartengono a P_1 appartengono anche a P_2). Ogni catena ha un maggiorante dato dall'unione, che è ancora una famiglia a due a due disgiunta. Per il lemma di Zorn esiste dunque una sottofamiglia massimale.

Mostriamo che G_1 è denso in O. Se così non fosse, esisterebbe una palla aperta non vuota $B \subseteq O$ disgiunta da G_1. Ma allora β potrebbe giocare B come prima mossa, e la risposta $\sigma(B)$ sarebbe una palla aperta non vuota disgiunta da tutti gli elementi di $\mathcal{W}_1$, contro la massimalità di $\mathcal{W}_1$.

Passo induttivo. Supponiamo costruita $\mathcal{W}_n$. Fissiamo $W \in \mathcal{W}_n$, e scegliamo una sequenza finita di mosse compatibile con σ che termini con la mossa di α uguale a W. Consideriamo tutte le possibili mosse successive di β contenute in W e, per ognuna di esse, la risposta prescritta da σ. Tra tutte queste risposte scegliamo una famiglia massimale di palle a due a due disgiunte; la indichiamo con $\mathrm{Figli}(W)$. Per il Lemma 7.5, anche $\mathrm{Figli}(W)$ è numerabile. Per ogni figlio $V \in \mathrm{Figli}(W)$ fissiamo inoltre una storia compatibile con σ, ottenuta prolungando la storia fissata per W con la mossa di β che ha prodotto V e con la risposta V di α.

Definiamo

$$\mathcal{W}_{n+1} := \bigcup_{W \in \mathcal{W}_n} \mathrm{Figli}(W).$$

Le palle di $\mathcal{W}_{n+1}$ sono a due a due disgiunte: due figli dello stesso padre lo sono per costruzione, mentre figli di padri distinti sono contenuti in padri distinti, che sono già disgiunti.

Poniamo

$$G_{n+1} := \bigcup_{V \in \mathcal{W}_{n+1}} V.$$

Mostriamo che $G_{n+1} \cap W$ è denso in W per ogni $W \in \mathcal{W}_n$. Se così non fosse, esisterebbe una palla aperta non vuota $B \subseteq W$ disgiunta da tutti i figli di W. Ma allora β potrebbe giocare B come mossa successiva, e la risposta determinata dalla strategia σ produrrebbe un nuovo figlio di W disgiunto da tutti gli altri, contro la massimalità di $\mathrm{Figli}(W)$.

Quindi G_{n+1} è denso in ciascun $W \in \mathcal{W}_n$, dunque è denso in G_n, e quindi anche in O.

A questo punto ogni G_n è aperto e denso in O. Sia

$$x \in O \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Tale punto x esiste per l'Osservazione 7.2. Per ogni n esiste un unico elemento $W_n \in \mathcal{W}_n$ tale che $x \in W_n$, perché gli elementi di $\mathcal{W}_n$ sono a due a due disgiunti. Inoltre $W_{n+1} \subseteq W_n$ per ogni n: infatti W_{n+1} è figlio di qualche elemento di $\mathcal{W}_n$, e tale padre deve necessariamente coincidere con W_n, altrimenti x apparterrebbe a due elementi distinti di $\mathcal{W}_n$.

La catena

$$W_1 \supseteq W_2 \supseteq W_3 \supseteq \cdots$$

fornisce una partita compatibile con la strategia σ. Il punto finale di questa partita appartiene ad A perché σ è vincente. D'altra parte, per la costruzione del gioco, i diametri delle palle tendono a zero e $x \in W_n \subseteq \overline{W_n}$ per ogni n, dunque il punto finale della partita è proprio x. Quindi $x \in A$.

Abbiamo mostrato che

$$O \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \subseteq A,$$

con ciascun $G_n \cap O$ denso in O. Dunque A è residuale in O. □

8 Applicazioni del gioco

La proiezione di un residuale è residuale

Proposizione 8.1. *Siano* (X, d_X) *e* (Y, d_Y) *spazi metrici completi e separabili, e sia* $X \times Y$ *munito della metrica*

$$d\big((x, y), (x', y')\big) := \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}.$$

Se $E \subseteq X \times Y$ *è residuale, allora la sua proiezione*

$$\pi_X(E) := \{x \in X : \exists y \in Y \text{ tale che } (x, y) \in E\}$$

è residuale in X*.*

Dimostrazione. Per il Teorema 7.9, il giocatore α ha una strategia vincente nel gioco $BM(X \times Y, E)$. Mostreremo come trasformarla in una strategia vincente nel gioco $BM(X, \pi_X(E))$.

Per la metrica scelta, ogni palla aperta in $X \times Y$ è del tipo

$$B_{X\times Y}((x, y), r) = B_X(x, r) \times B_Y(y, r).$$

Scegliamo un punto arbitrario $y_0 \in Y$. Se nel gioco su X il giocatore β muove per primo scegliendo la palla $B_X(x_0, r_0)$, scegliamo $\rho_0 > 0$ con $\rho_0 < r_0$ e nel gioco prodotto facciamo giocare al "β fittizio" la palla

$$B_X(x_0, \rho_0) \times B_Y(y_0, \rho_0).$$

La strategia vincente nel prodotto risponde con una palla

$$B_X(x'_0, s_0) \times B_Y(y'_0, s_0).$$

Nel gioco su X, il giocatore α risponde allora con la componente X:

$$B_X(x'_0, s_0),$$

che è contenuta in $B_X(x_0, r_0)$.

Si procede allo stesso modo a ogni mossa. Se nel gioco su X il giocatore β sceglie una palla

$$B_X(x_n, r_n) \subseteq B_X(x'_{n-1}, s_{n-1}),$$

scegliamo $\rho_n > 0$ tale che

$$B_X(x_n, \rho_n) \subseteq B_X(x_n, r_n) \qquad \text{e} \qquad B_Y(y'_{n-1}, \rho_n) \subseteq B_Y(y'_{n-1}, s_{n-1}).$$

Nel gioco prodotto facciamo giocare la palla

$$B_X(x_n, \rho_n) \times B_Y(y'_{n-1}, \rho_n),$$

che è contenuta nella mossa precedente di α nel prodotto. La strategia vincente nel prodotto risponde con una palla

$$B_X(x'_n, s_n) \times B_Y(y'_n, s_n),$$

e nel gioco su X il giocatore α gioca $B_X(x'_n, s_n)$, che è contenuta in $B_X(x_n, r_n)$.

La partita nel prodotto è compatibile con la strategia vincente di α, quindi il suo punto finale (x_∞, y_∞) appartiene a E. In particolare,

$$x_\infty \in \pi_X(E).$$

Dunque la strategia appena descritta è vincente nel gioco $BM(X, \pi_X(E))$. Applicando di nuovo il Teorema 7.9, concludiamo che $\pi_X(E)$ è residuale in X. □

Lo spazio di Cantor

Esempio 8.2. Consideriamo lo spazio $2^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ delle successioni i cui elementi sono solo i numeri 0 o 1, munito della metrica

$$d(x,y) = 2^{-m(x,y)},$$

dove $m(x,y)$ è il primo indice in cui x e y differiscono, e conveniamo $d(x,x) = 0$. Questo spazio metrico è completo e separabile.

Sia W il sottinsieme delle successioni che contengono ogni parola finita di 0 e 1 come blocco consecutivo. Allora W è residuale in $2^{\mathbb{N}}$.

Dimostrazione. Fissiamo una enumerazione $w_1, w_2, \dots$ di tutte le parole finite sull'alfabeto $\{0,1\}$.

In questo spazio le palle aperte sono esattamente i *cilindri*: scegliere una palla equivale a fissare un prefisso finito della successione. Se il prefisso corrente è u, la strategia di α al passo m consiste nel prolungare u aggiungendo la parola w_m. In altre parole, se β ha giocato il cilindro determinato dal prefisso u, α risponde con il cilindro determinato dal prefisso concatenato uw_m, ovvero la sua mossa sarà giocare una palla di centro un qualunque elemento di $2^{\mathbb{N}}$ i cui primi termini sono uw_m e di raggio sufficientemente piccolo da forzare che tutti gli elementi della corrispondente palla mantengano fissato il prefisso uw_m.

Alla fine della partita si ottiene una successione infinita che contiene w_1, poi w_2, poi w_3, e così via. Dunque contiene ogni parola finita. Questo mostra che α ha una strategia vincente nel gioco $BM(2^{\mathbb{N}}, W)$, e quindi W è residuale per il Teorema 7.9. □

9 Esercizi per casa

Esercizio 9.1. Sia X uno spazio metrico separabile e sia $A \subseteq X$. Mostrare che il sottospazio metrico A è ancora separabile.

Esercizio 9.2. Siano (X_n, d_n), $n \in \mathbb{N}$, spazi metrici separabili, e sia $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ munito di una metrica prodotto, ad esempio

$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, d_n(x_n, y_n)\}.$$

Mostrare che X è separabile.

Esercizio 9.3. Sia

$$\ell^\infty = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sup_n |x_n| < +\infty\}$$

munito della distanza indotta dalla norma del sup,

$$d_\infty(x,y) = \|x-y\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|.$$

Mostrare che ℓ^∞ non è separabile.

Suggerimento. Considera, per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$, la successione $x^A = (x_n^A)$ definita da

$$x_n^A = \begin{cases} 0 & \text{se } n \in A, \\ 1 & \text{se } n \notin A. \end{cases}$$

Mostra che se $A \neq B$, allora $\|x^A - x^B\|_\infty = 1$. Deduci che non può esistere un sottoinsieme denso numerabile di ℓ^∞.

Domanda 9.4. Perché invece lo spazio dell'Esempio 8.2 è separabile?

Esercizio 9.5. Nel contesto dell'Esempio 8.2, mostrare che l'insieme delle successioni binarie in cui ogni parola finita compare *infinite volte* è residuale in $2^{\mathbb{N}}$.

Esercizio 9.6. Riprendere l'Esercizio 6.7 della prima lezione e risolverlo di nuovo usando il Teorema 7.9 invece della definizione di insieme residuale. Usare il fatto, che qui ammettiamo, che $C([0,1])$ con la distanza uniforme è uno spazio metrico completo e separabile.

Più precisamente, per ogni coppia $(q,r) \in (\mathbb{Q} \cap [0,1]) \times \mathbb{Q}$, si consideri l'insieme

$$E_{q,r} := \{f \in C([0,1]) : f(q) \neq r\}.$$

1. Mostrare che ciascun $E_{q,r}$ è residuale in $C([0,1])$ costruendo esplicitamente una strategia vincente per $BM(C([0,1]), E_{q,r})$.
2. Dedurre che l'insieme
$$E = \bigcap_{(q,r)\in(\mathbb{Q}\cap[0,1])\times\mathbb{Q}} E_{q,r}$$
è residuale in $C([0,1])$.

Esercizio 9.7. Riprendere l'Esercizio 6.8 della prima lezione e risolverlo di nuovo usando il Teorema 7.9.

Più precisamente, su $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la metrica

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, |x_n - y_n|\},$$

si consideri l'insieme
$$U := \{x = (x_n) \in X : (x_n) \text{ è illimitata}\}.$$

1. Mostrare che, data una palla aperta $B(x,r)$ di X e un numero $M > 0$, esiste una palla aperta più piccola $B(y,s) \subseteq B(x,r)$ tale che ogni successione $z \in B(y,s)$ soddisfi $\|z\|_\infty > M$.
2. Dedurre che U è residuale in X costruendo una strategia vincente per $BM(X,U)$.

Esercizio 9.8. Sia X uno spazio metrico completo e separabile, e sia

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, d_X(x_n,y_n)\} \qquad x = (x_n),\ y = (y_n) \in X^{\mathbb{N}}.$$

Si può usare il fatto che $X^{\mathbb{N}}$, con questa metrica, è completo e separabile: la separabilità segue dall'esercizio precedente sui prodotti numerabili, mentre la completezza si dimostra come nell'Esercizio 6.8. Sia inoltre $\{U_1, U_2, \dots\}$ una base numerabile di aperti non vuoti di X. Si consideri
$$D := \{x = (x_n) \in X^{\mathbb{N}} : \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ è denso in } X\}.$$

Mostrare che D è residuale in $X^{\mathbb{N}}$.

Suggerimento.

1. verificare che, data una palla aperta $B(x,r)$ di $X^{\mathbb{N}}$ e un aperto di base U_m, esiste una palla aperta più piccola $B(y,s) \subseteq B(x,r)$ tale che ogni successione $z \in B(y,s)$ abbia almeno una coordinata in U_m;
2. costruire, usando il Teorema 7.9, una strategia vincente per $BM(X^{\mathbb{N}}, D)$.

Obiettivo della terza lezione. Dimostriamo che l'insieme delle funzioni non derivabili in alcun punto è residuale in $C([0,1])$. Introduciamo poi un nuovo criterio di residualità tramite i punti di continuità di un limite puntuale di funzioni continue, e lo applichiamo allo spazio delle successioni in $[0,1]$.

10 La tipica funzione continua non è derivabile in alcun punto

Poniamo

$$X := C([0,1]), \qquad d_\infty(f,g) := \|f-g\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)-g(x)|.$$

Ricordiamo che X è completo rispetto a d_∞, vedi Esercizio 12.1.

Definizione 10.1. Diremo che $f \in X$ è *non derivabile in alcun punto* se non esiste alcun $x \in [0,1]$ in cui f sia derivabile (in $x = 0$ e $x = 1$ intendiamo naturalmente la derivabilità unilatera).

Per $n \in \mathbb{N}$ definiamo

$$E_n := \Big\{ f \in X : \ \exists x \in [0,1] \text{ tale che } |f(y)-f(x)| \le n|y-x| \ \ \forall y \in [0,1] \text{ con } |y-x| < 1/n \Big\}.$$

Lemma 10.2. *Se $f \in X$ è derivabile in almeno un punto di $[0,1]$, allora $f \in E_n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Sia $x \in [0,1]$ un punto in cui f è derivabile, e sia L la derivata (bilatera o unilatera, a seconda del caso). Per definizione di derivabilità, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(y) - f(x) - L(y-x)| \le \varepsilon |y-x|$$

per ogni $y \in [0,1]$ con $0 < |y-x| < \delta$. Dunque

$$|f(y)-f(x)| \le (|L| + \varepsilon)|y-x|$$

per tali y. Scegliamo $n \in \mathbb{N}$ con $n > |L| + \varepsilon$ e $1/n < \delta$.

Allora in particolare vale

$$|f(y)-f(x)| \le n|y-x|$$

per ogni $y \in [0,1]$ con $|y-x| < 1/n$, cioè $f \in E_n$. □

Proposizione 10.3. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme E_n è chiuso in X.*

Dimostrazione. Sia (f_m) una successione in E_n che converge uniformemente a $f \in X$. Per ogni m sappiamo che esiste $x_m \in [0,1]$ tale che

$$|f_m(y) - f_m(x_m)| \le n|y-x_m| \qquad \forall y \in [0,1] \text{ con } |y-x_m| < 1/n.$$

Poiché $[0,1]$ è compatto, passando a una sottosuccessione possiamo supporre che x_m converga a un punto $x \in [0,1]$.

Mostriamo che x verifica la stessa proprietà per f. Sia $y \in [0,1]$ con $|y-x| < 1/n$. Allora esiste $\eta > 0$ tale che $|y-x| + \eta < 1/n$. Per m grande vale $|x_m - x| < \eta$, dunque

$$|y-x_m| \le |y-x| + |x-x_m| < 1/n.$$

Per tali m possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} |f(y)-f(x)| &\le |f(y)-f_m(y)| + |f_m(y)-f_m(x_m)| \\ &\quad + |f_m(x_m)-f(x_m)| + |f(x_m)-f(x)| \\ &\le 2\|f-f_m\|_\infty + n|y-x_m| + |f(x_m)-f(x)|. \end{aligned}$$

Facendo tendere $m \to \infty$, sfruttando la continuità di f otteniamo

$$|f(y) - f(x)| \leq n|y - x|.$$

Quindi $f \in E_n$. Questo mostra che E_n è chiuso. $\square$

Proposizione 10.4. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme E_n ha interno vuoto in X.*

Dimostrazione. Siano $f \in X$ e $\varepsilon > 0$. Dobbiamo costruire $g \in X$ tale che

$$\|g - f\|_\infty < \varepsilon \qquad \text{e} \qquad g \notin E_n.$$

Per $h > 0$, definiamo il *modulo di continuità* di f come

$$\omega_f(h) := \sup\{|f(u) - f(v)| : \ u, v \in [0,1], \ |u - v| \leq h\}.$$

Poiché f è uniformemente continua su $[0,1]$, si ha $\omega_f(h) \to 0$ per $h \to 0$.

Scegliamo un numero a tale che $0 < a < \varepsilon$. Poiché $\omega_f(h) \to 0$ e anche $nh \to 0$, possiamo scegliere $h = 1/N$ con $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$h < 1/n \qquad \text{e} \qquad nh + 2\omega_f(h) < a. \tag{1}$$

Definiamo ora una funzione continua $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\varphi(jh) = \begin{cases} 0 & \text{se } j \text{ è pari,} \\ a & \text{se } j \text{ è dispari,} \end{cases} \qquad j = 0, 1, \ldots, N,$$

e imponendo che φ sia affine su ciascun intervallo $[jh, (j+1)h]$.

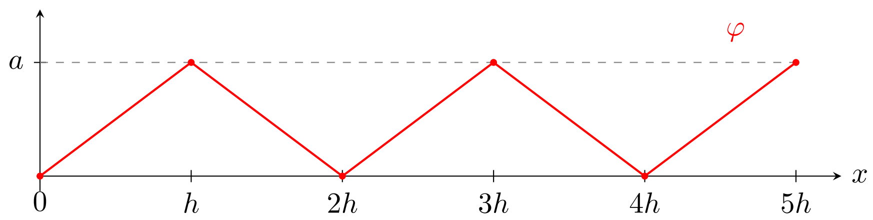

Figura 1: Il grafico della perturbazione φ.

Allora $\|\varphi\|_\infty = a < \varepsilon$ e su ogni intervallo $[jh, (j+1)h]$ la funzione φ ha pendenza costante di modulo a/h.

Poniamo $g := f + \varphi$. Allora

$$\|g - f\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty = a < \varepsilon.$$

Mostriamo che $g \notin E_n$. Sia $x \in [0,1]$. Esiste un indice $j \in \{0, \ldots, N-1\}$ tale che

$$x \in [jh, (j+1)h].$$

Sia e l'estremo di questo intervallo più lontano da x. Allora

$$\frac{h}{2} \leq |e - x| \leq h < \frac{1}{n}.$$

Poiché φ è lineare su $[jh, (j+1)h]$ con pendenza di modulo a/h, si ha

$$|\varphi(e) - \varphi(x)| = \frac{a}{h}|e - x|.$$

Inoltre, per definizione di $\omega_f(h)$,

$$|f(e) - f(x)| \leq \omega_f(|e-x|) \leq \omega_f(h) \leq \frac{2|e-x|}{h}\omega_f(h).$$

Ne segue

$$|g(e) - g(x)| \geq |\varphi(e) - \varphi(x)| - |f(e) - f(x)| \geq \left(\frac{a}{h} - \frac{2\omega_f(h)}{h}\right)|e-x|. \tag{2}$$

Per la scelta di a e h fatta in (1), abbiamo

$$\frac{a}{h} - \frac{2\omega_f(h)}{h} > n.$$

Da (2) segue $g \notin E_n$ e ciò significa, per l'arbitrarietà di ε, che E_n ha interno vuoto. □

Teorema 10.5. *L'insieme delle funzioni continue non derivabili in alcun punto di* $[0,1]$ *è residuale in* $C([0,1])$.

Dimostrazione. Per il Lemma 10.2, ogni funzione derivabile in almeno un punto appartiene a $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Dunque l'insieme

$$\mathscr{N} := X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

è formato da funzioni non derivabili in alcun punto.

Per la Proposizione 10.3, ogni E_n è chiuso; per la Proposizione 10.4, ogni E_n ha interno vuoto. Quindi $\bigcup_n E_n$ è magro in X. Ne segue che $\mathscr{N}$ è residuale. □

11 Un nuovo criterio di residualità

In questa sezione mostriamo un altro criterio utile per produrre insiemi residuali.

Definizione 11.1. Sia X uno spazio metrico e sia $\Phi : X \to \mathbb{R}$. L'*oscillazione* di Φ in un punto $x \in X$ è

$$\omega_\Phi(x) := \inf_{r>0} \sup\{|\Phi(u) - \Phi(v)| : \ u, v \in B(x,r)\}.$$

Osservazione 11.2. La funzione Φ è continua in x se e solo se $\omega_\Phi(x) = 0$.

Teorema 11.3. *Sia X uno spazio metrico completo e siano $\Phi_1, \Phi_2, \cdots : X \to \mathbb{R}$ funzioni continue che convergono puntualmente a una funzione $\Phi : X \to \mathbb{R}$, ovvero per ogni $x \in X$ si ha $\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x)$. Allora l'insieme dei punti di continuità di Φ è residuale in X.*

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ poniamo

$$D_k := \{x \in X : \ \omega_\Phi(x) < 1/k\}.$$

Mostriamo che ogni D_k è aperto e denso.

Apertura di D_k. Sia $x \in D_k$. Per definizione di oscillazione, esiste $r > 0$ tale che

$$|\Phi(u) - \Phi(v)| < 1/k \qquad \forall u, v \in B(x,r).$$

Se $y \in B(x, r/2)$, allora $B(y, r/2) \subseteq B(x,r)$, quindi

$$\omega_\Phi(y) \leq \sup\{|\Phi(u) - \Phi(v)| : \ u, v \in B(y, r/2)\} < 1/k.$$

Dunque $B(x, r/2) \subseteq D_k$, e D_k è aperto.

Densità di D_k. Sia $U \subseteq X$ un aperto non vuoto. Consideriamo la chiusura $\overline{U}$, che è completa perché è chiusa in uno spazio completo.

Per ogni $m \in \mathbb{N}$ definiamo

$$F_m := \Big\{x \in \overline{U} : \ |\Phi_j(x) - \Phi_m(x)| \le \frac{1}{6k} \ \ \forall j \ge m\Big\}.$$

Ogni F_m è chiuso in $\overline{U}$, perché

$$F_m = \bigcap_{j \ge m} \Big\{x \in \overline{U} : \ |\Phi_j(x) - \Phi_m(x)| \le \frac{1}{6k}\Big\},$$

e ciascun insieme della famiglia è chiuso, perché $\Phi_j - \Phi_m$ è continua per ogni (m, j).

Poiché $\Phi_j(x) \to \Phi(x)$ per ogni x, per ogni $x \in \overline{U}$ esiste m tale che $x \in F_m$. Quindi

$$\overline{U} = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m.$$

Per il teorema di Baire, almeno uno degli F_m ha interno non vuoto in $\overline{U}$, vedi Esercizio 6.3. Dunque esiste un aperto relativo non vuoto $V_0 \subseteq \overline{U}$ tale che $V_0 \subseteq F_m$. Scriviamo $V_0 = H \cap \overline{U}$ con H aperto in X. Poiché U è denso in $\overline{U}$, l'insieme $V_0 \cap U = H \cap U$ è non vuoto; poniamo quindi $V := H \cap U$. Allora V è un aperto non vuoto di X, $V \subseteq U$ e $V \subseteq F_m$.

Poiché V è aperto non vuoto, scegliamo $x_0 \in V$. Per la continuità di Φ_m in x_0, esiste $\rho > 0$ tale che $B(x_0, \rho) \subseteq V$ e

$$|\Phi_m(z) - \Phi_m(x_0)| < \frac{1}{6k} \qquad \forall z \in B(x_0, \rho).$$

Poniamo $W := B(x_0, \rho)$. Allora $W \subseteq V$ è aperto non vuoto e, per ogni $u, v \in W$,

$$|\Phi_m(u) - \Phi_m(v)| \le |\Phi_m(u) - \Phi_m(x_0)| + |\Phi_m(x_0) - \Phi_m(v)| < \frac{1}{3k}.$$

Per ogni $x \in F_m$ vale $|\Phi_j(x) - \Phi_m(x)| \le \frac{1}{6k}$ per ogni $j \ge m$, e dunque, mandando j a infinito, vale anche $|\Phi(x) - \Phi_m(x)| \le \frac{1}{6k}$. Se $u, v \in W$, sfruttando $W \subseteq F_m$, otteniamo

$$\begin{aligned}|\Phi(u) - \Phi(v)| &\le |\Phi(u) - \Phi_m(u)| + |\Phi_m(u) - \Phi_m(v)| + |\Phi_m(v) - \Phi(v)| \\ &< \frac{1}{6k} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{6k} = \frac{2}{3k} < \frac{1}{k}.\end{aligned}$$

Questo mostra che $W \subseteq D_k$. In particolare $U \cap D_k \neq \varnothing$, quindi D_k è denso.

Conclusione. Per il Teorema di Baire 5.1, l'insieme $\bigcap_{k=1}^{\infty} D_k$ è residuale in X. Ma

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} D_k \quad \Longleftrightarrow \quad \omega_\Phi(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi \text{ è continua in } x.$$

Quindi i punti di continuità di Φ formano un insieme residuale. □

Applicazione: la successione tipica in $[0,1]^{\mathbb{N}}$ ha estremo superiore uguale a 1

Consideriamo lo spazio $Y := [0,1]^{\mathbb{N}}$ munito della distanza

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |x_n - y_n|, \qquad x = (x_n), \ y = (y_n) \in Y.$$

Osserviamo che Y è completo, perché è un sottoinsieme chiuso dello spazio completo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dell'Esercizio 6.8.

Per ogni $m \in \mathbb{N}$, definiamo

$$\Phi_m : Y \to \mathbb{R}, \qquad \Phi_m(x) := \max\{x_1, \dots, x_m\}.$$

Definiamo inoltre

$$\Phi : Y \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) := \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n.$$

Allora $\Phi_m(x) \to \Phi(x)$ per ogni $x \in Y$.

Lemma 11.4. *Per ogni $m \in \mathbb{N}$, la funzione Φ_m è continua.*

Dimostrazione. Siano $x, y \in Y$. Allora

$$|\Phi_m(x) - \Phi_m(y)| \leq \max_{1 \leq j \leq m} |x_j - y_j| \leq \sum_{j=1}^{m} 2^j \, 2^{-j} |x_j - y_j| \leq 2^m d(x, y).$$

□

Proposizione 11.5. *La funzione Φ è continua in $x = (x_n) \in Y$ solo se $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = 1$.*

Dimostrazione. Supponiamo che $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = s < 1$. Poniamo

$$\varepsilon := \frac{1 - s}{2} > 0.$$

Dato $\delta > 0$, scegliamo $N \in \mathbb{N}$ tale che $2^{-N} < \delta$, e definiamo $y = (y_n) \in Y$ ponendo

$$y_n = \begin{cases} x_n & \text{se } n \neq N, \\ 1 & \text{se } n = N. \end{cases}$$

Allora

$$d(x, y) = 2^{-N} |1 - x_N| \leq 2^{-N} < \delta,$$

ma

$$\Phi(y) = 1, \qquad \Phi(x) = s,$$

quindi

$$|\Phi(y) - \Phi(x)| = 1 - s > \varepsilon.$$

Questo mostra che Φ non è continua in x. □

Corollario 11.6. *L'insieme*

$$A := \left\{ x = (x_n) \in [0, 1]^{\mathbb{N}} : \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = 1 \right\}$$

è residuale in $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Dimostrazione. Per il Lemma 11.4, le funzioni Φ_m sono continue e convergono puntualmente a Φ. Per il Teorema 11.3, l'insieme dei punti di continuità di Φ è residuale in Y. Per la Proposizione 11.5, questo insieme è contenuto in A, che quindi è a sua volta residuale. □

Osservazione 11.7. Applicando lo stesso argomento alla funzione

$$\Psi(x) := \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n,$$

oppure equivalentemente alla successione $(1 - x_n)$, si ottiene che anche l'insieme

$$\Big\{x = (x_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}} : \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0\Big\}$$

è residuale in $[0,1]^{\mathbb{N}}$. Dato che l'intersezione di insiemi residuali è residuale otteniamo che l'insieme

$$A := \Big\{x = (x_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = 1, \ \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0\Big\}$$

è residuale in $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

12 Esercizi per casa

Esercizio 12.1. Mostrare che $C([0,1])$ munito della distanza uniforme $d_\infty(f,g) = \|f - g\|_\infty$ è completo.

Suggerimento. Sia (f_m) una successione di Cauchy. Per ogni $x \in [0,1]$, mostrare che $(f_m(x))$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$, e definire

$$f(x) := \lim_{m\to\infty} f_m(x).$$

Mostrare poi che $f_m \to f$ rispetto alla distanza d_∞ e concludere che f è continua.

Esercizio 12.2. Costruire una funzione $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ che sia limite puntuale di funzioni continue, nel senso del Teorema 11.3, il cui insieme dei punti di continuità sia $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Esercizio 12.3. Diciamo che una funzione $f \in C([0,1])$ è *lipschitziana in un punto* $x \in [0,1]$ se esistono $M > 0$ e $r > 0$ tali che

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|$$

per ogni $y \in [0,1]$ con $|y - x| < r$. Mostrare che l'insieme delle funzioni continue che non sono lipschitziane in alcun punto è residuale in $C([0,1])$.

Suggerimento. Usare gli insiemi E_n della dimostrazione del Teorema 10.5. Mostrare che se una funzione è lipschitziana in almeno un punto, allora appartiene a E_n per qualche n.

Esercizio 12.4. Mostrare che, per ogni intervallo chiuso non degenere $I \subseteq [0,1]$, l'insieme delle funzioni $f \in C([0,1])$ monotone su I è magro in $C([0,1])$. Dedurre che la tipica funzione continua non è monotona su alcun intervallo non degenere.

Esercizio 12.5. Riprendiamo l'insieme di Cantor C costruito nell'Esercizio 6.6.

1. Mostrare che C è perfetto, cioè è chiuso e non ha punti isolati.
2. Sia $P \subseteq \mathbb{R}$ un insieme perfetto non vuoto. Mostrare che, con la distanza indotta da $\mathbb{R}$, lo spazio metrico P è completo.
3. Supponiamo per assurdo che $P = \{x_1, x_2, \dots\}$ sia numerabile. Per ogni n, poniamo $E_n := P \setminus \{x_n\}$. Mostrare che ogni E_n è aperto e denso in P.
4. Usare il Teorema di Baire per concludere che ogni insieme perfetto non vuoto di $\mathbb{R}$ è non numerabile.

Esercizio 12.6. Dimostrare il viceversa della Proposizione 11.5: se $x = (x_n) \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ soddisfa $\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = 1$, allora la funzione $\Phi(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$ è continua in x. Dedurre che i punti di continuità di Φ sono le successioni con estremo superiore uguale a 1.

Esercizio 12.7. Sia $\mathcal{K}([0,1])$ la famiglia dei sottoinsiemi chiusi non vuoti di $[0,1]$. Per $K, L \in \mathcal{K}([0,1])$, definiamo

$$d_H(K,L) := \max\left\{\sup_{x\in K} \operatorname{dist}(x,L),\ \sup_{y\in L} \operatorname{dist}(y,K)\right\}.$$

Mostrare che d_H è una distanza su $\mathcal{K}([0,1])$. Questa distanza si chiama *distanza di Hausdorff*.

Suggerimento. La parte meno immediata è mostrare che $d_H(K,L) = 0$ implica $K = L$. Usare il fatto che K e L sono chiusi.

Esercizio 12.8. Mostrare che lo spazio metrico $(\mathcal{K}([0,1]), d_H)$ è completo.

Suggerimento. Sia (K_m) una successione di Cauchy per d_H. Definire

$$K := \{x \in [0,1] : \operatorname{dist}(x, K_m) \to 0\}.$$

Per mostrare che $K \neq \varnothing$, scegliere $x_m \in K_m$ e usare la compattezza di $[0,1]$. Mostrare poi che K è chiuso e che $d_H(K_m, K) \to 0$.

Esercizio 12.9. Mostrare che la famiglia dei sottoinsiemi finiti non vuoti di $[0,1]$ è densa in $(\mathcal{K}([0,1]), d_H)$.

Esercizio 12.10. Per $N \in \mathbb{N}$, sia

$$U_N := \{K \in \mathcal{K}([0,1]) : K \text{ non contiene alcun intervallo chiuso di lunghezza } 1/N\}.$$

1. Mostrare che U_N è aperto in $(\mathcal{K}([0,1]), d_H)$.
2. Usando l'esercizio precedente, mostrare che U_N è denso.
3. Mostrare che $\bigcap_{N=1}^{\infty} U_N$ coincide con la famiglia dei chiusi non vuoti di $[0,1]$ con interno vuoto.
4. Concludere, usando Baire e la completezza di $(\mathcal{K}([0,1]), d_H)$, che il tipico chiuso non vuoto di $[0,1]$ ha interno vuoto.

Esercizio 12.11. Per $K \in \mathcal{K}([0,1])$, definiamo il *raggio interno*

$$\rho(K) := \sup\{r \geq 0 :\ \exists x \in [0,1] \text{ tale che } [x-r, x+r] \cap [0,1] \subseteq K\}.$$

1. Mostrare che $\rho(K) = 0$ se e solo se K ha interno vuoto.
2. Mostrare che ρ è semicontinua superiormente: se $K_m \to K$ in distanza di Hausdorff, allora
$$\limsup_{m\to\infty} \rho(K_m) \leq \rho(K).$$
3. Definendo
$$\rho_j(K) := \sup_{L\in\mathcal{K}([0,1])} \big(\rho(L) - j\, d_H(K,L)\big),$$
mostrare che ogni ρ_j è continua e che $\rho_j(K) \to \rho(K)$ per ogni K.
4. Usare il Teorema 11.3 per dare una seconda dimostrazione del fatto che il tipico chiuso non vuoto di $[0,1]$ ha interno vuoto.