



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
FIRENZE

Scuola
di Scienze
Matematiche
Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Magistrale
in
Matematica

Problema isoperimetrico nello spazio
di Gauss per insiemi simmetrici e convessi e
applicazioni al *form finding*.

Relatore:
Prof. Andrea Colesanti

Candidato:
Antonio Caserta

Ai miei genitori, a mio fratello Francesco e alla dolce Zaira.

Indice

Introduzione	xi
1 Definizioni e risultati preliminari.	1
1.1 Notazioni e definizioni	1
1.1.1 La misura di Lebesgue	2
1.1.2 σ -algebre e misure esterne	6
1.1.3 La misura di Hausdorff	7
1.1.4 L'integrale di Lebesgue	11
1.1.5 Gli spazi L^p	16
1.1.6 Gli spazi di Sobolev $W^{1,p}$	17
1.2 Lo spazio di Gauss	18
1.2.1 Il perimetro Gaussiano	19
1.2.2 Contenuto di Minkowski e disuguaglianza isoperimetrica nello spazio di Gauss	20
1.2.3 Alcuni esempi nel piano di Gauss: il cerchio e la striscia.	22
1.2.4 Osservazioni	24
1.3 Insiemi stellati e funzione radiale	28
1.3.1 Area e Perimetro Gaussiani di insiemi stellati piani	29
1.4 Funzione supporto di insiemi convessi	30
1.4.1 Iperpiano di supporto	30
1.5 Distanza di Hausdorff	30
1.6 Alcuni concetti di Calcolo delle Variazioni	32
1.6.1 Problemi variazionali unidimensionali	32
1.6.2 La variazione prima di un funzionale	33
1.6.3 Il lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni	33
1.6.4 Il teorema di Rademacher	35

2	Introduzione al problema isoperimetrico	39
2.1	Presentazione del contenuto del capitolo	39
2.2	Il teorema isoperimetrico in \mathbb{R}^2	40
2.2.1	Le soluzioni di Steiner per il problema isoperimetrico	43
2.2.2	La prova di esistenza finita di Edler	54
2.2.3	Il problema isoperimetrico per i poligoni	57
2.2.4	Il problema di Didone	65
2.2.5	La disuguaglianza di Wirtinger	68
2.2.6	Il Teorema isoperimetrico nel piano	69
2.3	Cenni al teorema isoperimetrico in $\mathbb{R}^{n \geq 3}$	73
2.4	Il problema isoperimetrico nello spazio di Gauss	75
2.4.1	Il lemma di Poincaré	76
2.4.2	Disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera \mathbb{S}^{n-1}	81
2.4.3	Dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica nello spazio di Gauss	83
2.4.4	La disuguaglianza di Bobkov	85
3	Equazione di Eulero-Lagrange per il problema isoperimetrico nello spazio di Gauss per insiemi simmetrici	91
3.1	Problemi vincolati e moltiplicatori di Lagrange	91
3.2	Il problema isoperimetrico nello spazio di Gauss.	95
3.3	Simulazioni numeriche con l'utilizzo del software MATLAB - Mathworks	98
3.3.1	La function per il sistema ODE	99
3.3.2	Lo script per risolvere il sistema ODE	100
3.3.3	Risultati e simulazioni numeriche	100
3.4	Dall'equazione di Euler-Lagrange ad una sua "riscrittura"	104
4	Teoremi di Esistenza	109
4.1	Il procedimento dei Metodi Diretti	109
4.2	Una dimostrazione di esistenza per una certa classe di funzioni	111
4.3	Un teorema di esistenza nella classe degli insiemi convessi	116
4.3.1	Lemma sulle funzioni radiali	116
4.3.2	Teorema di esistenza per insiemi convessi	119
5	Applicazioni del problema isoperimetrico: <i>Il form finding</i>	121
5.1	Il form finding e il problema isoperimetrico oggi	121
5.2	Progettazione Parametrica	124
5.2.1	Il concetto alla base della progettazione parametrica	125
5.2.2	Software per la progettazione parametrica	125
5.2.3	Alcuni esempi	126

5.3	Ottimizzazione matematica	127
5.4	Grasshopper e Rhinoceros	128
5.4.1	Progettazione parametrica con Grasshopper per la ricerca della forma nel problema isoperimetrico gaussiano	129
5.5	Algoritmo evolutivo e ricerca della forma	134
5.5.1	La Funzione Fitness	135
5.5.2	Meccanismo di selezione	139
5.5.3	Algoritmo di accoppiamento	139
5.5.4	Algoritmo di coalescenza	140
5.5.5	Fattore di Mutazione	140
5.5.6	Galapagos come plug-in di Grassoppher	144
5.6	Metodo della Penalty Function	147
5.6.1	Inizializzare Galapagos	152
5.6.2	Galapagos: Settaggi iniziali	153
5.6.3	Interpretazione dei risultati	157
5.7	Ottimizzazione vs Adattamento, Ottimizzazione Multi - Parametro	161
5.7.1	Ottimizzazione vs Adattamento	161
5.7.2	Ottimizzazione Multi-Parametro	161
5.8	Problemi Aperti: Una prospettiva matematica	162

Bibliografia**162**

INDICE

Elenco delle figure

1	Ricostruzione di Cartagine; si noti la forma semicircolare della città	xii
1.1	Ricoprimento di 1-,2-, e 3-dimensionale di sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 .	8
1.2	esempi di δ -ricoprimenti	8
1.3	Calcolo del perimetro gaussiano della striscia simmetrica di spessore $2d$	23
1.4	Grafico del perimetro di striscia simmetrica, semipiano e cerchio in funzione della rispettiva area	27
1.5	Insieme stellato. $r(t)$ rappresenta la lunghezza del segmento di estremi l'origine e il punto sul bordo di Ω	28
1.6	Funzione Supporto.	31
2.1	Jakob Steiner 18 Marzo 1796 – 1 Aprile 1863	42
2.2	Timeline che riporta alcune date significative per inquadrare il problema isoperimetrico.	44
2.3	Manovra di ribaltamento	45
2.4	Ribaltamento Problema di Didone	46
2.5	Manovra di Steiner	47
2.6	Variazione dell'area del triangolo al variare dell'angolo in M .	47
2.7	Simmetrizzazione di Steiner.	51
2.8	Simmetrizzazione di Steiner	53
2.9	Poligono iniziale della costruzione di Edler.	55
2.10	Primo quarto del poligono iniziale.	56
2.11	Caso particolare 1.	56
2.12	Caso particolare 2.	56
2.13	57
2.14	Area di un poligono in funzione dei vertici.	60

2.15	Problema isoperimetrico per i triangoli con un lato di lunghezza fissata.	61
2.16	Meccanismo di Watt.	63
2.17	Un poligono massimante ha i lati tutti uguali.	64
2.18	Il problema di Didone	66
2.19	Grafico della funzione in due variabili $\sqrt{1 + (u')^2} + \frac{x}{a}u'$ nel caso di $a = 1$	67
2.20	Adolf Hurwitz 1859-1919	70
2.21	Henri Léon Lebesgue 1875-1941	70
2.22	Retroproiezione di un punto x in \mathbb{R}^n con $n = 1$, $m = 3$	78
2.23	Retroproiezione di un insieme E con $n = 1$, $m = 3$	78
2.24	Nel caso $m = 3$, $n = 1$ i contributi sono \mathbb{S}^1	79
2.25	Erhard Schmidt 1876-1959	82
2.26	Paul Levy 1886-1971	82
3.1	Coefficienti del metodo RK4	100
3.2	Soluzione del sistema con $\lambda = -3.76$ e $y_0 = (2, 0)$	101
3.3	Soluzione del sistema con $\lambda = -2.8$ e $y_0 = (2, 0)$ e con $\lambda = -1.8443333$ e $y_0 = (3, 0)$	102
3.4	Soluzione con 3 “petali”.	103
3.5	Soluzioni con 4 “petali” e con 7 “petali”.	103
3.6	Soluzioni con 10 “petali” e con 16 “petali”.	104
3.7	In questa immagine si può vedere come il prodotto scalare tra i vettori $N(t)$ e $\gamma(t)$ si mantenga costante	107
3.8	In questa immagine si può vedere come il prodotto scalare tra i vettori $e_1 = N(t)$ e $\gamma(t)$ si mantenga costante e risulta essere uguale alla lunghezza OP	108
4.1	Funzione radiale $r(t)$ racchiusa tra due corone circolari m e M	119
5.1	Zaha Hadid, designer, architetto (1950-2016)	123
5.2	Morpheus Hotel l’edificio ”da sogno”	123
5.3	Morpheus Hotel: particolare dell’interno.	124
5.4	L’Oceanografic di Felix Candela a Valencia	126
5.5	Il Guggenheim Museum in Bilbao.	127
5.6	Un blocco della programmazione in Grasshopper	128
5.7	Un blocco della programmazione in Grasshopper	129
5.8	Veduta d’insieme dell’algoritmo Area e Perimetro Gaussiano.	130
5.9	Generazione della geometria, parte 1.	131
5.10	Valutazione della curva, funzione to polar e calcolo della funzione radiale, parte 2.	131

5.11	Parte 3.	131
5.12	Parte 4.	132
5.13	Parte 5.	132
5.14	Curva scelta (rettangolo), area e perimetro gaussiano.	133
5.15	Parte dell’algoritmo “parametrico” e rappresentazione della forma.	133
5.16	Nuovo parametro e forma.	134
5.17	Popolazione sul panorama fitness.	135
5.18	Il landscape viene popolato da una serie di geni secondo una modalità casuale	136
5.19	Dopo aver gerarchizzato i fitness vengono eliminati i più bassi, per operare su quelli rimanenti	136
5.20	Vengono fatti riprodurre i migliori genomi per creare la suc- cessiva generazione	137
5.21	Popolazione sul panorama fitness.	138
5.22	138
5.23	Mappa dei genomi	140
5.24	Grafico Mutazione 1	141
5.25	Grafico Mutazione puntiforme	142
5.26	Grafico Mutazione di inversione	142
5.27	Grafico Mutazione di Addizione	143
5.28	Grafico Mutazione di Cancellazione	143
5.29	Logo di Galapagos	144
5.30	Blocco funzione presente in Galapagos che realizza l’ottimiz- zazione evolutiva	144
5.31	Finestra opzioni del comando di Galapagos	146
5.32	Finestra solver di Galapagos	147
5.33	Algoritmo risolutivo (isoperimetrico)	149
5.34	Particolare della implementazione della Penalty function.	149
5.35	Particolare dell’implementazione della Penalty Function riso- lutiva.	150
5.36	Aggiungere il componente Galapagos	152
5.37	Finestra dell’editor di Galapagos	153
5.38	Settings menu di Galapagos	154
5.39	Finestra che mostra la possibilità di massimizzare o minimiz- zare il valore.	154
5.40	Finestra che mostra la possibilità di impostare un limite di tempo per l’esecuzione del modello.	155
5.41	Risolutore Evolutivo vs Annealing solver	155
5.42	Settaggi del risolutore evolutivo.	156
5.43	Start the solver	157

ELENCO DELLE FIGURE

5.44	Algoritmo risolutivo. Parte relativa all'ottimizzazione	158
5.45	Viewport di Rhinoceros con area gaussiana uguale a 0.9	159
5.46	Vista di insieme di Rhinoceros, Grasshopper e Galapagos con area uguale a 0.1	160

Introduzione

*[...]dux femina facti.
Devenere locos, ubi nunc ingentia cernis
moenia surgentemque novae Karthaginis arcem,
mercaticque solum, facti de nomine Byrsam,
taurino quantum possent circumdare tergo.
(Virgilio, Aeneis, Liber I)*

Il problema isoperimetrico ha costituito oggetto di studio nell'ambito della ricerca scientifica per molti decenni ed è stato affrontato in parallelo alla sua origine che risale all'antichità, ma che continua ad avere rilevanza nei bisogni contemporanei dell'umanità.

Un riferimento a tale problema, detto anche delle “disuguaglianze isoperimetriche”, si trova già nella mitologia. «Didone regina di Tiro, costretta all'esilio dal fratello Pigmalione, si rifugiò in Nord Africa, nelle terre di Iarba, re dei Getuli, cui chiese non solo asilo ma anche della terra per costruire una nuova città: la futura Cartagine. Iarba, re ospitale ma piuttosto geloso dei suoi possedimenti, concesse alla regina tutta la terra che ella fosse riuscita a ricoprire con una pelle di bue. Didone non si perse affatto d'animo: presa una pelle di bue, iniziò a tagliarla a strisciole sottili, le legò tra di loro e costruì una lunga corda». Ora la questione è: quale forma dare a questa corda per racchiudere la maggior superficie possibile?

Questo problema riguarda la ricerca della figura geometrica che, con lo stesso perimetro, ha l'area più grande possibile. È un tipico problema di “calcolo delle variazioni”, che consiste nella determinazione dei valori minimi e massimi. La soluzione a questo tipo di problema dipende dalle condizioni al contorno specifiche: ad esempio, se si considera un ambiente terrestre interno, la forma ottimale sarebbe un cerchio, mentre in situazioni in cui la terra si affaccia sull'acqua, come nel caso di Didone, è preferibile optare per un semicerchio (come illustrato nella fig.1). Il problema di Didone può essere

formulato in due modi equivalenti. È possibile stabilire una lunghezza fissa per la corda e chiedersi quale sia l'area massima che può essere racchiusa dalla figura, oppure fissare un'area specifica e cercare la lunghezza minima della corda necessaria per racchiuderla. Nella seconda formulazione, questo problema diventa un classico esempio di “ricerca del minimo”.

I primi matematici a investigare questa questione furono gli antichi Greci, attorno al IX secolo a.C. Sebbene abbiano intuitivamente trovato una soluzione, è stato solo nel 1800 che si è riusciti a dimostrarla in modo rigoroso e completo. Tra gli antichi Greci, non è possibile stabilire con certezza chi sia stato il primo a interessarsi del problema, anche se alcuni testi fanno riferimento ai Pitagorici. Tuttavia, figure come Archimede (287 a.C. circa - 212 a.C. circa) e soprattutto Zenodoro (seconda metà del II secolo a.C.) sono stati citati come possibili precursori nelle ricerche su questo argomento.

Le scoperte di Zenodoro sono rimaste rilevanti fino al 1700 circa, quando Jacob Steiner (1796-1893) ha presentato dimostrazioni geometriche innovative ma piuttosto approssimative. Queste dimostrazioni sono state successivamente perfezionate da matematici come Dirichlet (1805-1859) e Ennio de Giorgi (1928-1996) [24], contribuendo così a portare il problema isoperimetrico verso una forma più precisa e moderna. Quest'ultimo, insieme al sostegno del matematico Renato Caccioppoli (1904-1959), ha continuato a lavorare su questo problema nel 1953/54, mostrandoci quanto sia ancora rilevante nella matematica contemporanea



Figura 1: Ricostruzione di Cartagine; si noti la forma semicircolare della città

La Teoria della Misura, introducendo i concetti di area e perimetro per una più ampia varietà di insiemi, inclusi quelli di dimensioni superiori a 2, ha fornito gli strumenti necessari per estendere queste generalizzazioni anche a spazi con misure diverse.

Ad esempio la disuguaglianza isoperimetrica nello spazio di Gauss afferma che tra tutti gli insiemi con una data misura gaussiana il semispazio ha il perimetro gaussiano più piccolo. Questo risultato è stato dimostrato per la prima volta da Borell [11] e indipendentemente da Sudakov-Tsirel'son [67]. Da allora sono state proposte molte dimostrazioni alternative, ma la questione della caratterizzazione completa degli estremali è stata risolta solo più recentemente da Carlen-Kerce [19], stabilendo che i semispazi sono le uniche soluzioni al problema isoperimetrico gaussiano. Questo risultato è stato chiarito e rafforzato nel corso degli anni nei lavori [12], [40], [41], [10], [16], [13], [49], [50], [30], [47], [5] che però sembrano “non riuscire” a gestire il vincolo aggiuntivo che l'insieme Ω sia simmetrico cioè che $\Omega = -\Omega$. Nel 2001 è stato suggerito da Barthe [6] che l'insieme simmetrico Ω di volume gaussiano fissato e superficie minima poteva essere una striscia simmetrica limitata da due iperpiani paralleli. Viene espresso in [20], [54] che una palla Euclidea centrata nell'origine o il suo complemento può minimizzare la superficie gaussiana. Un calcolo in [34] permette di dimostrare che la striscia simmetrica non minimizza l'area superficiale gaussiana per certi vincoli di volume.

Struttura della tesi

Nel primo capitolo vengono introdotti alcuni concetti propri della teoria della misura e dell'analisi funzionale. Viene inoltre richiamata la definizione di spazio di Gauss e quindi di perimetro e di frontiera di sottoinsieme. Infine vengono ripresi alcuni concetti di calcolo delle variazioni come il Lemma Fondamentale e il Teorema di Rademacher.

Il secondo capitolo si apre con una parte storica sul problema isoperimetrico in \mathbb{R}^2 passando in rassegna le varie risoluzioni di Steiner, l'applicazione ai poligoni, il problema di Didone fino alla disuguaglianza di Wirtinger. Viene fatto un cenno alla dimostrazione del teorema isoperimetrico in \mathbb{R}^n $n \geq 3$. La terza sezione del capitolo è interamente dedicata al problema isoperimetrico nello spazio di Gauss. Si dimostra come strumento essenziale il lemma di Poincaré, poi la disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera \mathbb{S}^{n-1} e la dimostrazione del teorema nello spazio di Gauss in particolare quella proposta da Borell. Inoltre, a conclusione del capitolo, viene riportata una dimostrazione che utilizza un approccio più analitico-funzionale sviluppata da Bobkov.

Nel terzo capitolo si prendono in esame sistemi vincolati in particolar modo con vincolo isoperimetrico e si vede che se r è la funzione radiale di un minimo del problema vincolato ed è sufficientemente regolare allora

è soluzione di un'opportuna equazione differenziale di tipo Euler-Lagrange. Nella sezione 3.3 sono presentati alcuni risultati per via numerica con l'uso del software MATLAB-MathWorks per alcuni valori del moltiplicatore di Lagrange λ .

Nel quarto capitolo abbiamo provato alcuni risultati originali come l'esistenza di un minimo per il funzionale di tipo perimetro con area fissata per la classe di funzioni radiali (quindi per insiemi stellati) facendo riferimento al procedimento dei metodi diretti e inoltre l'esistenza di un minimo nella classe degli insiemi convessi.

Nell'ultimo capitolo abbiamo rivolto la nostra attenzione a qualche "applicazione" della ricerca della forma: *il form finding*, partendo dal problema isoperimetrico. Successivamente ci siamo soffermati a parlare di ottimizzazione matematica e quindi della progettazione parametrica con Rhinoceros e Grasshopper per la ricerca della forma ottimale nel problema isoperimetrico gaussiano. Abbiamo introdotto gli algoritmi evolutivi, la funzione fitness, il meccanismo di selezione e quindi la plug-in Galapagos di Grasshopper e il suo solver. Nell'ultima sezione del capitolo abbiamo riportato alcune osservazioni su Ottimizzazione vs Adattamento, ottimizzazione Multi-Parametro e abbiamo aggiunto qualche problema aperto.

Ringraziamenti

Per prima cosa, vorrei ringraziare il mio relatore Professore Andrea Colesanti e il Professore Emanuele Paolini, "amici" di un lungo viaggio per i loro preziosi consigli e per la loro disponibilità. Un grazie per avermi fornito spunti e idee fondamentali nella stesura di questo lavoro e per avermi indirizzato nei momenti di indecisione. Non posso inoltre non ringraziare le due persone che hanno avuto più influenza nel mio percorso educativo: i miei genitori. Mamma e papà: grazie per avermi aiutato a superare i momenti più difficili, senza di voi che mi avete spronato sempre a non mollare non avrei mai potuto raggiungere questo importante traguardo. Infine non per importanza un grazie va a mio fratello Francesco che mi ha sempre supportato e supportato in questi anni di università mi ha sempre spinto a fare meglio, ma anche a "staccare" quando era troppo. Mi ha dato preziosi consigli sulla parte visivo-culturale della tesi che terrò per sempre con me gelosi e ricchi di ricordi.

Capitolo 1

Definizioni e risultati preliminari.

“La matematica non è solo una disciplina che studia le quantità e le figure, ma è anche un linguaggio universale che ci permette di descrivere e comprendere il mondo che ci circonda.”

GAETANO FICHERA

1.1 Notazioni e definizioni

Il nostro ambiente di lavoro è lo spazio euclideo $\mathbb{R}^{n \geq 2}$ che utilizza la norma $\|\cdot\|$ e il prodotto scalare (\cdot, \cdot) .

Per rappresentare l'interno, la chiusura e il bordo di un sottoinsieme A di \mathbb{R}^n useremo rispettivamente $\text{int}(A)$, \bar{A} e ∂A . La palla unitaria centrata nell'origine in questo spazio sarà denotata come B^n , definita come l'insieme di tutti i punti x in \mathbb{R}^n tali che $\|x\|$ sia inferiore o uguale a 1. Inoltre la sfera unitaria in \mathbb{R}^n indicata come S^{n-1} , è l'insieme di tutti i punti x in \mathbb{R}^n tali che $\|x\|$ sia uguale a 1.

Per quanto riguarda le definizioni e le proprietà utili per il proseguimento del nostro lavoro, un insieme A in \mathbb{R}^n è considerato convesso se per ogni coppia di punti interni x e y in A , il segmento $[x, y]$ che li unisce è contenuto in A . Questo concetto è descritto dalla seguente equazione:

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in A, \text{ per ogni } x, y \in A, \text{ e per ogni } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Un insieme che è sia convesso che compatto e non è vuoto viene chiamato un *corpo convesso*. Chiameremo \mathcal{K}^n l'insieme di tutti i corpi convessi in \mathbb{R}^n .

Tratteremo anche gli insiemi stellati. Un insieme Ω si dice che è *stellato* se esiste un $x_0 \in \Omega$ tale che per ogni $x \in \Omega$ il segmento di estremi x_0 e x è contenuto in Ω . In tal caso si dice che Ω è *stellato rispetto a* x_0 .

La definizione di lipschitzianità, che è essenziale per comprendere i risultati successivi, verrà ora presentata in un contesto più ampio che coinvolge spazi vettoriali normati. L'applicazione di questa definizione al caso più semplice dei numeri reali è diretta e semplice.

Definizione 1.1. Siano $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ spazi vettoriali normati, e sia $A \subset X$. Una funzione $f : A \rightarrow Y$ si dice *lipschitziana* se

$$\exists L > 0 \text{ t.c. } \|f(x) - f(y)\|_Y \leq L\|x - y\|_X \quad \forall x, y \in A.$$

La più piccola costante L per cui valga questa proprietà è detta *la costante di Lipschitz* e si denota con

$$\text{Lip}(f) = \sup \left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|_Y}{\|x - y\|_X} : x, y \in A, x \neq y \right\}.$$

Definizione 1.2. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è *differenziabile* in $x \in \mathbb{R}^n$ se esiste una mappa lineare $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tale che:

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x) - T(y - x)|}{|x - y|} = 0.$$

o equivalentemente

$$f(y) = f(x) + T(y - x) + o(|y - x|) \text{ per } y \rightarrow x.$$

Se tale T esiste, è unico e si denoterà con $Df(x)$.

1.1.1 La misura di Lebesgue

Richiamiamo alcune definizioni e risultati riguardanti la misura di Lebesgue. Per fare ciò ci riferiamo a [45]

Se $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ è un intervallo di \mathbb{R}^n , poniamo

$$m(I) = m(\text{int}(I)) = \text{misura di } I = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n).$$

Se P è un plurintervallo allora si potrà scrivere che $P = \bigcup_{j=1}^n I_j$ dove $\text{int}(I_j) \cap \text{int}(I_k) = \emptyset$ per $j \neq k$. Si definisce allora

$$m(P) = m(\text{int}(P)) = \sum_{j=1}^n m(I_j).$$

Questa definizione non dipende dalla particolare decomposizione di P ; è chiaro inoltre che se P e Q sono pluriintervalli

$$m(P \cup Q) = m(P) + m(Q) \text{ se } \text{int}(P) \cap \text{int}(Q) = \emptyset \quad (1.1.1)$$

In generale si ha, per ogni P e Q ,

$$m(P \cup Q) + m(P \cap Q) = m(P) + m(Q),$$

e quindi

$$m(P \cup Q) \leq m(P) + m(Q). \quad (1.1.2)$$

Infatti, dato che $P = \overline{P \setminus Q} \cup (P \cap Q)$, $Q = \overline{Q \setminus P} \cup (P \cap Q)$ e $P \cup Q = \overline{P \setminus Q} \cup (P \cap Q) \cup \overline{Q \setminus P}$, si ha: ¹

$$\begin{aligned} m(P) + m(Q) &= m(\overline{P \setminus Q}) + m(P \cap Q) + m(\overline{Q \setminus P}) + m(P \cap Q) = \\ &= m(P \cup Q) + m(P \cap Q) \geq m(P \cup Q) \end{aligned}$$

dato che ognuna di queste unioni è fra pluriintervalli con interni a due a due disgiunti.

Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto definiamo

$$m(A) = \text{misura di } A = \sup\{m(P) : P \text{ pluriintervallo, } P \subset A\}. \quad (1.1.3)$$

Teorema 1.3 (Subadditività ed additività sugli aperti). *Sia $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di aperti tutti contenuti in un intervallo I di \mathbb{R}^n . Allora*

- $m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m(A_k)$
- $m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} m(A_k)$ se $A_m \cap A_k = \emptyset$ per $m \neq k$.

Definiamo a questo punto la misura esterna (di Lebesgue) di un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^n$. Si può porre :

$$m_e(E) = \text{misura esterna di } E = \inf\{m(A) : A \text{ aperto, } A \supseteq E\}.$$

Invece se K è un compatto, poniamo per definizione

$$m(K) = \inf\{m(P) : P \text{ plurintervallo, } \text{int}(P) \supset K\}.$$

È evidente che se P è un plurintervallo chiuso, allora la misura di P come insieme compatto è la stessa della misura del plurintervallo P precedentemente definita.

Sia $E \in \mathbb{R}^n$ un insieme limitato. Si pone per definizione:

$$m_i(E) = \text{misura interna di } E = \sup\{m(K) : K \text{ compatto } \subseteq E\}.$$

¹Tutti gli insiemi coinvolti sono pluriintervalli.

Teorema 1.4 (Subadditività della misura esterna). *Sia E_1, \dots, E_k, \dots una successione di insiemi limitati di \mathbb{R}^n tutti contenuti in un intervallo. Allora risulta che:*

$$m_e\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m_e(E_k).$$

Ora passiamo a dare una caratterizzazione degli insiemi limitati misurabili secondo Lebesgue. Sia $E \in \mathbb{R}^n$ limitato e siano K ed A un compatto ed un aperto tali che $K \subseteq E \subseteq A$. Dato che

$$K \subset \bigcup \{ \text{int}(I) : I \text{ intervallo}, I \subset A, \text{int}(I) \cap K \neq \emptyset \} \subseteq A$$

e che K è compatto, esiste un numero finito di intervalli $I_1, \dots, I_n \subset A$ tali che $K \subset \bigcup_{k=1}^n \text{int}(I_k)$.

Posto $P = \bigcup_{k=1}^n I_k$, P è un plurintervallo e $K \subset \text{Int}(P) \subset P \subset A$. Perciò

$$m(K) \leq m(P) \leq m(A)$$

e dunque vale per ogni E la disuguaglianza

$$m_i(E) \leq m_e(E).$$

Si dice allora che un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^n$ è *misurabile secondo Lebesgue* se $m_i(E) = m_e(E)$; in questo caso si pone

$$m(E) = \text{misura di Lebesgue di } E = m_i(E) = m_e(E).$$

Osservazione 1.5. Gli insiemi aperti o chiusi limitati possono essere misurabili secondo la teoria di Lebesgue e la loro misura coincide con le definizioni precedenti. Ad esempio, se consideriamo un insieme aperto A , possiamo costruire una successione crescente di plurintervalli chiusi P_n tali che $m(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(P_n)$. Ogni insieme P_n è compatto e contenuto in A , quindi $m(P_n) \leq m_i(A)$. Questo implica $m(A) \leq m_i(A)$.

Si può inoltre osservare che $m(A) = m_e(A)$. In modo altrettanto analogo si dimostra che $m(K) = m_i(K) = m_e(K)$.

Lemma 1.6 (Superadditività finita). Siano $H, K \subset \mathbb{R}^n$ compatti e disgiunti. Allora

$$m(H \cup K) \geq m(H) + m(K)$$

In particolare, se E ed F sono insiemi limitati e disgiunti, allora

$$m_i(E \cup F) \geq m_i(E) + m_i(F)$$

e, se E ed F sono anche misurabili, si ha che anche $E \cap F$ è misurabile e

$$m(E \cup F) = m(E) + m(F)$$

Teorema 1.7 (Primo principio di Littlewood). *Condizione necessaria e sufficiente perchè un insieme limitato $E \subset \mathbb{R}^n$ sia misurabile secondo Lebesgue è che per ogni $\epsilon > 0$ esistano un compatto K ed un insieme F tali che*

$$K \cup F = E \quad e \quad m_e(F) < \epsilon$$

Teorema 1.8. *Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ misurabile e contenuto in un intervallo I . Allora anche $I \setminus E$ è misurabile e risulta che $m(I \setminus E) = m(I) - m(E)$.*

Teorema 1.9. *L'intersezione di un numero finito o di un'infinità numerabile di insiemi limitati misurabili è misurabile.*

Teorema 1.10 (Subadditività e additività numerabile). *Sia $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi misurabili e tutti contenuti in un intervallo I . Allora l'insieme $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ è misurabile e*

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m(E_k).$$

Se inoltre gli insiemi E_k sono a due a due disgiunti, si ha:

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} m(E_k).$$

Passiamo ora alla misurabilità di insiemi non limitati: un insieme non limitato $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice misurabile secondo Lebesgue se per ogni $r > 0$ è misurabile l'insieme (limitato) $E \cap Q(0, r)$, dove $Q(0, r)$ rappresenta il cubo di lato r . Se E è misurabile si pone per definizione

$$m(E) = \lim_{r \rightarrow +\infty} m(E \cap Q(0, r)).$$

Teorema 1.11. *Siano E ed E_1, \dots, E_k, \dots sottoinsiemi misurabili di \mathbb{R}^n . Allora*

1. $\mathbb{R}^n \setminus E$, $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$ e $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k$ sono misurabili

2. risulta

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} m(E_k),$$

e inoltre, se gli E_k sono a due a due disgiunti,

$$m\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} m(E_k).$$

Il prossimo teorema dimostra che anche quando si tratta di insiemi non limitati, la misura di un insieme misurabile costituisce l'elemento separatore tra due classi adiacenti di numeri reali.

Teorema 1.12. *Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è misurabile (anche non limitato) allora*

$$m(E) = \inf\{m(A) : A \text{ aperto}, A \supseteq E\} = \sup\{m(K) : K \text{ compatto}, K \subseteq E\}$$

1.1.2 σ -algebre e misure esterne

Prima di dare la definizione e le principali proprietà della misura di Hausdorff in \mathbb{R}^n iniziamo col definire qualche notazione, richiamando qualche fatto elementare di teoria della misura necessario nella trattazione.

Definizione 1.13. Sia X un insieme, una famiglia di insiemi $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ è detta σ -algebra se vale:

- $\emptyset \in \mathcal{M}$.
- se $E \in \mathcal{M}$ allora $E^c \in \mathcal{M}$, con E^c si è indicato il complementare dell'insieme E .
- se $\{E_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{M}$ allora $\cup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$.

Definizione 1.14. Una funzione $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ dove \mathcal{M} è una σ -algebra è detta *misura* se

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- $\mu(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$ per ogni successione di insiemi tali che $E_k \subseteq \mathcal{M}$ e $E_j \cap E_k = \emptyset$ per $k \neq j$.

Un approccio frequente per la costruzione di misure è iniziare con una funzione definita per tutti i sottoinsiemi di un insieme X , che possiede certe proprietà desiderate, e successivamente limitarla o restringerla solo ai sottoinsiemi in cui questa funzione si comporta in modo adeguato.

Definizione 1.15. Una funzione $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ dove \mathcal{M} è una σ -algebra è detta *misura esterna* se

- $\mu(\emptyset) = 0$.
- $\mu(E) \leq \mu(F)$ se $E \subseteq F$.
- $\mu(\cup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$.

Teorema 1.16. (*Primo teorema di Caratheodory*). Sia $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ una misura esterna e sia

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq X \mid \mu(A) = \mu(A \cap E) + \mu(A \cap E^c) \forall A \subseteq X\}.$$

Allora \mathcal{M} è una σ -algebra, detta dei misurabili, e μ ristretta a \mathcal{M} è una misura.

Il primo teorema di Carathéodory stabilisce che è sempre possibile trovare una σ -algebra su cui una misura esterna può essere considerata una misura, ma purtroppo questa σ -algebra potrebbe essere limitata o poco ricca. Tuttavia, il teorema successivo fornisce un criterio utile per determinare quando questa σ -algebra sarà sufficientemente ricca.

Teorema 1.17. (*Secondo teorema di Caratheodory*). Sia X uno spazio metrico. Sia $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ una misura esterna con la proprietà che

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$$

per ogni $E, F \subset \mathbb{R}^n$ tale che $d(E, F) > 0$. Allora μ è una misura di Borel.

1.1.3 La misura di Hausdorff

Applichiamo ora la precedente procedura teorica per ottenere una misura con rilevanza geometrica. Possiamo notare che oggetti come curve e superfici hanno una misura di Lebesgue nulla. Il nostro obiettivo è costruire una misura che generalizzi il concetto di area (o lunghezza) ma che dia risultati consistenti su insiemi ragionevolmente generali, ovvero senza troppe ipotesi di regolarità a priori. In modo intuitivo, possiamo riassumere la costruzione nel seguente modo: supponiamo di voler calcolare la lunghezza di una curva in \mathbb{R}^3 . Possiamo coprire questa curva con una serie di piccole sfere di raggio r_i numerate da 1 a k e pensare che la lunghezza totale della curva sia approssimativamente la somma delle lunghezze dei diametri di queste sfere, cioè $l[\gamma] \sim \sum_{i=1}^n 2r_i$. Analogamente, se riusciamo a coprire in modo accurato una superficie S con una serie di piccole sfere di raggio r_i , possiamo pensare che l'area totale di S sia approssimativamente $A(S) \sim \sum_{i=1}^n \pi r_i^2$.

L'idea fondamentale è approssimare la misura di oggetti geometrici complessi scomponendoli in parti più semplici e sommando le misure di queste parti. Questo concetto di approssimazione è alla base della costruzione di misure con significato geometrico.

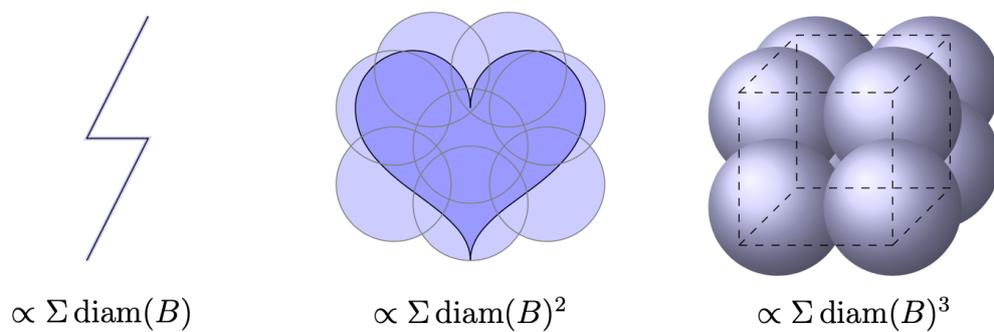


Figura 1.1: Ricoprimento di 1-,2-, e 3-dimensionale di sottoinsiemi di \mathbb{R}^3

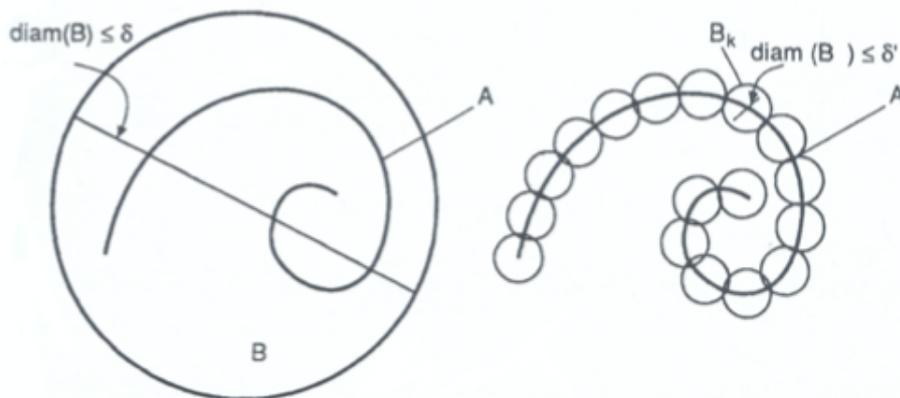


Figura 1.2: esempi di δ -ricoprimenti

Per ogni $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ poniamo ²

$$\omega_s := \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)},$$

dove Γ indica la *funzione gamma* di Eulero definita, per $s > 0$, nel modo seguente:

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$$

Per ogni sottoinsieme non vuoto B di \mathbb{R}^n poniamo

$$r(B) := \frac{1}{2} \text{diam}(B) := \frac{1}{2} \sup\{\|x - y\| : x, y \in B\}.$$

Poniamo inoltre $m_s(\emptyset) = 0$, e se $B \neq \emptyset$,

$$m_s(B) = \omega_s r(B)^s.$$

Definizione 1.18 (δ -ricoprimento). Se A è un arbitrario sottoinsieme di \mathbb{R}^n e se δ è un numero reale positivo, si chiama δ -ricoprimento di A una famiglia $(B_k)_{k \in \mathcal{A}}$ di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n tale che:

1. \mathcal{A} è finito o numerabile,
2. $\text{diam}(B_k) \leq \delta$ per ogni $k \in \mathcal{A}$,
3. $A \subseteq \bigcup_{k \in \mathcal{A}} B_k$.

Definiamo

$$H_\delta^s(A) := \inf \left\{ \sum_{k \in \mathcal{A}} m_s(B_k) : (B_k)_{k \in \mathcal{A}}, \delta\text{-ricoprimento di } A \right\}.$$

Se $0 < \delta' < \delta$ ogni δ' ricoprimento di A è anche un δ -ricoprimento di A ; pertanto

$$H_\delta^s(A) \leq H_{\delta'}^s(A).$$

Definizione 1.19 (misura di Hausdorff s -dimensionale). Si chiama *misura di Hausdorff* s -dimensionale di A il numero reale esteso

$$H^s(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^s(A)$$

con “esteso” si intende che si può avere $H^s(A) = +\infty$.

²Se n è un intero positivo ω_n coincide con il volume della palla unitaria di \mathbb{R}^n .

Osservazione 1.20. Nei casi regolari, ad esempio per curve parametriche piane C^1 (oppure Lipschitziane)

$$H^1 = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

1.1.4 L'integrale di Lebesgue

Si caratterizza l'integrabilità di Riemann di una funzione in termini di approssimazione per funzioni a gradini. Questa caratterizzazione ci dice che le funzioni a gradini sono gli "elementi costitutivi" delle funzioni integrabili di Riemann. Per definire l'integrale di Lebesgue, considereremo una generalizzazione delle funzioni a gradino chiamate "funzioni semplici". Una funzione sarà integrabile secondo Lebesgue se può essere approssimata da queste semplici funzioni in qualche modo appropriato. Per iniziare la nostra discussione sull'integrale di Lebesgue, dobbiamo lavorare con le funzioni misurabili di Lebesgue non-negative. Notiamo che si permette alle funzioni di assumere il valore ∞ .

L'integrale di Lebesgue di funzioni non-negative

Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura e sia $s : X \rightarrow [0, +\infty)$ una funzione semplice, ovvero

$$s = \sum_{i=1}^k c_i \chi_{E_i}$$

con $c_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$, $\bigcup_{i=1}^k E_i = X$ e $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$. Se $E \in \mathcal{M}$ è misurabile, si pone per definizione:

$$\int_E s d\mu = \sum_{i=1}^k c_i \mu(E \cap E_i)$$

dove si considera $c_i \mu(E \cap E_i) = 0$ se $c_i = 0$, anche se $\mu(E \cap E_i) = \infty$

Sia $f : X \rightarrow [0, \infty]$ misurabile; l'integrale (di Lebesgue) di f su E (rispetto alla misura μ) è definito da

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E s d\mu : s \text{ semplice}, 0 \leq s \leq f \text{ in } E \right\}$$

Se l'integrale di f è finito, si dice che f è *sommabile in E* .

Proposizione 1.21. Siano $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ funzioni misurabili ed $E, F \in \mathcal{M}$. Allora

- (i) $\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu$;
- (ii) se $f \leq g$ in E , si ha $\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu$;
- (iii) se $E \subseteq F$, si ha $\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$;

(iv) se $f = 0$ in E , si ha $\int_E f d\mu = 0$;

(v) se $\mu(E) = 0$, si ha $\int_E f d\mu = 0$.

Lemma 1.22. Siano E_1, \dots, E_k, \dots insiemi misurabili di X , a due a due disgiunti e tali che $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Se s è una funzione semplice non negativa, allora

$$\int_E s d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} s d\mu$$

Detto in altri termini, la funzione $\phi : \mathcal{M} \rightarrow [0, +\infty]$ definita da

$$\phi(E) = \int_E s d\mu, \quad E \in \mathcal{M}$$

è una misura.

Teorema di Beppo Levi e Lemma di Fatou

Il seguente teorema si può definire come “passaggio al limite sotto il segno di integrale”

Teorema 1.23. (*di convergenza monotona o di Beppo Levi*). Sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione crescente di funzioni misurabili e non negative su X . Allora

$$\int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu.$$

Osservazione 1.24. Applicando la (1.21)(i), il teorema si può estendere a successioni di funzioni misurabili in un insieme misurabile E .

Lemma 1.25. (Lemma di Fatou). Sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili e non negative su X . Allora

$$\int_X \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu$$

.

Linearità dell'integrale di funzioni non-negative

Teorema 1.26. Siano $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ misurabile e $c \geq 0$. Allora

$$\int_X c f d\mu = c \int_X f d\mu.$$

Lemma 1.27. Siano s e t funzioni semplici. Allora:

$$\int_X (s + t)d\mu = \int_X sd\mu + \int_X td\mu.$$

Teorema 1.28. Siano $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ funzioni misurabili. Allora

$$\int_X (f + g)d\mu = \int_X fd\mu + \int_X gd\mu.$$

Inoltre, se ogni funzione $f_k : X \rightarrow [0, \infty]$, $k \in \mathbb{N}$ è misurabile, si ha che

$$\int_X \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k d\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \int_X f_k d\mu.$$

Vale anche un risultato del Teorema di Beppo Levi per successioni decrescenti di funzioni non negative.

Corollario 1.29. Sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione decrescente di funzioni misurabili e non negative in un insieme misurabile E e sia

$$\int_X f_1(x)d\mu < \infty$$

Allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu = \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu.$$

Tutti i risultati dimostrati valgono se le proprietà in gioco sono verificate quasi ovunque. Ad esempio, se ogni $f_k : E \rightarrow [0, \infty]$ è definita quasi ovunque e la disuguaglianza $f_k \leq f_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$ è verificata quasi ovunque, posto

$$E_k = \{x \in E : f_k \text{ non è definito}\},$$

$$F_k = \{x \in E : f_k(x) > f_{k+1}(x)\},$$

si ha che $\mu(E_k) = \mu(F_k) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Poniamo allora $Z = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (E_k \cup F_k)$ e risulta che $\mu(Z) = 0$ e che ogni f_k è definita in $E \setminus Z$ ed inoltre $f_k \leq f_{k+1}$ in $E \setminus Z$.

Per il Teorema 2.21 di passaggio al limite sotto al segno di integrale, si ha

$$\int_E \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu = \int_{E \setminus Z} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{E \setminus Z} f_k d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_E f_k d\mu.$$

L'integrale di Lebesgue di funzioni sommabili

Sia (X, \mathcal{M}, μ) uno spazio di misura e sia $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione misurabile. Dove abbiamo indicato con $\overline{\mathbb{R}}$ l'insieme $\mathbb{R} \cup \pm\infty$. Si dice che f è *sommabile* se

$$\int_X |f| d\mu < \infty$$

Teorema 1.30. *La classe $\mathcal{L}_\infty(X)$ delle funzioni sommabili in X è uno spazio vettoriale. Inoltre, l'integrale di Lebesgue su X è un'applicazione lineare di $\mathcal{L}_\infty(X)$ in \mathbb{R}*

Proposizione 1.31. (Una funzione sommabile e q.o. finita). Sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sommabile. Posto $E_\infty = \{x \in X : |f(x)| = \infty\}$ risulta che $\mu(E_\infty) = 0$.

Proposizione 1.32. Sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabile. Se

$$\int_E f d\mu = 0$$

per ogni $E \in \mathcal{M}$, allora $f = 0$ q.o. in X .

Il teorema della Convergenza Dominata

Riportiamo adesso un teorema dovuto a Lebesgue che ci sarà molto utile nei successivi capitoli della tesi e in particolar modo nel capitolo 4 (nei teoremi di esistenza di minimi per funzioni radiali e per convessi).

Teorema 1.33. *(di Lebesgue, della convergenza dominata). Siano $f_k : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, k \in \mathbb{N}$ sommabili. Supponiamo che*

(i) *per q.o. $x \in X$*

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x);$$

(ii) *esiste una funzione g sommabile in tale intervallo tale che $|f_k(x)| \leq g(x)$ per q.o. $x \in X$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$. Allora*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X |f_k - f| d\mu = 0.$$

In particolar modo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu = \int_X f d\mu.$$

Corollario 1.34. *Siano $f_k : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $k \in \mathbb{N}$, sommabili e tali che*

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_X |f_k| d\mu < \infty.$$

allora $\sum_{k \in \mathbb{N}} f_k(x)$ converge assolutamente per q.o. $x \in X$ ad una funzione sommabile in X e si ha che:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_X f_k d\mu = \int_X \sum_{k \in \mathbb{N}} f_k d\mu.$$

Il teorema di Fubini-Tonelli

Il teorema che segue assieme al Teorema delle sezioni sarà utile ad esempio nella dimostrazione della conservazione della misura del simmetrizzato secondo Steiner del capitolo 2.

Teorema 1.35. *(delle sezioni). Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ misurabile. Allora, per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$, l'insieme*

$$E_x = \{y \in \mathbb{R}^m \mid (x, y) \text{ in } E\}$$

è misurabile. Inoltre la funzione $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto m_m(E_x)$ è misurabile in \mathbb{R}^n e risulta che

$$m_{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} m_m(E_x) dx.$$

Teorema 1.36. *(Fubini-Tonelli). Sia $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ misurabile.*

- (i) *Se $f \geq 0$ allora la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è misurabile in \mathbb{R}^m per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$, la funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy$ è misurabile in \mathbb{R}^n e si ha:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} f(x, y) dx dy. \quad (1.1.4)$$

- (ii) *Se f è sommabile, allora la funzione $y \mapsto f(x, y)$ è sommabile in \mathbb{R}^m per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$, la funzione $x \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} f(x, y) dy$ è sommabile in \mathbb{R}^n e vale anche in questo caso (1.1.4).*

1.1.5 Gli spazi L^p

Per completezza richiamiamo anche alcune definizioni che ci saranno utili nel seguito della trattazione sugli spazi L^p e sugli spazi di Sobolev $W^{1,p}$ facendo riferimento ai testi [45], [46].

Definizione 1.37. Sia $1 \leq p < \infty$ sia Ω un aperto di \mathbb{R}^n . Si indica con $L^p(\Omega)$ lo spazio delle funzioni misurabili tali che

$$\|u\|_p = \left\{ \int |u|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1.1.5)$$

e con L^∞ lo spazio delle funzioni misurabili tali che

$$|u(x)| \leq C \text{ q.o. } x \in \Omega \quad (1.1.6)$$

con la norma definita da:

$$\|u\|_\infty = \inf \{ C : |u(x)| \leq C \text{ q.o. } x \in \Omega \}. \quad (1.1.7)$$

Osservazione 1.38. Osserviamo che gli elementi di L^p non sono propriamente funzioni ma classi di equivalenza di funzioni: due funzioni sono equivalenti se differiscono su un insieme di misura nulla.

Teorema 1.39 (Disuguaglianza di Hölder). *Siano $u \in L^p$ e $v \in L^q$ con $1 < p, q < \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ allora $uv \in L^1$ ed inoltre vale la seguente disuguaglianza:*

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \left\{ \int |u|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int |v|^q dx \right\}^{\frac{1}{q}}. \quad (1.1.8)$$

Richiamiamo alcune proprietà fondamentali degli spazi L^p cfr. [14], [46].

- $L^p(\Omega)$ è uno spazio di Banach munito della norma (1.1.5) se $1 \leq p < +\infty$ e della norma (1.1.7), quando $p = +\infty$
- Se $m(\Omega) < +\infty$, allora per $1 \leq p \leq r$ vale che $L^r(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, con inclusione in senso topologico, ovvero che la topologia di $L^r(\Omega)$ è più fine della topologia di $L^p(\Omega)$. Dalla disuguaglianza di Hölder segue in particolare che:

$$\|u\|_p \leq (m(\Omega))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}} \|u\|_r$$

dove $m(\Omega)$ denota la misura di Lebesgue di Ω .

- Per $1 \leq p < +\infty$, lo spazio $C_0^0(\Omega)$ delle funzioni continue a supporto compatto contenuto in Ω , è denso in $L^p(\Omega)$ e quindi per ogni $u \in L^p(\Omega)$ e $\tau > 0$ esiste $g \in C_0^0(\Omega)$ tale che $\|u - g\| < \tau$.
- Per $1 \leq p < +\infty$, lo spazio L^p è separabile.

Nozione di convergenza debole in $L^p(\Omega)$.

Definizione 1.40. Siano $p \in (1, +\infty)$ ed $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile secondo Lebesgue. Diciamo che una successione $f_n \in L^p(\Omega)$ converge debolmente a $f \in L^p$ (e si scrive $f_n \rightharpoonup f$ in $L^p(\Omega)$), se:

$$\int_{\Omega} f_n(x)g(x)dx \rightarrow \int_{\Omega} f(x)g(x)dx \quad \forall g \in L^q(\Omega)$$

dove,

$$q := \frac{p}{p-1}.$$

Più in generale, dato uno spazio di Banach \mathcal{B} , si dice che una successione $u_n \in \mathcal{B}$ converge debolmente a $u \in \mathcal{B}$ (e si scrive $u_n \rightharpoonup u$), se

$$T(u_n) \rightarrow T(u) \quad \text{per ogni } T \in \mathcal{B}'$$

dove \mathcal{B}' è lo spazio duale di \mathcal{B}

1.1.6 Gli spazi di Sobolev $W^{1,p}$

Prima di definire gli spazi di Sobolev e per semplicità in dimensione $n = 1$, introduciamo il concetto di derivata debole. Sia I un intervallo aperto di \mathbb{R} di estremi a, b e $C_0^\infty(I)$ lo spazio delle funzioni indefinitamente derivabili con supporto compatto contenuto in I .

Definizione 1.41. Data $u \in L_{loc}^1(I)$ diremo che $v \in L_{loc}^1(I)$ è la derivata debole di u se

$$\int_a^b u\varphi' dx = - \int_a^b v\varphi, \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^\infty(I). \quad (1.1.9)$$

A questo punto possiamo dare la seguente definizione:

Definizione 1.42. Per $1 \leq p \leq +\infty$, indichiamo con $W^{1,p}(I)$ lo spazio vettoriale delle funzioni $u \in L^p(I)$ con derivata debole in $L^p(I)$. Lo spazio $W^{1,p}(I)$ si chiama spazio di Sobolev sull'insieme I .

Lo spazio $W^{1,p}(I)$ è uno spazio vettoriale normato con la seguente norma

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|u'\|_p \quad (1.1.10)$$

e dalle proprietà degli spazi $L^p(I)$ segue che:

- Se $1 \leq p < +\infty$, $W^{1,p}(I)$ è uno spazio di Banach.
- Per $p = 2$, $W^{1,2}(I)$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto scalare:

$$(u, v)_{1,2} = (u, v)_2 + (u', v')_2 = \int_a^b u'v'dx + \int_a^b uvdx$$

- Per $1 \leq p < +\infty$ $W^{1,p}(I)$ è uno spazio separabile.

Proprietà delle derivate deboli

Teorema 1.43. *Derivazione di un prodotto. Siano $u, v \in W^{1,p}$ con $1 \leq p \leq +\infty$ allora $uv \in W^{1,p}$ e*

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Inoltre

$$\int_y^x u'v dt = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv' dt.$$

Teorema 1.44. *Derivata debole di una funzione composta. Sia $G \in C^1(\mathbb{R})$ con $G(0) = 0$ e $u \in W^{1,p}$. Allora la funzione composta di G e u appartiene ancora a $W^{1,p}$ e vale*

$$(G(u(x)))' = G'(u(x))u'(x).$$

1.2 Lo spazio di Gauss

Lo spazio di Gauss si distingue dallo spazio euclideo per il modo in cui misura gli insiemi, differenziandosi dall'approccio classico basato sulla misura euclidea degli intervalli in \mathbb{R} (dove la misura è data da $m[a, b] = b - a$). Invece, il concetto di misura in questo spazio proviene da una definizione alternativa, più legata ai principi della probabilità o alla misurazione della stessa. Si può definire la misura di Gauss su \mathbb{R}^n come una misura di Borel su uno spazio euclideo finito dimensionale, avente come σ -algebra gli insiemi di Borel su \mathbb{R}^n (misurabili secondo Lebesgue) e avente come misura di Gauss la misura di probabilità γ_n con densità *normale standardizzata* f data da:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}.$$

. Ad esempio la misura di un intervallo $[a, b]$ nello spazio di Gauss (\mathbb{R}, γ_1) è quindi:

$$\gamma([a, b]) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx.$$

In generale dato un insieme boreliano $B \subset \mathbb{R}^n$ si definisce la misura di Gauss di B come

$$\gamma_n(B) = \int_B f(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_B e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} dx$$

dove $x \in \mathbb{R}^n$ è una variabile (vettore) n -dimensionale ed $\|x\|$ è il valore del suo modulo nello spazio (ovvero la norma euclidea). γ_n è detta *misura canonica di Gauss su \mathbb{R}^n* . Si osserva che per la definizione data $\gamma_n(B) \in [0, 1]$.

Definizione 1.45. Dato un sottoinsieme E di \mathbb{R}^n , misurabile secondo Lebesgue, si definisce “volume” di E e si indica con $Volume(E)$ la misura canonica di Gauss dell’insieme E , ovvero la quantità

$$Volume(E) = \gamma_n(E) = \int_E f(x)dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_E e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} dx. \quad (1.2.1)$$

Osservazione 1.46. Specializzando la formula in \mathbb{R}^2 si ottiene:

$$Area(E) = \frac{1}{2\pi} \int_E e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} dx.$$

1.2.1 Il perimetro Gaussiano

Ora e nel proseguo della trattazione considereremo solo insiemi con bordo sufficientemente regolare per definire il perimetro Gaussiano.

Definizione 1.47. Si definisce *insieme con bordo lipschitziano*: se per ogni punto $x \in E$ esiste un intorno B tale che $\partial E \cap B$ coincide con il grafico di una funzione Lipschitziana di $(n - 1)$ variabili.

Definizione 1.48. Sia E un insieme aperto con bordo lipschitziano. Si denota con $P_{\gamma_n}(E)$ il *perimetro gaussiano* definito da:

$$P_{\gamma_n}(E) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}} \int_{\partial E} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

dove \mathcal{H}^{n-1} è la misura di Hausdorff $(n - 1)$ dimensionale.

Osservazione 1.49. In particolare se $n = 2$ il perimetro assume la forma

$$P_{\gamma_2}(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\partial E} e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} d\mathcal{H}^1(x).$$

Esempio importante:

Supponiamo che ∂E sia il supporto di una curva parametrizzata $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ semplice e chiusa e Lipschitziana allora

$$\mathcal{H}^1(\delta([0, 1])) = \int_0^1 \|\delta'(t)\| e^{-\frac{\|\delta(t)\|^2}{2}} dt$$

1.2.2 Contenuto di Minkowski e disuguaglianza isoperimetrica nello spazio di Gauss

Indichiamo con A^r l'insieme ottenuto "ingrassando" A nel seguente modo:

$$A^r = \{x \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } dist(x, A) \leq r\} \quad (1.2.2)$$

dove con " $dist(x, A)$ " si intende la distanza euclidea del generico punto x dello spazio di Gauss dall'insieme A . A^r rappresenta quindi l'insieme dei punti di \mathbb{R}^n che appartengono ad A o che distano da A meno di r .

Definizione 1.50. Sia A un boreliano di \mathbb{R}^n il contenuto di Minkowski rispetto alla misura di Gauss di A è definito come segue:

$$\gamma_n^+(\partial A) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} [\gamma_n(A_r) - \gamma_n(A)]. \quad (1.2.3)$$

Per fissare le idee scegliamo come direzione sempre $\zeta = (1, 0, \dots, 0)$ e indichiamo con

$$H(\lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 > \lambda\}$$

un semispazio di \mathbb{R}^n .

Vale il seguente teorema:

Teorema 1.51. Sia A un boreliano di \mathbb{R}^n ed H un semispazio di \mathbb{R}^n tale che $\gamma_n(A) \geq \gamma_n(H)$. Allora

$$\gamma_n(A_r) \geq \gamma_n(H_r). \quad (1.2.4)$$

Per la dimostrazione si rimanda a [32].

Definiamo la funzione di distribuzione normale $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Osserviamo che

$$\gamma_n(H(\lambda)) = \Phi(\lambda).$$

Dal teorema (1.51) abbiamo, per ogni boreliano A ,

$$\gamma_n(A_r) \geq \Phi(\lambda - r). \quad (1.2.5)$$

Se indichiamo con $\Phi^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione inversa di Φ , dalla (1.2.5) segue che per ogni boreliano $A \subset \mathbb{R}^n$ ed $r \geq 0$

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(A_r)) \geq \Phi^{-1}(\gamma_n(A)) - r. \quad (1.2.6)$$

La (1.2.6) è conosciuta come *disuguaglianza di Borell* e ci fa comprendere che la disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss è indipendente dalla dimensione dello spazio. Avendo introdotto il concetto di contenuto di Minkowski rispetto alla misura di Gauss si può usare la (1.2.4) per legare la misura gaussiana di un insieme a quella della sua frontiera.

L'equazione (1.2.3) ci consente di riscrivere la 1.2.5: se $\gamma_n(A) = \gamma_n(H) = \Phi(\lambda)$, allora

$$\gamma_n^+(\partial A) \geq \gamma_n^+(\partial H). \quad (1.2.7)$$

Poichè $\frac{d}{dt}\Phi(t) = -(2\pi)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}$, il contenuto di Minkowski rispetto alla misura di Gauss di un semispazio H è

$$\gamma_n^+(\partial H) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} [\Phi(\lambda - r) - \Phi(\lambda)] = (2\pi)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\lambda^2}{2}}, \quad (1.2.8)$$

quindi la (1.2.7) diventa

$$\gamma_n^+(\partial A) \geq (2\pi)^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\Phi^{-1}(\gamma_n(A))^2}{2}}. \quad (1.2.9)$$

La funzione al secondo membro della (1.2.9) è detta *funzione isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss* e nell'origine.

Concludiamo questa sezione con una proposizione sul perimetro di Gauss e quindi sulla disuguaglianza isoperimetrica.

Teorema 1.52. *Sia E un insieme misurabile di \mathbb{R}^n con frontiera $(n-1)$ -rettificabile, allora*

$$P_{\gamma_n}(E) \geq P_{\gamma_n}(H), \quad (1.2.10)$$

dove H è un semispazio che ha la stessa misura di Gauss di E .

1.2.3 Alcuni esempi nel piano di Gauss: il cerchio e la striscia.

A titolo d'esempio calcoliamo esplicitamente l'area e il perimetro del cerchio centrato nell'origine e della striscia nel piano di Gauss che ci saranno utili nel proseguo della trattazione.

Consideriamo l'insieme $C = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ dove con $R > 0$ si è indicato il raggio del cerchio. Scriviamo tale insieme in coordinate polari:

$$C = \{(r \cos t, r \sin t) : r \in [0, R], t \in [0, 2\pi]\}$$

Usando la forma del cambio di coordinate per gli integrali doppi, si ha:

$$\begin{aligned} Area(C) &= \iint_C e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}} dx dy = \frac{1}{2\pi} \iint_C e^{-\frac{r}{2}} r dr dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt \int_0^R r e^{-\frac{r}{2}} dr = \left[-e^{-\frac{r}{2}} \right]_0^R, \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

e quindi

$$Area(C) = 1 - e^{-\frac{R}{2}}. \quad (1.2.12)$$

Parametizziamo ∂C con la curva $\gamma = \gamma(t) = (R \cos t, R \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$. Il perimetro gaussiano del cerchio risulta essere uguale a:

$$\begin{aligned} P_{\gamma_2}(C) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} |\gamma'| e^{-\frac{\gamma}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} e^{-\frac{R}{2}} R dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2\pi e^{-\frac{R}{2}} R = \sqrt{2\pi} R e^{-\frac{R}{2}}. \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

Passiamo ora a calcolare l'area e il perimetro della striscia \mathbb{R}^2 . Dato che γ_n è invariante per rotazioni senza perdere di generalità consideriamo una striscia parallela all'asse delle ascisse. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$; definiamo

$$S_{a,b} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}, a \leq y \leq b \right\}$$

$$\begin{aligned} Area(S_{a,b}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{[a,b] \times [-\infty, \infty]} e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}} dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_a^b dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}} dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_a^b \sqrt{2\pi} e^{-\frac{y}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{y}{2}} dy \end{aligned}$$

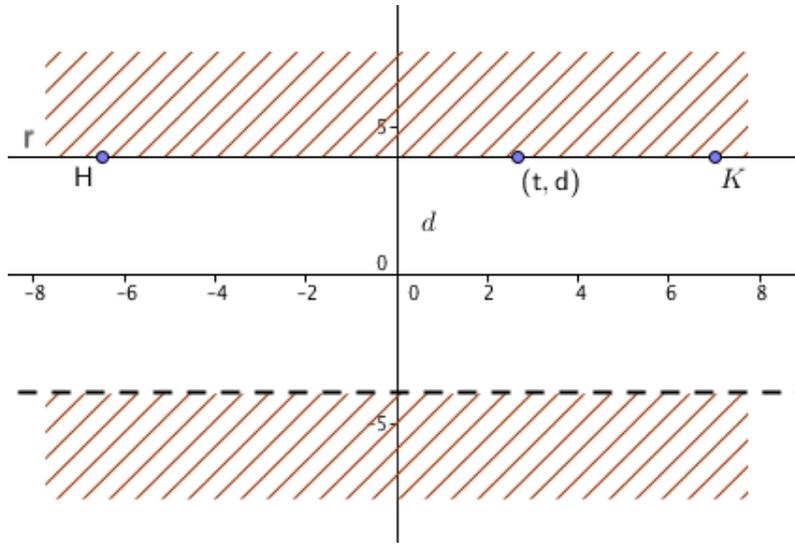


Figura 1.3: Calcolo del perimetro gaussiano della striscia simmetrica di spessore $2d$.

Inoltre possiamo ottenere la misura del semipiano come caso limite della striscia per $b \rightarrow +\infty$ di

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Osservazione 1.53. Si può osservare che se $a = -\infty$ e $b = \infty$ si ottiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1$$

che corrisponde alla misura di Gauss di tutto \mathbb{R}^2 .

Calcoliamo ora il perimetro della striscia. Per semplicità ci limitiamo al caso simmetrico $a = d, b = -d$, con $d > 0$. Facendo riferimento alla figura 1.5. Consideriamo i punti H e K sulla retta r ; la lunghezza del segmento \overline{HK} risulta essere uguale a:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_H^K e^{-\frac{t^2+d^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d^2}{2}} \int_H^K e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Se $H \rightarrow -\infty$ e $K \rightarrow \infty$, la lunghezza della retta r diviene

$$l(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = e^{-\frac{d^2}{2}}$$

quindi il perimetro gaussiano della striscia simmetrica rispetto all'origine di "spessore" $2d$ risulta essere uguale a:

$$P_{\gamma_2}(S_{d,d}) = 2e^{-\frac{d^2}{2}}$$

1.2.4 Osservazioni

Utilizzando anche la funzione

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

possiamo andare ad esprimere la lunghezza di striscia, cerchio e semipiano in funzione delle rispettive aree gaussiane come segue .

Dimostreremo che nel caso della striscia simmetrica la lunghezza gaussiana del bordo è :

$$l(A) = 2e^{-[\operatorname{erf}^{-1}(A)]^2} \quad (1.2.14)$$

Nel caso del *cerchio* la lunghezza gaussiana del bordo come funzione dell'area è :

$$l(A) = 2\sqrt{\pi}\sqrt{-\ln(1-A)}(1-A). \quad (1.2.15)$$

Nel caso del *semipiano* $H \subseteq \mathbb{R}^2$, definito nel seguente modo :

$$H = \{x \in \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2) \text{ t.c. } x_2 \leq h\}^3 \quad (1.2.16)$$

la lunghezza gaussiana del bordo si esprime in funzione dell'area :

$$l(A) = e^{-[\operatorname{erf}^{-1}(2A-1)]^2} \quad (1.2.17)$$

Passiamo ora quindi a dimostrare la (1.2.14), la (1.2.15) e la (1.2.17).

Nel caso della striscia simmetrica di spessore $2h$ si ha:

$$A(h) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^h e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Ponendo $t^2 = \frac{y^2}{2}$, $dt = \frac{dy}{\sqrt{2}}$

$$A(h) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{h}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt \quad (1.2.18)$$

$$= \operatorname{erf}\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right) \quad (1.2.19)$$

³La scelta di H così come in (1.2.16) non è restrittiva perchè la misura di Gauss ha simmetria radiale e quindi è possibile, partendo da un generico sottospazio di \mathbb{R}^2 , riportarsi, attraverso un opportuno cambio di variabili, nella forma (1.2.16)

Invertendo la (1.2.19) si ha :

$$h(A) = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(A) \quad (1.2.20)$$

Ora passiamo a valutare la lunghezza gaussiana l della striscia in funzione dell'area gaussiana. Sappiamo che $l(h) = 2e^{-\frac{h^2}{2}}$, sostituendo al posto di h l'espressione trovata in (1.2.20) si ottiene che

$$\begin{aligned} l(A) &= 2e^{-\frac{[\sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(A)]^2}{2}} \\ &= 2e^{-[\operatorname{erf}^{-1}(A)]^2}. \end{aligned}$$

Nel caso del cerchio l'area e la lunghezza gaussiana come abbiamo già visto sono uguali a 3.2.2 e 3.2.1.

Passiamo a ricavare h in funzione di A

$$e^{-\frac{h^2}{2}} = 1 - A \quad (1.2.21)$$

$$h = \sqrt{-2 \ln(1 - A)} \quad (1.2.22)$$

Ora per ricavare la 1.2.15 si sostituisce ad h il valore trovato e si ha che :

$$\begin{aligned} l(A) &= \sqrt{2\pi} \sqrt{-2 \ln(1 - A)} e^{\ln(1 - A)} \\ &= 2\sqrt{\pi} \sqrt{-\ln(1 - A)} (1 - A) \end{aligned}$$

Nel caso del semipiano l'area gaussiana è uguale a

$$\begin{aligned} A(h) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^h e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{h}{\sqrt{2}}} \sqrt{2} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{h}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

Scomponendo l'integrale si ha:

$$\begin{aligned} A(h) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\infty}^0 e^{-t^2} dt + \int_0^{\frac{h}{\sqrt{2}}} e^{-t^2} dt \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \right) \right]. \end{aligned}$$

possiamo andare a ricavare h in funzione di A

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \right)$$

quindi

$$2A - 1 = \operatorname{erf} \left(\frac{h}{\sqrt{2}} \right)$$

ovvero

$$h = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1} (2A - 1) \tag{1.2.23}$$

Ora passiamo alla lunghezza. La lunghezza gaussiana del semipiano è uguale a:

$$l(h) = e^{-\frac{h^2}{2}},$$

sostituendo ad h l'espressione trovata in (1.2.23) si ha che

$$l(A) = e^{-[\operatorname{erf}^{-1}(2A-1)]^2} \tag{1.2.24}$$

Osservazione 1.54. Si può osservare dal grafico di figura 1.4 che ad area gaussiana fissata il semipiano ha sempre perimetro minimo il che va d'accordo con la risoluzione del problema isoperimetrico nello spazio di Gauss che sarà trattato ampiamente nella sezione 2.3 della presente tesi.



Figura 1.4: Grafico del perimetro di striscia simmetrica, semipiano e cerchio in funzione della rispettiva area

1.3 Insiemi stellati e funzione radiale

In questo paragrafo consideriamo sottoinsiemi stellati rispetto all'origine, dello spazio \mathbb{R}^n con la misura γ_n , e dimostriamo due formule che permettono di calcolare area e perimetro gaussiani di questi insiemi in termini della loro funzione radiale.

Definizione 1.55. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoto. Diciamo che Ω è *stellato* se esiste un $x_0 \in \Omega$ tale che per ogni $x \in \Omega$ il segmento di estremi x_0 e x è contenuto in Ω (cioè se $\forall t \in [0, 1] : x_0 + t(x - x_0) \in \Omega$). In tal caso si dice che Ω è *stellato rispetto a* x_0 .

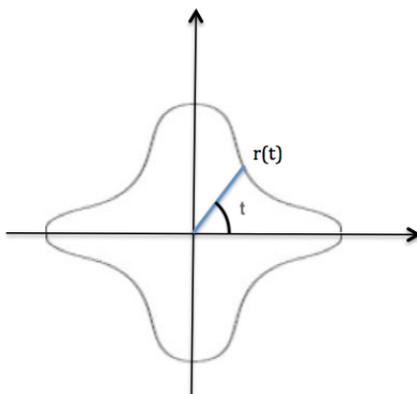


Figura 1.5: Insieme stellato. $r(t)$ rappresenta la lunghezza del segmento di estremi l'origine e il punto sul bordo di Ω

Esempi:

Ogni palla $Br(x_0)$ di centro x_0 e raggio $r > 0$ in \mathbb{R}^n è considerata un insieme stellato rispetto a x_0 . Questo perchè per qualsiasi punto x all'interno della palla, è possibile tracciare un segmento che connette x al centro x_0 della palla, e questo segmento è completamente contenuto nella palla stessa. In effetti, qualsiasi punto all'interno della palla può essere collegato a qualsiasi altro punto della palla attraverso un segmento che rimane interamente all'interno della palla. Questo attribuisce all'insieme una caratteristica "stellata".

Ogni insieme convesso è stellato rispetto a ogni suo punto.

D'altra parte non tutti gli insiemi sono stellati; ad esempio una corona circolare non è un insieme stellato. Questo perché se si prendono due punti x e y sulla corona circolare che sono simmetrici rispetto al centro, il segmento che li congiunge attraversa l'esterno della corona circolare, quindi non è interamente contenuto all'interno dell'insieme.

Definizione 1.56. Sia Ω un insieme stellato rispetto all'origine. Si definisce funzione radiale r_Ω , la funzione

$$r_\Omega : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$r_\Omega(u) = \sup\{r \geq 0 \mid r \cdot u \in \Omega\}$$

Osservazione 1.57. Per $n = 2$ si identifica \mathbb{S}^1 con $[0, 2\pi]$ e quindi la definizione di funzione radiale $r_\Omega : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}_+$ diventa:

$$r_\Omega(t) = \sup\{r \geq 0 \mid (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t)) \in \Omega\}, \quad \forall t \in [0, 2\pi].$$

1.3.1 Area e Perimetro Gaussiani di insiemi stellati piani

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme stellato rispetto all'origine e sia r_Ω la sua funzione radiale, $r_\Omega : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$. Supponiamo che r sia strettamente positiva e che sia Lipschitziana in $[0, 2\pi]$. In particolare per il Teorema di Rademacher che verrà ricordato nel paragrafo (1.6.4) la derivata di r , $r'(t)$, è definita q.o. in $[0, 2\pi]$ ed è limitata. Supponiamo inoltre che Ω sia chiuso. Dunque Ω può essere scritto nella forma

$$\Omega = \{(\varrho \cdot \cos(t), \varrho \cdot \sin(t)) \mid t \in [0, 2\pi], \quad 0 \leq \varrho \leq r_\Omega(t)\},$$

$$Area(\Omega) = \int_{\Omega} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} dx dy.$$

Passando a coordinate polari

$$x = \varrho \cdot \cos(t), \quad y = \varrho \cdot \sin(t),$$

otteniamo

$$Area(\Omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^{r(t)} e^{-\frac{\varrho^2}{2}} \varrho \, d\varrho dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 - e^{-\frac{r(t)^2}{2}}\right) dt$$

Nelle ipotesi precedenti $\partial\Omega$ è il supporto di γ , dove $\gamma(t) = (r(t) \cdot \cos(t), r(t) \cdot \sin(t))$ con $t \in [0, 2\pi]$. Allora

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{r^2(t) + r'^2(t)}.$$

Il perimetro gaussiano di Ω è quindi

$$P_{\gamma_2}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(t) + r'^2(t)} e^{-\frac{r(t)^2}{2}} dt.$$

Se l'insieme Ω è inoltre simmetrico rispetto all'origine come in figura 1.5 si ha:

$$Area(\Omega) = \frac{2}{c_A} \int_0^\pi \left(1 - e^{-\frac{r(t)^2}{2}}\right) dt$$

e

$$P_{\gamma_2}(\Omega) = \frac{2}{c_P} \int_0^\pi \sqrt{r^2(t) + r'^2(t)} e^{-\frac{r(t)^2}{2}} dt.$$

1.4 Funzione supporto di insiemi convessi

Facendo riferimento al testo di Schneider andiamo a definire cosa si intende per funzione supporto di un insieme convesso. Sia $K \in \mathcal{K}^n$ si definisce la funzione supporto $H_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$H_K(x) = \sup_{y \in K} (x, y)$$

(vedi fig. 1.6 pagina seguente).

1.4.1 Iperpiano di supporto

Un iperpiano di supporto H di un insieme K nello spazio euclideo \mathbb{R}^n è un iperpiano che possiede le seguenti due proprietà:

1. K è interamente contenuto in uno dei due semi-spazi limitati dall'iperpiano.
2. K ha almeno un punto sull'iperpiano, ovvero $K \cap H \neq \emptyset$

Osservazione 1.58. La funzione supporto di insiemi convessi descrive la distanza (con segno) del piano di supporto di K dall'origine, in funzione della normale al piano di supporto (che punta esternamente a K).

1.5 Distanza di Hausdorff

Dato uno spazio metrico X e due sottoinsiemi $A, B \subseteq X$ definiamo alcune quantità che ci serviranno per definire la distanza di Hausdorff. Si dice *distanza di un punto dall'insieme A* la quantità

$$d(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Si definisce inoltre *eccedenza di A su B* la quantità

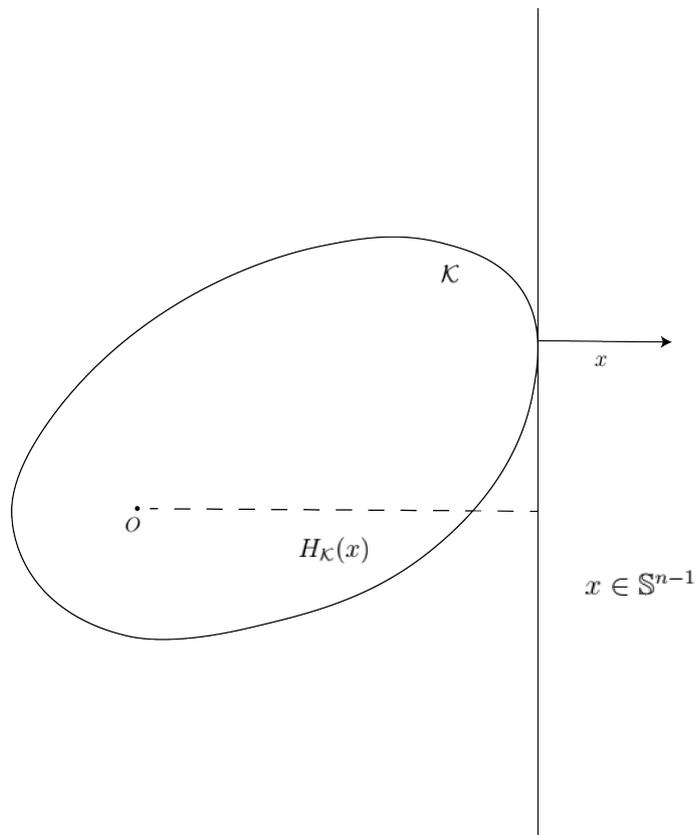


Figura 1.6: Funzione Supporto.

$$e(A, B) := \sup_{x \in A} d(x, B).$$

Definiamo a questo punto la *distanza di Hausdorff* tra A e B la quantità

$$\text{dist}_H(A, B) := \max\{e(A, B), e(B, A)\}$$

Se $X = \mathbb{R}^n$, il dominio naturale per questa metrica è l'insieme \mathcal{C}^n degli insiemi compatti non vuoti di \mathbb{R}^n .

Nel caso particolare di insiemi convessi vale una relazione che lega la distanza di Hausdorff alla funzione supporto di un convesso:

$$\text{dist}_H(A, B) = \sup_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \|H_A(x) - H_B(x)\|$$

Enunciamo senza dimostrare il Teorema di Selezione di Blaschke (per una dimostrazione si rimanda a [61]).

Teorema 1.59. (*Selezione di Blaschke*) *Se $K_i, i \in \mathbb{N}$ è una successione di corpi convessi equilimitata, ovvero esiste $R > 0$ tale che*

$$K_i \subseteq B(0, R), \quad \forall i \tag{1.5.1}$$

allora esiste una sottosuccessione $K_{i_j \rightarrow j \rightarrow \infty} K$ nella distanza di Hausdorff con K corpo convesso.

1.6 Alcuni concetti di Calcolo delle Variazioni

In questa sezione, prima ricordiamo alcuni concetti propri del calcolo delle variazioni, la variazione prima di un funzionale e successivamente il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni. Questi rimandi sono necessari per derivare quella che poi verrà chiamata nel successivo paragrafo l'equazione di Eulero-Lagrange per un problema isoperimetrico.

1.6.1 Problemi variazionali unidimensionali

Inizialmente è dato un funzionale della forma:

$$F(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y') dx, \tag{1.6.1}$$

dove y soddisfa le condizioni al bordo

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Il problema fondamentale del Calcolo delle Variazioni consiste nell'individuare la funzione $y(x)$ con i valori al contorno assegnati in modo che il funzionale $F(y)$ assuma un valore estremo (minimo o massimo). A tale scopo si può introdurre il concetto di variazione prima di un funzionale.

1.6.2 La variazione prima di un funzionale

Dato il funzionale (1.6.1) si supponga di variare la funzione $y(x)$ ad estremi fissi cioè di sostituire alla funzione $y(x)$ quella variata $y(x) + \delta y(x)$

$$y(x) \rightarrow y(x) + \delta y(x)$$

dove $\delta y(x)$ è una qualsiasi funzione C_0^∞ nell'intervallo $[x_0, x_1]$. Generalmente la variazione di $y(x)$ viene espressa nella forma

$$\delta y(x) = \varepsilon \varphi(x) \tag{1.6.2}$$

con ε costante reale arbitraria e $\varphi(x)$ di classe C_0^∞ in $[x_0, x_1]$. Il valore assunto dal funzionale 1.6.1 in corrispondenza della funzione variata risulta quindi

$$F(y + \delta y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x) + \varepsilon \varphi(x), y'(x) + \varepsilon \varphi'(x)) dx \tag{1.6.3}$$

e per ogni $y(x)$ e $\varphi(x)$ assegnate si può intendere come una funzione reale della variabile reale ε . Nel caso in cui $y(x)$ costituisca un estremo del funzionale, deve necessariamente risultare:

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon} F(y + \varepsilon \varphi) \right)_{\varepsilon=0} = 0 \tag{1.6.4}$$

deve cioè annullarsi la *variazione prima del funzionale* in $y(x)$.

1.6.3 Il lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni

Prima di enunciare e dimostrare il lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni diamo alcune definizioni ed un lemma:

Definizione 1.60. Una funzione $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ si dice mollificatore o nucleo regolarizzante se soddisfa le seguenti proprietà:

- $\phi(x) \geq 0$
- $\text{Supp } \phi \subset \overline{B_1}$ ⁴ dove $B_1 = \{x : \|x\| < 1\}$,
- $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) = 1$

Definizione 1.61. Assegnata $f \in L^1_{loc}$, si chiama ε -regolarizzata di f la funzione

$$f_\varepsilon(x) = \int f(y)\phi_\varepsilon(x-y)dy = \int f(x-z)\phi_\varepsilon(z)dz$$

dove $\phi_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^n} \phi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$. Si ha quindi che:

$$f_\varepsilon(x) = f * \phi_\varepsilon = \phi_\varepsilon * f,$$

dove $*$ indica la convoluzione di funzioni.

Enunciamo senza dimostrare il seguente Lemma sulle regolarizzate delle funzioni di classe L^p .

Lemma 1.62. Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p \leq +\infty$. Allora vale:

$$\|f_\varepsilon\|_p \leq \|f\|_p$$

.

Teorema 1.63 (Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni). *Sia, Ω un aperto di \mathbb{R}^n e $f \in L^1(\Omega)$ tale che per ogni $g \in C_0^\infty(\Omega)$*

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)dx = 0,$$

allora $f(x) = 0$ q.o. in Ω .

Dimostrazione. Assegnata $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ una funzione con supporto compatto contenuto in Ω proviamo che vale

$$\int_{\Omega} fgdx = 0.$$

Sia $g_\varepsilon \in C_0^\infty$ e per ε sufficientemente piccolo risulta $\text{Supp } g_\varepsilon \subset \Omega$. Dall'ipotesi segue quindi che

$$\int_{\Omega} g_\varepsilon f dx = 0.$$

⁴supp f è definito come il più piccolo chiuso che contiene i punti in cui f non si annulla.

Poichè g_ε converge a g in L^1 , esiste una sottosuccessione, che indichiamo ancora con g_ε che converge a g quasi ovunque in Ω . Inoltre, per il Lemma (1.62) si ha

$$|f(x)g_\varepsilon(x)| \leq \|g_\varepsilon\|_\infty |f(x)| \leq |f(x)| \|g\|_\infty.$$

Si può applicare il teorema della convergenza dominata e quindi dal passaggio al limite sotto il segno di integrale, si ottiene:

$$\int_{\Omega} g f dx = 0.$$

Assegnato un compatto K , definiamo la seguente funzione in L^∞

$$g(x) = \begin{cases} \text{sign} f(x) & x \in K \\ 0 & x \in \Omega \setminus K. \end{cases}$$

Da quanto provato precedentemente si ha per questa scelta di g :

$$\int_K |f| dx = 0$$

e quindi $f(x) = 0$ quasi ovunque in K . Dall'arbitrarietà di K , segue $f(x) = 0$ quasi ovunque in Ω . \square

1.6.4 Il teorema di Rademacher

Per poter enunciare il teorema di Rademacher diamo prima alcuni risultati sulle funzioni a variazione limitata che per uno studio più accurato e per una dimostrazione del teorema possiamo ritrovare in [2]. Sia $S([a, b])$ l'insieme delle *suddivisioni* σ di un intervallo chiuso $[a, b] \subset \mathbb{R}$; si scriverà $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$ per qualche $n \in \mathbb{N}$.

Definizione 1.64. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Si definisce *variazione totale* di f la quantità

$$V_{[a,b]}(f) = \sup_{\sigma \in S} \sum_{x_i \in \sigma} |f(x_i) - f(x_{i-1})|. \quad (1.6.5)$$

Se $V(f) < \infty$ si dirà che f è a variazione totale limitata e si scriverà $f \in BV([a, b])$, ovvero $BV([a, b])$ indica lo spazio delle funzioni a variazione limitata in $[a, b]$.

Proposizione 1.65. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione Lipschitziana, allora $f \in BV([a, b])$.

Dimostrazione. La funzione f è Lipschitziana, si ha quindi:

$$|f(x) - f(y)| \leq Lip(f)|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b]$$

Comunque sia presa una suddivisione $\sigma \in S([a, b])$ si ha :

$$\sum_{x_i \in \sigma} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{x_i \in \sigma} Lip(f)|x_i - x_{i-1}| \leq Lip(f)|b - a|$$

quindi

$$V(f) \leq Lip(f)|b - a| < \infty.$$

□

Ricordiamo ora alcune proprietà delle funzioni a variazione limitata che si possono rintracciare in [2], [35].

- (i) L'insieme delle funzioni a variazione limitata su un intervallo $[a, b]$ è uno spazio vettoriale.
- (ii) Se f e g sono a variazione limitata in $[a, b]$ anche fg è a variazione limitata; se inoltre $|g| \geq \mu$ con μ costante positiva anche f/g è a variazione limitata.
- (iii) Se f è a variazione limitata in $[a, b]$ e $c \in [a, b]$ si ha che:

$$V_{[a,b]}(f) = V_{[a,c]}(f) + V_{[c,b]}(f).$$

Possiamo ora definire

$$[t]^+ = \max(t, 0) \quad [t]^- = \max(-t, 0) \quad t \in \mathbb{R}.$$

La variazione positiva e la variazione negativa di f in $[a, b]$ sono definite da

$$P_{[a,b]}(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]^+ : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\},$$

e

$$N_{[a,b]}(f) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})]^- : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b \right\}.$$

valgono le formule:

$$V_{[a,b]}(f) = P_{[a,b]}(f) + N_{[a,b]}(f), \quad e \quad f(b) - f(a) = P_{[a,b]}(f) - N_{[a,b]}(f).$$

Dalla seconda formula segue la *decomposizione di Jordan* di una funzione a variazione limitata contenuta nella proposizione seguente.

Proposizione 1.66 (Jordan). Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a variazione limitata. Allora

$$f(x) = f(a) + P_{[a,x]}(f) - N_{[a,x]}(f), \quad x \in [a, b].$$

In particolare, osservando che $P_{[a,x]}$ e $N_{[a,x]}$ sono funzioni crescenti di x , abbiamo che ogni funzione a variazione limitata è *differenza di due funzioni crescenti*.

Ora segue il teorema di Lebesgue sulla derivabilità quasi ovunque di funzioni a variazione limitata che in questa tesi ci limitiamo ad enunciare.

Teorema 1.67 (di Lebesgue). *Ogni funzione a variazione limitata ha quasi ovunque derivata finita.*

Teorema 1.68. *Ogni funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana è differenziabile quasi ovunque.*

Dimostrazione. Dato che il Teorema di Lebesgue vale per funzioni BV, utilizziamo la proposizione (1.65) per arrivare alla tesi. \square

La prima estensione naturale del teorema (1.68) di differenziabilità di funzioni lipschitziane sta nel considerare il caso in più dimensioni.

Teorema 1.69 (di Rademacher). *Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione lipschitziana. Allora f è quasi ovunque differenziabile.*

Capitolo 2

Introduzione al problema isoperimetrico

“A quelli che non conoscono la matematica è difficile percepire, come una sensazione reale, la bellezza; la profonda bellezza della Natura. Se volete conoscere la Natura, apprezzarla, è necessario comprendere il linguaggio che essa parla.”

RICHARD FEYNMAN

2.1 Presentazione del contenuto del capitolo.

Il secondo capitolo approfondisce il problema isoperimetrico passando in vari spazi e in varie dimensioni. Si comincia esaminando il caso bidimensionale, con una panoramica storica delle varie soluzioni proposte nel corso del tempo, tra cui quelle proposte da Steiner [63], [64], [65], [66] e la dimostrazione finale di Edler [9]. Questo permette di gettare le basi concettuali necessarie per comprendere la complessità del problema e le sue implicazioni. Si giunge così al problema isoperimetrico per i poligoni, introducendo il problema di Didone, e giungendo infine alla disuguaglianza di Wirtinger. Questo percorso porta a una serie di sviluppi concettuali che conducono alla dimostrazione analitica nel piano. Per maggiori approfondimenti si rimanda a [68]. Per passare ad un contesto più generale, si accenna alla dimostrazione del teorema isoperimetrico in dimensioni superiori ($n \geq 3$). Questa estensione diventa cruciale per comprendere il problema in modo più ampio e per applicazioni più avanzate. La terza sezione del capitolo si focalizza sul problema isoperimetrico nello spazio di Gauss [28], [29], [32], [43]. Qui, il lemma di Poincaré emerge come uno strumento per affrontare la questione. Si procede

quindi con la disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera (\mathbb{S}^{n-1}) e viene presentata la dimostrazione del teorema nello spazio di Gauss, con particolare attenzione a quella proposta da Borell. Questa sezione delinea un'importante estensione del problema isoperimetrico in uno spazio più generale e offre approfondimenti su tecniche e risultati specifici. Infine, a conclusione del capitolo, viene esaminata una dimostrazione analitico funzionale sviluppata da Bobkov, che sfrutta il cubo discreto. [10,32]. Questo approccio offre una prospettiva aggiuntiva e mostra come diverse metodologie possano convergere verso la soluzione del problema isoperimetrico, evidenziando la sua ricchezza concettuale e la sua rilevanza in diverse aree della matematica.

2.2 Il teorema isoperimetrico in \mathbb{R}^2

Teorema 2.1. (Teorema isoperimetrico)

Tra tutte le figure piane di dato perimetro, il cerchio ha l'area massima .

Se indichiamo dunque con A l'area e con L il perimetro di una data figura il teorema può essere sintetizzato, nella seguente disuguaglianza:

$$\boxed{L^2 \geq 4\pi A} \tag{2.2.1}$$

classica disuguaglianza isoperimetrica e l'uguaglianza si verifica se e solo se la figura è un cerchio.

Il precedente teorema può essere considerato il prototipo dei problemi isoperimetrici. Nella presente sezione si cercherà di ripercorrere, per quanto possibile in maniera fedele, lo sviluppo del pensiero matematico, insieme agli sforzi che hanno accompagnato tale teorema. D'altro canto, come vedremo, la storia della sua dimostrazione inizia con gli antichi Greci, i quali ovviamente ignoravano il significato di *curva di Jordan*, di *curva chiusa rettificabile*, di *insieme semplicemente connesso*, ecc. concetti indispensabili per definire il termine figura. Iniziamo quindi, alla luce di quanto appena osservato, a ripercorrere le fasi più importanti di carattere storico ed elementare, che hanno accompagnato lo studio della disuguaglianza isoperimetrica puntando maggiormente l'attenzione sulla descrizione delle tecniche dimostrative più che su dimostrazione matematicamente rigorosa del teorema isoperimetrico, la quale verrà affrontata nelle prossime sezioni.

Nicholas Kazarinoff ([37] pag.36) afferma che già Archimede (287-212 a.C.) conosceva l'enunciato del teorema precedentemente esposto e che Zenodoro nel 180 a.C. scrisse un libro dal titolo "Sulle figure isoperimetriche" del quale però non ci è pervenuta alcuna copia; i risultati comunque furono descritti e dimostrati di nuovo da Pappo di Alessandria (300 d.C) nel libro V

della sua Collezione (*Zenodori Commentarius de Figurius isoperimetricis*, Mathematicae Collectiones III vol, pag 1189 Berlino 1878).

Dopo il lavoro dei geometri greci nell'antichità furono fatti pochi progressi fino all'epoca dello svizzero Simon Lhuilier (1750-1840), e successivamente Jakob Steiner (1796-1863) anche lui svizzero. I metodi introdotti da Lhuilier e Steiner nelle loro ricerche (come l'uso dell'*approssimazione successiva*, la *simmetrizzazione* ed il *metodo degli snodi*) hanno avuto un notevole impatto sulla matematica del loro tempo e sono ancora oggi utilizzati. Si può notare che i metodi di Steiner erano prevalentemente di natura geometrica, piuttosto che basati su tecniche algebriche o analitiche. Erano metodi sintetici, il che significa che coinvolgevano le proprietà geometriche delle figure senza far ricorso a teoremi di algebra o calcolo né all'utilizzo dei metodi della geometria analitica.

Lo sviluppo dell'Analisi Matematica, in particolare del Calcolo delle Variazioni, fu influenzato in modo significativo dal lavoro di Steiner e da un errore nella sua dimostrazione del teorema isoperimetrico. Questo errore fu successivamente identificato e corretto da Karl Weierstrass, matematico tedesco del XIX secolo, ed era legato alla questione dell'esistenza di una figura di area massimale a parità di perimetro, un aspetto che Steiner non aveva considerato. Quando si legge il teorema isoperimetrico, si tende intuitivamente a supporre l'esistenza di una figura con l'area massima possibile. La dimostrazione di questo teorema coinvolge l'uso di iterazioni di processi simili (come fatto da Steiner con la sua simmetrizzazione) e richiede, come Weierstrass aveva notato, argomenti di convergenza che Steiner non aveva trattato nella sua dimostrazione. Le tecniche sviluppate da Steiner si basavano su un principio fondamentale: se E è una figura piana con l'area massima possibile, e non è un cerchio, allora è possibile determinare una seconda figura F con lo stesso perimetro di E ma con un'area maggiore. Questo fatto suggerisce chiaramente che, a meno che la figura non sia un cerchio, essa non può massimizzare l'area quando il perimetro è fissato.

Per risolvere questa critica corretta mossa da Weierstrass, oggi viene utilizzato il cosiddetto "principio di selezione di Blaschke". Questo principio dimostra l'esistenza di una figura di area massima utilizzando un teorema di compattezza applicato alla classe delle figure convesse. In questo modo, si è in grado di affrontare in modo più rigoroso la questione dell'esistenza di una figura con l'area massima possibile, superando l'errore nella dimostrazione originale di Steiner.

Jakob Steiner elaborò il suo lavoro sui problemi isoperimetrici in due distinte fasi.

Nel 1836 presentò un lavoro dal titolo *Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze* [Semplici prove fondamentali della isoperimetria] e poi nel



Figura 2.1: Jakob Steiner 18 Marzo 1796 – 1 Aprile 1863

1841 all'Accademia di Parigi presentò *Über Maximum and minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt* [Sul massimo e minimo nelle figure sul piano, sulla superficie sferica e nello spazio in genere]. Nella prima parte di questo lavoro Steiner introduce il metodo degli snodi che può essere utilizzato per risolvere ad esempio (data l'esistenza di una figura massimale) il già citato Problema di Didone (cfr. introduzione). Steiner rifiutava qualsiasi ragionamento che fosse puramente analitico e diffidava dei calcoli algebrici. Si impegnava a continuare la tradizione dei matematici greci, utilizzando solo argomenti geometrici sintetici. Veniva per questo considerato il più grande geometra dai tempi di Apollonio.

Nella timeline riportata nella (figura 2.2) abbiamo rappresentato i periodi storici dall'Ellenismo fino all'Ottocento, includendo alcune figure di matematici e matematiche importanti. Questo è stato fatto al fine di fornire un'idea approssimativa sia dell'evoluzione storica menzionata sopra, sia della collocazione temporale delle personalità più strettamente legate al problema isoperimetrico. È interessante notare che l'interesse moderno per i problemi isoperimetrici è emerso solo contemporaneamente alla nascita del calcolo delle variazioni con i fratelli Bernoulli alla fine del 1600.¹ Inoltre, la pri-

¹Nel corso del 1700 il calcolo delle variazioni ricevette un grande impulso grazie ai lavori

ma trattazione geometrica moderna del classico problema isoperimetrico nel piano risale solo al 1842, grazie al lavoro di Jacob Steiner.

Nella timeline, ci sono alcune date significative. Nel caso di Archimede e di Ipazia, le date indicate sono le loro morti, considerate eventi emblematici di passaggi storici particolarmente rilevanti. Per gli altri personaggi, è stata scelta una data corrispondente a un'opera importante da loro realizzata. Nel 1120, Adelardo di Bath ha pubblicato la prima edizione latina degli *Elementi* di Euclide, tradotti da una fonte araba. Nel 1202, Fibonacci ha scritto il *Liber Abaci*. Nel 1543, Copernico ha pubblicato il celebre trattato [23]. Nel 1632, Galileo ha pubblicato il *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo*, mentre nel 1687, Newton ha pubblicato i *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Nel 1697, Johann Bernoulli ha formulato il problema della brachistocrona. In una memoria del 1738, Euler ha posto le basi del moderno calcolo delle variazioni², basandosi sulle ricerche dei fratelli Bernoulli. Infine, nel 1842, Steiner ha pubblicato la sua soluzione³ del problema isoperimetrico nel piano in [63], dando inizio ai moderni metodi geometrici per affrontare questo tipo di problemi (tra cui una tecnica di simmetrizzazione fondamentale che oggi porta il suo nome, come già accennato).

2.2.1 Le soluzioni di Steiner per il problema isoperimetrico

Steiner cercò di “risolvere il problema isoperimetrico”, sottovalutando l'ipotesi di esistenza della figura massimizzante che rappresenta la soluzione del problema isoperimetrico andando ad eliminare tutte le figure che non avrebbero soddisfatto l'ipotesi di area massima. Tutto ciò è stato messo in dubbio da Dirichlet soprattutto non solo per i concetti espressi (i.e. curva, continuità) ma per il procedimento adottato. Analizzando la dimostrazione di Steiner, tenendo conto comunque che con l'ipotesi di esistenza della figura massimizzante sarebbe stata più completa, consideriamo il problema isoperimetrico: data una lunghezza $L > 0$, tra tutte le curve piane chiuse γ di lunghezza L , trovare quella che racchiude l'area maggiore.

La dimostrazione può essere descritta in tre fasi importanti:

- i) **La regione A racchiusa dalla curva γ deve essere convessa.**

di Lagrange ed Euler.

²Euler dimostra in particolare la condizione necessaria di ottimalità, oggi nota come *Equazione di Eulero-Lagrange*

³La dimostrazione di Steiner come vedremo, non è del tutto rigorosa in quanto suppone implicitamente l'esistenza di figure ottimali.

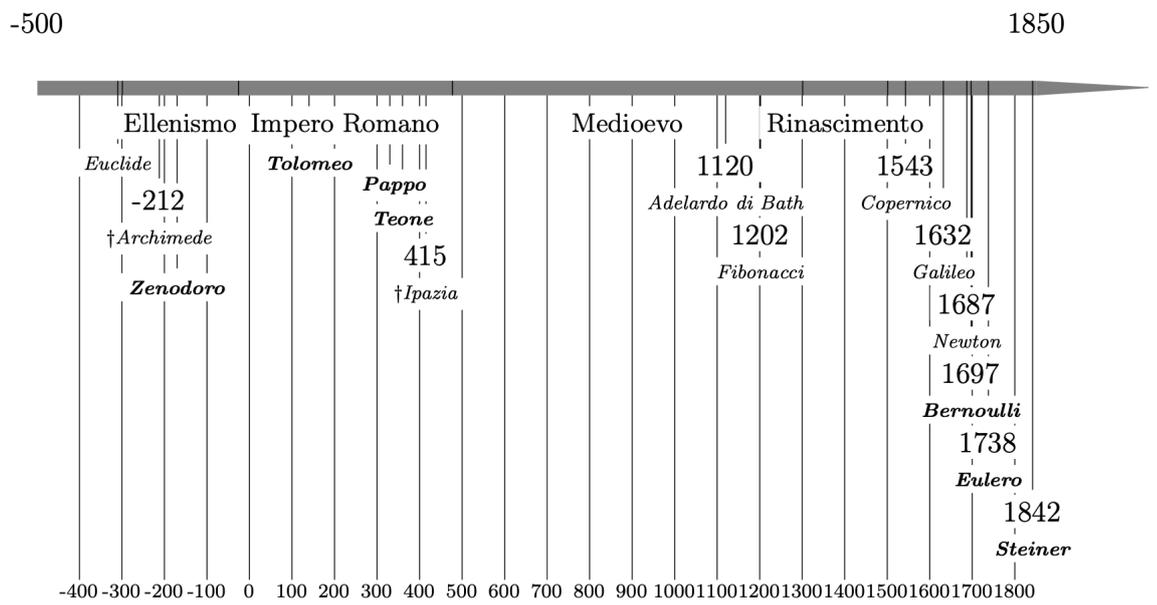


Figura 2.2: Timeline che riporta alcune date significative per inquadrare il problema isoperimetrico.

Dimostrazione. Supponiamo che A non sia convessa. Allora esistono due punti sulla curva γ tali che il segmento che li unisce è esterno ad A .

Eseguiamo allora una semplice operazione: ribaltiamo la parte di curva che si trova tra il segmento e A , trasformandola in una figura con sporgenze anziché rientranze. Otteniamo così una nuova figura A' che ha lo stesso perimetro di A ma area maggiore. Questa operazione geometrica consiste nel considerare l'involucro convesso della curva, cioè una figura convessa che racchiude completamente la curva γ . Siccome stiamo modificando la forma originale per ottenere una figura convessa, l'area di A' sarà maggiore di quella di A , mantenendo la lunghezza L della curva invariata.

Di conseguenza, se A non fosse la regione ottimale, avrebbe un'area minore rispetto a A' , che è convessa. Pertanto, possiamo concludere che la regione ottimale deve necessariamente essere convessa.

□

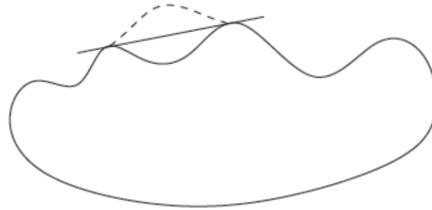


Figura 2.3: Manovra di ribaltamento

Osservazione 2.2. Si può notare che il procedimento seguito da Steiner è in parte inesatto quando si tratta di ribaltare il segmento. Infatti, non disponiamo di alcuna informazione sui due punti sulla curva γ che rappresentano gli estremi del segmento. Questi potrebbero essere dei punti tali che, sia impossibile determinare con certezza un segmento delimitato da essi. Per rendere il ragionamento più rigoroso, sarebbe necessario aggiungere alcune supposizioni sulla continuità della curva, cosa che però Steiner non considerava, concentrandosi solo sulla costruzione geometrica senza fornire alcuna precisazione di tipo analitico.

ii) **La soluzione del problema isoperimetrico è ottenuta raddoppiando la figura che risolve il problema di Didone**

Riformuliamo in termini più rigorosi il problema di Didone già citato nell'introduzione.

Problema di Didone: *data una retta r e assegnata una lunghezza $L > 0$ tra tutte le curve piane che hanno entrambi gli estremi sulla retta r , trovare quella che racchiude l'area massima.*

Consideriamo un insieme D che risolve il problema di Didone per una lunghezza data $\frac{L}{2}$. Possiamo supporre che D sia interamente contenuto in uno in uno dei due semipiani determinati da r . Ora, creiamo una nuova figura ribaltando D rispetto a r e unendo D con la sua copia ribaltata. Questa nuova figura, che chiamiamo I , avrà perimetro uguale a L e area doppia rispetto a quella di D . I è la soluzione del problema isoperimetrico.

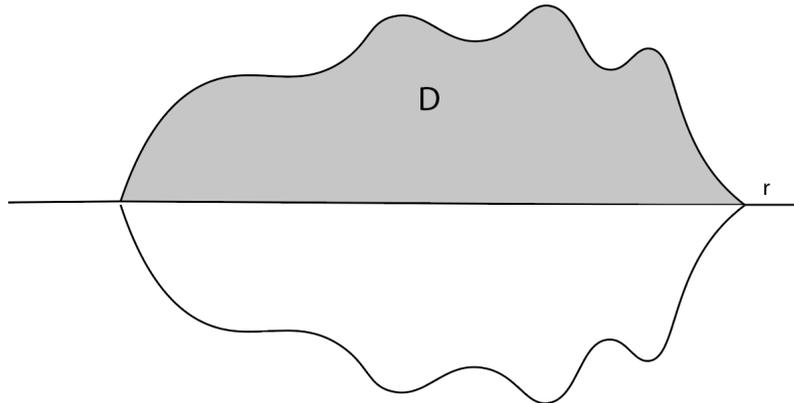


Figura 2.4: Ribaltamento Problema di Didone

Dimostrazione. Per dimostrare ciò, supponiamo per assurdo che I non sia la soluzione del problema isoperimetrico, ma piuttosto che una regione I' con perimetro assegnato L lo sia. Per definizione del problema isoperimetrico, I' dovrebbe avere un'area maggiore di I . Ora, prendiamo due punti P e Q sulla curva γ' , che è il bordo della regione I' , in modo che dividano γ' in due archi di lunghezza $\frac{L}{2}$, e consideriamo il segmento \overline{PQ} .

Poiché la regione I' è convessa, il segmento \overline{PQ} sarà completamente contenuto in I' e dividerà la regione I' in sottoregioni, di cui una avrà

un'area maggiore o uguale all'altra. Chiamiamo D' quella con l'area più grande.

Dato che I' ha un'area maggiore di I , allora D' avrà un'area maggiore di D . Questo è in contraddizione col fatto che D sia la soluzione del problema di Didone. Quindi, possiamo concludere che se D è la soluzione del problema di Didone, allora I sarà la soluzione del problema isoperimetrico.

□

iii) **La soluzione del problema di Didone è una semicirconferenza, quindi quella del problema isoperimetrico è un cerchio**

Per dimostrare che γ è una semicirconferenza, useremo la seguente proprietà dei triangoli. **Proprietà** Ogni triangolo inscritto in una circonferenza è rettangolo

Dobbiamo allora mostrare che, qualunque sia il punto M preso sulla curva γ , l'angolo PMQ è retto dove P e Q indicano gli estremi di γ che si trovano sulla retta r .

Dimostrazione. Partendo dalla soluzione al problema di Didone, prendiamo in considerazione un punto M situato sulla curva γ e applichiamo la “manovra di Steiner”. Visualizziamo un triangolo PMQ collegato alla curva γ in M come se fosse una cerniera. In questo modo, possiamo modificare l'angolo in M e dividere la curva γ in due archi distinti (vedi fig. 2.5)

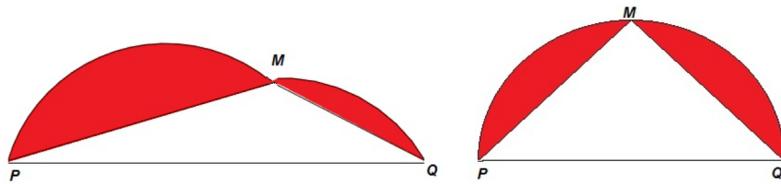


Figura 2.5: Manovra di Steiner

Mediante l'operazione nota come “manovra di Steiner”, procediamo ad espandere o a restringere l'angolo in M . È importante notare che, durante questo processo, la lunghezza complessiva della curva rimane costante, ma l'area del triangolo PMQ varia. Dimosteremo ora che

l'area del triangolo PMQ è massima quando l'angolo in M è un angolo retto. Immaginiamo di fissare le lunghezze di due lati del triangolo (senza perdita di generalità, possiamo assumere che uno dei due sia la base \overline{PM}) e variare l'angolo compreso tra di essi (come mostrato nella figura 2.6). Quando questo angolo è un angolo retto, l'altezza del triangolo è massima. Siccome l'area di un triangolo è direttamente proporzionale sia alla base che all'altezza, e dato che abbiamo fissato la base, l'altezza massima determinerà l'area massima. \square

Osservazione 2.3. C'è una sottile imprecisione tecnica nella manovra di Steiner. Steiner non considera i casi in cui M si trova esattamente su uno dei punti estremi del segmento \overline{PQ} o, in generale, quando M appartiene al segmento \overline{PQ} . In tali situazioni, il triangolo diventerebbe degenere, si trasformerebbe in un segmento e la dimostrazione perderebbe il suo significato.

Considerazioni

Fin dai tempi di Cartesio, era stato un obiettivo ridurre la risoluzione di problemi geometrici al calcolo algebrico, in modo che il metodo di soluzione fosse meccanico e generale. Ci sono stati comunque nel diciannovesimo secolo matematici che si sono battuti per la geometria, fra cui Steiner. Steiner ha fornito cinque dimostrazioni del teorema isoperimetrico, lasciando come detto precedentemente un punto aperto all'attacco: tutte le prove presuppongono l'esistenza di una soluzione (la sua strategia è sempre quella di prendere una figura che non è un cerchio e mostrare che la sua area può essere migliorata mantenendo invariato il perimetro). L'analista può avvertire la presenza di un'ipotesi di esistenza anche a miglia di distanza e molti autori, ancora oggi sottolineano che tale esistenza non è banale. Perron (1880-1975), per esempio, in un articolo [56] pubblicato nel 1913, afferma che utilizzando un argomento con uno schema simile a quello di Steiner si può dimostrare che

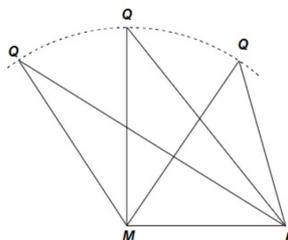


Figura 2.6: Variazione dell'area del triangolo al variare dell'angolo in M

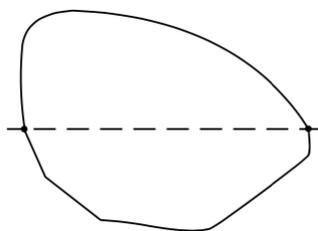
1 è il più grande dei numeri naturali, perché se assumiamo che esista un numero naturale che è il più grande e prendiamo un numero naturale diverso da 1, possiamo trovarne uno maggiore semplicemente elevando al quadrato. Pertanto, 1 è il più grande numero naturale. Blaschke [8] con l'aiuto di alcuni attenti calcoli cerca di rendere più rigorosa la prima dimostrazione di Steiner. Il primo articolo di Steiner sul problema isoperimetrico [63] presuppone chiaramente l'esistenza di una soluzione senza indicare in nessun modo che questa debba essere dimostrata. A tale pubblicazione seguono delle critiche che si tende a mettere a tacere con un successivo articolo [64].

“È chiaro che esistono per un dato perimetro, infinite figure di forma diversa che possono avere anche aree diverse. Si vede anche che l'area può essere piccola quanto si vuole, ma non tanto grande quanto si vuole, poichè la figura sarà contenuta all'interno di un cerchio centrato su un punto del suo contorno di raggio pari alla metà del perimetro dato. Ma siccome le figure di un dato perimetro possono avere aree diverse, senza poter però aumentare indefinitamente, è necessario che esista tra esse una figura massima o più massimi di forme diverse, cioè più figure di forme diverse e la stessa area, più grande delle altre figure”.

Jakob Steiner come abbiamo accennato precedentemente riuscì a dare varie dimostrazioni del fatto che il cerchio risolve il problema isoperimetrico. Nel seguito della trattazione si presenterà quella che va sotto il nome di “four-hinge proof”.

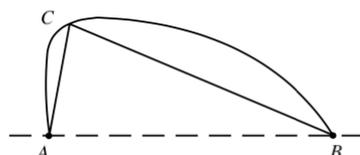
Teorema 2.4. *Qualsiasi figura con area massima deve essere il cerchio.*

Steiner four-hinge proof. Sia F una figura con area massima. “Tagliamo” il perimetro a metà con una retta r . Allora tale retta divide anche l'area a metà. Se così non fosse, ribaltiamo la parte con area maggiore, la figura così ottenuta avrà lo stesso perimetro come prima ma un'area più grande. Ciò contraddice il fatto che la figura originale fosse di area massima.

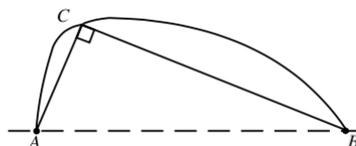


A questo punto supponiamo che una delle parti non sia un semicerchio. Allora possiamo trovare un punto C sul bordo di una delle due metà in cui le

linee disegnate dai punti di intersezione del bordo della figura e la linea di simmetria al punto scelto sul bordo non formano un angolo retto. Ora con la cosiddetta “manovra di Steiner” possiamo aumentare l’area della figura nel seguente modo. “Incollando” le due parti della figura e che non si trovano all’interno del triangolo ai suoi lati e tale che ogni parte risulti “attaccata”.

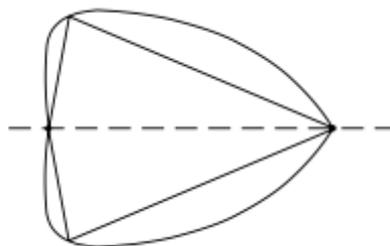


A questo punto si fa scorrere uno o entrambi i punti finali (A, B) lungo la linea di simmetria fino a che le linee non formano un angolo retto.



Quindi l’area del triangolo aumenta, mentre l’area delle altre parti della figura rimangono le stesse. Così l’area totale della figura aumenta mentre il perimetro rimane quello di prima, una contraddizione con il fatto che la figura era di area massima. Quindi ogni parte della figura è una semicirconferenza e la figura F è un cerchio. \square

Osservazione 2.5. Se disegniamo i triangoli insieme ai loro riflessi otteniamo dei quadrilateri, e possiamo quindi osservare le quattro “cerniere” da cui ha preso il nome la dimostrazione.



Ora introduciamo il concetto di simmetrizzato di Steiner di un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ rispetto a una direzione.

Definizione 2.6. Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un insieme limitato con bordo C^1 a tratti. Sia $L^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ un iperpiano passante per l'origine. Scegliamo un sistema di coordinate tale che L sia l'iperpiano di equazione $x_n = 0$. Per ogni $x \in L$ consideriamo la retta perpendicolare passante per $x \in L$ ovvero

$$G_x = \{x + ye_n : y \in \mathbb{R}\}.$$

Sia $m_x = m(\Omega \cap G_x)$ la misura (lunghezza totale) della sezione. Sostituendo le sezioni con gli intervalli centrati su L con la stessa lunghezza arriviamo al dominio simmetrizzato (vedi fig. 2.7):

$$S_L(\Omega) = \left\{ x + ye_n : x + ze_n \text{ in } \Omega \text{ per qualche } z \text{ e } -\frac{1}{2}m_x \leq y \leq \frac{1}{2}m_x \right\}.$$

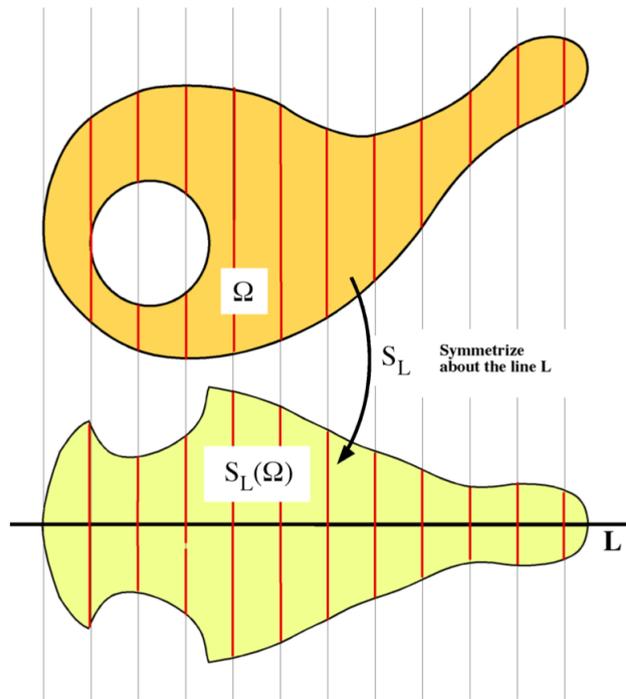


Figura 2.7: Simmetrizzazione di Steiner.

Praticamente possiamo pensare a tale costruzione come appiattare un blob di play-doh con le mani parallele finchè il blob non è equamente distribuito attorno a quell'asse.

Osservazione 2.7. Le sezioni ortogonali a L dell'insieme simmetrizzato sono semplicemente traslate rispetto all'insieme di partenza. Quindi se sommiamo le aree delle fette, rimane costante la misura del simmetrizzato rispetto all'insieme di partenza, per il principio di Cavalieri.

Più precisamente la simmetrizzazione di Steiner preserva il volume.

Sia infatti $\omega = \Pi(\Omega)$ la proiezione ortogonale di Ω su L . Il risultato seguente vale per il Teorema di Fubini

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \int_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \omega} \left(\int_{x_n \in G_x \cap \Omega} dx_n \right) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \\ &= \int_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \omega} m_{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)} dx_1, dx_2 \dots dx_{n-1} \\ &= \int_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \omega} \left(\int_{x_n \in G_x \cap S(\Omega)} dx_n \right) dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \\ &= V(S_L(\Omega)). \end{aligned}$$

Nella formula suddetta G_x rappresenta la retta perpendicolare passante per $x \in L$ e $m_{(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)}$ rappresenta la misura della sezione.

Restringiamoci al caso planare e supponiamo Ω convesso. Consideriamo un sistema di riferimento cartesiano con asse x_1 coincidente con la retta L , indicando con $[a, b]$ la proiezione di Ω su x_1 . Esistono due funzioni f e g continue in $[a, b]$, f e $-g$ convesse⁴, tali che

$$\Omega \equiv \{(x_1, x_2) : f(x_1) \leq x_2 \leq g(x_1), a \leq x_1 \leq b\}$$

Per la costruzione di Steiner:

$$S_L(\Omega) \equiv \{(x_1, x_2) : \frac{f(x_1) - g(x_1)}{2} \leq x_2 \leq \frac{g(x_1) - f(x_1)}{2}\}.$$

Si può osservare che essendo $f - g$ convessa, $S_L(\Omega)$ è convesso. Notiamo che:

$$L(\partial\Omega) = g(b) - f(b) + g(a) - f(a) + \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} + \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx$$

e

$$L(\partial S) = g(b) - f(b) + g(a) - f(a) + 2 \int_a^b \sqrt{1 + \frac{(\varphi'(x))^2}{2}} dx$$

dove $\varphi(x) = \frac{f(x) - g(x)}{2}$ vedi fig. 2.8.

⁴Osserviamo che dato che f, g sono convesse allora f' e g' esistono q.o. e vale la formula usuale per la lunghezza del grafico.

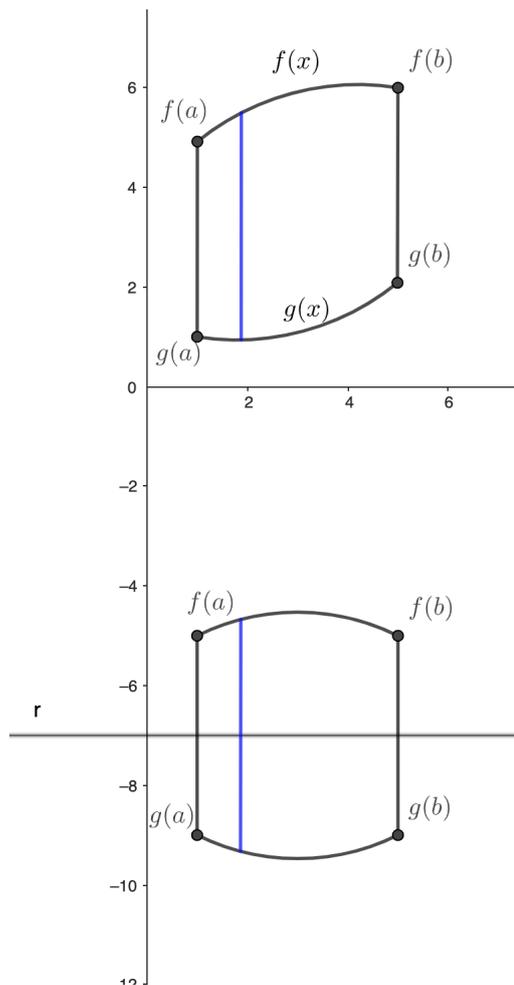


Figura 2.8: Simmetrizzazione di Steiner

Occorre ora provare che:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} + \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx \geq 2 \int_a^b \sqrt{1 + \frac{(\varphi'(x))^2}{2}} dx$$

Ma ora essendo la funzione $\zeta \rightarrow \sqrt{1 + \zeta^2}$ convessa in \mathbb{R} ed essendo

$$\varphi(x) = \frac{f'(x) - g'(x)}{2} = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2}(-g'(x)),$$

si ha:

$$\begin{aligned} 2 \int_a^b \sqrt{1 + \frac{(\varphi'(x))^2}{2}} dx &\leq 2 \left(\frac{1}{2} \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx + \frac{1}{2} \int_a^b \sqrt{1 + (-g'(x))^2} dx \right) = \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx + \int_a^b \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx. \end{aligned}$$

e da questa segue che

$$L(\partial\Omega) \geq L(\partial S). \quad (2.2.2)$$

Abbiamo quindi dimostrato, nel caso $n=2$, che la simmetrizzazione di Steiner applicata a un insieme convesso ne lascia invariata l'area e ne aumenta il perimetro.

Osservazione 2.8. Possiamo notare che nella disuguaglianza (2.2.2) vale il segno di uguale se e solo se $|f'| = |g'|$; essendo f e $-g$ convesse risulta $f' = -g'$ quasi ovunque e pertanto $f + g$ è costante e quindi Ω ha un asse di simmetria parallelo ad L e quindi Ω è congruente ad S .

2.2.2 La prova di esistenza finita di Edler

Senza ipotizzare l'esistenza della figura massimale, Edler dimostra nel 1882, vedi [9], che una figura che non è un cerchio di perimetro fissato ha un' area minore del cerchio stesso. Nella dimostrazione Edler ragiona come segue: Inizialmente si applica la simmetrizzazione di Steiner per ottenere una figura con un area maggiore di quella di partenza.

Quindi consideriamo un poligono inscritto che abbia ancora area maggiore di quella di partenza. A questo punto si deve sostituire tale poligono con un altro regolare con lo stesso perimetro ma area maggiore (Passaggio particolarmente delicato, ma può essere fatto con il simmetrizzato di Steiner descritto precedentemente). I poligoni regolari hanno un'area più piccola del cerchio ma con lo stesso perimetro.

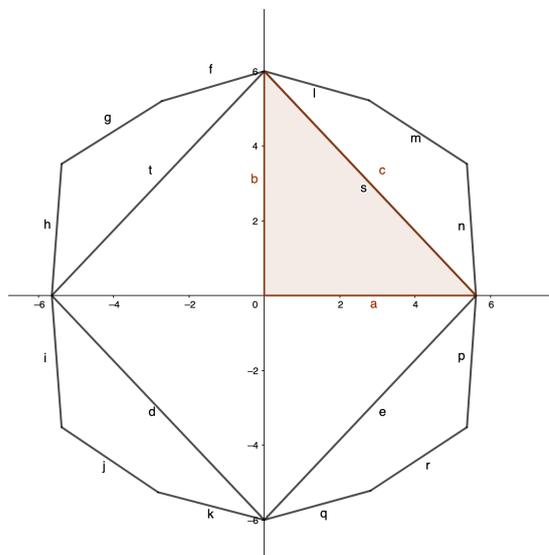


Figura 2.9: Poligono iniziale della costruzione di Edler.

Teorema 2.9. *Dato un qualsiasi poligono, possiamo costruire un poligono regolare con area maggiore o uguale e perimetro minore o uguale a quello precedente.*

Dimostrazione. Simmetrizziamo il poligono iniziale rispetto agli assi x e y . Così facendo l'area rimane invariata, il perimetro diminuisce (vedi figura 2.9). Facciamo questa operazione: consideriamo l'ipotenusa \overline{AB} , immaginandola come un bastoncino con le estremità mobili lungo gli assi e incliniamola per rendere il triangolo isoscele. Ciò aumenterà l'area, a meno che il triangolo non fosse già isoscele, quindi consideriamo il pezzo congiunto all'ipotenusa, nella fig. 2.10 si tratta del trapezio $ABCD$ e simmetrizziamolo in un nuovo asse che divide in due l'angolo tra i precedenti (vedi figura 2.10).

Ciò significa che il vertice superiore, il più distante dall'ipotenusa finisce sul nuovo asse. (vedi figura 2.11)

In qualche caso non esiste un vertice superiore univoco. (vedi figura 2.12)

Questi casi servono a mostrare che se abbiamo k vertici sopra la base prima della simmetrizzazione, allora avremo al massimo $k - 1$ vertici su entrambi i lati dell'asse dopo le simmetrizzazioni. Questo perché ogni vertice può generare al massimo un vertice su entrambi i lati. Ma non può essere che entrambi lo facciano, perché o vi è un vertice superiore o ci sono due vertici sulla stessa linea orizzontale. Nel nostro esempio nella $\frac{1}{4}$ -figura abbiamo due vertici non su un asse mentre nella $\frac{1}{8}$ -figura ne abbiamo uno solo (vedi figura 2.13 pagina seguente)

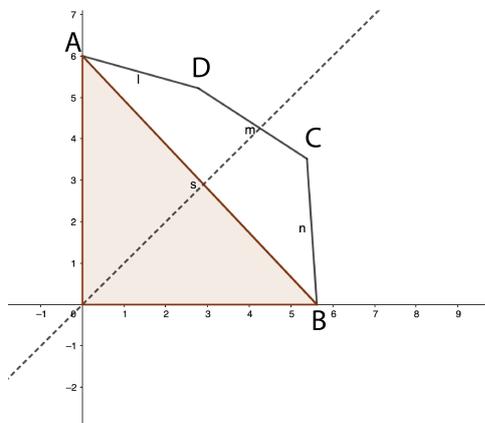


Figura 2.10: Primo quarto del poligono iniziale.



Figura 2.11: Caso particolare 1.

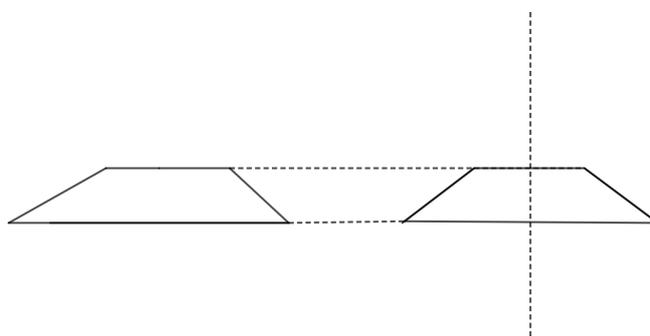


Figura 2.12: Caso particolare 2.

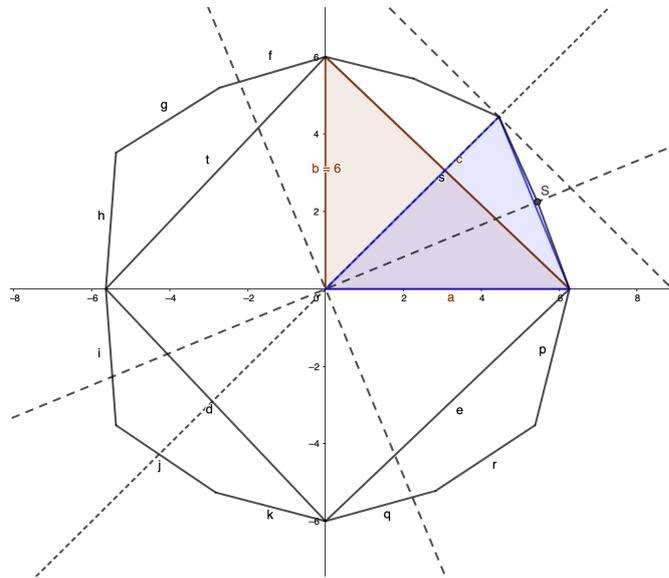


Figura 2.13:

Ripetiamo questo procedimento, rendendo i triangoli isosceli e inserendo nuovi assi tra quelli precedenti. Dopo un numero finito di passaggi non ci saranno vertici che non siano sugli assi. Quindi otteniamo un poligono regolare. \square

Sappiamo che un poligono regolare ha sempre un'area più piccola di un cerchio con lo stesso perimetro. Per dimostrarlo si usa il fatto che l'area di un poligono regolare è uguale al perimetro per l'altezza dal centro alla base. All'aumentare del numero dei lati la base del poligono si riduce mentre l'angolo al centro diminuisce. Si può vedere, utilizzando la trigonometria, che l'altezza aumenta. Poiché il perimetro è mantenuto costante l'area del poligono aumenta. Ciò significa che poiché tutti i poligoni sono di uguale perimetro, più lati implicano area maggiore, quando il numero di lati si avvicina all'infinito otteniamo l'area del cerchio.

2.2.3 Il problema isoperimetrico per i poligoni

Per questa parte il testo che abbiamo preso a riferimento è [69]. Iniziamo la sezione con un teorema:

Teorema 2.10. *Tra tutti i poligoni anche non convessi del piano aventi un assegnato numero lati ed assegnato perimetro, i poligoni regolari sono quelli che hanno area massima.*

Equivalentemente, tra tutti i poligoni aventi un numero assegnato di lati ed area assegnata, i poligoni regolari sono quelli che hanno perimetro minimo.

Il teorema 2.10 può essere espresso anche per mezzo della seguente *disuguaglianza isoperimetrica per i poligoni* : fissato $n \in \mathbb{N}$, sia P un n -agono di perimetro \mathcal{P} e area \mathcal{A} . Vale allora:

$$\mathcal{P}^2 \geq 4n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \mathcal{A} \quad (2.2.3)$$

e si ha l'uguaglianza se e solo se P è l' n -agono regolare di perimetro \mathcal{P} .

Dimostrazione. della disuguaglianza (2.2.3). Dal teorema isoperimetrico per i poligoni se \mathcal{A} rappresenta l'area di P vale che

$$\mathcal{A} \leq \mathcal{A}_{n\text{-agono/regolare}}$$

Ricordando che

$$\mathcal{A}_{N\text{-agono/regolare}} = \frac{1}{2} \mathcal{P} a$$

dove con a si è indicata l'apotema, facendo un po' di calcoli si ottiene che

$$a = \frac{\mathcal{P}}{2N \tan\left(\frac{\pi}{N}\right)}$$

e quindi la disuguaglianza cercata. □

Dimostrazione. del teorema isoperimetrico per i poligoni. Cfr. [69] La dimostrazione che facciamo consiste dei seguenti passi:

- (i) fra tutti i poligoni aventi n lati e perimetro \mathcal{P} , esiste un poligono di area massima;
- (ii) ogni poligono massimante è convesso;
- (iii) ogni poligono massimante ha i lati tutti uguali;
- (iv) ogni poligono massimante ha gli angoli tutti uguali.

Il punto (i) è conseguenza del teorema di Weierstrass (i.e. una funzione a valori reali, continua in un sottoinsieme chiuso e limitato di uno spazio con dimensione finita, assume un valore massimo e un valore minimo) e dei seguenti fatti.

- L'area e il perimetro di un poligono con n lati sono funzioni continue dei vertici.

- I vertici di un poligono con n lati, il cui perimetro non supera un certo valore sono tutti contenuti all'interno di un disco.

I punti precedenti sono un corollario delle seguenti formule, che forniscono l'area ed il perimetro di un poligono in funzione dei vertici. Siano

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

i vertici di un poligono, numerati nel senso orario; sia $x_0 = x_n, y_0 = y_n$. Si ha allora che l'area può essere espressa in funzione dei vertici.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ x_{i-1} & y_{i-1} & 1 \\ x_i & y_i & 1 \end{vmatrix} \quad (2.2.4)$$

e anche il perimetro può essere espresso in funzione dei vertici del poligono come si può vedere dalla figura 2.14.

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} \quad (2.2.5)$$

Per il punto (ii) facciamo questo ragionamento: l'involuppo convesso di un poligono di n lati con perimetro \mathcal{P} ed area \mathcal{A} , è un poligono che ha le seguenti proprietà: numero di lati $\leq n$, perimetro $\leq \mathcal{P}$, area $\geq \mathcal{A}$; questo dimostra il punto (ii).

Vediamo adesso alcuni passi intermedi che ci saranno utili per la dimostrazione di (iii) e (iv).

- a) Tra tutti i triangoli con la stessa base e lo stesso perimetro, quale ha area massima?

soluz. Il triangolo isoscele che ha per base la base fissata. Si fissino due numeri reali positivi b e \mathcal{P} tali che $\mathcal{P} > b$ e si considerino i triangoli di base b e perimetro \mathcal{P} . Sia xOy un sistema di assi cartesiani. A meno di rotazioni e traslazioni (operazioni che non cambiano né l'area né il perimetro della figura), si può supporre che i triangoli considerati abbiano tutti i vertici di base nei punti dell'asse delle ascisse $(-\frac{b}{2}, 0), (\frac{b}{2}, 0)$. Sia (x, y) la posizione del terzo vertice e cerchiamo di capire quali sono le sue proprietà; si osservi la figura 2.15.

Calcolando le distanze tra i punti si può esprimere il perimetro del triangolo in funzione delle coordinate del vertice (x, y) :

$$\mathcal{P} = b + \sqrt{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + y^2} + \sqrt{\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + y^2} \quad (2.2.6)$$

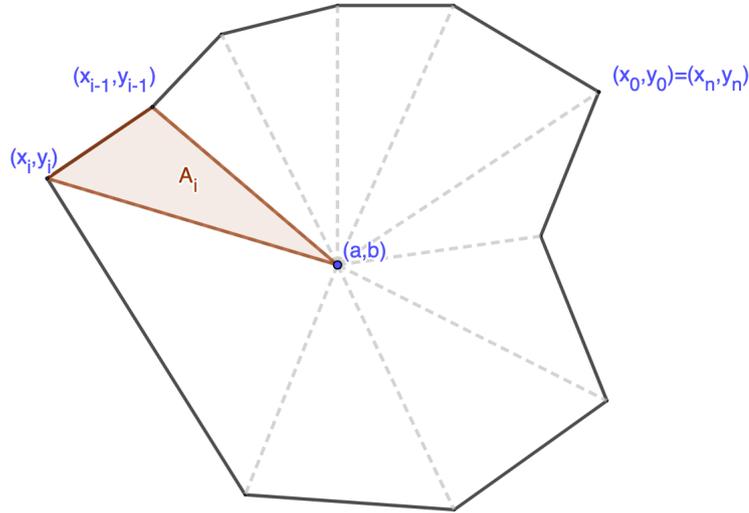


Figura 2.14: Area di un poligono in funzione dei vertici.

La formula (2.2.6) mette in luce che la somma delle distanze del punto (x, y) dai punti $(-\frac{b}{2}, 0)$ e $(\frac{b}{2}, 0)$, rispettivamente, è sempre costante uguale a $\mathcal{P} - b$, e questo equivale a dire che il vertice (x, y) appartiene all'ellisse di fuochi $(-\frac{b}{2}, 0)$ e $(\frac{b}{2}, 0)$ e semiasse sulle ascisse $\frac{\mathcal{P} - b}{2}$. Tale ellisse è definita dall'equazione:

$$\frac{4x^2}{(\mathcal{P} - b)^2} + \frac{4y^2}{\mathcal{P}(\mathcal{P} - 2b)} = 1 \quad (2.2.7)$$

e rappresenta tutti i possibili vertici della classe dei triangoli di perimetro \mathcal{P} e base con vertici in $(-\frac{b}{2}, 0), (\frac{b}{2}, 0)$. Quindi, riassumendo, un triangolo di base b e perimetro \mathcal{P} , a meno di traslazioni e rotazioni, ha vertici in $(-\frac{b}{2}, 0), (\frac{b}{2}, 0), (x, y)$ dove (x, y) è un punto dell'ellisse (2.2.7).

Consideriamo a questo punto l'area del triangolo. Per costruzione la base del triangolo misura b mentre l'altezza altro non è che l'ordinata del vertice (x, y) e quindi si ha che:

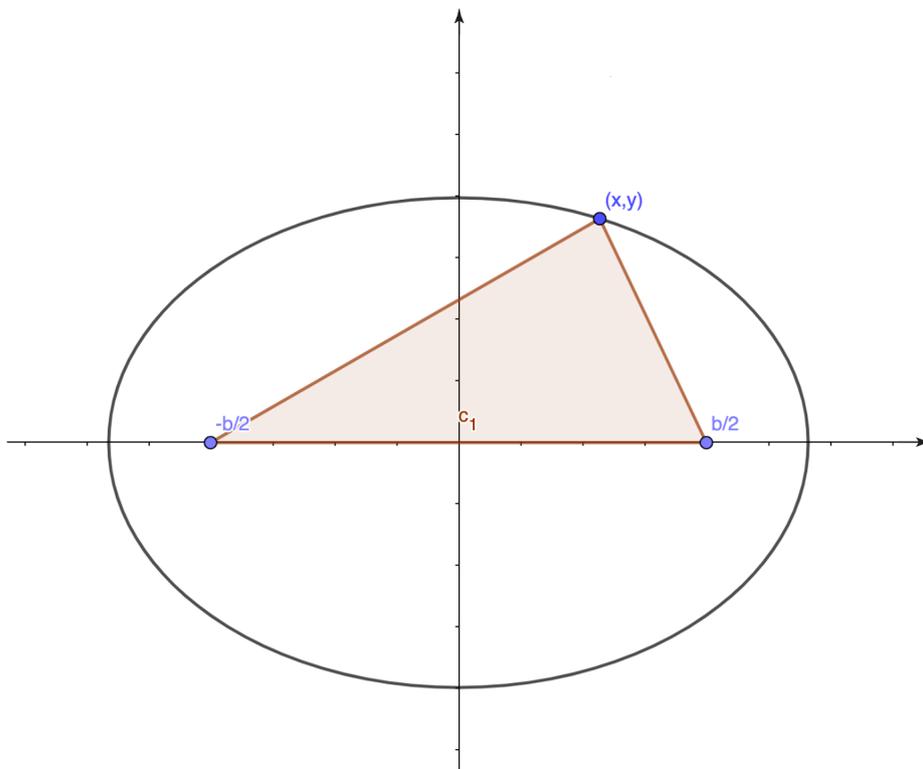


Figura 2.15: Problema isoperimetrico per i triangoli con un lato di lunghezza fissata.

$$\mathcal{A} = \frac{yb}{2} \quad (2.2.8)$$

che è massima quando è massima l'altezza ovvero quando il vertice (x, y) appartiene all'asse delle ordinate. Questo si verifica se e solo se il triangolo è isoscele con base la base fissata.

- b) Tra tutti i quadrilateri con perimetro fissato e tre lati di uguale lunghezza, quale ha area massima?

soluz. Il trapezio isoscele. Fissiamo l e \mathcal{P} due numeri reali positivi tali che $h = (\mathcal{P} - 3l) < 3l$ (cioè tali che si possa costruire un quadrilatero con tre lati lunghi l e perimetro \mathcal{P}). Sia Q un quadrilatero della classe considerata (cioè Q ha perimetro fissato \mathcal{P} e tre lati lunghi l). Designiamo i vertici di Q , z_0, z_1, z_2, z_3 in modo che $\overline{z_0z_1} = \overline{z_1z_2} = \overline{z_2z_3} = l$ e $\overline{z_3z_0} = h$. Adagiamo il quadrilatero su un **meccanismo di Watt**. Vedi figura 2.16

Si consideri un sistema di assi cartesiani xOy . Fissiamo i vertici z_0, z_3 nei punti $(-\frac{h}{2}, 0), (\frac{h}{2}, 0)$ rispettivamente e lasciamo i vertici z_1, z_2 liberi di muoversi ciascuno su una guida circolare di centro rispettivamente z_0, z_3 e raggio l . Sia θ l'angolo che il lato z_1z_2 forma con l'asse x : necessariamente $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$. A questo punto muovendo i due vertici z_1, z_2 lungo le guide circolari l'angolo θ varia e con lui anche il valore dell'area del quadrilatero. Si può infatti esprimere il valore dell'area di Q in funzione dell'angolo θ .

$$\mathcal{A}(\theta) = \frac{1}{4} \|h^2 - l^2\| \sqrt{\frac{4l^2}{h^2 + l^2 - 2hl \cos(\theta)} - 1}$$

Dalla precedente relazione si vede facilmente che l'area è massima quando $\theta = 0$ cioè quando Q è un trapezio isoscele. Infatti dato che $\cos(\theta) \leq 1$, si ha

$$\frac{4l^2}{h^2 + l^2 - 2hl \cos(\theta)} \leq \frac{4l^2}{(h - l)^2}$$

e quindi

$$\mathcal{A} \leq \frac{h + l}{4} \sqrt{4l^2 - (h - l)^2}$$

e si ha l'uguaglianza se e solo se $\theta = 0$.

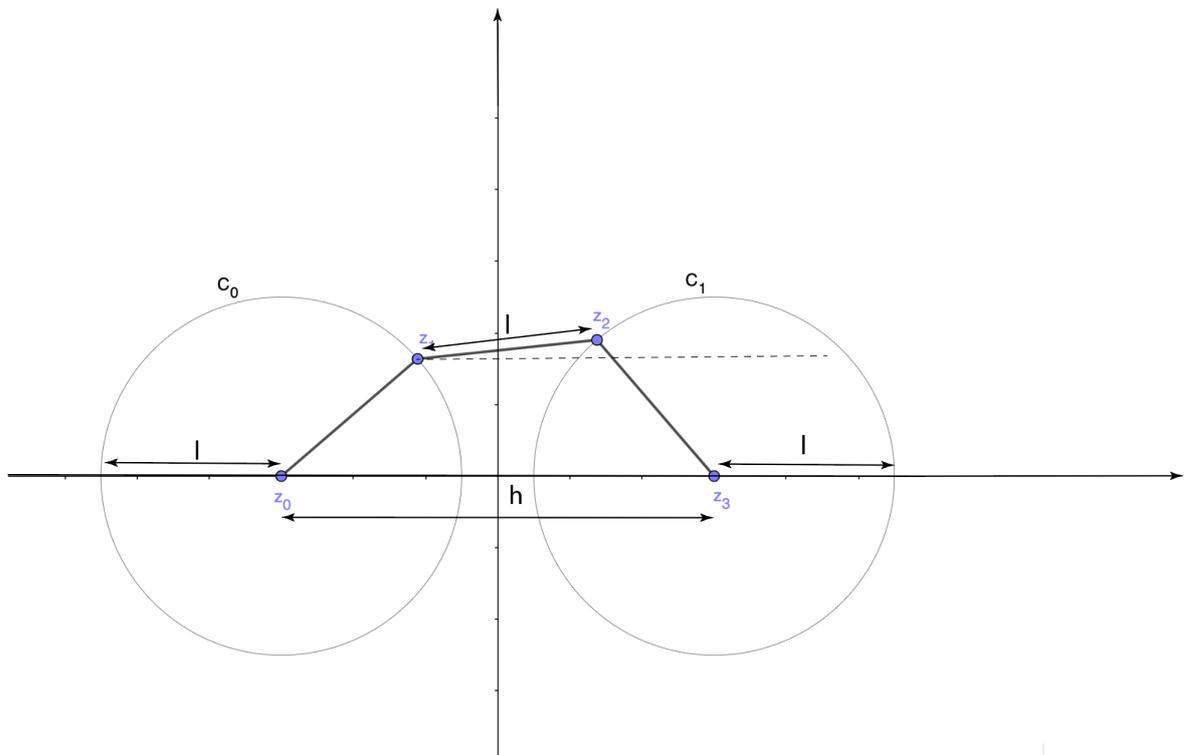


Figura 2.16: Meccanismo di Watt.

Il punto a) implica che se \mathfrak{P} è un poligono convesso massimizzante l'area tra tutti i poligoni aventi n lati e perimetro dato, allora tutti i lati di \mathfrak{P} hanno la medesima lunghezza. Infatti supponiamo, per assurdo, che due lati di tale poligono abbiano lunghezza diversa. Esistono due lati *consecutivi* di \mathfrak{P} che hanno lunghezza diversa: siano questi il lato che inizia nel vertice z_{k-1} e termina nel vertice z_k ed il lato che va da z_k a z_{k+1} . Teniamo fissi tutti i vertici diversi da z_k e spostiamo quest'ultimo su di un'opportuna ellisse, che ha fuochi in z_{k-1} e z_{k+1} fino a fargli raggiungere un opportuno vertice di tale ellisse; in altre parole, spostiamo z_k in modo che il triangolo con vertici in z_{k-1}, z_k e z_{k+1} conservi un perimetro costante e diventi isoscele. Per costruzione il perimetro di questo triangolo è rimasto invariato e, per quanto dimostrato al punto (a) si ha che la sua area è aumentata. Otteniamo così un altro poligono, il quale ha il medesimo perimetro di \mathfrak{P} e area maggiore di quella di \mathfrak{P} . Ma questa è una contraddizione. Si era infatti supposto che il poligono iniziale fosse un poligono massimante, cioè con l'area massima. Avendo raggiunto una contraddizione, e quindi un assurdo, abbiamo provato che l'ipotesi fatta che \mathfrak{P} avesse due lati di lunghezza diversa è inconsistente e quindi \mathfrak{P} ha tutti i lati uguali per i dettagli vedi fig. 2.17. Il punto (iii) è dimostrato.

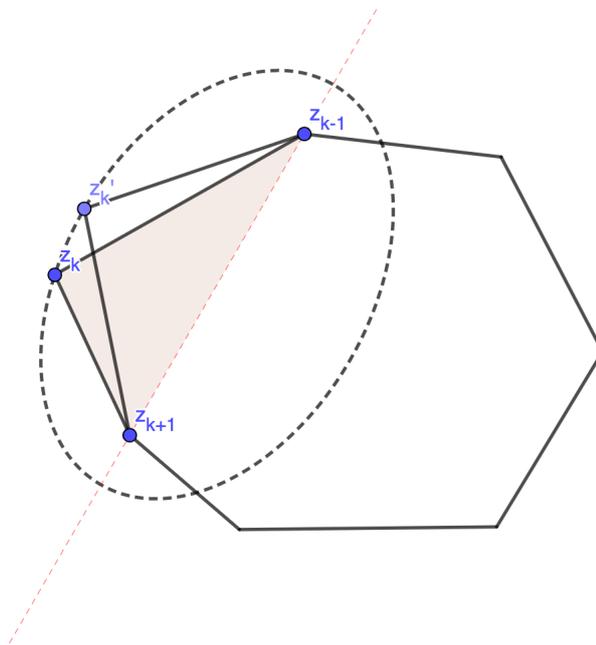


Figura 2.17: Un poligono massimante ha i lati tutti uguali.

La parte (iv) è conseguenza del punto b). Infatti il punto suddetto implica che se \mathfrak{P} massimizza l'area tra tutti i poligoni convessi aventi n lati ed un

dato perimetro, e se \mathfrak{P} ha lati di uguale lunghezza, allora gli angoli di \mathfrak{P} sono tutti uguali. Tale dimostrazione viene svolta per assurdo.

Supponiamo che due angoli di \mathfrak{P} siano diversi. Esistono due angoli *consecutivi* e diversi; siano questi gli angoli corrispondenti ai vertici z_{k+1} e z_{k+2} di \mathfrak{P} . Si tengano fissi tutti gli altri vertici e si muovano i vertici z_{k+1} e z_{k+2} su un'opportuna curva di Watt, in modo che i lati $\overline{z_k z_{k+1}}$, $\overline{z_{k+1} z_{k+2}}$ e $\overline{z_{k+2} z_{k+3}}$ abbiano lunghezza costante, fino a che il quadrilatero con vertici $z_k, z_{k+1}, z_{k+2}, z_{k+3}$ diventa un trapezio isoscele. Sfruttando il punto b) si ottiene un nuovo poligono, il quale ha lo stesso perimetro di \mathfrak{P} e area maggiore di quella di \mathfrak{P} . Tutto ciò contraddice la proprietà estremante di \mathfrak{P} . Il punto (iv) è provato e la dimostrazione del teorema 2.10 è perciò conclusa. \square

2.2.4 Il problema di Didone

Data una retta r e assegnata una lunghezza $L > 0$ tra tutte le curve piane che hanno entrambe gli estremi sulla retta r , trovare quella che racchiude l'area massima

Nel caso in cui le curve in competizione intersecano ogni retta verticale in un punto al più (quindi siano grafici di funzioni dell'ascissa x), la soluzione del *problema di Didone* può essere ottenuta tramite il seguente teorema.

Prima di enunciare il teorema ricordiamo la definizione di funzione assolutamente continua.

Definizione 2.11. (Funzione assolutamente continua). Una funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *assolutamente continua* su $[a, b]$ se $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tale che qualunque sia $n \in \mathbb{N}$ e qualunque siano i sottointervalli di $[a, b]$, $[\alpha_j, \beta_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$ tali che $]\alpha_i, \beta_i[\cap]\alpha_j, \beta_j[= \emptyset$ per $i \neq j$ risulta:

$$\sum_{j=1}^n |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \varepsilon$$

purché sia

$$\sum_{j=1}^n (\beta_j - \alpha_j) < \delta_\varepsilon$$

Teorema 2.12. *Supponiamo che u sia assolutamente continua in $[-a, a]$, $u \geq 0$ e $u(a) = u(-a) = 0$. Siano L la lunghezza del grafico di u e A l'area del sottografico di u , ovvero*

$$L = \int_{-a}^a \sqrt{1 + (u')^2} dx \quad e \quad A = \int_{-a}^a u dx,$$

come si può osservare dalla figura 2.18. Allora

$$L^2 \geq 2\pi A \quad (2.2.9)$$

e l'uguaglianza vale se e solo se il grafico di u è una semicirconferenza, cioè

$$u(x) = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (2.2.10)$$

per ogni x tale che $-a \leq x \leq a$.

Dimostrazione. Integrando per parti si ottiene, tenendo conto che $u(a) = U(-a) = 0$,

$$A = \int_{-a}^a (-xu') \, dx.$$

La disuguaglianza

$$\sqrt{1 + (u')^2} + \frac{x}{a}u' \geq \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (2.2.11)$$

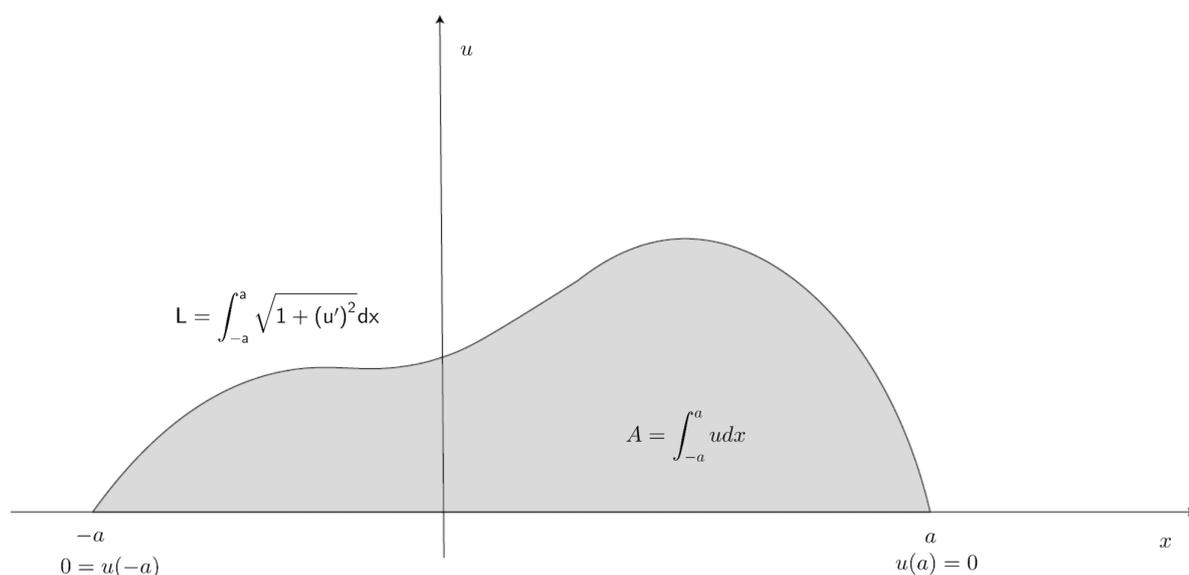


Figura 2.18: Il problema di Didone

vale per ogni x tale che $-a \leq x \leq a$ per ogni u' ; inoltre il segno di $=$ vale se e solo se

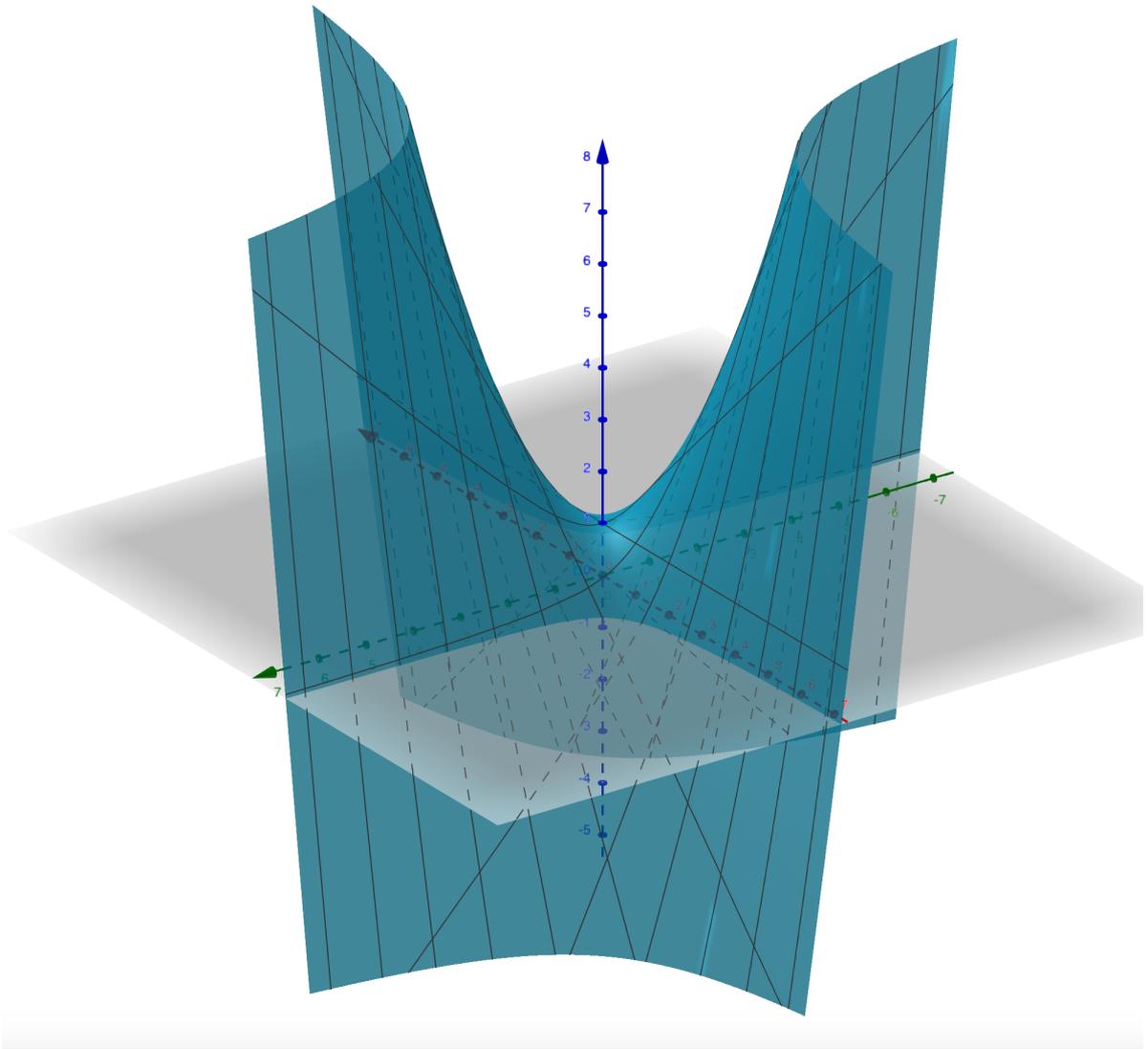


Figura 2.19: Grafico della funzione in due variabili $\sqrt{1 + (u')^2} + \frac{x}{a}u'$ nel caso di $a = 1$

$$u' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}. \quad (2.2.12)$$

Come si può notare il primo membro (2.2.11) e dalla figura 2.19 è una funzione strettamente convessa di u' : questa è minima nel punto indicato dalla (2.2.12) e il suo valore minimo risulta essere il secondo membro della (2.2.11).

Da ciò deduciamo che

$$\int_{-a}^a \sqrt{1 + (u')^2} dx + \frac{1}{a} \int_{-a}^a x u' dx \geq \int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx$$

in altre parole

$$L - \frac{1}{a}A \geq \frac{\pi}{2}a.$$

Si è così provato

$$L^2 - 2\pi A \geq (L - \pi a)^2. \quad (2.2.13)$$

La (2.2.9) segue immediatamente da (2.2.13). Se l'uguaglianza vale in (2.2.9), essa vale anche in (2.2.13) e nelle disuguaglianze precedenti, in particolar modo in (2.2.11). Allora la (2.2.12) vale e porta (2.2.10) a valere. \square

2.2.5 La disuguaglianza di Wirtinger

Uno degli elementi principali della dimostrazione che faremo in 2.2.6 è la *disuguaglianza di Wirtinger*.

Teorema 2.13. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo 2π , continua con derivata continua su tutto \mathbb{R} e tale che*

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx = 0. \quad (2.2.14)$$

Allora

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x) dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x) dx \quad (2.2.15)$$

con l'uguaglianza se e solo se $f(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$ per qualche a e $b \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Per provare la disuguaglianza, possiamo considerare lo sviluppo in serie di Fourier di $f(t)$ e scrivere:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n \sin nx + b_n \cos nx). \quad (2.2.16)$$

Dato che $f'(x)$ è continua la sua serie di Fourier può essere ottenuta dalla differenziazione termine a termine e abbiamo che:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx). \quad (2.2.17)$$

Dato che,

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \pi a_0 \quad (2.2.18)$$

segue che a_0 è uguale a zero per (2.2.14).

Dall'identità di Parseval

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (2.2.19)$$

e

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2) \quad (2.2.20)$$

dato che gli addendi sono tutti maggiori o uguali a zero, segue che vale la (2.2.15), con l'uguaglianza se e solo se $a_n = b_n = 0$ per $n \geq 2$ \square

2.2.6 Il Teorema isoperimetrico nel piano

Presentiamo il teorema nella seguente forma:

Teorema 2.14. *Sia γ una **curva di Jordan** (i.e. semplice e chiusa) nel piano euclideo \mathbb{R}^2 . Assumiamo che γ sia sufficientemente regolare, per esempio sia assolutamente continua. Denotiamo con L la **lunghezza** di γ e con A l'**area** della regione piana racchiusa da γ (cioè la componente connessa limitata di $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$). Allora:*

(i) *vale la disuguaglianza*

$$L^2 \geq 4\pi A; \quad (2.2.21)$$

(ii) *l'uguaglianza vale in 2.2.21 se e solo se γ è un cerchio.*

Presentiamo in questa sezione una dimostrazione dovuta essenzialmente a Hurwitz (1901) e Lebesgue (1906) che può essere ritrovata in [36], [37], [39]. Sottolineamo che il carattere della dimostrazione sarà di tipo analitico nonostante il tema fortemente geometrico. Tale dimostrazione si basa sui seguenti due ingredienti:



Figura 2.20: Adolf Hurwitz 1859-1919



Figura 2.21: Henri Léon Lebesgue 1875-1941

- (i) La formula di Gauss-Green, che permette di esprimere l'area A della regione interna a γ in termini della sola geometria di γ .
- (ii) La disuguaglianza di Wirtinger.

Dimostrazione. Passo 1. La formula di Gauss-Green implica

$$A = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} (-y + b)dx + (x - a)dy, \quad (2.2.22)$$

se γ è orientata in senso antiorario.

Dove l'integrale rappresenta la circuitazione del campo $((-y + b), (x - a))$ lungo γ .

Qui a e b potrebbero essere due costanti qualsiasi, ma, per una ragione che risulterà chiara in seguito, fissiamo a e b uguali alle coordinate del baricentro di γ , i.e.

$$a = \frac{1}{L} \int_{\gamma} x \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad b = \frac{1}{L} \int_{\gamma} y \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Consideriamo la rappresentazione parametrica di γ :

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad (2.2.23)$$

con il parametro s la *lunghezza d'arco*. Quindi si ha :

$$0 \leq s \leq L, \quad (2.2.24)$$

e

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1. \quad (2.2.25)$$

Osservazione 2.15. Un cammino è rettificabile se e solo se ha variazione limitata, la lunghezza di un percorso assolutamente continuo è un integrale della lunghezza del vettore velocità.

Abbiamo che

$$a = \frac{1}{L} \int_0^L x(s)ds, \quad b = \frac{1}{L} \int_0^L y(s)ds, \quad (2.2.26)$$

$$A = \frac{1}{2} \int_0^L [(-y(s) + b)x'(s) + (x(s) - a)y'(s)]ds. \quad (2.2.27)$$

Da (2.2.25), (2.2.26), e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz segue

$$A \leq \frac{\sqrt{L}}{2} \left\{ \int_0^L (x(s) - a)^2 ds + \int_0^L (y(s) - b)^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.2.28)$$

L'uguaglianza vale se e solo se il vettore di componenti $-y(s) + b$ e $x(s) - a$ è parallelo al vettore tangente $(x'(s), y'(s))$. Detto in altri termini l'uguaglianza vale in 2.2.28, se e solo se

$$(x(s) - a)x'(s) + (y(s) - b)y'(s) = 0. \quad (2.2.29)$$

In maniera equivalente

$$(x(s) - a)^2 + (y(s) - b)^2 = Costante \quad (2.2.30)$$

la quale significa che γ è una circonferenza

Passo 2. Applichiamo la disuguaglianza di Wirtinger dimostrata nella precedente sezione per aumentare la quantità a destra della (2.2.28). Abbiamo

$$x(0) = x(L), \quad y(0) = y(L),$$

dal fatto che γ è una curva chiusa. Inoltre

$$\int_0^L (x(s) - a)ds = 0, \quad \int_0^L (y(s) - b)ds = 0,$$

per le 2.2.26. Dalla disuguaglianza di Wirtinger e con un cambio di variabile si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^L (x(s) - a)^2 ds &\leq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int_0^L (x'(s))^2 ds \\ \int_0^L (y(s) - b)^2 ds &\leq \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int_0^L (y'(s))^2 ds \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

quindi si ha:

$$\int_0^L (x(s) - a)^2 ds + \int_0^L (y(s) - b)^2 ds \leq \frac{L^3}{(2\pi)^2} \quad (2.2.32)$$

utilizzando la 2.2.25. Le disuguaglianze 2.2.28 e 2.2.32 implicano che

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi}. \quad (2.2.33)$$

Ovvero la disuguaglianza isoperimetrica.

Ora ci chiediamo quando vale l'uguaglianza in (2.4.12)? La disuguaglianza è stata derivata da due precedenti disuguaglianze, la (2.2.28) e la (2.2.32). Il teorema di Wirtinger descritto nella sezione 2.2.5 ci dice che l'uguaglianza vale in (2.2.32) se e solo se

$$\begin{aligned} x(s) &= a + \frac{L}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi}{L}s + \varphi\right) \\ y(s) &= b + \frac{L}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{L}s + \varphi\right) \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

per qualche costante φ ad esempio γ è una circonferenza.⁵ In conclusione nella disuguaglianza isoperimetrica (2.4.12) vale l'uguaglianza se e solo se γ è una circonferenza. \square

2.3 Cenni al teorema isoperimetrico in $\mathbb{R}^{n \geq 3}$

Preliminari Il teorema isoperimetrico per lo spazio euclideo n -dimensionale \mathbb{R}^n , lo *standard isoperimetric theorem*, asserisce che un insieme G di \mathbb{R}^n tale che

$$m(G) = \text{Costante fissata}$$

e

$$p(G) = \text{minimo}$$

è una palla. In questo caso $n = 2, 3, \dots$; m e p rappresentano la *misura* e il *perimetro* rispettivamente. m è la consueta misura, che ci informa del contenuto. p è un surrogato del perimetro elementare, i.e. una funzione di insieme il cui valore su qualsiasi sottoinsieme regolare G di \mathbb{R}^n concorda con la misura dimensionale $n - 1$ standard di ∂G . Definiamo un insieme G di \mathbb{R}^n *regolare* se G è aperto, ∂G è una varietà liscia di codimensione uno, e G vive su un "lato" di ∂G .

L'affermazione di cui sopra è equivalente a una disuguaglianza tra misura m e perimetro p (la disuguaglianza isoperimetrica per uno spazio euclideo in \mathbb{R}^n che data la sua importanza si configura come disuguaglianza isoperimetrica prototipo). Quest'ultima asserisce che ogni sottoinsieme G di \mathbb{R}^n di misura finita soddisfa:

$$p(G) \leq nk_n^{\frac{1}{n}} [m(G)]^{1 - \frac{1}{n}}, \quad (2.3.1)$$

e le palle sono gli unici insiemi di \mathbb{R}^n che rendono la 2.3.1 un'uguaglianza.

$$k_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \quad (2.3.2)$$

la *misura della palla unitaria n -dimensionale*, in questo modo il perimetro di una palla n -dimensionale B è uguale a

$$nk_n^{\frac{1}{n}} [m(B)]^{1 - \frac{1}{n}}.$$

⁵Per derivare la (2.2.34) la condizione (2.2.25) deve essere presa in considerazione.

Ci sono tre fatti importanti nel teorema isoperimetrico per lo spazio euclideo \mathbb{R}^n :

- la misura m ;
- il perimetro p ;
- la collezione degli insiemi in competizione.

Sono disponibili varie versioni del teorema che differiscono nello specificare tali elementi: Potrebbero essere necessarie le misure di Minkowski ad esempio in Osserman [55] o Federer [31]. La competizione potrebbe essere ristretta a insiemi convessi.

Tale tesi esula dal dimostrare il teorema nella sua interezza che se ne può trovare ad esempio una in [68], in tale sezione cerchiamo di esporre le idee principali.

Prendiamo come

$$m = \text{misura di Lebesgue}, \quad (2.3.3)$$

e

$$p = \text{perimetro secondo De Giorgi}. \quad (2.3.4)$$

Richiamo brevemente le seguenti proprietà (senza dimostrazione)

- p è definito da

$$p(G) = \sup \left\{ \int_G \operatorname{div} f \, dx : f \in C_0^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n), \|f\|_\infty \leq 1 \right\} \quad (2.3.5)$$

per ogni sottoinsieme misurabile G di \mathbb{R}^n , tale definizione è essenzialmente dovuta a De Giorgi [25].

- Supponiamo che G abbia misura finita. Allora $p(G)$ è finito se e solo se G è un *insieme di Caccioppoli*, ovvero

$$m((G + h)\Delta G) = O(\|h\|) \quad (2.3.6)$$

per ogni vettore h in \mathbb{R}^n . In questo caso $G + h = \{x \in \mathbb{R}^n : x - h \in G\}$, una traslazione di G e, Δ è la differenza simmetrica.

- La seguente disuguaglianza

$$p(G) \leq \mathcal{H}_{n-1}(\partial G) \quad (2.3.7)$$

vale per ogni insieme misurabile G di \mathbb{R}^n .⁶

Teorema 2.16. *Sia G un insieme misurabile di \mathbb{R}^n tale che $m(G)$ è finito. Allora vale la disuguaglianza (2.3.1); l'uguaglianza prende il posto in (2.3.1) se e solo se G o è una palla o è equivalente a una palla i.e. un palla esiste tale che $m(G\Delta B) = 0$*

La suddetta forma del teorema isoperimetrico si trova in De Giorgi (1958) [24]

Corollario 2.17. *Sia G un insieme misurabile di \mathbb{R}^n tale che $\mathcal{H}_n(G)$ è finito. Allora*

$$\mathcal{H}_{n-1}(\partial G) \geq nk_n^{\frac{1}{n}} [\mathcal{H}_n(G)]^{1-\frac{1}{n}} \quad (2.3.8)$$

Dimostrazione. Come si può osservare dalla disuguaglianza 2.3.7 e dal fatto che \mathcal{H}_n , la misura n -dimensionale in \mathbb{R}^n coincide con la misura esterna di Lebesgue. \square

La dimostrazione del teorema riprende quella di Ennio De Giorgi e si divide in vari step. Come abbiamo visto la palla è soluzione in una classe di insiemi opportuni che include: insiemi regolari, insiemi convessi e insiemi di Caccioppoli come definiti in (2.3.6). In tale dimostrazione verrà definito il perimetro alla De Giorgi, e si farà uso della simmetrizzazione di Steiner

2.4 Il problema isoperimetrico nello spazio di Gauss

La disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss afferma che tra tutti gli insiemi di fissata misura di Gauss i semispazi hanno perimetro minimo.

Tale disuguaglianza fu provata per la prima volta nel 1975 indipendentemente da Borell [11], da Sudakov-Tsirel'son [67]. Tali dimostrazioni, anche se diverse, utilizzano la disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera ed il lemma di Poincaré. Successivamente nel 1983 Ehrhard [28] diede una dimostrazione che si basa principalmente sulla simmetrizzazione di insiemi rispetto alla misura di Gauss. Infine nel 1997 Bobkov [10] ne propone una elementare dimostrazione come conseguenza di una disuguaglianza isoperimetrica sul cubo discreto.

⁶ \mathcal{H}_{n-1} rappresenta la misura di Hausdorff in \mathbb{R}^n definita nel primo capitolo.

Sudakov-Tsirel'son e Borell ottengono la disuguaglianza isoperimetrica come versione limite della disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera al crescere della dimensione dello spazio, in quanto riescono a dimostrare che la misura di Gauss è limite di certe misure invarianti per rotazioni e normalizzate sulla sfera. La disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera afferma che tra tutti i sottoinsiemi della superficie sferica con fissata misura, le calotte rendono minima la misura della frontiera. Possiamo citare due versioni di questo risultato dovuto essenzialmente a E. Schmidt [62] nel 1948 e da P.Lévy [42] nel 1951.

Entrambe le soluzioni di Sudakov-Tsirel'son e Borell seguono l'idea di passare dalla misura di Gauss di un insieme generico di \mathbb{R}^n a misure più "maneggevoli" come afferma Luzzi in [43] (si può ad esempio pensare alla misura di Lebesgue, o in generale ad una misura invariante per traslazioni e rotazioni) di sottoinsiemi di \mathbb{S}^{m-1} di \mathbb{R}^m (con $m \rightarrow \infty$), grazie al lemma di Poincaré. Applicando la disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera \mathbb{S}^{m-1} e facendo tendere m all'infinito (e quindi applicando il lemma di Poincaré) si ottiene la disuguaglianza isoperimetrica voluta.

Al fine di facilitare la comprensione, si presenterà prima il lemma di Poincaré, successivamente la disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera, la dimostrazione del teorema (riporteremo in particolare quella proposta da Borell) ed infine verrà data una dimostrazione che utilizza un approccio più analitico-funzionale sviluppata da Bobkov.

Enunciamo a questo punto il teorema principale che dimostreremo nelle prossime sezioni.

Teorema 2.18. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile secondo Lebesgue e sia H un semispazio in \mathbb{R}^n tali che abbiano la stessa misura di Gauss, ovvero $\gamma_n(E) = \gamma_n(H)$. Allora, $\forall \varepsilon \geq 0$, $\gamma_n(E^\varepsilon) \geq \gamma_n(H^\varepsilon)$. In particolare si ha che:*

$$\text{Area}(E) \geq \text{Area}(H)$$

2.4.1 Il lemma di Poincaré

Indichiamo con $\Pi_{m,n}$ la proiezione canonica di \mathbb{R}^m su \mathbb{R}^n , con $\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$ la sfera con centro l'origine e raggio \sqrt{m} in \mathbb{R}^m .

Il lemma di Poincaré che verrà dimostrato nelle prossime pagine mette in relazione la misura di Gauss di un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ con la misura uniforme su superfici sferiche $\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$ quando la dimensione m dello spazio tende ad ∞ . Questo risultato, spesso attribuito al matematico francese Henri Poincaré nel suo lavoro *Calcul des Probabilités* del 1912, in realtà ha un'attribuzione storica incerta. Molte fonti mettono in dubbio la sua origine precisa, poiché non

è possibile rintracciare chiaramente l'enunciato completo. In questa sezione, viene fornita una descrizione della dimostrazione del lemma, la quale è stata ripresa dal matematico statunitense Henry P. McKean nel 1973 [48].

Consideriamo una distribuzione di probabilità con densità uniforme su $\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$, per ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$ si definisce la *misura m -normalizzata* di A (e si indica come $M_m(A)$) :

$$M_m(A) = \mathbb{P}(x \in A | x \in \mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}) = \frac{\mathbb{P}(x \in A)}{\mathbb{P}(x \in \mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1})} = \frac{m(A)}{m(\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1})} \quad (2.4.1)$$

con $m(A)$ si indica una misura invariante per rotazioni, per esempio la misura di Hausdorff m -dimensionale definita nel capitolo 1.

A questo punto possiamo estendere la dimensione dello spazio \mathbb{R}^n lasciando le prime n componenti invariate, andando cioè ad immergere l'insieme E quindi tutto \mathbb{R}^n in \mathbb{R}^m , con $m \in \mathbb{N}$, $m > n$. Possiamo definire un "ingrediente" molto utile per la dimostrazione del lemma di Poincaré chiamata la m -proiezione $\pi_m : \mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ di un punto della superficie sferica sul sottospazio \mathbb{R}^n , verrà indicata invece con π_m^{-1} la sua funzione inversa o m -retroproiezione di punti di \mathbb{R}^n in sottoinsiemi di $\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$. Si può osservare che per ogni punto $y \in \mathbb{R}^m$ quindi in particolare modo per ogni $y \in \mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$ passa un unico iperpiano α_y perpendicolare allo spazio \mathbb{R}^n .

Tale α_y è un iperpiano $(m-n)$ -dimensionale di \mathbb{R}^m , con le prime n coordinate fissate che interseca \mathbb{R}^n nell'unico punto $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e che interseca la superficie sferica $\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$ in una sfera a $(m-n-1)$ dimensioni, di raggio:

$$r = \sqrt{m - (x_1)^2 - (x_2)^2 - \dots - (x_n)^2} = \sqrt{m - \sum_{i=1}^n (x_i)^2} \quad (2.4.2)$$

Come possiamo osservare dalla figura 2.22 in cui $m = 3$ e $n = 1$ l'intersezione tra il piano e la sfera corrisponde a \mathbb{S}^1 . Per ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ la m -retroproiezione (m dovrebbe essere scelto abbastanza grande da escludere retroproiezione nulla) è una sfera $(m-n-1)$ dimensionale di raggio dato dalla (2.4.2). A questo punto calcolando geometricamente la m -retroproiezione dell'insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ su $\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$, quest'ultima la possiamo scrivere come:

$$\pi_m^{-1}(E) = (\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1} \cap C_E^m) \quad (2.4.3)$$

ovvero come intersezione tra $\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$ ed il cilindro m -dimensionale C_E^m che ha come base l'insieme E .

Nella figura 2.23 con la parte in grigio delimitata dalla linea gialla si è indicata la retroproiezione dell'insieme E .

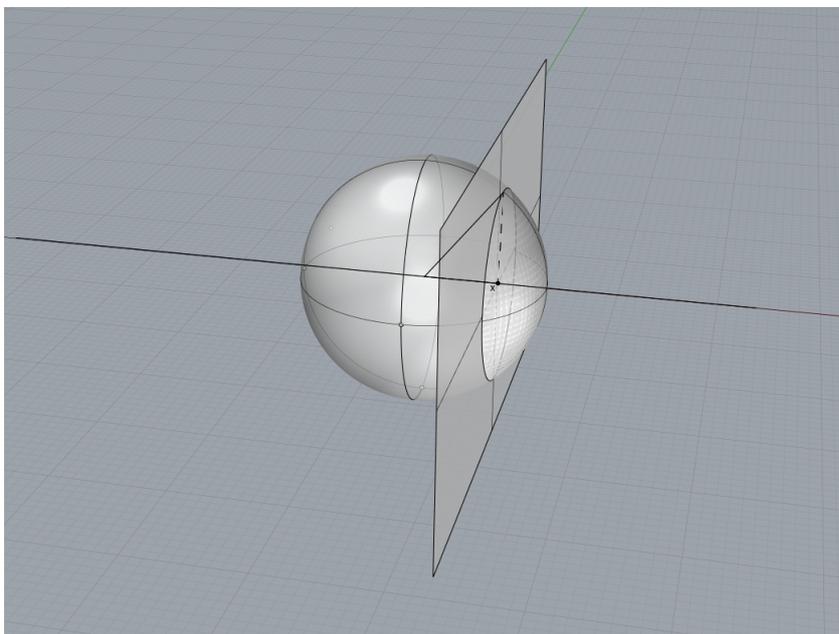


Figura 2.22: Retroproiezione di un punto x in \mathbb{R}^n con $n = 1$, $m = 3$

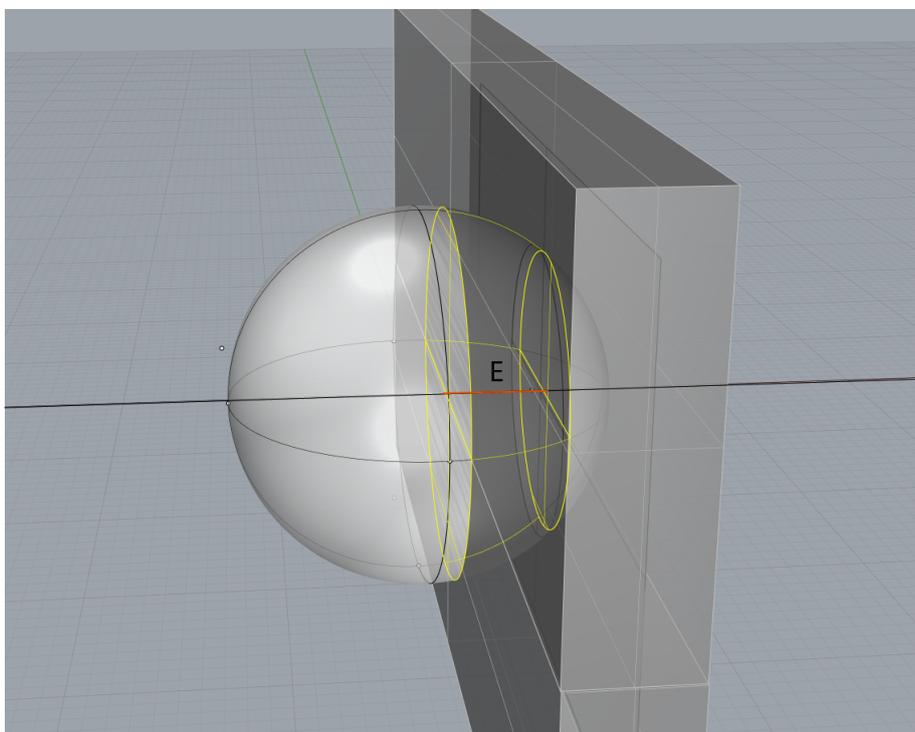


Figura 2.23: Retroproiezione di un insieme E con $n = 1$, $m = 3$

Mettendo insieme la (2.4.1) e la (2.4.3) si ottiene la misura m -normalizzata della retroproiezione dell'insieme E su $\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$

$$M_m(\pi_m^{-1}(E)) = \frac{m(\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1} \cap C_E^m)}{m(\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1})} \quad (2.4.4)$$

Teorema 2.19. *Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabile secondo Lebesgue*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_m(\pi_m^{-1}(E)) = \gamma_n(E) \quad (2.4.5)$$

dove con γ_n si è indicata la misura di Gauss n -dimensionale.

Dimostrazione. Senza perdere di generalità supponiamo che l'insieme E sia limitato e che l'indice m sia "abbastanza grande" in modo tale che la superficie $\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$ racchiuda al suo interno e interamente l'insieme E .

Partendo dalla (2.4.1) possiamo ricavare il primo membro della (2.4.5). Si può ottenere il numeratore della (2.4.1) mettendo insieme i contributi al variare di tutte le retroproiezioni date da ogni singolo punto $x \in E$ andando a fare l'integrale di questi contributi al variare di $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ in $E \subset \mathbb{R}^n$ ovvero da quanto detto precedentemente e da considerazioni di carattere geometrico:

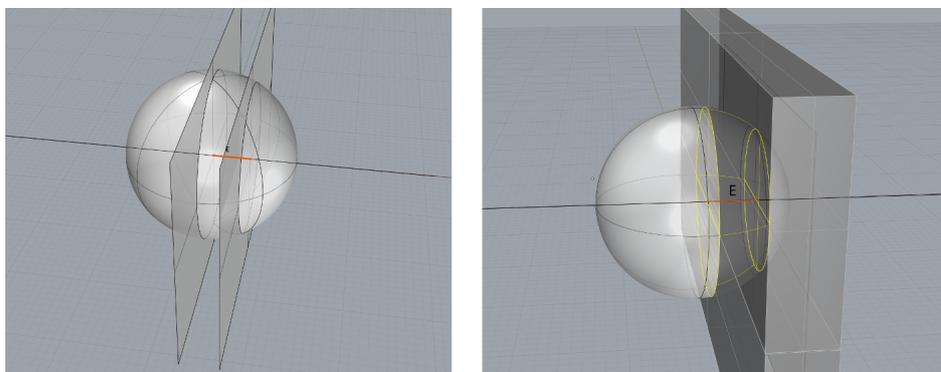


Figura 2.24: Nel caso $m = 3$, $n = 1$ i contributi sono \mathbb{S}^1

$$m(\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1} \cap C_E^m) = \int_E m(\mathbb{S}_{\sqrt{m - \sum_{i=1}^n (x_i)^2}}^{m-n-1}) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (2.4.6)$$

Il denominatore sarà dato, in modo analogo, dai contributi di tutti i punti $x \in \mathbb{R}^n$ che hanno retroproiezione su $\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$ cioè:

$$m(\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}) = \int_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq \sqrt{m}} m(\mathbb{S}_{\sqrt{m - \sum_{i=1}^n (x_i)^2}}^{m-n-1}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2.4.7)$$

Negli integrali in (2.4.6) ed in (2.4.7) il termine $\mathbb{S}^{\frac{m-n-1}{\sqrt{m-\sum_{i=1}^n(x_i)^2}}}$ è la misura di una sfera $(m-n-1)$ dimensionale di centro 0 e raggio $\sqrt{m-\sum_{i=1}^n(x_i)^2}$, ovvero:

$$m(\mathbb{S}^{\frac{m-n-1}{\sqrt{m-\sum_{i=1}^n(x_i)^2}}}) = \frac{\pi^{\frac{m-n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m-n-1}{2} + 1\right)} \left(\sqrt{m-\sum_{i=1}^n(x_i)^2}\right)^{(m-n-1)} \quad (2.4.8)$$

dove Γ è la funzione Gamma di Eulero.

Sostituendo a questo punto (2.4.8) in (2.4.6) e in (2.4.7) e semplificando termini uguali nel numeratore e nel denominatore, si ha :

$$M_m(\pi_m^{-1}(E)) = \frac{\int_E \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i)^2}{m}\right)^{\frac{m}{2}} dx_1 dx_2 \dots dx_n}{\int_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq \sqrt{m}} \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i)^2}{m}\right)^{\frac{m}{2}} dx_1 dx_2 \dots dx_n} \quad (2.4.9)$$

La (2.4.9) vale quando m è sufficientemente grande e in particolare si può pensare di valutare la (2.4.9) quando $m \rightarrow \infty$. Sfruttando la linearità degli operatori di limite ed integrale, un limite ed un integrale ben conosciuti, oltre che l'espressione di γ_n si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow \infty} M_m(\pi_m^{-1}(E)) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_E \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i)^2}{m}\right)^{\frac{m}{2}} dx_1 dx_2 \dots dx_n}{\int_{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| \leq \sqrt{m}} \left(1 - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i)^2}{m}\right)^{\frac{m}{2}} dx_1 dx_2 \dots dx_n} \\
 &= \frac{\int_E \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i)^2}{2}}{m}\right)^m dx_1 dx_2 \dots dx_n}{\int_{\mathbb{R}^n} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i)^2}{2}}{m}\right)^m dx_1 dx_2 \dots dx_n} \\
 &= \frac{\int_E e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}{2}} dx_1 dx_2 \dots dx_n}{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}{2}} dx_1 dx_2 \dots dx_n} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_E e^{-\frac{\|x\|^2}{2}} dx \\
 &= \gamma_n(E)
 \end{aligned}$$

(2.4.10)

□

Lo scambio tra limite ed integrale e di conseguenza tutti i passaggi effettuati successivamente sono giustificati dal teorema della convergenza dominata. Abbiamo così ultimato la dimostrazione del lemma di Poincaré (2.4.5)

2.4.2 Disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera \mathbb{S}^{n-1}

La disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera afferma che tra tutti i sottoinsiemi della superficie sferica con fissata misura, le calotte rendono minima la misura della frontiera. Si può rintracciare una dimostrazione di tale proprietà nei lavori del matematico francese Paul Lévy [42] e in particolar modo del tedesco Erhard Schmidt [62]. La dimostrazione di Levy non fu capita per molto tempo ed è stata rivista e generalizzata da M.Gromov. Luzzi in [43] fa presente “che la dimostrazione presentata da Schmidt si basa in modo molto forte su un processo di simmetrizzazioni isoperimetriche” (riordinamenti

nel senso di Steiner). A Ehrhard introduce il concetto di simmetrizzazione Gaussiana in [28].



Figura 2.25: Erhard Schmidt 1876-1959

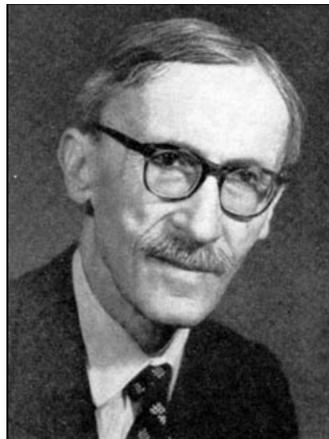


Figura 2.26: Paul Levy 1886-1971

Una calotta C sulla superficie sferica \mathbb{S}^{m-1} può essere riguardata come intersezione di un semispazio H con la superficie sferica \mathbb{S}^{m-1} e dal Lemma di Poincaré la misura di tale calotta tende alla misura di Gauss del semispazio $\gamma_n(H)$. Questa proprietà delle calotte di “convergere” ai semispazi e la proprietà delle stesse di essere insiemi estremali nella disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera, ci suggerisce che i semispazi siano insiemi estremali per il problema rispetto alla misura di Gauss.

Teorema 2.20 (Disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera). *Se A è un sottoinsieme boreliano di \mathbb{S}^{m-1} e C una calotta (ovvero, considerando la distanza geodetica, un intorno sferico di \mathbb{S}^{m-1}) con la stessa misura $m(A) = m(C)$, allora $\forall \epsilon \geq 0$, si ha che:*

$$m(A^\epsilon) \geq m(C^\epsilon) \quad (2.4.11)$$

dove con la notazione A^ϵ si intende l'insieme "ingrassato" come nel capitolo 1 e con $m(\cdot)$ una qualsiasi misura invariante per rotazioni.

Tale teorema è piuttosto importante in quanto ci permette da un lato di valutare la misura di una calotta (che rappresenta l'insieme con minor frontiera a parità di volume) e dall'altro lato, grazie alla connessione data dal lemma di Poincaré tra la misura sulla superficie sferica ($m(A)$ con $A \subseteq S^{n-1}$) e la misura gaussiana γ_n ci darà un valido aiuto per la dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica nello spazio di Gauss \mathbb{R}^n .

Andando ad applicare la (2.4.11) nel caso di $A = \pi_m^{-1}(E)$ con $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e considerando la misura m -standardizzata si ha:

$$M_m(\pi_m^{-1}(E)) = M_m(H) \quad \text{allora} \quad \forall \epsilon \geq 0 \quad M_m((\pi_m^{-1}(E))^\epsilon) \geq M_m(H^\epsilon). \quad (2.4.12)$$

2.4.3 Dimostrazione della disuguaglianza isoperimetrica nello spazio di Gauss

Iniziamo tale sottosezione ricordando la definizione della funzione di distribuzione gaussiana normale su \mathbb{R}

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad t \in [-\infty, +\infty].$$

La funzione Φ che va da $[-\infty, +\infty]$ nell'intervallo $[0, 1]$ è monotona strettamente crescente e quindi invertibile nel suo codominio. Secondo le definizioni suddette sulla misura di Gauss si può osservare che dato un sottoinsieme $B \subseteq \mathbb{R}$ del tipo: $B = [-\infty, b]$ si ha che $\Phi(b)$ corrisponde alla misura 1-dimensionale dell'insieme B , cioè $\Phi(b) = \gamma_1(B)$.

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, E misurabile secondo Lebesgue; sia $\alpha \in [-\infty, +\infty]$ t.c. $\Phi(\alpha) = \gamma_n(E)$ e sia $\beta \in [-\infty, +\infty)$ t.c. $\beta < \alpha$. Sia B l'intervallo $(-\infty, \beta]$. Da ciò si evince che:

$$\gamma_1(B) = \Phi(B) < \Phi(\alpha) = \gamma_n(E). \quad (2.4.13)$$

Avendo definito il semispazio $H \subseteq \mathbb{R}^n$ nel seguente modo:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ t.c. } x_1 \leq \beta\}. \quad (2.4.14)$$

Si ha dalla (2.4.13) $\gamma_n(H) = \gamma_1(B) = \Phi(\beta) < \gamma_n(E)$. Il semispazio H definito in (2.4.14) ha quindi volume minore del volume dell'insieme E .

Mettendo insieme adesso la (2.4.13) e la (2.4.14) e con il lemma di Poincaré (2.4.5) si ottiene che:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} M_m(\pi_m^{-1}(H)) = \gamma_n(H) = \Phi(\beta) < \Phi(\alpha) = \gamma_n(E) = \lim_{m \rightarrow \infty} M_m(\pi_m^{-1}(E)). \quad (2.4.15)$$

La disuguaglianza (2.4.15) vale con $m \rightarrow \infty$ e quindi è sempre vera a partire da un certo valore di m in poi, cioè in particolare:

$$\exists \bar{m} \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \forall m > \bar{m} \quad M_m(\pi_m^{-1}(H)) < M_m(\pi_m^{-1}(E)). \quad (2.4.16)$$

Ricordando a questo punto la disuguaglianza isoperimetrica sulla sfera (2.4.12) e osservando che $\pi_m^{-1}(H)$ (ovvero la retroproiezione del semispazio H su $\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$) è una calotta di $\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$. Mettendo insieme (2.4.12) e (2.4.16) si ha che:

$$\forall m > \bar{m} \quad M_m((\pi_m^{-1}(H))^\epsilon) \leq M_m((\pi_m^{-1}(E))^\epsilon). \quad (2.4.17)$$

Si può dimostrare la proprietà che preso un qualsiasi insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e fissato $\epsilon > 0$, l'insieme “ingrassato” della retroproiezione su $\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$ di E è insiemisticamente contenuto nella retroproiezione su $\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$ dell'insieme “ingrassato” E^ϵ , ovvero:

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}^n, \forall \epsilon > 0, \forall m > n \quad (\pi_m^{-1}(E))^\epsilon \subseteq \pi_m^{-1}(E^\epsilon), \quad (2.4.18)$$

e quindi calcolando le misure m -normalizzate, si ottiene:

$$\forall m > n \quad M_m((\pi_m^{-1}(E))^\epsilon) \leq M_m(\pi_m^{-1}(E^\epsilon)). \quad (2.4.19)$$

Mettendo insieme la (2.4.19) con la (2.4.17) si ottiene che $\forall \epsilon > 0 \exists \bar{m} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall m > \max\{n, \bar{m}\}$:

$$M_m((\pi_m^{-1}(H))^\epsilon) \leq M_m((\pi_m^{-1}(E))^\epsilon) \leq M_m(\pi_m^{-1}(E^\epsilon))$$

ed in particolare:

$$M_m((\pi_m^{-1}(H))^\epsilon) \leq M_m(\pi_m^{-1}(E^\epsilon)). \quad (2.4.20)$$

Si può concludere facendo tendere $m \rightarrow \infty$. Per il lemma di Poincaré (2.4.5), il secondo membro della (2.4.20) tende a $Volume(E^\epsilon)$, $(\gamma_n(E^\epsilon))$.

Per quanto concerne il termine a primo membro, Borell in [1] osserva che, essendo H un semispazio in \mathbb{R}^n quando si considerano le retroproiezioni di H su $\mathbb{S}_{\sqrt{m}}^{m-1}$ con $m \rightarrow \infty$, la superficie sferica sulla frontiera di H diventa localmente piatta (la curvatura tende a 0) e si può approssimare $(\pi_m^{-1}(H))^\epsilon$ come $\pi_m^{-1}(H^\epsilon)$ e quindi $M_m((\pi_m^{-1}(H))^\epsilon) \simeq M_m(\pi_m^{-1}(H^\epsilon)) \rightarrow \gamma_n(H^\epsilon)$ sempre per il lemma di Poincaré.

2.4.4 La disuguaglianza di Bobkov

Richiamiamo dapprima alcuni concetti di calcolo delle probabilità e teoria della misura che ci saranno utili nel proseguo della trattazione.

Ricordiamo a questo punto come è definita la misura di Bernoulli: dato un insieme D e un insieme finito S con n elementi ≥ 2 identificabile con l'insieme dei primi n positivi interi se non ci sono richieste speciali e n numeri non-negativi $p_1 + \dots + p_n = 1$, si può definire la corrispondente misura di Bernoulli sullo spazio $\Omega = S^D = \{\omega_i\}_{i \in D}$ come una misura di probabilità (finita o additivo numerabile in accordo con la definizione) P tale che gli ω_i sono indipendenti e identicamente distribuiti come variabili casuali $P(\omega_i = j) = p_j$ per $1 \leq j \leq n$

Un altro richiamo è quello del teorema del limite centrale che riportiamo nella forma dovuta essenzialmente al P.Lévy, per una dimostrazione si rimanda a [42].

Teorema 2.21. *Sia (X_n) una successione di variabili aleatorie indipendenti, identicamente distribuite, con varianza finita σ^2 e media μ . Allora la v.a.*

$$Z_n := \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

converge in legge ad una gaussiana canonica $N(0,1)$. Detto in altri termini per ogni $a < b$ vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\leq \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq b\right) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

dove con Φ abbiamo indicato la distribuzione normale standard

Una dimostrazione con “approccio” funzionale è proposta da Bobkov in [10]. Per arrivare a dimostrare tale versione della disuguaglianza isoperimetrica rispetto alla misura di Gauss si stabilisce prima un’analoga disuguaglianza (vedi la successiva) rispetto alla misura di Bernoulli ⁷, $\mu = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$, di supporto $\{-1, +1\}^N$ e poi si tensorizza per poter, alla fine usare il teorema centrale del limite.

Consideriamo la seguente disuguaglianza:

$$I\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\sqrt{I(a)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{I(b)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2} \quad \forall 0 \leq a, b \leq 1. \quad (2.4.21)$$

⁷Indichiamo con δ_a la misura di Dirac concentrata in a

dove I rappresenta una funzione non negativa definita in $[0, 1]$ tale che

$$I(0) = I(1) = 0. \quad (2.4.22)$$

In [10] si riporta che “*se più funzioni soddisfano (2.4.21) e (2.4.22) allora il loro estremo superiore soddisfa (2.4.21) e (2.4.22). Ci si può chiedere se esista una funzione **massimale** tra quelle per le quali vengano verificate (2.4.21) e (2.4.22) e in tal caso quale sia la funzione massimale. Questa domanda risulta essere la chiave per un problema isoperimetrico sul cubo discreto. Come si vedrà successivamente un'appropriata disuguaglianza funzionale isoperimetrica contiene in un caso limite la nota disuguaglianza isoperimetrica nello spazio di Gauss.*”

Sia

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt.$$

Φ è una funzione crescente biettiva da $[-\infty, \infty]$ in $[0, 1]$. Sia $\Phi^{-1} : [0, 1] \rightarrow [-\infty, +\infty]$ la funzione inversa.

Proposizione 2.22. La funzione $I(t) = \varphi(\Phi^{-1}(t))$ è massimale tra tutte le funzioni continue non negative definite in $[0, 1]$ che soddisfano (2.4.21) e (2.4.22).

Dimostrazione. Dobbiamo far vedere che $I(t) = \varphi(\Phi^{-1}(t))$ soddisfa (2.4.21) e (2.4.22). Fissiamo $c \in (0, 1)$, sia $g(x) = I(c+x)^2 + x^2, x \in \Delta(c) = (-\min(c, 1-c), \min(c, 1-c))$. Se poniamo $c = \frac{a+b}{2}$ e $x = \frac{a-b}{2}$ la (2.4.21) si riscrive come

$$\sqrt{g(0)} \leq \frac{1}{2}\sqrt{g(x)} + \frac{1}{2}\sqrt{g(-x)} \quad (2.4.23)$$

e la condizione $0 \leq a, b \leq 1$ equivale a $x \in \Delta(c)$. Moltiplicando per 2 ed elevando al quadrato due volte la (2.4.23) si ottiene

$$16g(0)^2 + (g(x) - g(-x))^2 \leq 8g(0)(g(x) + g(-x)).$$

Questa disuguaglianza si può scrivere in termini della funzione $h(x) = g(x) - g(0) = I(c+x)^2 + x^2 - I(c)^2$:

$$(h(x) - (h(-x)))^2 \leq 8I(c)^2(h(x) + h(-x)). \quad (2.4.24)$$

Lemma 2.23. cfr. [10] (a) $I \cdot I'' = -1$. (b) La funzione $(I')^2$ è convessa in $(0, 1)$

Dimostrazione. La parte (a) segue dal fatto che $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Per la parte (b) si ha che: $(I^2)' = 2I'I'' = -2\frac{I'}{I}$, quindi

$$(I^2)'' = -\frac{2(I''I - I'^2)}{I^2} = \frac{2(1 + I'^2)}{I^2} \geq 0$$

. □

Quest'ultima condizione permette di dimostrare che la funzione $R(x) = h(x) + h(-x) - 2I'(c)^2x^2$ è convessa su $\Delta(c)$. Inoltre, poichè R è pari e convessa $R(x) \geq R(0) = 0$ per ogni $x \in \Delta(c)$, cioè

$$h(x) + h(-x) \geq 2I'(c)^2x^2. \quad (2.4.25)$$

La (2.4.24) si ottiene dalla (2.4.25) e dalla seguente disuguaglianza

$$\left| \frac{h(x) - h(-x)}{x} \right| \leq 4I(c)|I'(c)|.$$

Poichè $h(x) - h(-x) = I(c+x)^2 - I(c-x)^2$ per dimostrare la proposizione dobbiamo, quindi, mostrare che

$$\left| \frac{I(c+x)^2 - I(c-x)^2}{x} \right| \leq 4I(c)|I'(c)|. \quad (2.4.26)$$

Per la simmetria di I rispetto a $1/2$, $I(1-c) = I(c)$, $|I'(1-c)| = |I'(c)|$ e

$$|I((1-c)+x)^2 - I((1-c)-x)^2| = |I(c+x)^2 - I(c-x)^2|.$$

Inoltre possiamo assumere $x > 0$, poichè la parte destra è una funzione pari, e $c \in (0, \frac{1}{2}]$. Con tali assunzioni $I(c+x) \geq I(c-x)$ quindi la (2.4.26) si riscrive

$$\frac{I(c+x)^2 - I(c-x)^2}{x} \leq 4I(c)I'(c) \quad (2.4.27)$$

se $0 < x < c \leq 1/2$. Consideriamo la funzione $u(x) = I(c+x)^2 - I(c-x)^2$ la sua derivata seconda $u''(x) = 2(I'(c+x)^2 - I'(c-x)^2) \leq 0$ per quanto visto precedentemente su I . Allora u è una funzione concava e non negativa su $(0, c)$

$$\frac{u(x)}{x} = \int_0^1 u'(xt)dt$$

è non crescente su $(0, c)$. Rimane da provare la (2.4.27) per $x = 0$. Dal seguente sviluppo

$$I(c+x)^2 = I^2(c) + 2I(c)I'(c)x + O(x^2)$$

segue che $\frac{u(x)}{x} \rightarrow 4I(c)I'(c)$ se $x \rightarrow 0$. \square

A questo punto data una funzione arbitraria $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow [0, 1]$ la condizione (2.4.21) si riscrive

$$I(\mathbb{E}f) \leq \mathbb{E}(\sqrt{I(f)^2 + |\nabla_d f|^2}) \quad (2.4.28)$$

dove abbiamo posto $a = f(-1)$ e $b = f(1)$ e dove si è riportato con $\mathbb{E}f = \int f d\mu$ il valore atteso rispetto alla misura di probabilità e con

$$|\nabla_d f| = \left| \frac{f(-1) + f(1)}{2} \right|$$

il gradiente discreto.

Per una dimostrazione del seguente lemma si rimanda sempre a [10].

Il prossimo lemma che riguarda la tensorizzazione della proposizione (2.21) afferma:

Lemma 2.24. Sia data una funzione non negativa I su $\{-1, 1\}$ se la condizione (2.4.21) vale per ogni $f : \{-1, 1\} \rightarrow [0, 1]$ rispetto alla misura di probabilità μ su $\{-1, 1\}$ allora la (2.4.21) vale per ogni $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow [0, 1]$ rispetto alla misura prodotto μ_n , la n -esima potenza di μ .

Andiamo a questo punto a definire il perimetro discreto di un insieme A .

Nel caso $\mu = \frac{1}{2}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_1$, μ_n rappresenta la misura uniforme su $\{-1, 1\}^n$.

Per ogni insieme $A \subset \{-1, 1\}^n$ definiamo il perimetro discreto come:

$$\mu_n^+(A) = \int |\nabla \chi_A| d\mu_n$$

Mettendo insieme il lemma (2.24) e la proposizione (1.21) si dimostra che

Proposizione 2.25. Sia $I(t) = \phi(\Phi^{-1}(t))$ allora la disuguaglianza (2.4.28) vale per ogni $f : \{-1, 1\}^n \rightarrow [0, 1]$ rispetto alla misura prodotto μ_n . In particolare per ogni $A \subset \{-1, 1\}^n$ la (2.4.28) per $f = \chi_A$ implica che

$$\mu_n^+(A) \geq I(\mu_n(A)). \quad (2.4.29)$$

La (2.25) estende la disuguaglianza (2.4.28) al caso n -dimensionale. A questo punto consideriamo una funzione differenziabile due volte $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ con derivate prima e seconda limitate. Applichiamo la (2.4.28) alle funzioni

$$f_k(x_1, \dots, x_k) = f\left(\frac{x_1 + \dots + x_k}{\sqrt{k}}\right), \quad x_1 \dots x_k \in \{-1, 1\}^n,$$

definite su $\{-1, 1\}^{nk}$. Per il teorema centrale del limite in \mathbb{R}^n

$$\int_{\{-1,1\}^{nk}} f_k d\mu_{nk} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.4.30)$$

Si può notare inoltre che

$$|\nabla f_k(x_1 \cdots x_k)|^2 = \left| Df \left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{\sqrt{k}} \right) \right|^2 + O \left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right) \quad \text{quando } k \rightarrow \infty \quad (2.4.31)$$

uniformemente su $x_1, \cdots, x_k \in \{-1, 1\}^n$. Dato che $|Df|^2$ è continuo e limitato, di nuovo dal teorema del limite centrale si ha

$$\int_{\{-1,1\}^{nk}} \sqrt{I(f_k)^2 + |\nabla f_k|^2} d\mu_{nk} \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{I(f)^2 + |\nabla f|^2} d\gamma_n \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.4.32)$$

Un argomento di approssimazione, permette di estendere questa disuguaglianza alle funzioni localmente lipschitziane (che sono differenziabili quasi ovunque dal teorema di Rademacher come visto nel primo capitolo). La (1.2.9) si ottiene dalla (2.4.33) approssimando la funzione caratteristica χ_A con funzioni lipschitziane.

Abbiamo quindi dimostrato la seguente

Proposizione 2.26. Sia $I(t) = \phi(\Phi^{-1}(t))$, allora per ogni $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ localmente lipschitziane vale (2.4.28) rispetto alla misura di Gauss γ_n cioè

$$I \left(\int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n \right) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{I(f)^2 + |\nabla f|^2} d\gamma_n \quad (2.4.33)$$

Dimostrazione. Si applica la (2.4.33) alla funzione caratteristica per ottenere la (1.2.9) □

Capitolo 3

Equazione di Eulero-Lagrange per il problema isoperimetrico nello spazio di Gauss per insiemi simmetrici

“Sì, dobbiamo dividere il nostro tempo in questo modo, tra la nostra politica e le nostre equazioni. Ma per me le nostre equazioni sono ben più importanti, dato che la politica è qualcosa che riguarda solo il presente. Un’equazione matematica dura per sempre .”

ALBERT EINSTEIN

“È più importante che un’equazione mostri una bellezza teorica piuttosto che una praticità diretta. Sembra che lavorare su un’equazione per il raggiungimento di una bellezza e di un’armonia porti a un sicuro progresso.”

PAUL ADRIEN MAURICE DIRAC

3.1 Problemi vincolati e moltiplicatori di Lagrange

Una classe importante di problemi variazionali è quella dei problemi con *vincolo isoperimetrico*. Si vuole minimizzare un certo funzionale integrale F tra tutte le funzioni con dato al bordo fissato per le quali un altro funzionale G assume un valore fissato. Tale problema può essere definito più precisamente come segue:

Definizione 3.1. Un **problema isoperimetrico** richiede di ottimizzare un funzionale della forma 3.1.1 sotto le condizioni che il vincolo

$$G(y) = \int_{x_0}^{x_1} g(x, y, y') dx = L \quad (3.1.1)$$

venga soddisfatto.

Se il vincolo non è presente, il primo step per arrivare all'equazione/i di Eulero-Lagrange, che rappresenta/no un tipo di equazione/i alle derivate parziali del secondo ordine e descrive/ono ad esempio un sistema meccanico conservativo e in tale contesto prende/ono il nome di equazione/oni di Lagrange, vengono usate anche in campi come l'ottimizzazione, è quello di costruire una perturbazione della forma $\tilde{y} = y + \varepsilon\varphi$ dove la funzione y è estrema per il funzionale senza il vincolo isoperimetrico e $\varepsilon\varphi$ è una funzione arbitraria dipendente da x che soddisfa le condizioni al contorno.

Dopo aver calcolato le derivate parziali, l'ultimo passo della dimostrazione è quella di applicare il Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni. Tornando al problema con vincolo isoperimetrico, questo assume la forma di un problema di minimo vincolato ed assomiglia a quelli che in dimensione finita si possono risolvere con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Tale metodo permette, sempre in dimensione finita, di ridurre i punti stazionari di una funzione in I variabili e J vincoli a quella di una terza funzione in $I + J$ variabili non vincolata detta *lagrangiana* introducendo cioè tante nuove variabili scalari λ_i quanti sono i vincoli, che vengono chiamate moltiplicatori. Se \tilde{r} è un estrema (per esempio un minimo) per il problema vincolato originario, allora esiste un $\tilde{\lambda}$ tale che $(\tilde{r}, \tilde{\lambda})$ è stazionario (anche se non necessariamente dello stesso tipo) per la *lagrangiana*. Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange ci dà una condizione necessaria ma non sufficiente per l'ottimizzazione nei problemi vincolati.

Gli ingredienti del problema di estremo vincolato in \mathbb{R}^2 ad esempio, sono due funzioni K, J il cui dominio è \mathbb{R}^2 e i cui valori sono reali. Tale problema equivale a considerare la linea di livello

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid K(x, y) = 0\} \quad (3.1.2)$$

e trovare i punti in cui

$$\text{la } \textit{restrizione} \text{ di } J \text{ a tale linea è massima, oppure minima.} \quad (3.1.3)$$

La *regola dei moltiplicatori di Lagrange*, fornisce una strategia risolutiva. La regola si fonda sulla seguente proprietà:

$$\nabla K(x, y) = 0 \quad \text{implica} \quad K(x, y) \neq 0.$$

(cioè sulla proprietà che la linea di livello non contenga punti critici) e dice che le soluzioni di 3.1.2, 3.1.3 x e y e un parametro aggiuntivo λ il *moltiplicatore di Lagrange* verificano:

$$\nabla J(x, y) = \lambda \nabla K(x, y) \quad K(x, y) = 0$$

In particolare le soluzioni x, y rendono il gradiente di J parallelo al gradiente di K . Sappiamo già che il gradiente di una funzione di x e y è ortogonale alle linee di livello della funzione medesima. In altri termini la regola di Lagrange dice che i punti soggetti a 3.1.2 e 3.1.3 sono tra quelli in cui il gradiente di J è puramente ortogonale alla linea di livello di K cioè in cui la linea di livello di J è tangente alla linea di livello di K .

Il prossimo teorema sui moltiplicatori di Lagrange permette di estendere le considerazioni in un contesto più generale. Prima di andare a dimostrare il teorema introduciamo gli “ingredienti” come il funzionale A e il funzionale P per funzioni di una variabile r , di cui il primo rappresenterà il vincolo e il secondo è da minimizzare. δA e δP rappresentano rispettivamente le variazioni prime dei due funzionali. Per comprendere tale concetto consideriamo un funzionale ad esempio A che dipende da un'altra funzione r . La variazione di A rispetto a una piccola variazione di r denotata con δA è definita come segue:

$$\delta A = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{A[r(x) + \epsilon \eta(x)] - A[r(x)]}{\epsilon}$$

dove $\eta(x)$ è una funzione arbitraria che rappresenta la variazione di $r(x)$ e ϵ è un parametro che tende a zero. Analogamente per δP . Nella sezione successiva A e P diventeranno rispettivamente l'area e il perimetro nel piano di Gauss. Vale il seguente risultato (estensione del metodo dei moltiplicatori di Lagrange al caso infinito dimensionale).

Teorema 3.2. *Sotto ipotesi ragionevoli (esistenza delle variazioni prime) se r_0 è un minimo allora vale almeno una delle due seguenti possibilità:*

1. $\delta A(r_0, v) = 0$ per ogni $v \in C_0^\infty$
2. esiste un $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\delta P(r_0, v) = \lambda \delta A(r_0, v)$$

λ è il moltiplicatore di Lagrange ed è lo stesso per ogni $v \in C_0^\infty$

Dimostrazione. Se $\delta A(r_0, v) = 0$ per ogni $v \in C_0^\infty$, allora non c'è niente da dimostrare. Supponiamo allora che esista $w \in C_0^\infty$ ammissibile tale che

$$\delta A(r_0, w) \neq 0.$$

Poniamo

$$p(t, s) := P(r_0 + tv + sw)$$

e

$$a(t, s) := A(r_0 + tv + sw)$$

dove t e s variano in un intorno di zero e v una qualunque altra variazione ammissibile. Osserviamo che

$$a(0, 0) = A(r_0) = A_0,$$

e

$$a_s(0, 0) = \delta A(r_0, w) \neq 0.$$

Grazie al Teorema delle funzioni implicite possiamo trovare un intorno I di 0 in \mathbb{R} e una funzione $s(t) : I \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $s(0) = 0$ e $a(t, s(t)) = A_0$ e $\forall t \in I$ e

$$s'(t) = -\frac{a_t(t, s(t))}{a_s(t, s(t))} = -\frac{\delta A(r_0, v)}{\delta A(r_0, w)}.$$

In altre parole è come dire che per ogni $t \in I$ la funzione $r_0 + tv + s(t)w$ è un competitore e quindi

$$\frac{d}{dt}P(r_0 + tv + s(t)w) = \frac{d}{dt}p(t, s(t)) = 0$$

per $t = 0$.

Questa è

$$p_t(0, 0) + s'(0)p_s(0, 0)$$

quindi

$$\delta P(r_0, v) - \frac{\delta A(r_0, v)}{\delta A(r_0, w)}\delta P(r_0, w) = 0,$$

da cui

$$\delta P(r_0, v) = \frac{\delta P(r_0, w)}{\delta A(r_0, w)}\delta A(r_0, v).$$

□

Osservazione 3.3. Si può osservare che il moltiplicatore di Lagrange

$$\lambda = \frac{\delta P(r_0, w)}{\delta A(r_0, w)}$$

è indipendente dalla variazione v .

3.2 Il problema isoperimetrico nello spazio di Gauss.

Siano

$$P_{\gamma_2}(r) = d \int_0^\pi \sqrt{r^2(t) + r'^2(t)} e^{-\frac{r^2(t)}{2}} dt \quad (3.2.1)$$

e

$$Area(r) = c \int_0^\pi (1 - e^{-\frac{r^2(t)}{2}}) dt \quad (3.2.2)$$

con $c = \frac{1}{\pi}$ e $d = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$ rispettivamente il funzionale “perimetro” e il funzionale “area” di un insieme E stellato, regolare e con simmetria centrale, come definiti nel I capitolo (pagg. 27-28) di cui r è la funzione radiale. La mappa $r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ ed è periodica: $r(0) = r(2\pi)$, Lipschitziana. Prendiamo in considerazione il problema di minimo vincolato del tipo:

$$m = \min\{P_{\gamma_2}(r) : r \in C^2 \text{ e } Area(r) = A_0\} \quad (P)$$

Teorema 3.4. *Sia r una funzione regolare in $[0, 2\pi]$, minimo di (P). Allora r è soluzione dell'equazione differenziale*

$$\frac{d(r^2 - rr'' + 2r'^2)}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{dr^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} - \lambda c = 0.$$

Dimostrazione. In accordo con il teorema 4.6 consideriamo il funzionale

$$F(r) = P_{\gamma_2}(r) - \lambda Area(r) \quad (3.2.3)$$

con $P(r)$ e $A(r)$ come in (3.2.1) e (3.2.2).

Nel caso in cui $r(t)$ costituisca un estremo del funzionale (massimo o minimo) deve necessariamente risultare:

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon} F(r + \varepsilon\varphi) \right)_{\varepsilon=0} = 0 \quad (3.2.4)$$

cioè deve annullarsi la variazione prima del funzionale in $r(t)$. A questo punto esplicitiamo l'espressione in (3.2.3):

$$d \int_0^\pi \sqrt{r^2(t) + r'^2(t)} e^{-\frac{r^2(t)}{2}} dt - \lambda c \int_0^\pi (1 - e^{-\frac{r^2(t)}{2}}) dt.$$

La derivata rispetto a ε può essere portata sotto il segno di integrale e, sottintendendo la dipendenza da t , si può scrivere:

$$\underbrace{d \int_0^\pi \frac{d}{d\varepsilon} \sqrt{(r + \varepsilon\varphi)^2 + (r + \varepsilon\varphi)'^2} e^{-\frac{(r + \varepsilon\varphi)^2}{2}} dt}_A - \underbrace{\lambda c \int_0^\pi \frac{d}{d\varepsilon} (1 - e^{-\frac{(r + \varepsilon\varphi)^2}{2}}) dt}_B. \quad (3.2.5)$$

Sviluppiamo il primo termine della differenza:

$$A = d \underbrace{\int_0^\pi \frac{d}{d\varepsilon} \left(\sqrt{(r + \varepsilon\varphi)^2 + (r + \varepsilon\varphi)'^2} \right) e^{-\frac{(r + \varepsilon\varphi)^2}{2}} dt}_C + \underbrace{d \int_0^\pi \sqrt{(r + \varepsilon\varphi)^2 + (r + \varepsilon\varphi)'^2} \frac{d}{d\varepsilon} e^{-\frac{(r + \varepsilon\varphi)^2}{2}} dt}_D. \quad (3.2.6)$$

$$C = d \int_0^\pi \frac{1}{2\sqrt{(r + \varepsilon\varphi)^2 + (r + \varepsilon\varphi)'^2}} \frac{d}{d\varepsilon} [(r + \varepsilon\varphi)^2 + (r + \varepsilon\varphi)'^2] e^{-\frac{(r + \varepsilon\varphi)^2}{2}} dt,$$

$$D = -\frac{d}{2} \int_0^\pi \sqrt{(r + \varepsilon\varphi)^2 + (r + \varepsilon\varphi)'^2} \frac{d}{d\varepsilon} (r + \varepsilon\varphi)^2 e^{-\frac{(r + \varepsilon\varphi)^2}{2}} dt.$$

Dal fatto che:

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon} [(r + \varepsilon\varphi)^2 + (r + \varepsilon\varphi)'^2] \right)_{\varepsilon=0} = 2r\varphi + 2r'\varphi'$$

si ha:

$$C = d \int_0^\pi \frac{r\varphi + r'\varphi'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} e^{-\frac{r^2}{2}} dt. \quad (3.2.7)$$

Dal fatto che:

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon} (r + \varepsilon\varphi)^2 \right)_{\varepsilon=0} = 2r\varphi$$

si ha:

$$D = -d \int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2} r\varphi e^{-\frac{r^2}{2}} dt. \quad (3.2.8)$$

Consideriamo il secondo termine della (3.2.5):

$$B = -\frac{\lambda c}{2} \int_0^\pi \frac{d}{d\varepsilon} (r + \varepsilon\varphi)^2 e^{-\frac{(r + \varepsilon\varphi)^2}{2}} dt$$

quindi:

$$B = -\lambda c \int_0^\pi r\varphi e^{-\frac{r^2}{2}} dt. \quad (3.2.9)$$

Mettendo insieme B , C e D e scrivendo i vari termini si ha:

$$-d \int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2} r\varphi e^{-\frac{r^2}{2}} dt + d \int_0^\pi \frac{r\varphi + r'\varphi'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} e^{-\frac{r^2}{2}} dt - \lambda c \int_0^\pi r\varphi e^{-\frac{r^2}{2}} dt = 0$$

Mettendo in evidenza φ si ottiene:

$$\int_0^\pi \left(-dr\sqrt{r^2 + r'^2}e^{-\frac{r^2}{2}} + \frac{dr}{\sqrt{r^2 + r'^2}}e^{-\frac{r^2}{2}} - \lambda cre^{-\frac{r^2}{2}} \right) \varphi dt + \\ + d \int_0^\pi \left(\frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}e^{-\frac{r^2}{2}} \right) \varphi' dt = 0 \quad (3.2.10)$$

Dal procedimento di integrazione per parti e tenendo conto che φ è a supporto compatto in $[0, \pi]$ supponendo quindi che l'insieme sia centralmente simmetrico si ha che:

$$\int_0^\pi \left(\frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}e^{-\frac{r^2}{2}} \right) \varphi' dt = - \int_0^\pi \left(\frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}e^{-\frac{r^2}{2}} \right)' \varphi dt$$

allora la 3.2.10 diventa:

$$\int_0^\pi \left(-dr\sqrt{r^2 + r'^2}e^{-\frac{r^2}{2}} + \frac{dr}{\sqrt{r^2 + r'^2}}e^{-\frac{r^2}{2}} - \lambda cre^{-\frac{r^2}{2}} \right) \varphi dt - \\ - d \int_0^\pi \left(\frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}e^{-\frac{r^2}{2}} \right)' \varphi dt \quad (3.2.11)$$

l'espressione 3.2.11 vale per ogni $\varphi \in C_0^\infty$. Dal Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni si deve avere:

$$-dr\sqrt{r^2 + r'^2}e^{-\frac{r^2}{2}} + \frac{dr}{\sqrt{r^2 + r'^2}}e^{-\frac{r^2}{2}} - \lambda cre^{-\frac{r^2}{2}} - d \underbrace{\left(\frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}e^{-\frac{r^2}{2}} \right)'}_E = 0$$

Calcolando la derivata in E e semplificando si ha:

$$\underbrace{-dr\sqrt{r^2 + r'^2}e^{-\frac{r^2}{2}} + \frac{dr}{\sqrt{r^2 + r'^2}}e^{-\frac{r^2}{2}} - \lambda cre^{-\frac{r^2}{2}}}_F \\ - \underbrace{\frac{d}{dt} \frac{dr'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}e^{-\frac{r^2}{2}} + \frac{dr r r''}{\sqrt{r^2 + r'^2}}e^{-\frac{r^2}{2}}}_G = 0. \quad (3.2.12)$$

Il primo termine di G è uguale a

$$-\frac{d(r''(r^2 + r'^2) - r'(r r' + r' r''))}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Raggruppando i termini nel seguente modo: il primo termine di G con il secondo termine di F si ha:

$$\frac{dr(r^2 - r r'' + 2r'^2)}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

raggruppando il primo termine di F e il secondo di G si ha:

$$-\frac{dr r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

A questo punto mettendo insieme tali termini e semplificando r otteniamo un'equazione differenziale del secondo ordine in r con parametro reale λ .

$$\boxed{\frac{d(r^2 - r r'' + 2r'^2)}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{dr^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} - \lambda c = 0} \quad (3.2.13)$$

□

Osservazione 3.5. L'equazione differenziale del secondo ordine si può ricondurre ad un sistema di due equazioni del primo ordine introducendo come variabile ausiliare s e portando l'equazione in forma normale;

$$\begin{cases} s & = r' \\ (r'') = s' & = -\frac{(s^2+r^2)^{\frac{3}{2}}\lambda c + (dr^2 - 2d)s^2 + dr^4 - dr^2}{dr} \end{cases} \quad (3.2.14)$$

Osservazione 3.6. Si può osservare che con $r = cost = r_0$ nell'equazione 3.2.13 si ha:

$$\frac{dr_0^2}{r_0^3} - \frac{dr_0^2}{r_0} - \lambda c = 0$$

Supponendo $r_0 \neq 0$, $\lambda = -\frac{d(r_0^2 - 1)}{c r_0}$. Ovvero l'equazione è verificata dalle funzioni radiali delle circonferenze, per opportuni valori di λ

3.3 Simulazioni numeriche con l'utilizzo del software MATLAB - Mathworks

Si può cercare di risolvere il sistema (3.2.14) anche per via numerica, utilizzando il software MATLAB.

Il risolutore standard di MATLAB per ODE è la funzione **ode45**. Tale funzione implementa il metodo di Runge-Kutta con un passo tempo variabile per calcolare in maniera efficiente la soluzione. **ode45** è stato progettato per gestire il seguente problema generale

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

dove t è la variabile indipendente y è il vettore delle variabili dipendenti incognite e $f(t, y)$ è una funzione di t e x . Il problema è ben posto quando il

vettore delle funzioni sul lato destro dell'equazione precedente è definito e le condizioni iniziali $y = y_0$ al tempo t_0 sono date.

Nel metodo di Runge-Kutta otteniamo la soluzione di y_i a vari valori di t_i nel range tra t_0 e t_n , il valore intermedio viene calcolato internamente da **ode45**. La formula base del metodo di RK4 è data da:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)h$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

per $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ dove

$$K_1 = f(t_n, y_n),$$

$$K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{K_1}{2}\right),$$

$$K_3 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h\frac{K_2}{2}\right),$$

$$K_4 = f(t_n + h, y_n + hK_3).$$

Nelle precedenti equazioni y_{n+1} è l'approssimazione di $y(t_{n+1})$ con il metodo di RK4 e il successivo valore y_{n+1} è determinato sommando al valore presente y_n la media pesata dei quattro incrementi, dove ogni incremento è il prodotto dell'ampiezza dell'intervallo h , e da una pendenza stimata, specificata dalla funzione f al membro di destra dell'equazione differenziale. K_1 è la pendenza all'inizio dell'intervallo usando y ; K_2 è la pendenza nel punto medio dell'intervallo, usando y e K_1 ; K_3 è la pendenza nel punto medio, usando y e K_2 ; K_4 è la pendenza alla fine dell'intervallo, usando y e K_3 .

Il metodo RK4 è del quarto ordine, significa che errore locale di troncamento è dell'ordine di $O(h^5)$, mentre l'errore totale è dell'ordine di $O(h^4)$.

3.3.1 La function per il sistema ODE

Per implementare il sistema di due equazioni differenziali (3.2.14) abbiamo creato una function di nome **Eulero(n).m** dipendente da tre variabili t , y , l dove t è la variabile indipendente, y la funzione sconosciuta, l che corrisponde al parametro λ il moltiplicatore di Lagrange.

```
function dydt = Eulero_n(t,y,l)
c=1/pi;
d=2/sqrt(2*pi);
dydt=[y(2); -((y(2)^2+y(1)^2)^(3/2))*l*c+ ...
      (d*y(1)^2-2*d)*y(2)^2+d*y(1)^4-d*y(1)^2)/(d*y(1))];
end
```

3.3.2 Lo script per risolvere il sistema ODE

Per risolvere il sistema di due equazioni differenziali del secondo ordine, dobbiamo digitare sul prompt di MATLAB il seguente comando:

```
[t , y]=ode45(@(t , y) Eulero_n (t , y , -3.76) , tspan , y0)
```

- Eulero_n

è il nome della funzione Mfile usato per valutare il sistema delle due equazioni (3.2.14).

- tspan

è il vettore che definisce i limiti iniziale e finale di integrazione, così come quanto vogliamo che siano grandi i nostri passi temporali.

- y0

è il vettore delle condizioni iniziali.

3.3.3 Risultati e simulazioni numeriche

Per vari valori di λ abbiamo “plottato” le soluzioni:

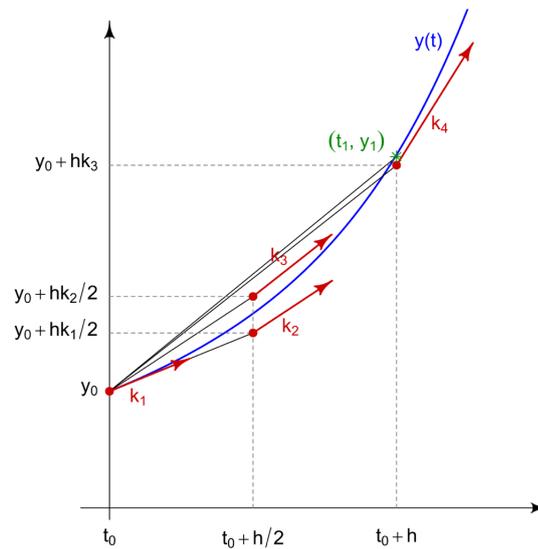


Figura 3.1: Coefficienti del metodo RK4

- nel piano polare (r, t) ,
- nel piano “reale” (x, y) .

Osservazione 3.7. Si può osservare dalla 3.7 che per $\lambda = -3.76$ e con il punto iniziale $y_0 = (2, 0)$ ritroviamo il cerchio nel piano di Gauss in \mathbb{R}^2 ; ciò è assicurato da un calcolo diretto con l'equazione (3.2.13). Nel caso del cerchio infatti $r' = 0$, $r'' = 0$ l'equazione si riduce a:

$$\frac{dr^2}{(r^2)^{3/2}} - \frac{dr^2}{r} - \lambda c = 0,$$

$$\frac{dr^2}{r^3} - \frac{dr^2}{r} - \lambda c = 0,$$

ovvero

$$\frac{d}{r} - dr - \lambda c = 0.$$

Supponendo il punto iniziale $(r, r') = (2, 0)$,

$$\frac{d}{2} - 2d - \lambda c = 0$$

λ risulta essere uguale a $-\frac{3d}{2c} = -\frac{-3\pi}{\sqrt{2\pi}} \simeq -3.76$.

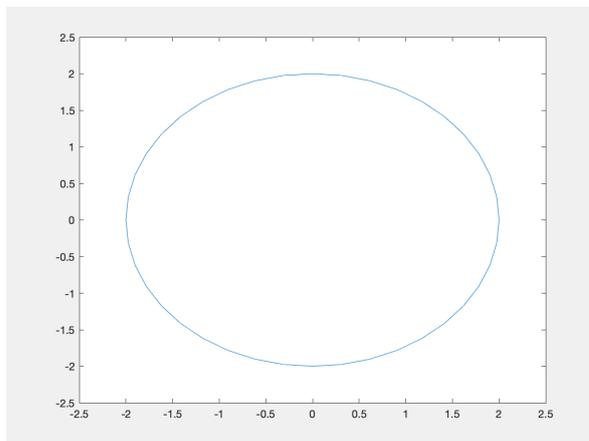


Figura 3.2: Soluzione del sistema con $\lambda = -3.76$ e $y_0 = (2, 0)$.

Osservazione 3.8. Abbiamo notato che nel caso di λ negativo si possono ottenere come soluzioni circonferenze e altri tipi di soluzioni chiuse che non si intersecano, in particolare per i valori di $\lambda = -2.8$ e $\lambda = -1.8443333$ (vedi

fig. 3.8).

Si può osservare inoltre che, nel caso di λ positivo, si hanno soluzioni a più “petali” che si autointersecano rispettivamente con 3, 4, 7, 10 e 16 petali (vedi figg. 3.4, 3.5 e seguenti). Tali soluzioni sono state descritte anche in [1] e in [21].

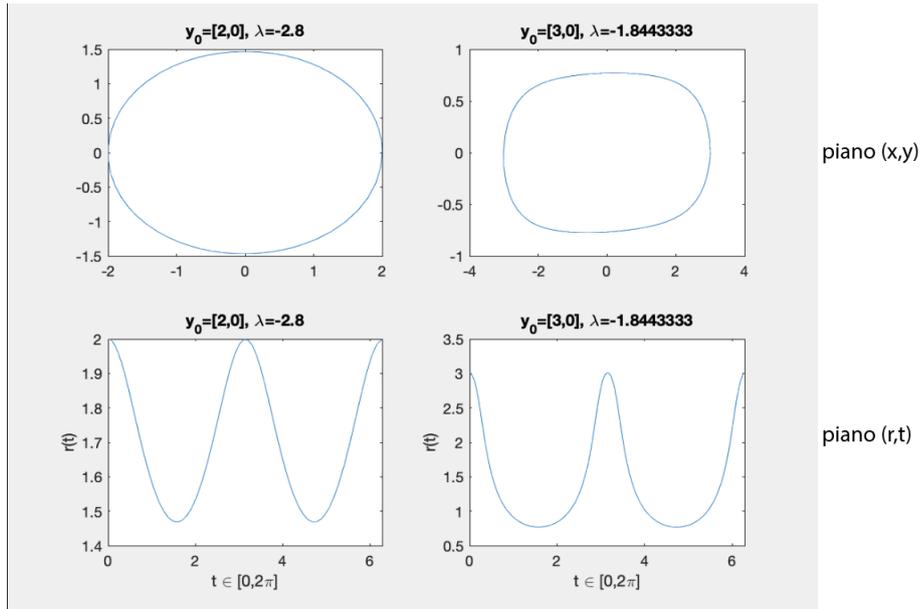


Figura 3.3: Soluzione del sistema con $\lambda = -2.8$ e $y_0 = (2, 0)$ e con $\lambda = -1.8443333$ e $y_0 = (3, 0)$.

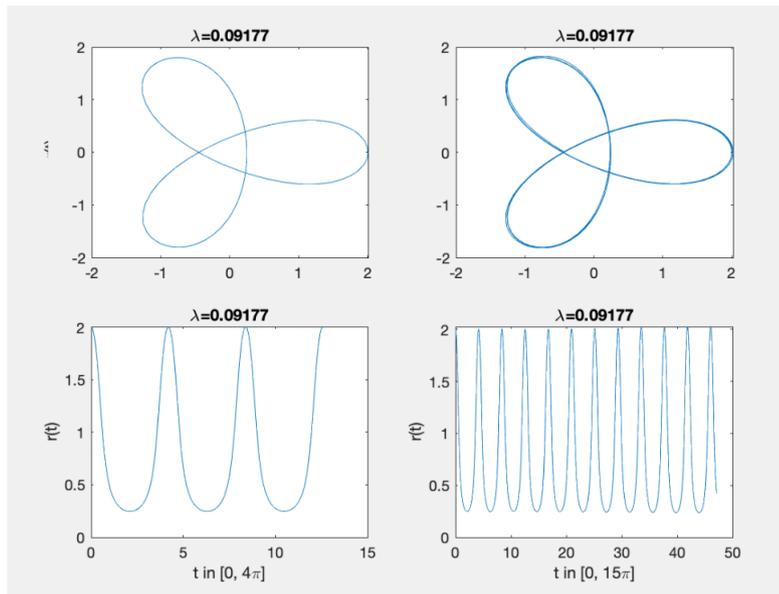


Figura 3.4: Soluzione con 3 “petali”.

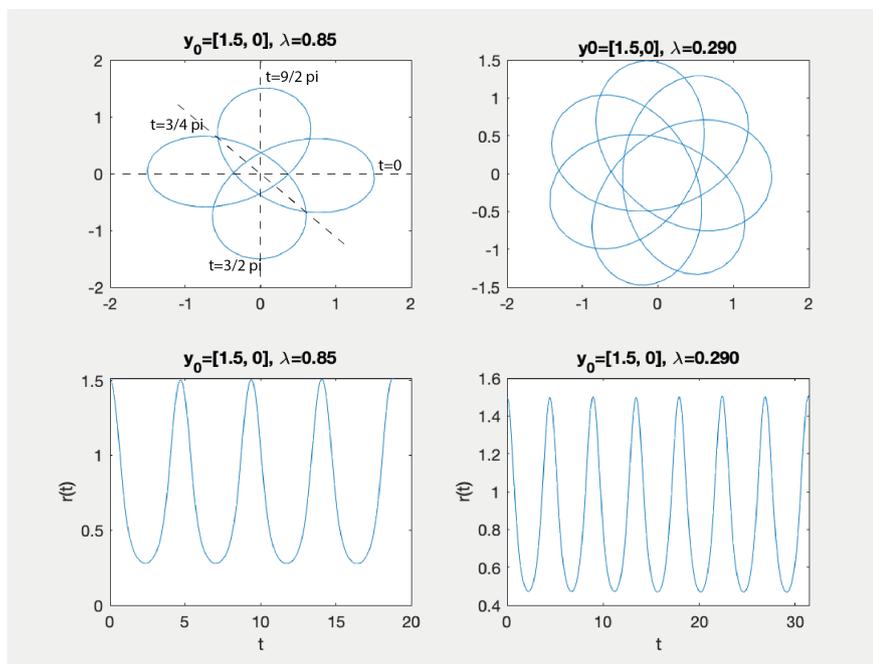


Figura 3.5: Soluzioni con 4 “petali” e con 7 “petali”.

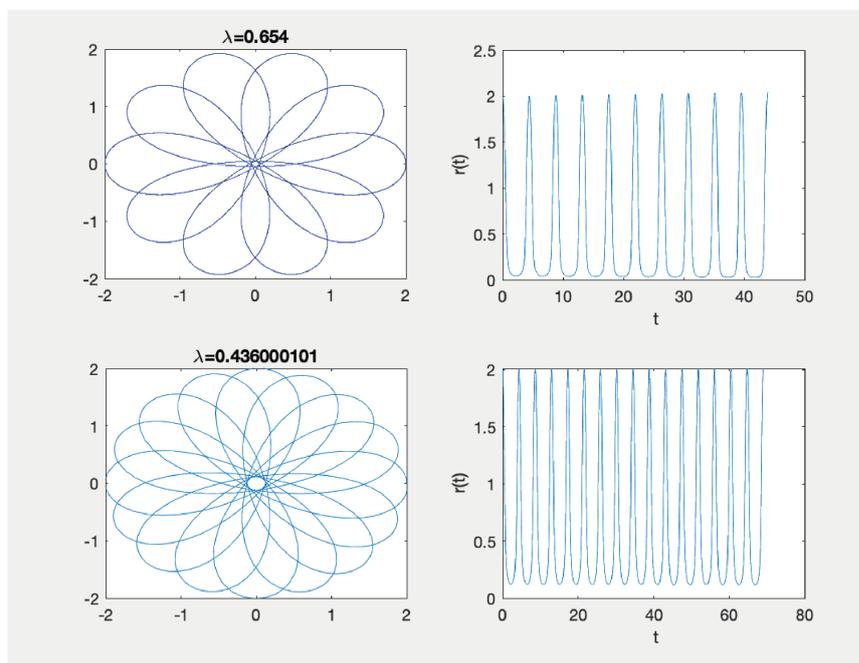


Figura 3.6: Soluzioni con 10 “petali” e con 16 “petali”.

3.4 Dall’equazione di Euler-Lagrange ad una sua “riscrittura”

In questo paragrafo andiamo a riscrivere l’equazione di Euler-Lagrange in una forma per certi aspetti più geometrica che mette in relazione la curvatura euclidea e il prodotto scalare tra il versore normale e la curva parametrizzata. Introduciamo a tal proposito:

- : γ la curva.
- : N la normale esterna.
- : K_e la curvatura euclidea.

Teorema 3.9. *L’equazione in (3.2.13) può essere riscritta nella forma*

$$K_e - (N(t), \gamma(t)) = \text{costante} \quad (3.4.1)$$

Dimostrazione. Dalla (3.2.13) e seguenti, generalizzando ovvero se consideriamo una misura con densità generica della forma $e^{-\Phi}$ si ha:

$$F'(0) = \int_0^\pi \frac{r\varphi + r'\varphi'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} e^{\Phi(r)} dt + \int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2} e^{\Phi(r)} \Phi'(r) \varphi dt. \quad (3.4.2)$$

L'equazione (3.4.2) può essere riscritta come somma di tre parti

$$\underbrace{\int_0^\pi \varphi \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} e^{\Phi(r)} dt}_A + \underbrace{\int_0^\pi \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} e^{\Phi(r)} \varphi' dt}_B + \underbrace{\int_0^\pi \varphi \sqrt{r^2 + r'^2} \Phi'(r) e^{\Phi(r)} dt}_C \quad (3.4.3)$$

Il caso $\Phi = 0$ (nel piano euclideo)

$$F'(0) = \int_0^\pi \varphi \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} dt + \int_0^\pi \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \varphi' dt. \quad (3.4.4)$$

Utilizzando la formula di integrazione per parti si ha:

$$F'(0) = \int_0^\pi \varphi \left[\frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} - \frac{d}{dt} \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \right] dt. \quad (3.4.5)$$

Nel Caso Generale si ha:

$$\begin{aligned} B &= - \int_0^\pi \varphi \left[\frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} e^{\Phi(r)} \right]' dt \\ &= - \int_0^\pi \varphi \frac{d}{dt} \left[\frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \right] e^{\Phi(r)} dt - \int_0^\pi \varphi \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} e^{\Phi(r)} \Phi'(r) r' dt. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Raggruppando tutti i termini si ha:

$$\begin{aligned} F'(0) &= \int_0^\pi \varphi \left[\frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} - \frac{d}{dt} \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \right] e^{\Phi(r)} dt \\ &\quad + \int_0^\pi \left[\sqrt{r^2 + r'^2} \Phi'(r) - \frac{r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} \Phi'(r) \right] e^{\Phi(r)} dt. \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Ora

$$\begin{aligned} \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} - \frac{d}{dt} \frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} &= \frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} - \frac{r''(r^2 + r'^2) - r'(r r' + r' r'')}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{r(r^2 + r'^2) - (r'' r^2 + r'' r'^2 - r'^2 r - r'^2 r'')}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{r(r^2 + r'^2) - r(r r'' - r'^2)}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{r(r^2 + r'^2 - r r'' + r'^2)}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= r K_e. \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Con K_e abbiamo indicato la curvatura euclidea del nostro insieme.
Ora calcoliamo il termine

$$\sqrt{r^2 + r'^2} - \frac{r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

Tale termine risulta essere uguale a

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

Se in particolare consideriamo il caso della misura di Gauss, prendiamo $\Phi(r) = -\frac{r^2}{2}$, con derivata $\Phi'(r) = -r$. Il secondo termine della (3.2.10) diventa

$$\int_0^\pi \varphi \left[-\sqrt{r^2 + r'^2} r + \frac{r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} r \right] e^{-\frac{r^2}{2}} dt, \quad (3.4.9)$$

ovvero

$$- \int_0^\pi \varphi \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} r e^{-\frac{r^2}{2}} dt.$$

A questo punto non ci rimane altro che far vedere che

$$\frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = (N(t), \gamma(t)) \quad (3.4.10)$$

dove $N(t)$ e $\gamma(t)$ sono il versore normale alla curva che racchiude il nostro insieme e $\gamma(t)$ la curva rispettivamente.

Parametrizzando γ nella forma $(r(t) \cdot \cos t, r(t) \cdot \sin t)$ con $t \in [0, \pi]$, possiamo calcolarci dapprima il versore tangente alla curva che è uguale a

$$T(t) = (r' \cdot \cos(t) - r \cdot \sin(t), r' \cdot \sin(t) + r \cdot \cos(t))$$

con $t \in [0, \pi]$ e successivamente il versore normale che è uguale a

$$N(t) = \frac{(r' \cdot \sin(t) + r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t) - r' \cdot \cos(t))}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

Ora facendo il prodotto scalare tra N e γ otteniamo che

$$(N(t), \gamma(t)) = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$$

Utilizzando la (3.2.9) e mettendo insieme i risultati si ha:

$$\int_0^\pi r K_e \varphi e^{-\frac{r^2}{2}} dt - \int_0^\pi (N(t), \gamma(t)) r \varphi e^{-\frac{r^2}{2}} dt = \lambda \int_0^\pi r \varphi e^{-\frac{r^2}{2}} dt. \quad (3.4.11)$$

Dato che φ è a supporto compatto dal Lemma Fondamentale del Calcolo delle Variazioni si ha che :

$$K_e - (N(t), \gamma(t)) = \lambda = \text{costante}. \quad (3.4.12)$$

□

Osservazione 3.10. Si può ora mostrare che le funzioni radiali delle circonferenze con centro l'origine sono soluzioni dell'equazione (3.4.12). Sia $r \equiv r_0$ la funzione radiale di una circonferenza con centro nell'origine di raggio r_0 allora la sua curvatura sarà costante

$$K_e = \text{cost} = \frac{1}{r_0}.$$

Non è difficile provare che il prodotto scalare tra il versore normale alla curva e la curva stessa si mantiene costante al variare del punto sulla curva, e risulta essere uguale a:

$$(N(t), \gamma(t)) = r_0 \quad \forall t \in [0, 2\pi)$$

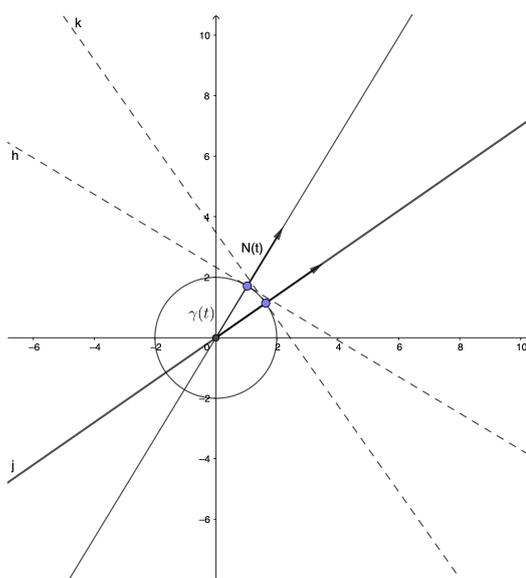


Figura 3.7: In questa immagine si può vedere come il prodotto scalare tra i vettori $N(t)$ e $\gamma(t)$ si mantenga costante

Passiamo ora a far vedere che le funzioni radiali delle rette non per l'origine sono soluzioni dell'equazione (3.4.12). La curvatura euclidea K_e di una retta è uguale a zero mentre il prodotto scalare $(N(t), \gamma(t))$ si mantiene costante in quanto corrisponde alla lunghezza della proiezione del vettore $\gamma(t)$ lungo il vettore normale alla retta come si può osservare dalla figura 3.8.

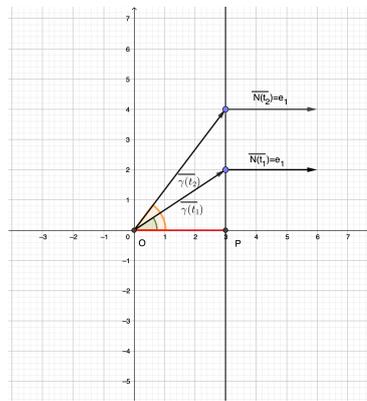


Figura 3.8: In questa immagine si può vedere come il prodotto scalare tra i vettori $e_1 = N(t)$ e $\gamma(t)$ si mantenga costante e risulta essere uguale alla lunghezza OP

Capitolo 4

Teoremi di Esistenza

“Il metodo diretto del calcolo delle variazioni consiste nel dimostrare l’esistenza del minimo o del massimo di un funzionale direttamente, senza passare attraverso l’equazione di Eulero-Lagrange.”

DAVID HILBERT

4.1 Il procedimento dei Metodi Diretti

In questo capitolo vogliamo provare l’esistenza di un minimo per un certo funzionale per una classe di funzioni radiali “ammissibili”. Per determinare l’esistenza di tale minimo useremo il procedimento che va sotto il nome dei Metodi Diretti, che qui ricordiamo. I metodi diretti si contrappongono ai loro antecedenti (in antitesi chiamati talvolta indiretti) poichè prescindono affatto non solo dall’equazione di Jacobi, ma anche dall’equazione di Euler-Lagrange di cui abbiamo parlato nei precedenti capitoli. Essi si pongono un obiettivo diverso considerato primario oggi: garantire a forza di mera inferenza che estremanti (minimizzatori oppure massimizzatori) di funzionali variazionali, aventi forma chiusa oppure soddisfacenti idonee ipotesi, esistono effettivamente. Una *prova di esistenza*, non la fabbricazione né l’identificazione di estremanti è il loro fine. I metodi diretti sono basati su pochi capisaldi dell’analisi funzionale: la compattezza di insiemi di funzioni, la *semicontinuità* di funzionali e un ragionamento, il quale è riassunto in ultima analisi dal *teorema di Weierstrass*. Diamo ora una definizione che ci sarà utile nel prosieguo della trattazione. Sia assegnato un funzionale $I : U \rightarrow \mathbb{R}$ con U sottospazio di uno spazio topologico T ; diremo che I è *sequenzialmente semicontinua inferiormente* per successioni rispetto alla topologia τ , definita in U se per ogni successione $(u_h)_h$ contenuta in U , convergente ad una funzione u_o nella

topologia τ , si ha

$$I(u) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} I(u_h).$$

Consideriamo il funzionale I definito in U , dotato della topologia τ . Con il procedimento dei metodi diretti si affronta il seguente problema

$$\text{Inf}\{I(u), u \in U\} = \mathcal{M}.$$

Il procedimento dei Metodi Diretti consiste dei seguenti passi:

- (a) provare che l'estremo inferiore \mathcal{M} di I in U è finito;
- (b) provare l'esistenza di una successione minimizzante di I in U , cioè una successione $(u_h)_h$ tale che

$$\mathcal{M} = \lim_{h \rightarrow \infty} I(u_h),$$

che converge o ammette una sottosuccessione convergente ad una funzione $u_o \in U$ nella topologia τ . (*Condizione di compattezza*)

- (c) garantire la semicontinuità del funzionale I .

Quando tutte queste condizioni sono soddisfatte, si ottiene

$$I(u_o) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} I(u_h) = \mathcal{M}$$

e segue che u_o è un minimo di I in U .

Il successo, se così si può dire, di un metodo diretto dipende da una buona combinazione di tre ingredienti: un funzionale variazionale I , uno spazio di funzioni in competizione, la topologia τ definita in U . Il primo deve avere buone proprietà, la seconda occorre così capiente da catturare le estremanti giuste, la terza deve essere azzeccata a dovere. In particolare, bisogna che la topologia di U :

- sia da un lato abbastanza *debole* da rendere lo spazio di funzioni U compatto, più la topologia è debole, maggiore è la possibilità che un ambiente diventi compatto;
- sia dall'altro lato abbastanza *forte* da rendere I semicontinuo, più la topologia è forte, maggiore è la possibilità che un funzionale diventi semicontinuo.

4.2 Una dimostrazione di esistenza per una certa classe di funzioni

In questa sezione vogliamo provare l'esistenza di un minimo per il funzionale di tipo *perimetro* con *area* fissata per la classe di funzioni radiali "ammissibili"

$$X = \{r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}_+, r \in W^{1,p}([0, 2\pi])\}.$$

Possiamo dare un' ipotesi di simmetria su r ad esempio l' essere periodica di periodo π ovvero, tradotto in formule, $r(t) = r(t + \pi) \quad \forall t$. Inoltre dotiamo l'insieme X della topologia τ forte su r e debole sulle derivate.

Definizione 4.1. Una successione $r_j \in X$ si dice τ -convergente a $r \in X$ se

$$\|r_j - r\|_{L^p} \rightarrow 0,$$

e

$$r'_j \rightharpoonup r'.$$

Per determinare l'esistenza del minimo utilizzeremo il procedimento dei metodi diretti, richiamato nella sezione precedente.

Per fissare le idee date $m, M, L > 0$, definiamo

$$X_L^{m,M} = \{r \in X | m \leq r(t) \leq M, r \text{ è Lipschitziana in } [0, 2\pi]\}$$

con costante di Lipschitz L .

Dal punto di vista geometrico fanno parte di questo insieme le funzioni radiali di insiemi che contengono un disco di raggio m , sono contenute in un disco di raggio M , e hanno frontiera Lipschitziana.

Dobbiamo risolvere il problema

$$\text{Inf}\{P_\gamma(r) : A(r) = \alpha, r \in X_L^{m,M}\} = \mathcal{I}.$$

dove $P_\gamma(r)$ e $A(r)$ sono rispettivamente il funzionale perimetro gaussiano per la classe di funzioni radiali e il funzionale area gaussiana.

Scriviamo un' osservazione che ci sarà utile nel seguito della trattazione:

Osservazione 4.2. Sia α_j una successione in \mathbb{R} . Se da ogni sottosuccessione di α_j si estrae una sottosuccessione convergente ad α allora $\alpha_j \rightarrow \alpha$

Dimostrazione. Sia $\bar{\alpha} = \limsup \alpha_j$ allora esiste una sottosuccessione $\alpha_{j_k} \rightarrow \bar{\alpha}$ ma per ipotesi da α_{j_k} estraggo una sottosuccessione $\alpha_{j_{k_l}} \rightarrow \alpha$ e quindi si ha che il $\limsup \alpha_j = \alpha$. Analogamente per il $\liminf \alpha_j = \alpha$. \square

Proposizione 4.3. Il funzionale

$$A(r) = \frac{2}{c_A} \int_0^\pi \left(1 - e^{-\frac{r(t)^2}{2}} \right) dt$$

è τ -continuo quindi in particolar modo risulterà inferiormente semicontinuo.

Dimostrazione. Sia $r_j, j \in \mathbb{N}$ una successione in X , tale che $r_j \xrightarrow{\tau} r \in X$. Dalle proprietà degli spazi L^p si ha che \exists una sottosuccessione r_{j_k} , tale che r_{j_k} tende ad r q.o. in $[0, 2\pi]$.

Definiamo $g_j : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}_+$ come

$$g_j(t) = 1 - e^{-\frac{r_j^2}{2}}.$$

Osserviamo che g_j è uniformemente limitata, infatti

$$0 \leq g_j(t) = 1 - e^{-\frac{r_j^2}{2}} \leq 1.$$

Inoltre, considerando la sottosuccessione,

$$g_{j_k}(t) = 1 - e^{-\frac{r_{j_k}^2}{2}}$$

questa converge q.o. a

$$1 - e^{-\frac{r^2}{2}}$$

poichè

$$r_{j_k} \rightarrow r$$

q.o. Possiamo applicare il teorema della Convergenza Dominata dato che la funzione 1 è sommabile in $[0, 2\pi]$ e ottenere:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2}{c_A} \int_0^\pi \left(1 - e^{-\frac{r_{j_k}(t)^2}{2}} \right) dt = \frac{2}{c_A} \int_0^\pi \left(1 - e^{-\frac{r(t)^2}{2}} \right) dt. \quad (4.2.1)$$

Dalla formula (4.2.1) possiamo dedurre che $A(r_j)$ ha una sottosuccessione che converge ad $A(r)$.

Torniamo ad $A(r_j)$. Sia $A(r_{j_k})$ una qualsiasi sottosuccessione di $A(r_j)$. Ovvero r_{j_k} sottosuccessione di r_j .

Ora $r_j \rightarrow r$ in $L^p([0, 2\pi])$ quindi $r_{j_k} \rightarrow r$ in L^p . Allora r_{j_k} ha un'estratta $r_{j_{k_l}} \rightarrow r$ q. o. Quindi si ha che

$$\left(1 - e^{-\frac{r_{j_{k_l}}^2}{2}} \right) \rightarrow \left(1 - e^{-\frac{r^2}{2}} \right)$$

q.o. Ora

$$0 \leq \left(1 - e^{-\frac{r_{j_{k_l}}^2}{2}}\right) \leq 1.$$

Quindi dal teorema della convergenza dominata $A(r_{j_{k_l}}) \rightarrow A(r)$. Dall'Osservazione 4.2 si ha che $A(r_j) \rightarrow A(r)$. \square

Ora passiamo a dimostrare la semicontinuità del funzionale perimetro; per fare ciò si utilizzerà un risultato di semicontinuità inferiore ripreso da [69].

Proposizione 4.4. Il funzionale $P_\gamma : X_L^{m,M} \rightarrow \mathbb{R}$ definito da

$$P_\gamma(r) = \frac{2}{c_P} \int_0^\pi \sqrt{r^2(t) + r'^2(t)} e^{-\frac{r(t)^2}{2}} dt \quad (4.2.2)$$

è semicontinuo inferiormente rispetto a τ

Teorema 4.5. *Supponiamo che G sia un sottoinsieme aperto e limitato dello spazio euclideo \mathbb{R}^n , f sia una funzione definita in $G \times]-\infty, \infty[\times \mathbb{R}^n$ avente valori reali; inoltre supponiamo che valgano le seguenti altre ipotesi:*

- $f \geq 0$;
- $f(\cdot, u, \xi)$ è **misurabile** per ogni u in $]-\infty, \infty[$ e ogni ξ in \mathbb{R}^n ; $f(x, \cdot, \cdot)$ è **continua** per ogni x in G ;
- $f(x, u, \cdot)$ è **convessa** per ogni x in G e ogni u in $]-\infty, \infty[$;
- $1 < p < \infty$.

Se le funzioni $u, u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$ appartengono tutte allo spazio di Sobolev $W^{1,p}(G)$ e la successione $u_1, u_2, \dots, u_k, \dots$ converge a u **debolmente** in $W^{1,p}(G)$ allora

$$J(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(u_k). \quad (4.2.3)$$

Detto in altre parole J è **sequenzialmente semicontinuo inferiormente** nella **topologia debole**.

Dimostrazione. (della proposizione 4.4) Applichiamo il teorema 4.5 con

- $x = t, u = r, \nabla u = u' = r'$,
- $G = [0, 2\pi]$,
- $f(x, u(x), \nabla u(x)) = f(t, r(t), r'(t)) = \sqrt{r^2(t) + r'^2(t)} e^{-\frac{r^2(t)}{2}}$.

- f è continua in r e r' .
- Fissati r e r' , f è costante rispetto a t e quindi è misurabile.
- f è convessa rispetto a r' .

Lo stesso teorema ci dice che se $r_j \rightarrow r$ debolmente in $W^{1,p}$ allora

$$P_\gamma(r) = \int f(r, r') dt = \frac{2}{c_P} \int_0^\pi \sqrt{r^2(t) + r'^2(t)} e^{-\frac{r(t)^2}{2}} dt \quad (4.2.4)$$

verifica

$$P_\gamma(r) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} P_\gamma(r_j). \quad (4.2.5)$$

Quindi se $r_j \xrightarrow{\tau} r$ allora $r_j \rightarrow r$ debolmente e quindi segue la formula precedente e abbiamo dimostrato la semicontinuità inferiore del funzionale perimetro $P(r)$. \square

Per provare l'esistenza del minimo ci servirà il teorema seguente per approfondimenti [45]:

Teorema 4.6. (*Banach-Alaoglu*). *Sia E un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^n e sia $1 < p < \infty$. Siano $f_n \in L^p(E)$, $n \in \mathbb{N}$, e sia c una costante non negativa tale che*

$$\|f_n\|_p \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora esiste una sottosuccessione di $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ che converge debolmente in $L^p(E)$ ad una funzione $f \in L^p(E)$.

A questo punto possiamo dimostrare il risultato di esistenza seguente.

Teorema 4.7. *Il problema di minimo,*

$$\inf\{P_\gamma(r) : A(r) = \alpha, r \in X_L^{m,M}\}$$

con $0 \leq \alpha \leq 1$, ha un minimante.

Dimostrazione. Sia r_j una successione minimizzante di P_γ in $X_L^{m,M}$ con $j \in \mathbb{N}$; possiamo applicare il teorema di Ascoli-Arzelà in quanto le funzioni r_j sono equilimitate ed equicontinue (equilipschitziane) dalla definizione dell'insieme $X_L^{m,M}$. Allora esiste un'estratta r_{j_k} che converge uniformemente ad \bar{r} , inoltre $m \leq \bar{r} \leq M$ e \bar{r} è Lipschitziana con costante di Lipschitz L . La proprietà di limitatezza e di Lipschitzianità vengono ereditate da \bar{r} perché si

ha convergenza uniforme, quindi in particolare $\bar{r} \in X_L^{m,M}$. Ora si ha che r'_{j_k} è una successione in $L^p([0, 2\pi])$ perchè $r_{j_k} \in W^{1,p}$ inoltre è limitata infatti (usando la condizione di Lipschitzianità):

$$\left(\int_0^{2\pi} |r'_{j_k}|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_0^{2\pi} L^p dt \right)^{\frac{1}{p}} = L(2\pi)^{\frac{1}{p}}$$

I sottoinsiemi limitati di $L^p([0, 2\pi])$ sono debolmente compatti. Ciò segue dal teorema di Banach-Alaoglu enunciato in 4.6 in ipotesi più generali.

Allora r'_{j_k} ha una sottosuccessione debolmente convergente ad una funzione q in $L^p[0, 2\pi]$.

Mostriamo a questo punto che la funzione q risulta essere proprio la derivata debole di \bar{r} ovvero

$$\int \phi' q = - \int \phi \bar{r}' \quad \forall \phi \in C_0^\infty.$$

Infatti, sia $\phi \in C_c^\infty([0, 2\pi])$; abbiamo

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \phi q &= \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \phi r'_{j_{k_l}} dt \\ &= - \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \phi' r_{j_{k_l}} dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \phi' \bar{r} dt. \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Leggendo il primo e l'ultimo termine dell'equazione (5.2.1) si ha che $q = \bar{r}'$ ovvero q coincide con la derivata debole di \bar{r} .

Abbiamo dimostrato che la successione minimizzante r_j ha una sottosuccessione $r_{j_{k_l}}$ tale che: $r_{j_{k_l}}$ converge uniformemente a \bar{r} (quindi converge in L^p) e $r'_{j_{k_l}} \rightarrow \bar{r}'$ debolmente allora $r_{j_{k_l}} \xrightarrow{\mathcal{T}} \bar{r}$.

Per la continuità del funzionale A si ha $A(\bar{r}) = \lim_{l \rightarrow \infty} A(r_{j_{k_l}}) = \alpha$. Inoltre

$$\begin{aligned} P_\gamma(\bar{r}) &\leq \liminf_{l \rightarrow \infty} P_\gamma(r_{j_{k_l}}) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} P_\gamma(r_{j_{k_l}}) = \mathcal{I} = \text{Inf}\{P_\gamma(r) : A(r) = \alpha, r \in X_L^{m,M}\} \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

La prima disuguaglianza segue dal fatto che il funzionale $P_\gamma(r)$ è semicontinuo inferiormente, mentre la prima uguaglianza segue dal fatto che r_j è per definizione una successione minimizzante. Inoltre dato che $\bar{r} \in X_L^{m,M}$ si ha che

$$\text{inf}\{P_\gamma(r) : A(r) = \alpha, r \in X_L^{m,M}\} \leq P_\gamma(\bar{r}).$$

Mettendo insieme le due disuguaglianze si ha:

$$P_\gamma(\bar{r}) = \inf\{P_\gamma(r) : A(r) = \alpha, r \in X_L^{m,M}\} = P_\gamma(\bar{r}).$$

□

4.3 Un teorema di esistenza nella classe degli insiemi convessi

In questa parte dimostriamo un secondo teorema di esistenza per il problema isoperimetrico nello spazio di Gauss nella classe degli insiemi convessi.

4.3.1 Lemma sulle funzioni radiali

Consideriamo l'insieme delle funzioni radiali di insiemi convessi centralmente simmetrici. Sia

$$Y = \{r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid r = r_\Omega \text{ con } \Omega \text{ convesso centralmente simmetrico}\}.$$

Dotiamo Y della seguente norma

$$\|r\|_Y = \sup |r| + \sup_{t_1 \neq t_2} \left| \frac{r(t_1) - r(t_2)}{t_1 - t_2} \right|$$

tale norma induce una topologia su Y .

Fissiamo m, M con $0 < m < M$, sia

$$Y_{m,M} = \{r \in Y \mid m \leq r \leq M\}.$$

Come vedremo nel successivo teorema 4.11, questa norma è finita $\forall r \in Y$. È conveniente a questo punto introdurre la funzione radiale di un insieme come funzione radiale di un insieme come funzione delle variabili cartesiane di \mathbb{R}^2 , anziché della variabile angolare. Definiamo

$$R_{\mathcal{K}}(x) = \max\{\lambda > 0 \mid \lambda x \in \mathcal{K}\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

funzione radiale di \mathcal{K} corpo convesso, rispetto alle variabili cartesiane di \mathbb{R}^2 .

Osservazione 4.8. Si può osservare che $R_{\mathcal{K}}$ è positivamente omogenea di ordine -1

Dimostrazione. Sia $\alpha \in \mathbb{R}^+$ allora si ha che $R_{\mathcal{K}}(\alpha x) = \max\{\lambda > 0 | \lambda \alpha x \in \mathcal{K}\}$
 Ponendo:

$$\lambda \alpha = \tau$$

abbiamo

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{K}}(\alpha x) &= \max \left\{ \frac{\tau}{\alpha} \mid \tau x \in \mathcal{K} \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha} \max\{\tau > 0 \mid \tau x \in \mathcal{K}\} = \frac{1}{\alpha} R(x). \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

□

Osservazione 4.9. Sia $r_{\mathcal{K}} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}_+$ funzione radiale dell'angolo di un corpo convesso \mathcal{K} , come descritta nelle sezioni precedenti. Dire che $0 < m \leq r_{\mathcal{K}}(t) \leq M \forall t$ equivale a dire che $mB \subseteq K \subseteq MB$ dove con B abbiamo indicato la palla unitaria centrata nell'origine.

Osserviamo che esiste un legame tra le funzioni $r_{\mathcal{K}}$ e $R_{\mathcal{K}}$

$$R_{\mathcal{K}}(\cos(t), \sin(t)) = r_{\mathcal{K}}(t), \quad \forall t \in [0, \pi] \quad (4.3.2)$$

In particolare, se $m \leq r_{\mathcal{K}} \leq M$, allora

$$m \leq R_{\mathcal{K}}(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbb{S}^1.$$

Quindi per $x \in \mathbb{R}^2$ generico $m \leq R_{\mathcal{K}}\left(\frac{x}{|x|}\right) \leq M$, ovvero:

$$\frac{m}{|x|} \leq R_{\mathcal{K}}(x) \leq \frac{M}{|x|}.$$

Sia $K \subset \mathbb{R}^n$ si definisce l'*insieme polare* come l'insieme

$$\{x^* \in (\mathbb{R}^n)^* \text{ t.c. } x^*(y) \leq 1 \quad \forall y \in K\}$$

dello spazio duale $(\mathbb{R}^n)^*$ di \mathbb{R}^n (Vedi [61] cap. 1.6).

Sempre secondo [61] \mathcal{K}° è anch'esso un corpo convesso poiché l'origine è un punto interno a \mathcal{K} e la funzione $H_{\mathcal{K}^\circ} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$H_{\mathcal{K}^\circ}(x) = \frac{1}{R_{\mathcal{K}}(x)}$$

è la funzione supporto del polare di \mathcal{K} . Osserviamo che Le funzioni supporto di un corpo convesso sono convesse.

$$H_{\mathcal{K}^\circ}(x)$$

e una funzione convessa su \mathbb{R}^2 è 1-omogenea. Un fatto noto sulle funzioni convesse, è che sono Lipschitziane sui sottoinsiemi compatti nel proprio dominio [61]. Riportiamo a tal riguardo il seguente teorema,

Teorema 4.10. *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convessa. Sia B una palla chiusa centrata nell'origine. Allora esiste $L > 0$ tale che f è Lipschitziana in B con costante di Lipschitz L e tale L dipende dal massimo di f su $2B$.*

Quindi $\frac{1}{R_{\mathcal{K}}}$ è Lipschitziana su \mathbb{S}^1 ; ovvero $\exists L > 0$ (che dipende solo dalle costanti m e M fissate in precedenza) tale che

$$\left| \frac{1}{R_{\mathcal{K}}(x)} - \frac{1}{R_{\mathcal{K}}(y)} \right| < L |x - y|$$

ovvero

$$\begin{aligned} \left| \frac{R_{\mathcal{K}}(y) - R_{\mathcal{K}}(x)}{R_{\mathcal{K}}(x)R_{\mathcal{K}}(y)} \right| &< L |x - y| \\ |R_{\mathcal{K}}(y) - R_{\mathcal{K}}(x)| &\leq L |x - y| R_{\mathcal{K}}(x)R_{\mathcal{K}}(y) \\ &\leq LM^2 |x - y|. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Quindi se \mathcal{K} è un corpo convesso in \mathbb{R}^2 e $R_{\mathcal{K}}$ è la sua funzione radiale

$$|R_{\mathcal{K}}(x_1, y_1) - R_{\mathcal{K}}(x_2, y_2)| \leq L \cdot R_{\mathcal{K}}(x_1, y_1)R_{\mathcal{K}}(x_2, y_2) |(x_1, y_1) - (x_2, y_2)|.$$

Fissiamo ora $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$. Scegliamo

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) &= (\cos(t_1), \sin(t_1)) \in \mathbb{S}^1 \\ (x_2, y_2) &= (\cos(t_2), \sin(t_2)) \in \mathbb{S}^1. \end{aligned}$$

Sfruttando il legame tra le due definizioni di funzione radiale dato tra la (4.3.2) e la (4.3.3) si ha:

$$|r_{\mathcal{K}}(t_1) - r_{\mathcal{K}}(t_2)| \leq L \cdot r_{\mathcal{K}}(t_1)r_{\mathcal{K}}(t_2) |t_1 - t_2|.$$

Per ipotesi

$$K \subseteq B_M \text{ allora } r_{\mathcal{K}} \leq M \quad \forall t,$$

da cui

$$|r_{\mathcal{K}}(t_1) - r_{\mathcal{K}}(t_2)| \leq LM^2 |t_1 - t_2|.$$

Quindi abbiamo provato il seguente:

Teorema 4.11. *Siano $m, M > 0$ e sia \mathcal{K} un corpo convesso di \mathbb{R}^2 t.c.*

$$B_m \leq \mathcal{K} \leq B_M;$$

allora esiste $L > 0$, dipendente da m e M t.c.

$$|r_{\mathcal{K}}(t_1) - r_{\mathcal{K}}(t_2)| \leq L |t_1 - t_2| \quad \forall t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$$

(v.fig. 5.16)

4.3.2 Teorema di esistenza per insiemi convessi

Enunciamo e dimostriamo a questo punto il teorema di esistenza per gli insiemi convessi.

Teorema 4.12. *Siano $m, M > 0$ e $\alpha \in (0, 1)$, esiste un insieme convesso K con funzione radiale appartenente a $Y_{m,M}$, centralmente simmetrico tale che*

$$A(K) = \alpha,$$

$$P_\gamma(K) = \inf\{P_\gamma(L) : L \text{ convesso con funzione radiale in } Y_{m,M}\}.$$

Dimostrazione. Sia K_j una successione minimizzante, tale successione ha le seguenti proprietà:

- $A(K_j) = \alpha$;
- $r_{K_j} \in Y_{m,M} \forall j$;
- $P_\gamma(K_j) \rightarrow \inf\{P(L) : r_L \in Y_{m,M}, A(L) = \alpha\}$.

Dal teorema 4.11 sappiamo che la successione r_{j_i} è equilipschitziana, allora esiste una sotto-successione estratta k_{j_i} uniformemente convergente per il Teorema di Ascoli-Arzelà; sia \bar{r} il limite.

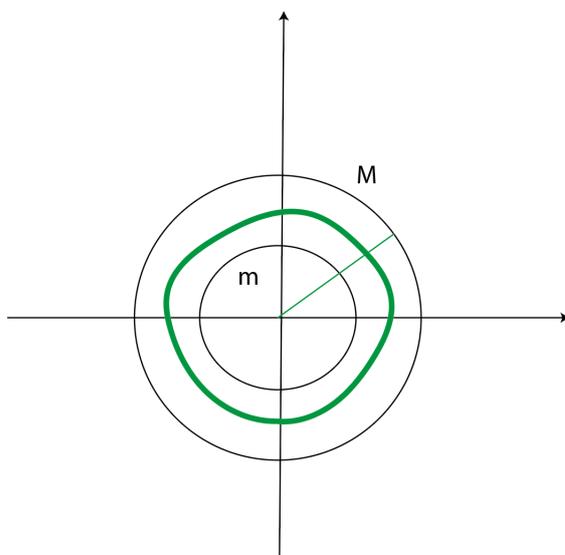


Figura 4.1: Funzione radiale $r(t)$ racchiusa tra due corone circolari m e M

Dall'osservazione 4.9 sappiamo che K_{j_l} è equilimitata, allora utilizzando il Teorema di selezione di Blaschke (paragrafo 1.5), esiste un'ulteriore sottosuccessione che per semplicità chiamiamo ancora $K_{j_l} \rightarrow \overline{K}$. Da ciò segue che \bar{r} è la funzione radiale di \overline{K} con $\overline{K} \in Y_{m,M}$.

Il funzionale A è continuo rispetto alla convergenza uniforme delle funzioni radiali; quindi $\lim A(R_{K_j}) = A(\overline{K})$.

La successione r'_{k_j} è equilimitata in $L^p([0, 2\pi])$ per un qualsiasi fissato $p > 1$; infatti

$$\left(\int_0^{2\pi} |r'_{k_j}|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq L \cdot (2\pi)^{\frac{1}{p}}$$

Per il Teorema di *Banach-Alaoglu* a meno di estrarre un'ulteriore sottosuccessione $r'_{k_j} \rightarrow \rho$ debolmente dove ρ è la derivata debole di \bar{r} . La parte conclusiva della dimostrazione è analoga a quella del teorema 4.7.

□

Applicazioni del problema isoperimetrico: *Il form finding*

*“I don’t want to undress architecture. I want to
enrich it and add layers to it. Basically like in a
Gothic cathedral, where the ornament and the
structure form an alliance”*

CECIL BALMOND

Un caso particolare di ottimizzazione della forma è il form finding, una strategia in cui si cerca la forma più efficiente per un determinato scopo, come ad esempio la massimizzazione della resistenza strutturale, la minimizzazione del materiale utilizzato, o l’ottimizzazione delle proprietà aerodinamiche. Il form finding è particolarmente rilevante in campi come l’ingegneria civile, l’architettura, e il design industriale. Nel problema isoperimetrico, sia in quello classico euclideo che in quello gaussiano cerchiamo una forma che minimizza il perimetro e mantiene costante l’area nel primo e l’area gaussiana nel secondo.

5.1 Il form finding e il problema isoperimetrico oggi

Cercheremo di rispondere affermativamente alla domanda sul cercare la forma che meglio minimizza il perimetro nel caso gaussiano con area fissata, limitandoci al caso piano e in particolar modo ai quadrilateri; per fare ciò utilizzeremo alcuni software e plug in che saranno descritti meglio successivamente nel corso della trattazione; dato che tali software sono utilizzati per

la stragrande maggioranza da designer, faremo spesso riferimento a modelli architettonici. Soffermiamoci per alcuni istanti a capire come si comportano i computers riguardo al form finding. Al giorno d'oggi i modelli sia matematici che architettonici non sono più realizzati a mano ma con alcuni risolutori fisici, che appartengono alla categoria dei software che analizzano il comportamento fisico di uno o più oggetti. Infatti, i componenti dei modelli, come corda, membrane e carichi, sono definiti nel software insieme alle condizioni al contorno. Il risolutore fisico analizza il modello e definisce la configurazione di equilibrio con o senza passaggio intermedio. La forma definita viene quindi analizzata con la tecnica degli elementi finiti (FEM) e importata nel software CAD. Questo processo consente quindi l'interoperabilità tra il software e una facile gestione del modello e maggiore produttività. In effetti, i parametri del modello sono più facili da modificare, la forza delle molle ad esempio viene modificata da un cursore numerico quando in realtà la molla andrebbe cambiata. Ma la facilità di gestione del modello non è il vantaggio più grande; l'ultima evoluzione è l'uso di algoritmi evolutivi associati alla tecnica del form-finding per ottenere la forma migliore. Questi algoritmi sfruttano la teoria dell'evoluzione per definire alcuni parametri che gestiscono un obiettivo (questo argomento verrà ripreso successivamente) quindi servono per gestire i parametri del modello per ottenere una soluzione migliore. Questo metodo consente l'analisi di un numero davvero elevato di forme diverse in poco tempo. Un esempio è il progetto del Morpheus Hotel di Zaha Hadid a Macao

Dal 1965 sono stati sviluppati alcuni algoritmi informatici per la ricerca della forma con diversi metodi di definizione della forma.

- Il Metodo della Densità di Forza di H.J. SCHEK, è un metodo matriciale per definire la forma di equilibrio di una struttura reticolare.
- Il Metodo del Rilassamento Dinamico di A. Day, ricerca lo stato stazionario di un sistema, composto da massa concentrata collegata a una molla, soggetto alla forza di gravità con un piccolo spostamento della massa.
- The Multi-Body Rope Approach di A. Manuello Bertetto, ricerca lo stato stazionario di un sistema, composto da masse concentrate collegate da corde inestensibili caratterizzate da un certo coefficiente di allentamento, sotto la forza di gravità con un piccolo spostamento della massa.

Questi metodi sono solo la versione computerizzata dei modelli reali utilizzati da Gaudì Otto, infatti tutti simulano il comportamento di una rete con



Figura 5.1: Zaha Hadid, designer, architetto (1950-2016)



Figura 5.2: Morpheus Hotel l'edificio "da sogno"

alcuni carichi soggetta alla forza di gravità. I vantaggi di questo metodo informatico sono la maggiore modificabilità dei parametri del modello, la rapida realizzazione dei modelli e la possibilità di testare il modello con altri software come CAD e FEM.

5.2 Progettazione Parametrica

L'idea che sta alla base di software quali Rhino e Grasshopper che utilizzeremo per formalizzare il problema e poi per risolverlo sull'elaboratore è quella della progettazione parametrica. Quest'ultima è un processo di progettazione basato sulla relazione, come un algoritmo, tra alcuni dati, come i numeri. Queste relazioni sono stabilite tra alcuni parametri di progettazione, come quelli geometrici, e definite da alcune funzioni, come quelle matematiche. Questo permette di modificare il progetto, la sua forma, solo con la modifica di un parametro, mentre nella progettazione "classica", se cambia un parametro, il progetto dovrebbe essere rifatto da zero. In altre parole, nel design "classico" il modello è definito dal progettista, mentre nella progettazione parametrica il modello è definito via software, con la relazione e i dati forniti in input dal progettista. Pertanto, il designer ha sempre la "mente" dietro il progetto, ma i suoi lavori diventano più concettuali perché il computer genera il modello. Grazie alla potenza di questo metodo, la progettazione parametrica viene utilizzata in molti campi di questa, dalla manifattura all'architettura, perché permette di generare in breve tempo diversi possibili modelli. Diversi modelli significano una maggiore possibilità di trovare migliori strutture.

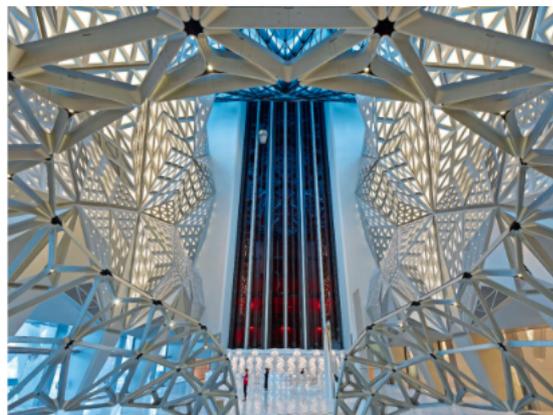


Figura 5.3: Morpheus Hotel: particolare dell'interno.

5.2.1 Il concetto alla base della progettazione parametrica

Ogni progetto dovrebbe rispettare alcuni parametri come ad esempio l'altezza massima, la superficie massima, o il rapporto tra le superfici delle finestre e le superfici delle stanze; Pertanto, il modello è definito da un algoritmo che genera una struttura. L'algoritmo si basa su una relazione matematica tra gli elementi del modello che collegano i parametri con i risultati; inoltre la relazione matematica permette di definire una forma complessa, come nei progetti di Zaha Hadid, difficilmente definibili con un CAD "classico". Pertanto, la progettazione parametrica collega esplicitamente architettura e matematica; consente l'utilizzo della funzione per utilizzare meglio il materiale. Un esempio è l'uso della catenaria, che viene definita con il coseno iperbolico, per archi di progetto senza momenti flettenti. Grazie alla possibilità di modificare i parametri si modifica velocemente il modello perché viene eseguita dal software. Ad esempio, possiamo immaginare le colonne di un edificio; se nel "classico" design dovessimo cambiarne la forma, dovremmo ridisegnare tutte le colonne; mentre, in parametrico progetto, cambio i parametri delle colonne e il modello viene modificato dal software. Pertanto, il ruolo del progettista si condensa nella definizione delle caratteristiche dell'oggetto costruzione, con alcune relazioni matematiche tra gli elementi e il rispetto di alcuni parametri, mentre il modello è definito dal software.

5.2.2 Software per la progettazione parametrica

La progettazione parametrica è realizzabile solo con i computer, per questo sono nati moltissimi software diversi come ad esempio Revit, ArchiCAD e Rhinoceros. I primi due sono specifici per l'architettura, hanno molte funzionalità specifiche per l'edificio, come la definizione dei muri e il facile inserimento di porte e finestre, ma sono "statici" perché è difficile definire elementi diversi da quelli predefiniti ed è davvero difficile realizzare una forma complessa. Rhinoceros invece non è specifico per l'architettura, ma lo è per il design "general", da meccanica alla decorazione d'interni, quindi è più "dinamico" perché è più facile modificare la forma di una struttura. Uno dei potenti plug-in di Rhino è Grasshopper, un software di codifica visiva per definizione della forma in Rhinoceros. Pertanto, è possibile codificare un algoritmo parametrico progettare in Grasshopper e visualizzare il modello in Rhinoceros. Grasshopper ha vari comandi, dai più generali come gli elementi geometrici di base ai comandi più specifici comandi più potenti sono quelli "scientifici", diciamo una funzione matematica, risolutori fisici e algoritmi evolutivi. Ciò consente un più grande modificabilità dei modelli,

infatti, Grasshopper è utilizzato da molti grandi studi di architettura, come quello di Zaha Hadid o Foster . In questa tesi, Grasshopper viene utilizzato per la progettazione, l'ottimizzazione della forma, quindi di seguito verranno spiegati alcuni aspetti di questo software.

5.2.3 Alcuni esempi

Sebbene la progettazione parametrica si sia sviluppata con l'informatica, i primi esempi in grado di farla ricondurre al disegno parametrico furono realizzati XX secolo da Antoni Gaudì nella progettazione della chiesa della Colonia Güell o per la Sagrada Familia. L'artista ha costruito a modello in scala con alcune catene e carichi in cui la lunghezza della catena e il carico erano i parametri. Dopo la seconda guerra mondiale, il concetto di progettazione parametrica venne sviluppato da un designer come Frei Otto, Félix Candela e Luigi Moretti; che riportano il concetto utilizzato da Gaudì per definire forme strutturali. Alcuni esempi sono l'Olympiastadion di Monaco di Baviera di Frei Otto e L'Oceanografic di Félix Candela.



Figura 5.4: L'Oceanografic di Felix Candela a Valencia .

In tali progetti, la progettazione parametrica coincide con la ricerca della forma, la definizione dell'oggetto forma che riduce al minimo l'utilizzo di materiale strutturale sfruttando la conformazione della struttura. Con lo sviluppo dell'informatica, la progettazione parametrica si disconnette dalla ricerca della forma per essere utilizzata per la definizione di forme nuove e complesse, che non necessariamente sono più efficienti. Essa diventa stru-

mento per la ricerca di nuove forme in architettura e la nascita di una nuova corrente architettonica chiamata Parametricismo. Alcuni esempi sono i design di Zaha Hadid e Frank Gehry come il Museo MAAXI di Roma e il Museo Guggenheim di Bilbao



Figura 5.5: Il Guggenheim Museum in Bilbao.

5.3 Ottimizzazione matematica

Come detto prima, la progettazione parametrica si basa sull'utilizzo della funzione matematica per definire un modello; tra le funzioni più utilizzate ci sono il massimo e il minimo usate per gestire alcune caratteristiche; possiamo così parlare di *ottimizzazione matematica* "L'ottimizzazione matematica è la selezione dell'elemento migliore, rispetto ad alcuni criteri, da alcuni insiemi di alternative disponibili". Questa, utilizza la massimizzazione o la minimizzazione di una funzione per determinare la soluzione migliore, quindi si dovrebbe determinare un modello matematico, composto da un insieme di parametri e una funzione matematica che è chiamata anche funzione obiettivo. Un modello di ottimizzazione è composto dalle seguenti fasi.

- Identificazione del problema: il problema dovrebbe essere analizzato, tutti i vincoli e le variabili individuate e l'obiettivo definito.
- Rappresentazione dell'obiettivo: la funzione di tale obiettivo dovrebbe essere definita in modo tale da trovare la soluzione migliore per il problema,

5.4 Grasshopper e Rhinoceros

Rhinoceros è un software CAD per la modellazione tridimensionale di superfici complesse, e ha molteplici campi di applicazione, dalla progettazione di macchine all'architettura; un esempio è il padiglione della Cina all'Expo 2015. Questo software è stato scelto per la facile gestione di forme complesse e i suoi plug-in: Grasshopper, Galapagos e Octopus. Grasshopper consente la definizione della forma e delle caratteristiche dell'oggetto tra diversi parametri, e una funzione matematica. Questo plug-in è un software di codifica visiva; quindi, il codice è composto da diversi blocchi che spiegano diverse azioni come generare curve, superfici, mesh o risolvere equazioni matematiche o operazioni booleane. Di solito, i comandi hanno alcuni parametri di input, come le coordinate di un punto, e alcuni output, come una mesh o una forma; si tratta della cosiddetta programmazione nodale.

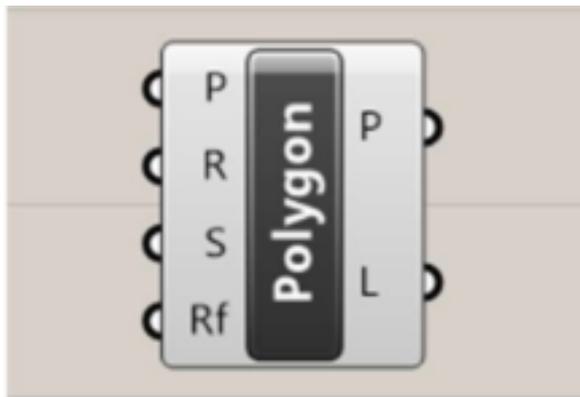


Figura 5.6: Un blocco della programmazione in Grasshopper .

Il flusso del codice è dato dai collegamenti tra i diversi blocchi. Le interfacce software ricordano un circuito elettrico, dove i collegamenti sono rappresentati con cavo e comando come componenti elettrici. Tuttavia, esiste la possibilità di utilizzare alcuni “blocchi di codifica” che consentono di scrivere un codice in Python o C. Questi blocchi sono utili per la gestione delle liste o per semplificare il codice. Grazie all'interoperabilità tra Grasshopper e Rhino la rappresentazione grafica del comando geometrico è visibile nelle finestre di Rhino; **per questa tesi Rhinoceros è stato utilizzato per rappresentare i risultati di Grasshopper e non per generare forme.** Grasshopper è un software vettoriale, quindi ogni elemento è definito dalle sue coordinate; questo permette una facile gestione degli elementi e la generazione di liste di dati. Ad esempio, i bordi di una superficie possono essere un elenco di linee. L'elenco dei dati è una parte fondamentale di questo soft-

ware e ne esistono di due diverse tipologie: Elenchi e Alberi. Le liste sono una semplice raccolta di dati, come un array. Gli alberi sono più complessi perché sono come una lista all'interno di una lista, ogni lista è chiamata ramo e tutti i rami creano un albero. Ad esempio possiamo considerare un cubo suddiviso per facce, tutte le superfici delle facce creano una lista; mentre i bordi delle facce creano un albero, dove abbiamo sei rami (uno per le facce) e ogni ramo ha quattro elementi, i bordi di una faccia.

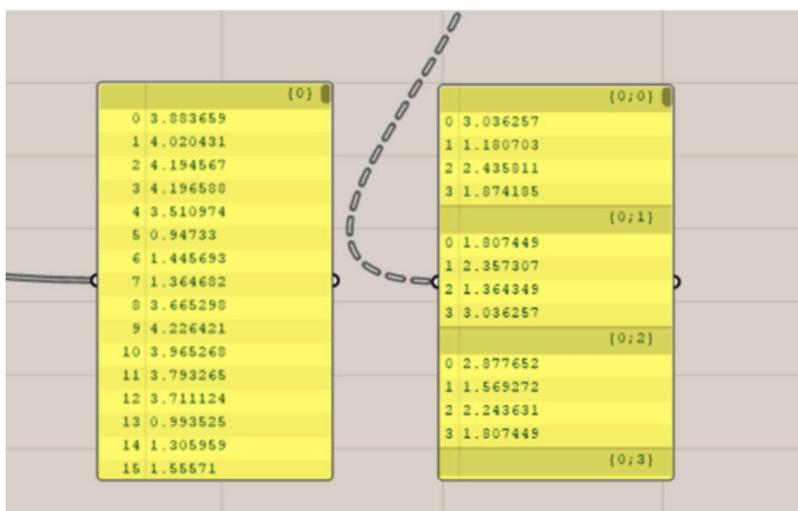


Figura 5.7: Un blocco della programmazione in Grasshopper .

La scelta di Grasshopper per la codifica dell'algoritmo di risoluzione del problema isoperimetrico nel piano gaussiano (per i quadrilateri) e del problema isoperimetrico nel caso classico è dovuta al fatto che questo software dispone di numerosi plug-in per la progettazione parametrica. Sebbene richieda alcune competenze di codifica, Grasshopper è più modificabile di software come Revit o ArchiCAD; ciò consente di definire la forma più complessa ed eseguire analisi più complesse. È facile comprendere la grande potenza di questo software. In questa tesi sono stati utilizzati i seguenti plug-in: Galapagos e Octopus, due algoritmi evolutivi per cercare la forma.

5.4.1 Progettazione parametrica con Grasshopper per la ricerca della forma nel problema isoperimetrico gaussiano

Ogni progetto in generale è definito da diversi elementi come punti, linee, superfici. Nella progettazione parametrica, le relazioni tra gli elementi, soli-

tamente di tipo matematico che, se alcuni parametri vengono cambiati, modificano il design, da qui l'aggettivo parametrico. Il nostro problema iniziale era quello di dotare il piano di lavoro di Rhino-Grasshopper della "densità" giusta, quella gaussiana. Tale problema è stato affrontato e risolto utilizzando Rhinoceros e Grasshopper, il primo come abbiamo detto un modellatore 3D, il secondo una plug-in parametrico-nodale. Abbiamo creato due algoritmi: il primo che assume in ingresso la forma modellizzata e restituisce il perimetro e l'area gaussiana. Il secondo, invece riesce, dato un valore di area fissato compreso tra 0 e 1, a trovare, compatibilmente con le tolleranze fisiche e numeriche imposte dal calcolo, la forma del quadrilatero di partenza utilizzando la plug-in genetica Galapagos.

Il primo algoritmo è stato creato per "misurare" il perimetro gaussiano e l'area gaussiana di una curva nel piano. La curva viene disegnata nello spazio di lavoro di Rhinoceros, i punti vengono "pesati" secondo una gaussiana. Per creare correttamente l'algoritmo (vedi fig.5.8) abbiamo eseguito i seguenti passaggi.

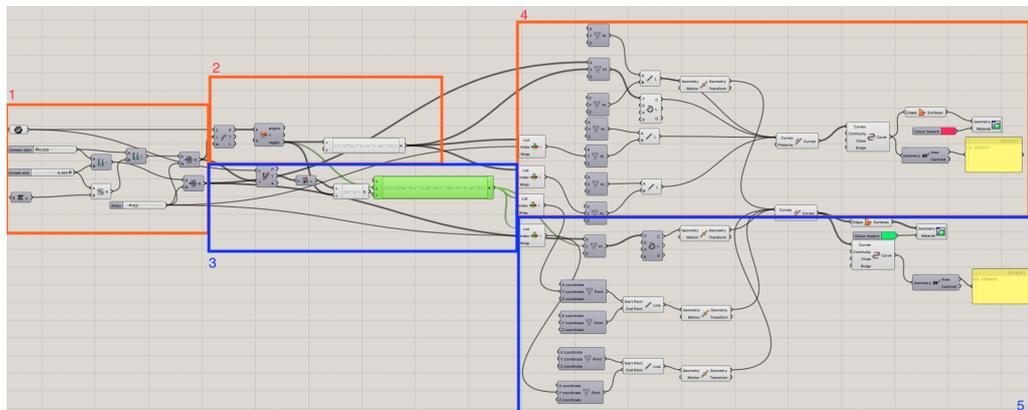


Figura 5.8: Veduta d'insieme dell'algoritmo Area e Perimetro Gaussiano.

- "Setting one curve" da parte di Grasshopper della curva modellizzata in Rhinoceros e definizione dell'intervallo e del range di studio della curva per parametrizzarla.

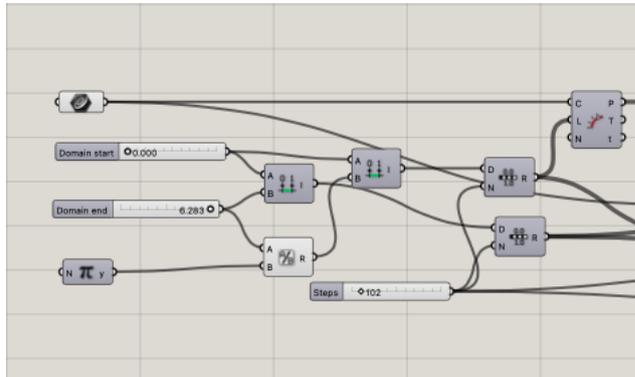


Figura 5.9: Generazione della geometria, parte 1.

- Per l'area gaussiana, valutazione della curva ed estrapolazione del raggio corrispondente a ogni punto della curva con la funzione **to polar (polar)** per calcolare la funzione radiale e la funzione

$$\frac{1}{2\pi} \left(1 - e^{-\frac{r(t)^2}{2}} \right). \quad (5.4.1)$$

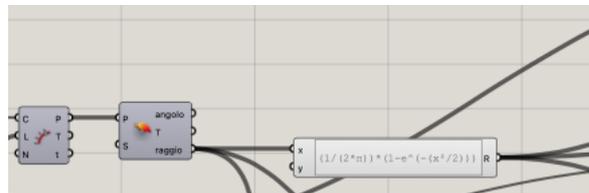


Figura 5.10: Valutazione della curva, funzione to polar e calcolo della funzione radiale, parte 2.

- Per il perimetro gaussiano, valutazione della curva, estrapolazione del raggio e calcolo del vettore tangente col comando **evaluate curve**.

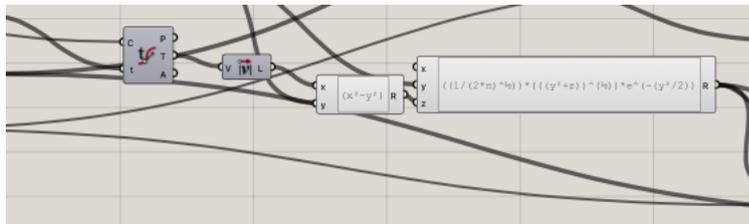


Figura 5.11: Parte 3.

CAPITOLO 5. APPLICAZIONI DEL PROBLEMA ISOPERIMETRICO: *IL FORM FINDING*

- Creazione del grafico dato dalla curva che unisce i valori trovati della funzione (5.4.1) e misura dell'area.

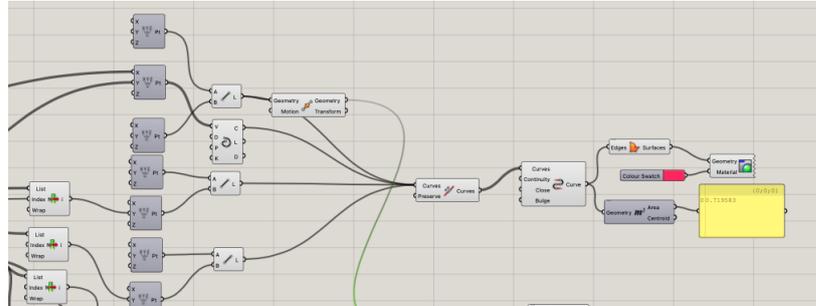


Figura 5.12: Parte 4.

- Creazione del grafico dato dalla curva che unisce i valori trovati della funzione

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{r^2(t) + r'^2(t)} e^{-\frac{r(t)^2}{2}}$$

e successivamente calcolo del perimetro con la funzione area presente in Grasshopper.

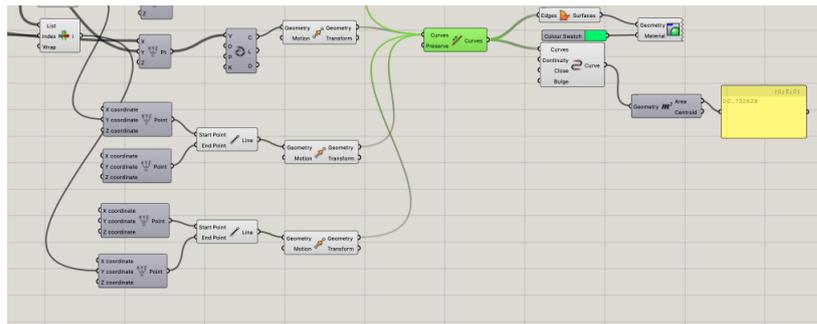


Figura 5.13: Parte 5.

Nel ViewPort di Rhinoceros la curva scelta, l'area e il perimetro gaussiano si presentavano come nella figura seguente.

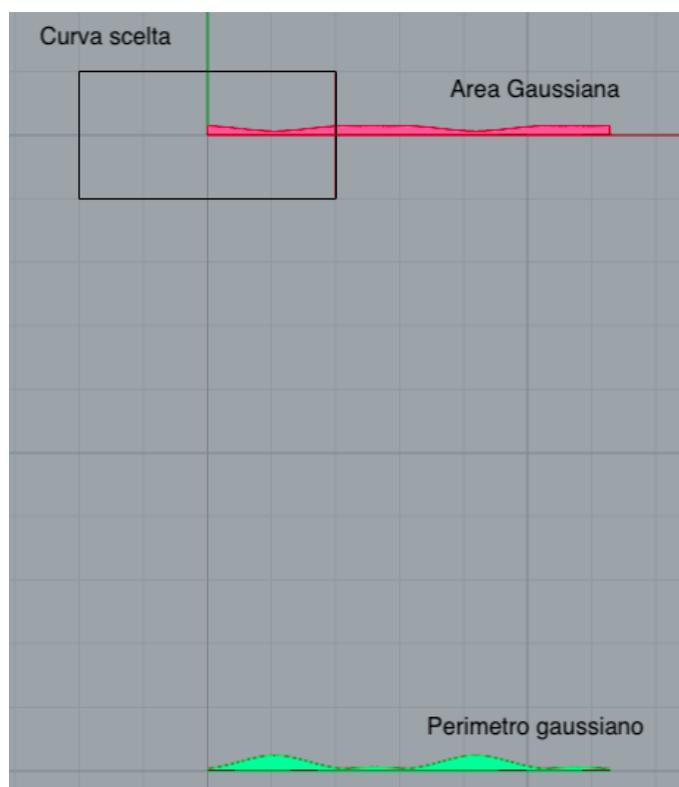


Figura 5.14: Curva scelta (rettangolo), area e perimetro gaussiano.

Per il secondo problema che consisteva nel “form finding” vero e proprio abbiamo definito un algoritmo in cui in partenza ci sono le coordinate dei punti; si considerano solo quadrilateri che sono rombi con i vertici sugli assi di un riferimento cartesiano e con centro di simmetria nell’origine. Abbiamo usato il blocco *MIRROR* e poi generato il quadrilatero utilizzando il blocco *INTERPOLA* con *grado* = 1.

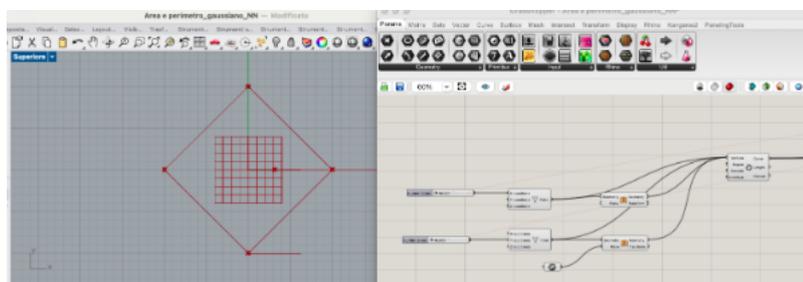


Figura 5.15: Parte dell’algoritmo “parametrico” e rappresentazione della forma.

Se le coordinate della forma vengono modificate, ovviamente la figura cambia.

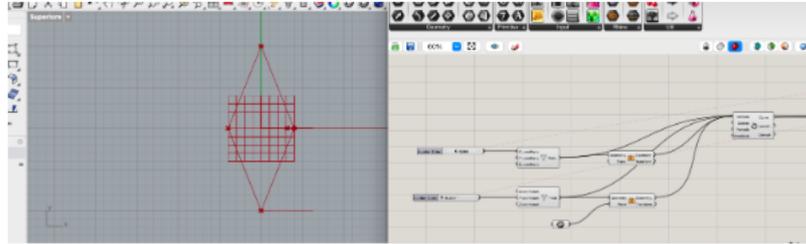


Figura 5.16: Nuovo parametro e forma.

Questo è un semplice esempio di progettazione parametrica, ma dimostra la potenza della progettazione. La progettazione parametrica, infatti, viene utilizzata con funzioni più complesse, come la funzione massima, e il parametro, come l'area di una superficie o la lunghezza di una curva, viene modificato per ottenere la soluzione migliore.

5.5 Algoritmo evolutivo e ricerca della forma

A questo punto sono noti tutti gli elementi per la ricerca di forme, il risolutore fisico e l'algoritmo di conteggio per elementi simili e ora dovrebbero essere generate e analizzate forme diverse. Per generare forme diverse per il problema isoperimetrico, è possibile modificare i parametri del generatore di forme per ottenere la forma minimizzante. Per modificare i parametri ci sono solo due possibilità: utilizzare un parametro casuale oppure utilizzare un algoritmo evolutivo. La prima opzione non è così efficiente, i parametri vengono generati senza alcuna logica o correlazione e molti di essi sono inutili, quindi c'è un grande spreco di tempo ed energie. La seconda opzione è più interessante, i parametri vengono generati da un algoritmo evolutivo che utilizza l'evoluzione per generare nuovi parametri. Dopo la prima serie di valori, generati in modo casuale, vengono generate le serie successive. Come detto precedentemente, gli algoritmi evolutivi utilizzano la teoria dell'evoluzione biologica per ottenere i migliori parametri conoscendo alcune condizioni di input. Pertanto i parametri possono essere chiamati anche geni, geni diversi generano un genoma (come una popolazione) e ogni iterazione dell'algoritmo genera una popolazione composta da genomi diversi. Ogni combinazione di geni (un genoma) ha una diversa fitness della soluzione, se i geni sono immaginati come le coordinate X e Y e la fitness come coordinata Z è possibile definire un "paesaggio di fitness" in cui i picchi sono la soluzione migliore (fig.5.17) [78].

Il panorama dipende dall'idoneità del modello dei genomi; per ogni genoma composto da due geni X e Y , è possibile definire la fitness del modello ovvero le coordinate Z . In questo modo è possibile definire un punto nello spazio tridimensionale e “disegnare” il paesaggio come un insieme di punti.

Questo paesaggio non viene valutato a priori, ma si definisce nell'iterazione dell'algoritmo. La prima generazione ha un valore casuale di geni e la generazione successiva cerca di ottenere il miglior adattamento (soluzione, cima del picco) seguendo l'evoluzione biologica. L'algoritmo è composto dai seguenti passaggi.

5.5.1 La Funzione Fitness

“Almeno nel calcolo evolutivo, il fitness è un concetto molto semplice. Il fitness è ciò che vogliamo che sia.” (David Rutten).

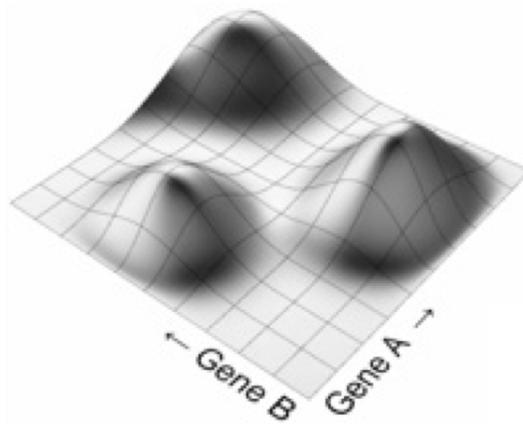


Figura 5.17: Popolazione sul panorama fitness.

E' possibile rappresentare anche un numero di geni n in uno spazio $n + 1$ dimensionale. Inizialmente il landscape viene popolato da una serie di geni secondo una modalità casuale (fig.5.18).

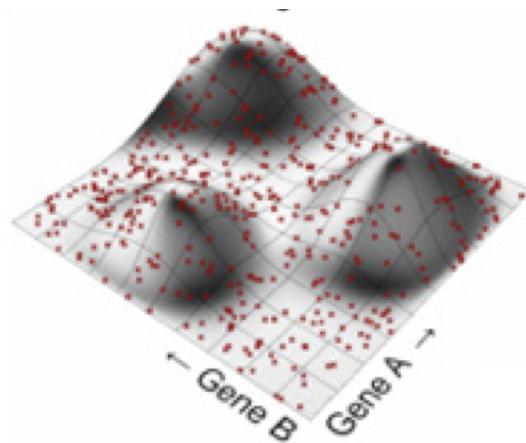


Figura 5.18: Il landscape viene popolato da una serie di geni secondo una modalità casuale

Il genoma in questo spazio è rappresentato dai valori dei geni, per esempio $A = 0.4, B = 0.2$ ai quali è associato determinato fitness (altezza). Dopo aver gerarchizzato i fitness vengono eliminati i più bassi, per operare su quelli rimanenti (fig. 5.19)

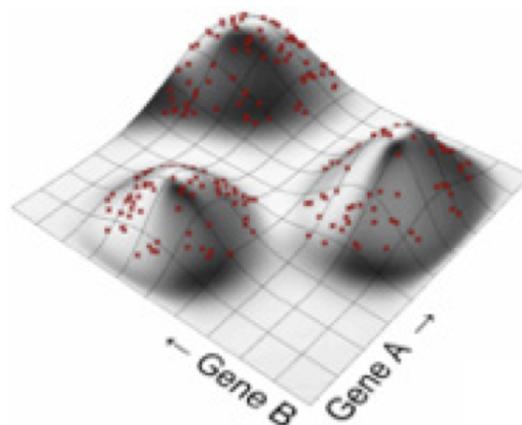


Figura 5.19: Dopo aver gerarchizzato i fitness vengono eliminati i più bassi, per operare su quelli rimanenti

Successivamente vengono fatti riprodurre i migliori genomi per creare la successiva generazione (fig. 5.20)

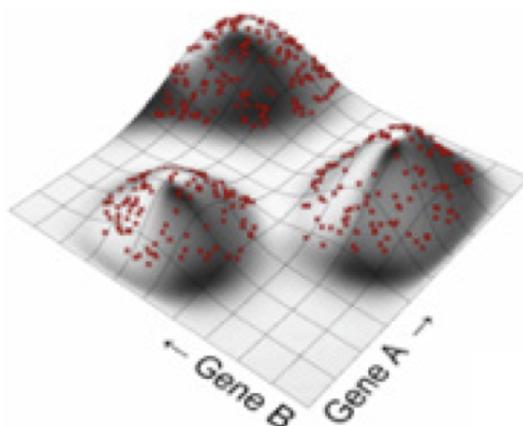


Figura 5.20: Vengono fatti riprodurre i migliori genomi per creare la successiva generazione

Il procedimento viene iterato provocando il popolamento dei picchi di fitness, fino al raggiungimento del picco più alto. Il fitness ha una definizione particolarmente flessibile, è il progettista a stabilire in cosa consista in quanto conosce il particolare problema da risolvere. Rimane da stabilire la discendenza del genoma. Le sue origini sono caratterizzate da un certo grado di casualità dato dal metodo di lavoro del risolutore, tuttavia è possibile tracciarne dei tratti distintivi [79]. In particolare si può notare come i discendenti genetici risalgano seguendo il percorso di massima pendenza (fig.5.23).

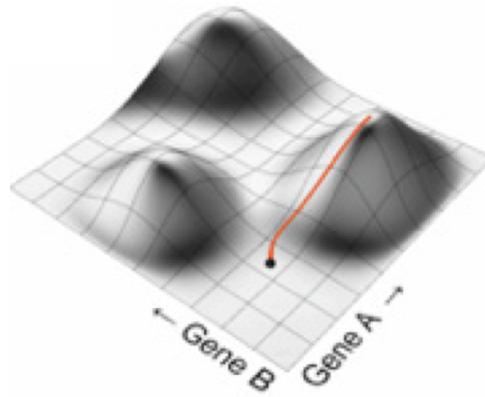


Figura 5.21: Popolazione sul panorama fitness.

Generalmente ciascun gene tende a massimizzare il proprio fitness in quanto il risolutore remunera i fitness più alti. La via più breve per raggiungere il più alto fitness possibile è di fatto il pendio con pendenza più elevata. In (fig.5.23)

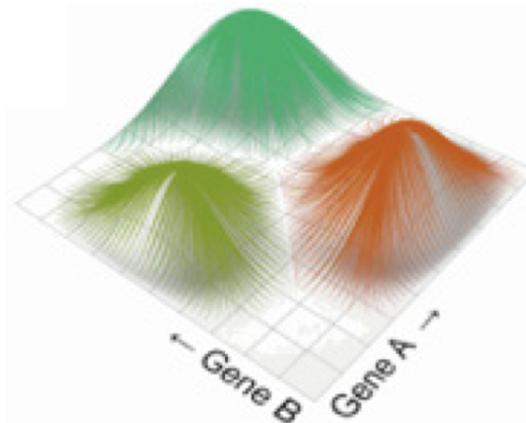


Figura 5.22:

è possibile osservare la rappresentazione di tutti i percorsi dei geni di maggior successo. Si evidenzia in questo caso il legame tra risolutore e il dominio del fitness; si dice che ogni picco rappresenta il bacino di attrazione attorno ad

esso. La qualità del picco, e quindi della soluzione, non è proporzionale all'area del bacino. La soluzione potrebbe risiedere nel bacino caratterizzato da più bassa qualità, questo dipende da quale bacino venga popolato per primo.

5.5.2 Meccanismo di selezione

Come afferma la teoria dell'evoluzione biologica, in una popolazione non tutti gli individui riescono ad accoppiarsi; per questo motivo nell'algoritmo dell'evoluzione dovrebbe essere considerato un meccanismo di selezione per determinati genomi che daranno vita ad un accoppiamento. In informatica la selezione è data da alcuni semplici meccanismi, i più utilizzati sono.

- Selezione isotropa, tutti gli individui hanno la stessa possibilità di procreare.
- Selezione esclusiva, solo una percentuale della popolazione con la migliore adattabilità riesce ad accoppiarsi.
- Selezione parziale, quando la possibilità di accoppiarsi è direttamente proporzionale alla forma fisica.

Pertanto, uno di questi meccanismi dovrebbe essere scelto per definire quale genoma si accoppierà

5.5.3 Algoritmo di accoppiamento

Una volta selezionati i genomi, la coppia verrà definita. Un modo per selezionare l'accoppiamento di un genoma è la distanza genomica, l'accoppiamento può essere scelto attraverso la sua distanza dal genoma. Per una migliore comprensione, possiamo immaginare una popolazione con solo due geni: è possibile generare una mappa del genoma, come un grafico cartesiano con i due geni in asse, dove la posizione del genoma è determinata dai suoi geni. In questo semplice esempio la distanza è quella geometrica calcolata con il teorema di Pitagora. Se scegliamo un compagno vicino ad un genoma selezionato, otteniamo una prole simile al genoma, e la diversità della popolazione diminuisce rapidamente, per cui è davvero difficile trovare una buona soluzione. D'altra parte, se scegliamo un compagno lontano dal genoma selezionato, tanto che il compagno appartiene ad una sottospecie diversa, otterremo una prole molto diversa dai genitori che necessitano di una diversa funzione di fitness, due geni lontani possono appartenere a due diversi bacini di picco di attrazione. Pertanto, il compagno per il genoma selezionato dovrebbe essere scelto né così vicino né così lontano da esso.

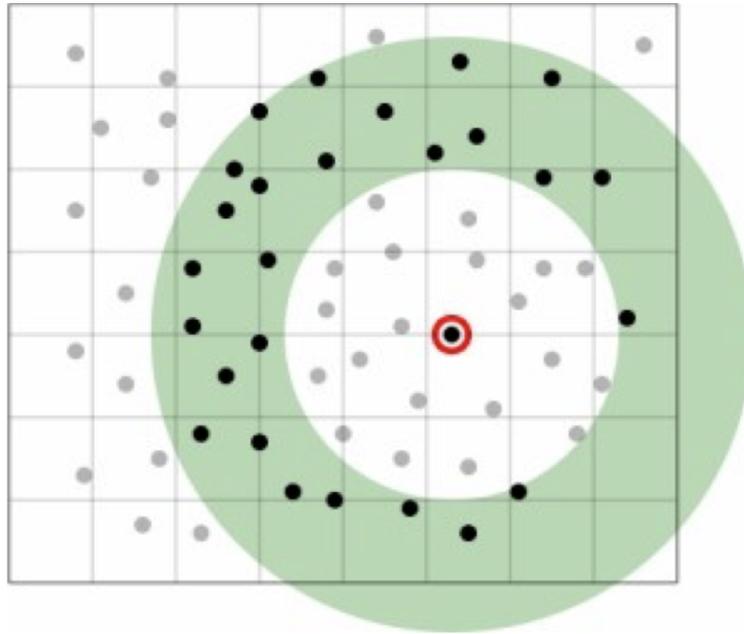


Figura 5.23: Mappa dei genomi

5.5.4 Algoritmo di coalescenza

Una volta create le coppie, si dovrebbe definire un algoritmo per generare la prole, o meglio un modo per generare il gene della prole. Nel mondo digitale ci sono due possibilità principali.

- Coalescenza crossover: se un individuo ha quattro geni, due arrivano dal genitore A e due dal genitore B .
- Coalescenza miscelata: i geni sono una media dei geni dei genitori, è possibile utilizzare una media ponderata se un genitore ha un adattamento migliore dell'altro.

5.5.5 Fattore di Mutazione

Il meccanismo descritto in precedenza ha l'obiettivo di ridurre la diversità di una popolazione, ma ciò può portare ad una popolazione poco resiliente. Nel nostro caso, bassa resilienza significa bassa diversità di soluzioni e rapida convergenza verso una soluzione che non può essere quella con alta fitness. Per avere una popolazione più resiliente si considera un fattore di mutazione. L'unico meccanismo che può introdurre la diversità è la mutazione. Diversi tipi di mutazione sono disponibili nella plug in Galapagos, sebbene la natura

dell'implementazione in Grasshopper al momento limiti la possibile mutazione alle sole mutazioni puntiformi. Prima di parlare di mutazioni, parliamo dei grafici del genoma. Un modo generalmente utilizzato per visualizzare punti multidimensionali su un supporto bidimensionale è disegnarli come una serie di linee che collegano valori diversi su una serie di barre verticali. Ogni barra rappresenta una singola dimensione. In questo modo possiamo visualizzare abbastanza facilmente non solo punti con un numero qualsiasi di dimensioni, ma anche punti con un numero diverso di dimensioni nello stesso grafico (fig.5.24).

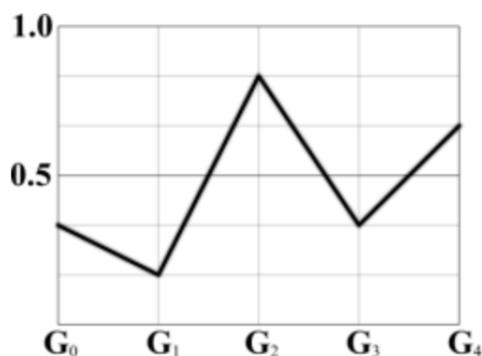


Figura 5.24: Grafico Mutazione 1

Se per esempio prendiamo un genoma composto da 5 geni. Questo genoma è quindi un punto nello spazio tridimensionale che delinea questa particolare specie. Quando G_0 viene disegnato a $\frac{1}{3}$, significa che il valore è un terzo tra i limiti minimo e massimo consentiti. Il vantaggio di questo grafico è che diventa abbastanza facile individuare le sottospecie in una popolazione, così come gli individui solitari. Quando applichiamo le mutazioni a un genoma, dovremmo vedere un cambiamento nel grafico, poiché ogni genoma unico ha un grafico unico (fig.5.25).

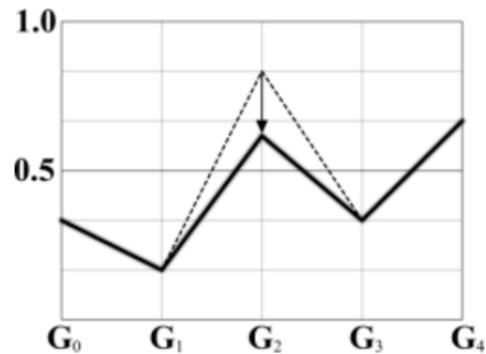


Figura 5.25: Grafico Mutazione puntiforme

La modifica di cui sopra mostra una mutazione puntiforme, in cui viene modificato il valore di un singolo gene. Questo è attualmente l'unico tipo di mutazione possibile nella plug-in Galapagos. Potremmo anche scambiare due valori genetici adiacenti, nel qual caso otteniamo una mutazione di inversione (fig. 5.26):

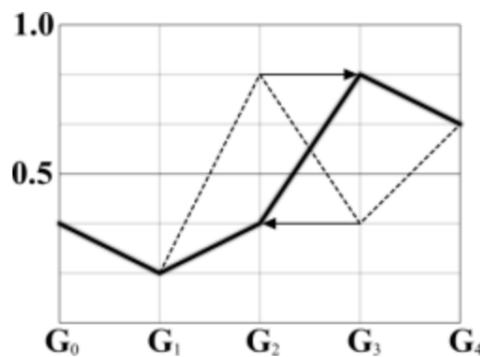


Figura 5.26: Grafico Mutazione di inversione

Le mutazioni di inversione sono utili solo quando i geni successivi hanno una relazione molto specifica. Tende a modificare drasticamente un genoma e quindi nella maggior parte dei casi anche a modificare drasticamente la forma fisica. Si tratta quasi sempre di un'operazione dannosa. Due esempi di mutazioni che non possono essere utilizzate su una specie che richiede un numero fisso di geni sono le mutazioni di addizione (fig.5.27) e di cancellazione (fig. 5.28).

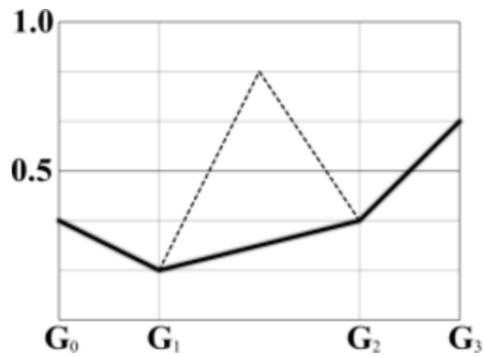


Figura 5.27: Grafico Mutazione di Addizione

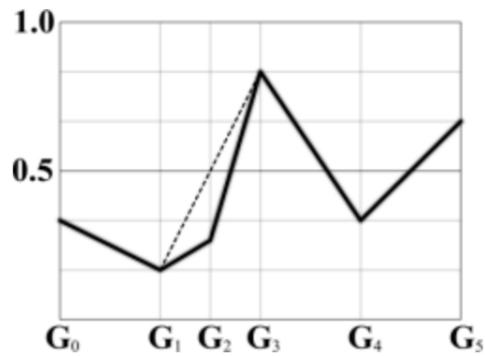


Figura 5.28: Grafico Mutazione di Cancellazione

Esistono diversi comportamenti del fattore mutante, come:

- modificare il valore di un gene di una determinata percentuale;
- invertire il valore di due geni;
- il valore di un gene può essere impostato con l'interpolazione di due geni adiacenti.

5.5.6 Galapagos come plug-in di Grassopper



Figura 5.29: Logo di Galapagos

In Grasshopper il principale risolutore evolutivo è Galapagos che si basa sui concetti prima esaminati. Il blocco ha due collegamenti, uno con i geni della funzione fitness e uno con l'obiettivo; questi non sono come input e output ma sono due collegamenti con alcune parti monitorate. L'obiettivo è uno solo, a differenza degli altri solutori evolutivi (cfr. con Octopus).

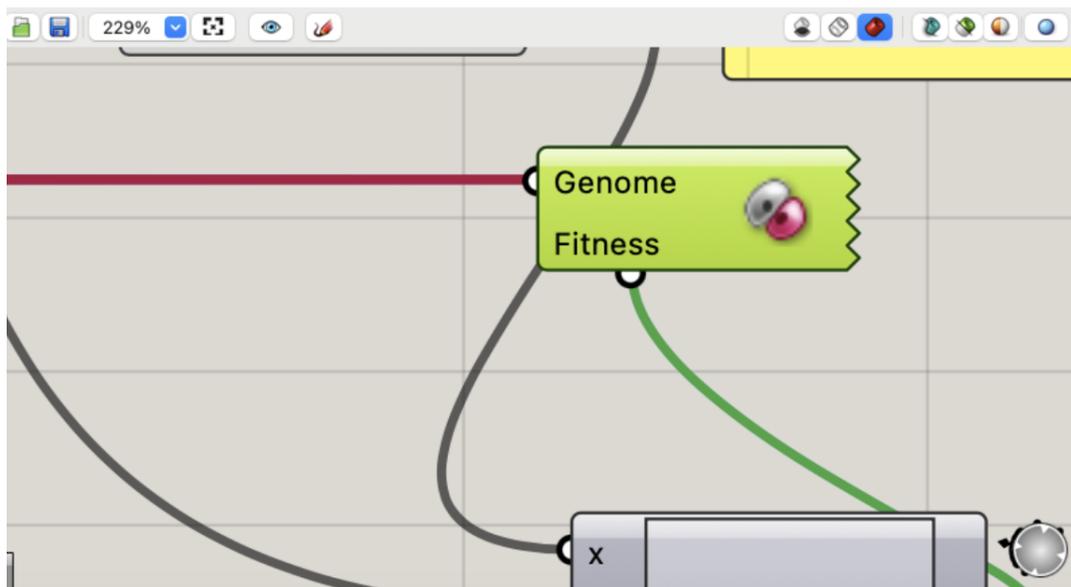


Figura 5.30: Blocco funzione presente in Galapagos che realizza l'ottimizzazione evolutiva

Facendo clic sul comando si apre una finestra di comando che ha tre forme diverse. La prima forma riguarda le impostazioni sulla popolazione e il meccanismo di selezione; dall'alto verso il basso abbiamo:

1. **Fitness**, la funzione può essere massimizzata o minimizzata.
2. **Threshold**, impostando una soglia è possibile definire una quantità entro la quale l'algoritmo se trova una soluzione si ferma.
3. **Max Duration** limite di esecuzione, abilitato con Runtime Limits, è la possibilità di impostare un tempo massimo di esecuzione.
4. **Max stagnante**, numero massimo di generazioni prima che il risolutore interrompa.
5. **Popolazione**, numero dei genomi di ciascuna generazione superiore alla prima.
6. **Boost Iniziale**, è il valore per il quale viene moltiplicata la Popolazione per ottenere la prima generazione.
7. **Maintain**, è la percentuale di genomi migliori che vengono copiati in ogni nuova generazione.
8. **Consanguineità**, è la percentuale di elementi di ogni nuova generazione che si ottiene dagli elementi mantenuti, gli altri elementi vengono generati casualmente.

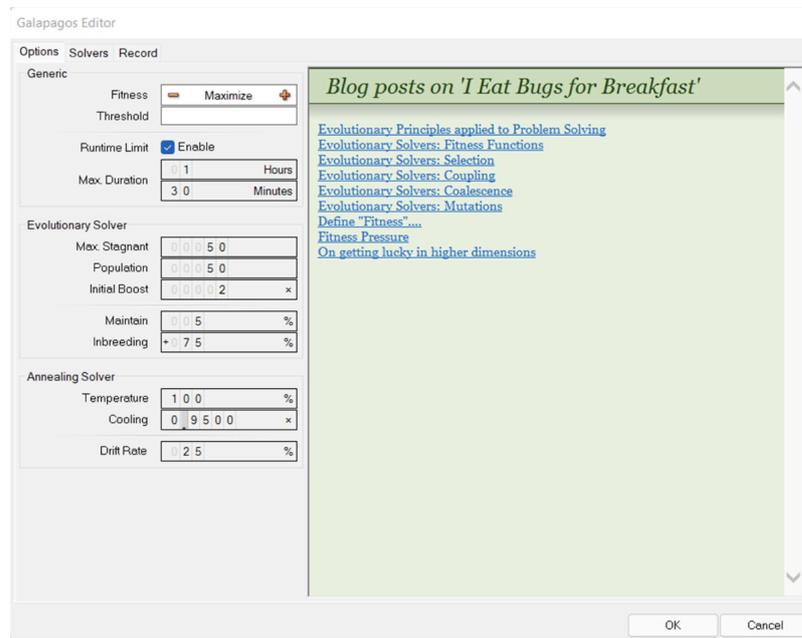


Figura 5.31: Finestra opzioni del comando di Galapagos

La seconda maschera è **il solver**, da lì è possibile eseguire il risolutore e ci sono quattro finestre con elementi diversi. I primi dall'alto mostrano l'andamento dell'obiettivo al variare della generazione, quindi è possibile scegliere la generazione migliore. La finestra in basso a sinistra mostra le mappe del genoma e cambia ad ogni generazione. La finestra al centro è un grafico con n assi paralleli, dove n è il numero di geni, e per ogni gene è riportato il valore sull'asse correttivo e tutti i geni di un genoma sono collegati da una polilinea; nell'immagine sotto i geni sono sei. Le finestre di destra contengono tutto il genoma di una generazione, ordinato in ordine decrescente, con il valore obiettivo; è anche possibile ripristinare ogni genoma con l'apposito pulsante. Tutti gli altri pulsanti servono per impostare le finestre.



Figura 5.32: Finestra solver di Galapagos

La terza scheda riguarda i dati registrati, cioè riportati per ogni generazione.

5.6 Metodo della Penalty Function

In questo paragrafo ci ricollegiamo al problema isoperimetrico classico, e a quello nello spazio gaussiano, argomenti della tesi, soffermandoci a trattare le *penalty function*.

L'idea di usare le cosiddette funzioni di penalità esatte per la risoluzione di problemi di ottimizzazione vincolata è stata suggerita praticamente in contemporanea da Eremin [73] e Zangwill [85] negli anni '60. Da allora, tali funzioni sono state studiate in maniera estensiva e applicate a vari problemi di ottimizzazione non vincolata da molti ricercatori (vedi, e.g. [70], [71], [74], [75]). L'idea principale che sta dietro l'approccio con le *penalty functions* consiste nel sostituire il problema d'ottimizzazione vincolato originario,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) \quad \text{sogetto a} \quad g_i(x) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

con il problema non-vincolato di minimizzare la funzione di penalità non smooth:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \Phi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^m g_i(x).$$

Sotto alcune ipotesi naturali questo problema con penalty è equivalente a quello originale, nel senso che questi problemi hanno lo stesso valore “ottimo” e le stesse soluzioni ottime, locali e/o globali, a condizione che il parametro penalizzante λ sia sufficientemente grande (ma finito).

Osservazione 5.1. L’approccio della penalità esatta consente di ridurre i problemi di ottimizzazione vincolata a problemi equivalenti non vincolati e di applicare metodi numerici di ottimizzazione non vincolata a problemi vincolati.

In questa tesi, nel problema **isoperimetrico classico (piano euclideo)** abbiamo utilizzato tale metodo mentre nel **problema dei quadrilateri (piano gaussiano)** abbiamo usato una sua variazione, il cosiddetto “Quadratic Penalty Method”.

Il compito che ha il problema di ottimizzazione vincolata, è quello di inserire un termine aggiuntivo per ogni vincolo, che è positivo quando il punto corrente x viola quel vincolo e zero altrimenti. La maggior parte degli approcci definisce una sequenza di tali funzioni di penalità, in cui i termini di penalità per le violazioni dei vincoli vengono moltiplicati per un coefficiente positivo. Aumentando questo coefficiente, amplifichiamo le penalizzazioni (“violazioni”) dei vincoli più severamente, forzando così il minimo della funzione di penalità più vicino alla regione ammissibile per il problema vincolato. La funzione di penalità più semplice di questo tipo è la funzione di penalità quadratica, in cui i termini di penalità sono i quadrati delle violazioni dei vincoli.

L’idea principale che sta alla base del “Quadratic Penalty Method” è quella di sostituire anche in questo caso un problema di ottimizzazione vincolata

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} f(x) \quad \text{soggetto a} \quad g_i(x) = 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

con un problema non-vincolato di minimo,

$$\min_{x \in \mathbb{R}^d} \Phi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^m g_i^2(x).$$

Per quanto riguarda il problema isoperimetrico classico abbiamo implementato la funzione Penalty inserendo come vincolo la differenza tra le due aree, quella calcolata e quella scelta, e poi abbiamo calcolato il valore assoluto di tale quantità per sommarlo infine al valore del perimetro calcolato.

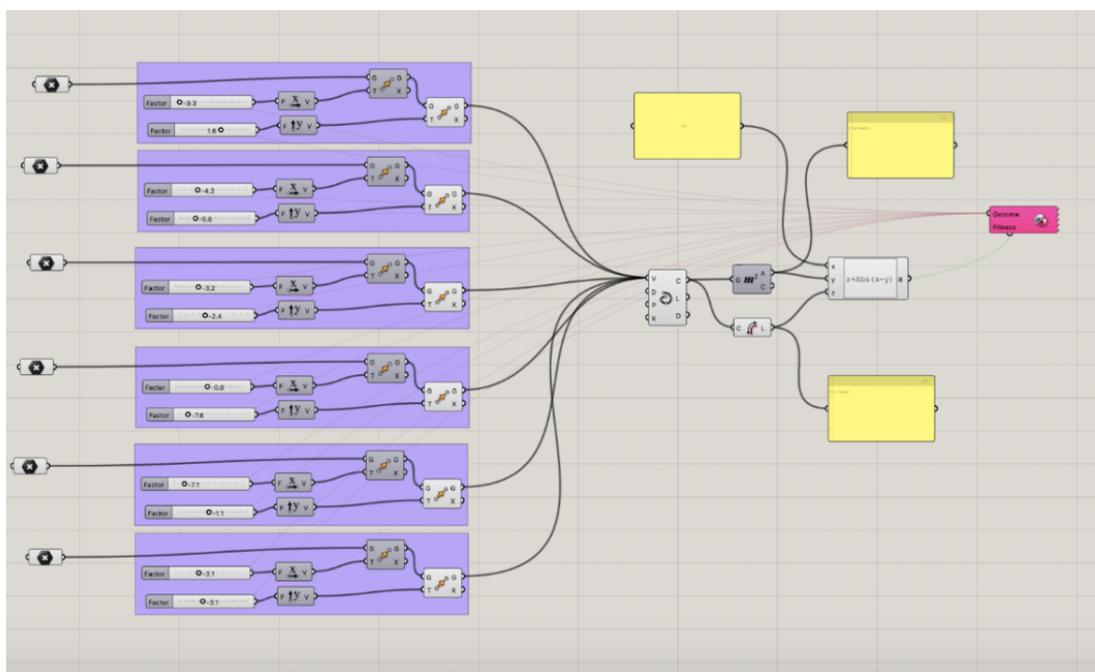


Figura 5.33: Algoritmo risolutivo (isoperimetrico)

Nel caso euclideo se indichiamo il perimetro con z , con y l'area calcolata e con x quella scelta, possiamo scrivere come penalty function $z + |x - y|$.

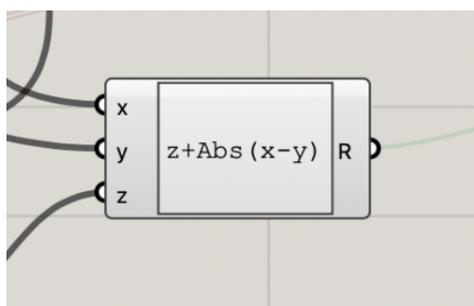


Figura 5.34: Particolare della implementazione della Penalty function.

Osservazione 5.2. Abbiamo scelto il fattore di penalità λ pari ad 1 con tale valore abbiamo visto che si ha una convergenza molto veloce alla soluzione e il vincolo si mantiene pressoché vicino al valore dell'area scelta.

Successivamente nel caso del problema dei quadrilateri (nel piano gaussiano) abbiamo implementato la funzione penalty inserendo sempre come vincolo

la differenza tra le due aree ma stavolta elevata al quadrato (per cercare di avere maggiore convergenza). Ci siamo chiesti come risolvere il problema non vincolato in presenza anche in questo caso del fattore λ .

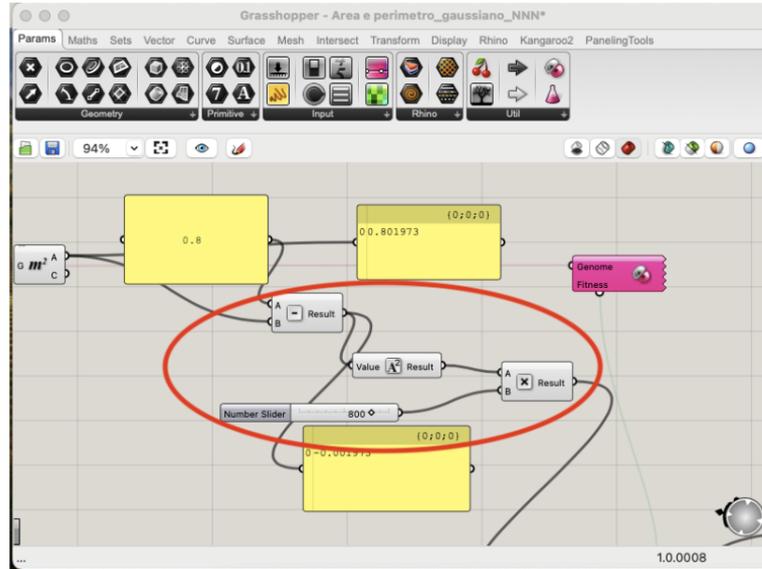


Figura 5.35: Particolare dell'implementazione della Penalty Function risolutiva.

Sia $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$, una successione tendente all'infinito tale che per ogni $k, \lambda_k > 0$, e $\lambda_{k+1} > \lambda_k$.

Si può definire la funzione:

$$\Phi(x, \lambda) = f(x) + \lambda_k \sum_{i=1}^m g_i^2$$

per ogni k bisogna risolvere il problema:

$$\min \Phi(x, \lambda_k)$$

ottenendo una soluzione λ_k .

Teorema 5.3. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e siano f, g_1, \dots, g_n definite in Ω a valori in \mathbb{R} . Supponiamo che f e g_i siano continue. Sia $\bar{x} \in \Omega$ il minimo globale di

$$\min f(x) \quad \text{sogetto a } g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (5.6.1)$$

Supponiamo che $x_k, k \in \mathbb{N}$ sia il minimo globale esatto di

$$\Phi(x, \lambda_k) = f(x) + \lambda_k \sum_{i=1}^m g_i(x)^2$$

per una successione λ_k positiva e monotona crescente, tendente a $+\infty$. Allora ogni punto limite x^* della successione x_k è una soluzione globale del problema di ottimizzazione vincolato (5.6.1).

Dimostrazione. Facciamo vedere che ogni punto limite x^* della successione x_k è una soluzione globale del problema di ottimizzazione vincolato:

$$\min f(x) \quad \text{soggetto a } g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m.$$

Supponiamo che ogni x_k sia il minimo globale esatto di

$$\Phi(x, \lambda_k) = f(x) + \lambda_k \sum_{i=1}^m g_i(x)^2$$

per una successione λ_k positiva e monotona crescente. Vogliamo dimostrare che ogni punto limite x^* della successione x_k è una soluzione globale del problema vincolato.

Inizialmente si dimostra che x^* soddisfa i vincoli $g_i(x) = 0$.

Dato che x_k minimizza $\Phi(x, \lambda_k)$, abbiamo:

$$\Phi(x_k, \lambda_k) \leq \Phi(x, \lambda_k) \quad \forall x.$$

In particolare, se consideriamo $x = \bar{x}$, che è il minimo globale del problema vincolato. Quindi si ha

$$f(x_k) + \lambda_k \sum_{i=1}^m g_i(x_k)^2 \leq f(\bar{x}) + \lambda_k \sum_{i=1}^m g_i(\bar{x})^2.$$

Poiché \bar{x} soddisfa i vincoli $g_i(\bar{x}) = 0$ il termine $\sum_{i=1}^m g_i(\bar{x})^2 = 0$, quindi

$$f(x_k) + \lambda_k \sum_{i=1}^m g_i(x_k)^2 \leq f(\bar{x}). \quad (5.6.2)$$

Dato che λ_k è positivo e monotono crescente e tende a $+\infty$, questo implica che per ottenere un valore $f(x_k)$ che non superi $f(\bar{x})$ il termine $\sum_{i=1}^m g_i(x_k)^2$ deve tendere a zero man mano che $\lambda_k \rightarrow \infty$. Altrimenti il termine $\lambda_k \sum_{i=1}^m g_i(x_k)^2$ divergerebbe, contraddicendo la disequazione (5.6.2). Pertanto nel limite, abbiamo:

$$\sum_{i=1}^m g_i(x_k)^2 \rightarrow 0$$

quando $k \rightarrow \infty$. ($g_i(x_k) \rightarrow g_i(x^*)$)

Quindi, per la continuità di g_i , $\forall x^*$ punto limite della successione x_k , $g_i(x^*) = 0$ per ogni $i = 1, \dots, m$.

Dimostriamo che x^* minimizza $f(x)$ soggetto ai vincoli.

Poiché x_k è il minimo globale di $\Phi(x_k, \lambda_k)$, abbiamo:

$$f(x_k) + \lambda_k \sum_{i=1}^m g_i(x_k)^2 \leq f(x) + \lambda_k \sum_{i=1}^m g_i(x)^2 \quad \forall x, \quad \forall k$$

Consideriamo un punto x che soddisfa i vincoli $g_i(x) = 0$. Allora la disequazione precedente implica:

$$f(x_k) \leq f(x).$$

Prendendo il limite per $k \rightarrow \infty$, dato che $x_k \rightarrow x^*$, e che f è continua otteniamo:

$$f(x^*) \leq f(x)$$

Quindi x^* è un minimo globale di $f(x)$ soggetto ai vincoli $g_i(x) = 0$

Questo conclude la dimostrazione. □

5.6.1 Inizializzare Galapagos

Come gli altri componenti, aggiungiamo il nodo Galapagos al canvas (finestra dei blocchi in Grasshopper)

- Aggiungiamo Galapagos al canvas **Params** → *Util* → **Galapagos**.

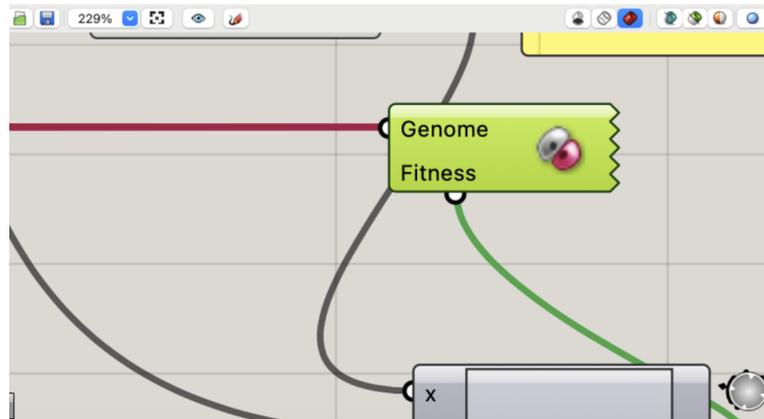


Figura 5.36: Aggiungere il componente Galapagos .

Come precedentemente detto la funzione Galapagos ha due input: il Genoma e il Fitness. Un valore fitness può essere descritto come il

valore che si desidera ottimizzare, in questo caso la funzione penalty (perimetro). Il Genoma è un insieme di parametri che influenzano il Fitness. Nel nostro caso le coordinate x e y che per i quadrilateri poiché siamo nel piano sono 8 però dato che gli insiemi devono essere simmetrici possiamo ricondurci a due sole variabili. Utilizziamo Galapagos per trovare un'approssimazione alla soluzione migliore in modo abbastanza efficiente.

- Collegiamo i cavi di Galapagos

Il collegamento dei cavi alle Galapagos funziona in modo un po' diverso rispetto ai componenti normali. Si deve collegare il filo dall'ingresso Galapagos ai parametri, collegare il genoma al pool genetico e il fitness all'uscita della penalty (vedi figg. 5.33, 5.38).

- Facciamo doppio click sul componente Galapagos. La finestra dell'editor si apre.

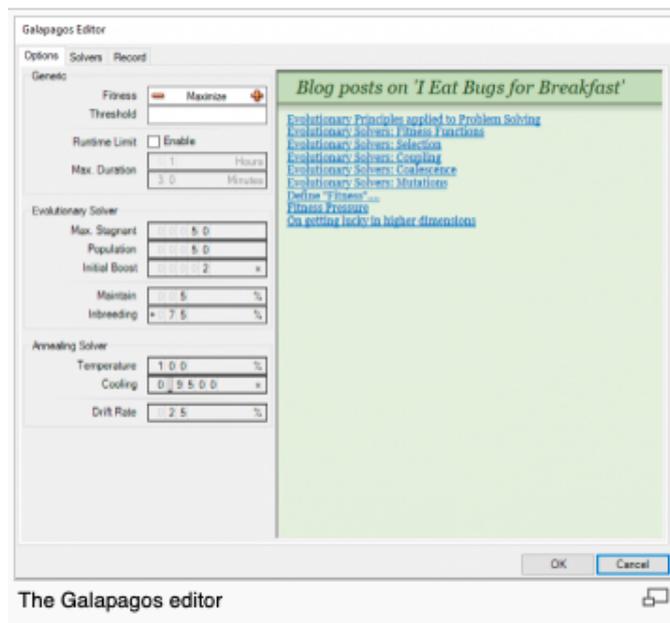


Figura 5.37: Finestra dell'editor di Galapagos

5.6.2 Galapagos: Settaggi iniziali

In questa sotto-sezione discuteremo i differenti settaggi iniziali prima di iniziare l'ottimizzazione in Galapagos.

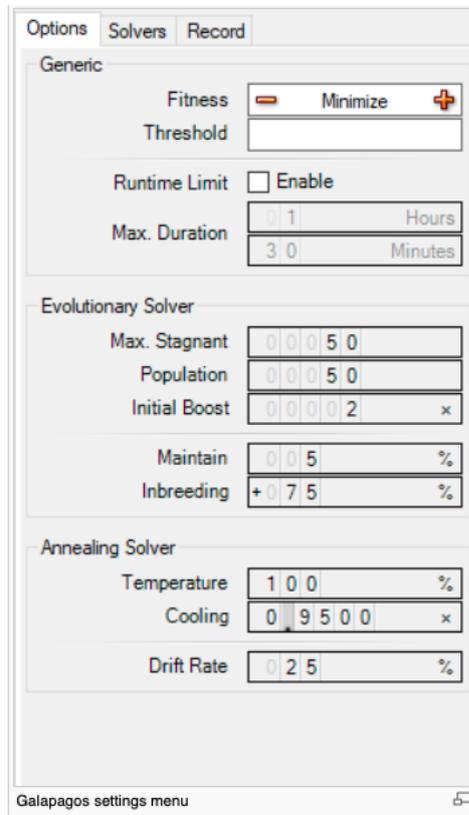


Figura 5.38: Settings menu di Galapagos

- **Fitness/threshold** Indica se si desidera massimizzare o minimizzare il valore. Impostando una soglia è possibile definire un valore da rilevare. Se l'algoritmo trova una soluzione con questa soglia, si fermerà. Se si lascia la soglia vuota, l'algoritmo continuerà indefinitamente, finché non avrà provato tutte le opzioni o raggiungerà un limite di tempo.

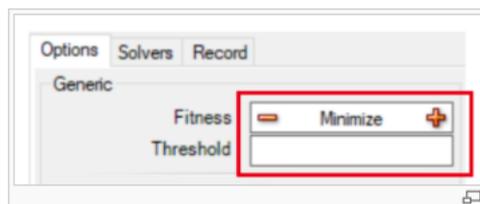


Figura 5.39: Finestra che mostra la possibilità di massimizzare o minimizzare il valore.

- **Runtime Limit** Impostando un limite di tempo, è possibile definire il tempo massimo consentito per l'esecuzione del modello.

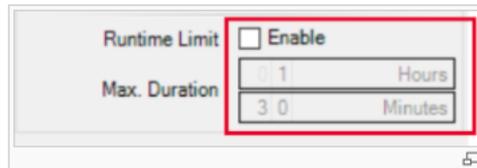


Figura 5.40: Finestra che mostra la possibilità di impostare un limite di tempo per l'esecuzione del modello.

Galapagos ha due tipi di algoritmi di ottimizzazione: evolutivo e annealing. Noi utilizziamo il risolutore evolutivo. Questo cerca un buon risultato e poi lo ottimizza apportando piccole modifiche al parametro. Tuttavia, in alcuni casi, uno script viene creato con un ampio grado di libertà che può portare a risultati inaspettati e negativi nel risolutore evolutivo. Pertanto è possibile utilizzare il risolutore annealing. Questa tesi non si occupa delle differenze tra i due risolutori, per maggiori dettagli (cfr [David Rutten])



Figura 5.41: Risolutore Evolutivo vs Annealing solver

Continuiamo con la descrizione dei settaggi solo per il risolutore evolutivo.

- **Max.Stagnant** Il numero massimo di generazioni che non portano a un risultato ottimale, prima che il risolutore si fermi.

- **Popolazione** Numero di opzioni che l'algoritmo dovrebbe provare prima di passare al risultato ottimizzato successivo.
- **Boost iniziale** Il boost iniziale può portare a risultati migliori nei casi in cui:
 - Il modello ha solo combinazioni di valori di parametri locali specifici che portano a ottimi risultati.
 - Il modello ha elevati gradi di libertà e tantissime combinazioni possibili.
- **Maintain** La quantità di risultati che dovrebbero essere combinati ogni generazione per trovare nuovi risultati migliori.
- **Inbreeding** Il fattore di libertà dell'algoritmo di utilizzare geni molto simili o molto diversi con cui accoppiarsi. Un fattore positivo elevato significa che l'algoritmo utilizzerà solo geni con risultati molto simili. Un fattore negativo elevato indica che l'algoritmo può utilizzare geni molto diversi da combinare.

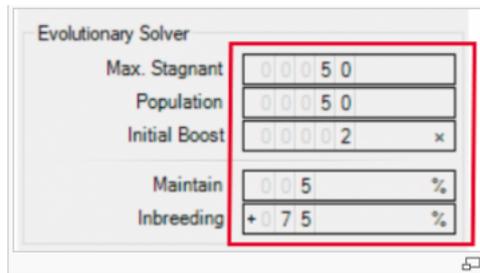


Figura 5.42: Settaggi del risolutore evolutivo.

Dobbiamo attivare la visualizzazione di tutti i geni. Nella parte superiore è possibile specificare diverse impostazioni. Le prime due icone definiscono il tipo di algoritmo che si sta utilizzando. Inoltre, si può avviare il risolutore facendo clic su **Start solver**. Alla fine, ci sono alcune opzioni per visualizzare i risultati intermedi nella finestra di Rhino. Per calcoli rapidi ed efficienti è opportuno disattivare il display. Tuttavia, per il nostro algoritmo attiveremo la visualizzazione di tutti i geni, facendo clic sulla prima icona dell'orologio. Infine faremo clic su OK: questo attiva la visualizzazione di tutti i geni intermedi.

Facendo clic su **Start Solver**, si vedrà che Galapagos modifica le impostazioni dei parametri del tuo modello e visualizzerà risultati diversi.

Facciamo clic su Avvia risolutore, e controlliamo la visualizzazione in Rhinoceros.

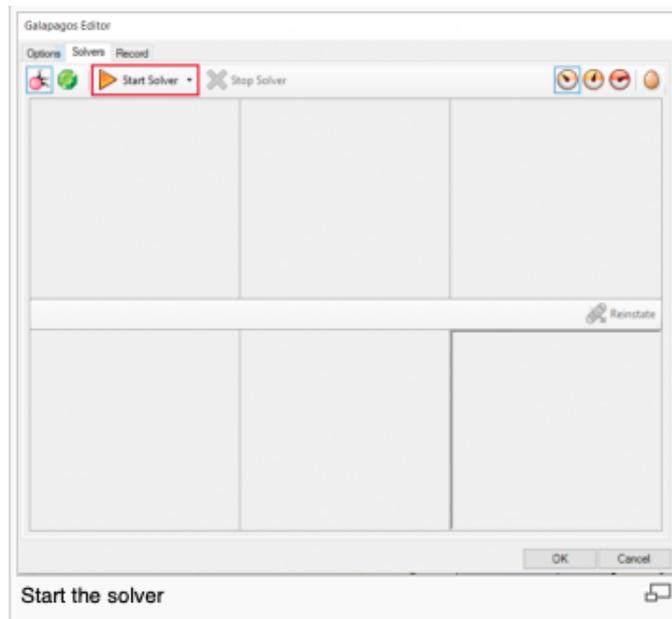


Figura 5.43: Start the solver

5.6.3 Interpretazione dei risultati

Dopo aver eseguito l'algoritmo per un certo intervallo di tempo, può essere fermato il risolutore:

- Esegui l'algoritmo finché le modifiche tra le iterazioni non vengono ridotte al minimo.

Il diagramma in basso a destra mostra alcune delle migliori soluzioni. Si seleziona il risultato migliore e si fa click su **Reinstate**. Il risultato è visibile nel Viewport di Rhinoceros. Se non si è ancora soddisfatti della soluzione, si può selezionare uno dei geni e cliccare sul triangolino accanto al pulsante **Start Solver**. Così facendo dal genoma selezionato, si può continuare l'algoritmo utilizzando il gene voluto.

Nelle prossime immagini abbiamo rappresentato dei risultati di Galapagos e la visualizzazione dal ViewPort di Rhinoceros che cercano di spiegare il “form finding” vero e proprio in cui in partenza ci sono le coordinate dei punti; si considerano solo quadrilateri che sono rombi

con i vertici sugli assi di un riferimento cartesiano e con centro di simmetria nell'origine. Le nostre aspettative consistevano nell'affermare che a aree gaussiane piccole ovvero del tipo 0.1, 0.2 fino a 0.6 il rombo si avvicinava a essere un quadrato e per aree da 0.7 in poi fino a 0.99 risultavano essere rombi allungati con una dimensione predominante rispetto all'altra. Esse concordano con la fig.1.4 a pagina 27 e vengono confermate con i risultati in Rhinoceros e in Grasshopper vedi figg. 5.44, 5.45, 5.46.

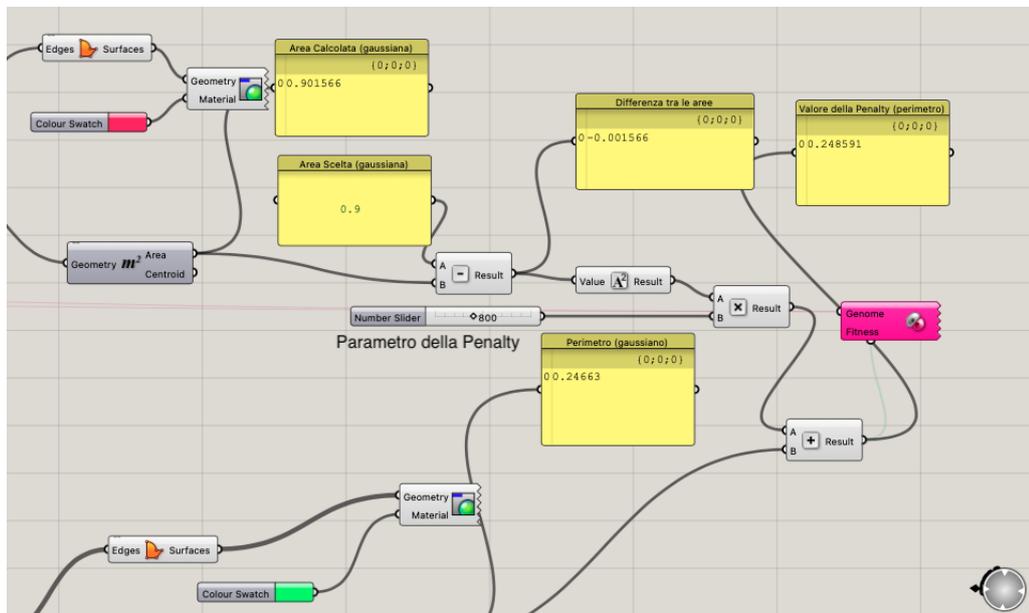


Figura 5.44: Algoritmo risolutivo. Parte relativa all'ottimizzazione



Figura 5.45: Viewport di Rhinoceros con area gaussiana uguale a 0.9

CAPITOLO 5. APPLICAZIONI DEL PROBLEMA ISOPERIMETRICO: *IL FORM FINDING*



Figura 5.46: Vista di insieme di Rhinoceros, Grasshopper e Galapagos con area uguale a 0.1

5.7 Ottimizzazione vs Adattamento, Ottimizzazione Multi - Parametro

Dopo aver visto come l'ottimizzazione opera in Galapagos, il plug-in "risolutore evolutivo" del programma, si potrebbe studiare qualcosa del tipo multi-parametro. Esiste una plug-in di minor nota che si chiama Octopus come mezzo per semplificare e spiegare i sistemi di ottimizzazione multiparametrica. Un'analisi di follow-up discute la capacità di adattamento al loro interno dei sistemi di ottimizzazione.

Nel contesto matematico, l'ottimizzazione rappresenta uno degli ambiti più affascinanti e fondamentali, dove l'arte della risoluzione di problemi incontra la bellezza della teoria. Esso riguarda la ricerca della soluzione ottimale in un insieme di soluzioni ammissibili, definito da vincoli e da una funzione obiettivo. L'adattamento, d'altro canto, sottolinea la capacità di un sistema di modificare le sue caratteristiche in risposta a nuove condizioni o cambiamenti nell'ambiente.

5.7.1 Ottimizzazione vs Adattamento

Dal punto di vista matematico, l'ottimizzazione è un problema ben definito che richiede la formalizzazione di un modello matematico con vincoli e una funzione obiettivo. La sfida consiste nel trovare la soluzione che massimizza o minimizza tale funzione, rispettando i vincoli imposti. L'adattamento, pur non essendo strettamente un concetto matematico, può essere interpretato come la capacità di un modello ottimizzato di adeguarsi a nuove condizioni attraverso l'introduzione di nuove variabili o la modifica dei parametri esistenti.

5.7.2 Ottimizzazione Multi-Parametro

L'ottimizzazione multi-parametro rappresenta una generalizzazione dell'ottimizzazione classica, dove si considera un insieme di variabili decisionali e un obiettivo multi-criterio. In questo contesto, la sfida matematica consiste nel navigare in uno spazio decisionale multidimensionale per trovare il compromesso ottimale tra vari obiettivi contrastanti, tenendo conto di un insieme complesso di vincoli.

5.8 Problemi Aperti: Una prospettiva matematica

Nel campo dell'ottimizzazione, nonostante i notevoli progressi raggiunti nel corso degli anni, esistono ancora numerosi problemi aperti che sfidano la comunità matematica. Alcune delle questioni più rilevanti includono:

- **Complessità Computazionale:** La determinazione della complessità computazionale di specifici problemi di ottimizzazione e la ricerca di algoritmi efficienti rappresentano una delle sfide più grandi.
- **Metodi Euristici e Algoritmi Approssimativi:** Lo sviluppo di metodi euristici e algoritmi approssimativi per risolvere problemi di ottimizzazione complessi in tempi ragionevoli è un'area di ricerca attiva e stimolante.
- **Robustezza delle Soluzioni:** La ricerca di soluzioni robuste che siano resilienti ai cambiamenti e alle incertezze rimane un problema aperto e di grande interesse.
- **Ottimizzazione Multi-Obiettivo:** La teoria dell'ottimizzazione multi-obiettivo, che si occupa di trovare il compromesso ottimale tra più obiettivi contrastanti, presenta sfide matematiche significative.
- **Integrazione di Tecniche di Apprendimento Automatico:** L'integrazione di tecniche di apprendimento automatico e intelligenza artificiale con metodi di ottimizzazione tradizionali rappresenta un'area di ricerca emergente e promettente.

In conclusione, l'ottimizzazione matematica è un campo ricco e variegato che continua a offrire opportunità immense per l'innovazione e la scoperta. Nonostante i problemi aperti e le sfide persistenti, la passione e la dedizione della comunità matematica nel cercare soluzioni creative e efficaci ai problemi di ottimizzazione sono le forze trainanti che alimentano l'avanzamento di questa affascinante disciplina.

Bibliografia

- [1] U. Abresch, J. Langer, *The normalized curve shortening flow and homotetic solutions*, Differential Geometry 25 (1986) 175-196
- [2] L. Ambrosio, N. Fusco, and D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free-Discontinuity Problems*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 2000.
- [3] S.B. Angement, *Shrinking doughnuts*, Proceeding of the conference on elliptic and parabolic equations held at Gregynog August 1989.
- [4] D. Bakry e M. Ledoux, *Lévy-Gromov isoperimetric inequality for an infinite dimensional diffusion generator*. Invent. Math. 123, 259–281 (1995).
- [5] M. Barchiesi, A. Brancolini and V. Julin, *Sharp dimension free quantitative estimates for the Gaussian isoperimetric inequality*, to appear, Annals of Probability, 2016
- [6] F. Barthe, *An isoperimetric result for the Gaussian measure and unconditional sets*, Bulletin of the London Mathematical Society **33** (2001), 408-416.
- [7] A. di Bath, *Elementi di Euclide*, Pubblicazione latina, (1120).
- [8] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, 1916; reprinted by Chelsea, New York, 1949.
- [9] V. Blasjo, *The evolution of... The isoperimetric Problem*; edited by Abe Shenitzer and John Stillwell, MAA.

- [10] S. G. Bobkov, *An isoperimetric inequality on the discrete cube, and an elementary proof of the isoperimetric inequality in Gauss space*. Ann. Probab. 25(1), 206–214 (1997).
- [11] C. Borell, *The Brunn-Minkowski Inequality in Gauss Space*, Inventiones Mathematicae 30 (1975) 239-252.
- [12] C. Borell, *Geometric bounds on the Ornstein-Uhlenbeck velocity process*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 70 (1985), no. 1, 1–13. MR 795785 (87k:60103)
- [13] C. Borell, *The Ehrhard inequality*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 337 (2003), no. 10, 663–666. MR 2030108 (2004k:60102)
- [14] H. Brezis *Analisi funzionale-Teoria e applicazioni*, Liguori Editore, Napoli,1990.
- [15] Y.D. Burago, V.A. Zalgaller *Geometric Inequalities*, Springer, Berlin, 1988.
- [16] A. Burchard, M. Schmuckenschlger, *Comparison theorems for exit times*, Geometric and Functional Analysis GAFA **11** (2001), no.4, 651-692 (English).
- [17] R. Caccioppoli *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati I*, Rend. Accad. Naz. Lincei Cl.Sci. Fis. Mat. Nat., 12 (1952), 3-11.
- [18] R. Caccioppoli *Misura e integrazione sugli insiemi dimensionalmente orientati II*, Rend. Accad. Naz. Lincei Cl.Sci. Fis. Mat. Nat., 12 (1952), 137-146.
- [19] E. A. Carlen, C. Kerce *On the cases of equality in Bobkov's inequality and Gaussian rearrangement* Calc. Var. Partial Differential Equations 13, 1–18 (2001)
- [20] A. Chakrabarti and O. Regev, *An optimal lower bound on the communication complexity of gap Hamming distance*, Proc 43rd Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, 2011, pp. 51–60.
- [21] J-E. Chang, *1-dimensional solutions of the λ -self shrinkers* arXiv:1410.1782v2[math.DG]
- [22] A. Cianchi, N. Fusco, F. Maggi, A. Pratelli *On the isoperimetric deficit in Gauss space*. Amer. J. Math. 133, 131–186 (2011)
- [23] N.Copernico *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (1543)
- [24] E. De Giorgi, *Sulla proprietà isoperimetrica dell'ipersfera, nella classe degli insiemi aventi frontiera orientata di misura*

-
- finita.*, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., Sez. I, 8 (1958), 33-44.
- [25] E. De Giorgi *Su una teoria generale della misura $(r - 1)$ -dimensionale in uno spazio a r dimensioni*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) 36 (1954), 191-213
- [26] P. Diaconis, D. Freedman, *A dozen de Finetti-style results in search of a theory*, Annales de l'I.H.P. Probabilités et statistiques, Tome 23 (1987) no. S2, pp. 397-423.
- [27] A. Ehrhard *Une démonstration de l'inégalité de Borell*, Annales Scientifiques de l'université de Clermont-Ferrand 2 Tome 69 série Mathématiques n°19 (1981) p.165-184
- [28] A. Ehrhard, *Symétrisation dans l'espace de Gauss* Math. Scand. 53(2), 281-301 (1983).
- [29] A. Ehrhard, *Elements extrémaux pour les inégalités de Brunn-Minkowski gaussiennes* Ann. Inst. Henri Poincaré 22, 149-168 (1986).
- [30] R. Eldan, *A two-sided estimate for the gaussian noise stability deficit*, Inventiones mathematicae **201** (2015), no. 2, 561-624 (English).
- [31] H. Federer *Geometric measure theory*, Springer-Verlag 1969
- [32] F. Feo *Simmetrizzazione gaussiana ed equazioni ellittiche*, Phd Thesis.
- [33] G. Galilei, *Dialogo sopra i due massimi sistemi de mondo*, Pubblicazione latina, (1632).
- [34] S. Heilman, *Symmetric convex sets with minimal gaussian surface area*, Preprint, arXiv:1705.06643v1, 2017.
- [35] A. Hurwitz, *Sur le problème des isopérimètres*. C. R. Acad. Sci. Paris 132 (1901) 401-403
- [36] A. Hurwitz, *Sur quelques applications géométriques des séries de Fourier*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. 18 (1902) 392-394
- [37] N.D. Kazarinoff *Disuguaglianze geometriche*, Zanichelli, Bologna, 1972
- [38] H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*. Gauthier-Villars, Paris, 1906.
- [39] M. Ledoux, M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg 1991
-

- [40] M. Ledoux, *Semigroup proofs of the isoperimetric inequality in Euclidean and Gauss space*, Bull. Sci. Math. 118 (1994), no. 6, 485–510. MR 1309086 (96c:49061)
- [41] M. Ledoux, *Isoperimetry and Gaussian analysis, Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1994)*, Lecture Notes in Math., vol. 1648, Springer, Berlin, 1996, pp. 165–294. MR 1600888 (99h:60002)
- [42] P.Lévy *Problèmes concrets dianalyse fonctionnelle*, Gouthies-Villars, (1951).
- [43] M.Luzzi *Il problema isoperimetrico nello spazio di Gauss*, Tesi di laurea triennale, Relatore: Andrea Colesanti, Anno 2014-2015
- [44] R.Magnanini *Appunti di Istituzioni di Analisi Superiore*, dispense.
- [45] R.Magnanini *Appunti di Istituzioni di Analisi Superiore II*, dispense A.A. 2016
- [46] E.Mascolo, *Appunti di Analisi Funzionale*, dispense.
- [47] M. McGonagle and J. Ross, *The hyperplane is the only stable, smooth solution to the isoperimetric problem in Gaussian space*, Geom.Dedicata **178** (2015), 277-296. MR3397495
- [48] H.P McKean, *Geometry of differential space*, The Annals of Probability 1973
- [49] E. Mossel, J. Neeman, et al., *Robust dimension free isoperimetry in gaussian space*, The Annals of Probability **43** (2015), no. 3, 971-991.
- [50] E. Mossel, J. Neeman, *Robust optimality of Gaussian noise stability*, J.Eur. Math.Soc. (Jems) **17** (2015), no.2, 433-482. MR 3317748
- [51] F.Morgan. *Regularity of isoperimetric hypersurfaces in Riemann-ian manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003) 5041–5052. MR1997594 (2004j:49066), Zbl 1063.49031.
- [52] F. Morgan. *Manifolds with density*. Notices Amer. Math. Soc. 52 (2005) 853–858. MR2161354 (2006g:53044), Zbl 1118.53022.
- [53] I.Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, (1687).

-
- [54] R. O'Donnell, *Open problems in analysis of boolean functions*, Preprint, arXiv:1204.6447v1, 2012.
- [55] R. Osserman, *The isoperimetric inequality*, Bulletin of the American Mathematical Society Volume 84, number 6, Novembre 1978.
- [56] O. Perron, *Zur Existenzfrage eines Maximums oder Minimums*, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **22**(1913) 140-144.
- [57] L. Pisano *Liber abaci* 1202.
- [58] H. Poincaré, Perron *Calcul Des Probabilités*, Paris: Gauthiers-Villars 1912.
- [59] G. Pólya, G. Szegő, *Isoperimetric inequalities in Mathematical Physics*, Ann. of Math. Studies, 27, Princeton University Press, Princeton, 1951.
- [60] C. Pucci, *Istituzioni di analisi superiore*, Unione Matematica Italiana, (2013) ISBN 978-88-96336-11-3
- [61] R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory*, Cambridge University press, Enciclopedia of Mathematics and its applications 44 (1993).
- [62] E. Schmidt *Die Brunn-Minkowskische Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie*, Math. Nach. 1, 81-157, (1948).
- [63] J. Steiner, *Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze*, J. Reine Angew. Math. **18** (1838) 281-296
- [64] J. Steiner, *Sur le maximum et minimum des figure dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général. premier mémoire*, J. Reine Angew. Math. **24** (1842) 93-162.
- [65] J. Steiner, *Sur le maximum et minimum des figure dans le plan, sur la sphère et dans l'espace en général. second mémoire*, J. Reine Angew. Math. **24** (1842) 189-250.
- [66] J. Steiner, *Gesammelte Werke*, vol. 2, Berlin, 1882.
- [67] V.N. Sudakov, B.S. Tsirel'son, *Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures*. Soviet. Math. 9 (1978) 9-18 [translated from Zap. Nauch. Sem. L.O.M.I. 41, 14-24].
- [68] G. Talenti, *The standard isoperimetric theorem*, in handbook of convex geometry **A** 73-123 North-Holland Amsterdam 1983

- [69] G. Talenti, A. Colesanti, P. Salani *Un'introduzione al calcolo delle variazioni: teoria ed esercizi* Unione matematica Italiana, 2014
Design, Penalty Function and Optimization.
- [70] G. Di Pillo and L. Grippo. *Exact penalty functions in constrained optimization*. SIAM J. Control Optim., 27:1333–1360, 1989.
- [71] G. Di Pillo, F. Facchinei. *Exact barrier function methods for Lipschitz programs*. Appl. Math. Optim., 32:1-31, 1995
- [72] M. V. Dolgopolik. *A unifying theory of exactness of linear penalty functions*. Optim., 65:1167–1202, 2016.
- [73] I. I. Eremin *Penalty method in convex programming*. Soviet Math. Dokl., 8:459-462, 1966
- [74] J. P. Evans, F. J. Gould, J. W. Tolle. *Exact penalty functions in nonlinear programming*. Math. Program., 4:72–97, 1973.
- [75] P. Han, O.L. Mangasarian. *Exact penalty functions in nonlinear programming*. Math. Program., 17:251-269, 1979
- [76] Z. Khabazi *Generative Algorithms using Grasshopper*, traduzione italiana a cura di A. Marsala.
- [77] A. Pugnale, M. Sassone *Morphogenesis and Structural Optimization of Shell Structures with the Aid of a Genetic Algorithm*, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structure, Vol.48, n155, December 2007.
- [78] D. Rutten *Evolutionary Principles applied to Problem Solving*, Wordpress, <https://ieatbugsforbreakfast.wordpress.com/2011/03/04/epatps01/>
- [79] D. Rutten *Evolutionary Solvers: Fitness Functions*, Wordpress, <https://ieatbugsforbreakfast.wordpress.com/2011/03/04/fitness-functions/>
- [80] D. Rutten *Evolutionary Solvers: Coupling*, Wordpress, <https://ieatbugsforbreakfast.wordpress.com/2011/03/04/coupling-algorithms/>
- [81] D. Rutten *Evolutionary Solver: Coalescence*, Wordpress, <https://ieatbugsforbreakfast.wordpress.com/2011/03/05/evolutionary-solver-coalescence-algorithms/>
- [82] D. Rutten *Evolutionary Solver: Mutations*, Wordpress, <https://ieatbugsforbreakfast.wordpress.com/2011/03/05/evolutionary-solver-mutations/>

- [83] A. Tedeschi *Architettura Parametrica, Introduzione a Grasshopper, Il Plug in per la modulazione generativa in Rhino*, Edizioni Le Penseur
- [84] A. Tedeschi *AAD Algorithms Aided Design*, Brienza: Le Penseur Publisher, 2014
- [85] W. I. Zangwill. *Nonlinear programming via penalty functions*. *Manag. Sci.*, 13:344–358, 1967.

BIBLIOGRAFIA

Extratime...

*I sogni emergono dall'inconscio
e quindi offrono un mezzo per capire come funziona.*

*I sogni appaiono quando il livello di coscienza
affonda al di sotto dell'inconscio,
una situazione che ha maggiori probabilità
di verificarsi durante il sonno.*

*Quando ci svegliamo il livello di coscienza aumenta e il mondo
dell'inconscio scompare.*

Ma i sogni possono accadere anche quando siamo svegli.

Questi sono sogni di veglia detti "visioni".

I sogni e le visioni sono le due chiavi dell'inconscio.

CARL GUSTAV JUNG