Soluzioni di tipo barriera

Matteo Novaga
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
via Buonarroti 2, 56127 Pisa, Italy
email: novaga@mail.dm.unipi.it

Sommario. – *We* present the general theory of barrier solutions in the sense of De Giorgi, and we consider different applications to ordinary and partial differential equations. We discuss, in particular, the case of second order geometric evolutions, where the barrier solutions turn out to be equivalent to the well–known viscosity solutions.

1. – Introduzione

In [9] E. De Giorgi introdusse un metodo molto generale, che fornisce una nozione di soluzione debole per un'ampia classe di equazioni differenziali.

Questo metodo si adatta particolarmente bene alle equazioni paraboliche del secondo ordine, dove sotto le consuete ipotesi di elletticità dell'operatore è verificato un principio di confronto tra le soluzioni regolari. In particolare, la teoria delle barriere permette sia di definire soluzioni anche quando l'equazione non è strettamente ellittica (e quindi non esistono in generale soluzioni regolari), sia di ottenere soluzioni deboli definite per tutti i tempi, fornendo quindi un criterio per prolungare le soluzioni dopo l'insorgere di singolarità. L'ambiente in cui le barriere trovano la loro applicazione più naturale è probabilmente quello delle evoluzioni geometriche del secondo ordine, dove la velocità del fronte è espressa in funzione della prima e della seconda forma fondamentale. L'esempio più noto di tali evoluzioni è il moto di superfici secondo la curvatura media ed in effetti l'applicazione principale sviluppata fino ad ora di questa teoria è stata quella di definire soluzioni deboli globali per questo particolare esempio.

È comunque possibile, almeno formalmente, applicare la teoria delle barriere a tutte le equazioni ordinarie ed a molte equazioni alle derivate parziali, e sarebbe interessante chiarire in quali casi la soluzione così ottenuta è in grado di fornire informazioni utili sull'equazione, ad esempio sul tipo di singolarità delle soluzioni.

Durante gli anni '80 e nei primi anni '90 è stata sviluppata un'altra teoria, apparentemente piuttosto differente, in grado sempre di fornire soluzioni globali per una classe molto ampia di equazioni differenziali: la teoria della viscosità. La prima presentazione sistematica di tale teoria, almeno nel caso delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine, si può trovare in [10]. Tale metodo è stato successivamente esteso alle equazioni paraboliche del secondo ordine da M.G. Crandall, P.L. Lions ed altri (si vedano ad esempio [8], [7], [6]).

Lo scopo di questa nota è di presentare la teoria delle barriere, con particolare riferimento alle evoluzioni geometriche di insiemi. Nel caso delle evoluzioni geometriche, è stato mostrato [3] che la teoria delle barriere e la teoria della viscosità definiscono le stesse soluzioni deboli sotto ipotesi molto generali sulla legge di evoluzione.

Il lavoro è suddiviso come segue.
Nella Sezione 2 viene introdotta la notazione che verrà utilizzata nel seguito. Nella Sezione 3 viene data la definizione di barriera esterna ed interna [9], [5], [4]; vengono inoltre discusse alcune proprietà elementari delle barriere. Nella Sezione 4 la teoria delle barriere viene applicata prima alle equazioni ordinarie (e ai sistemi di equazioni) ed in seguito alle equazioni alle derivate parziali di tipo parabolico, viene inoltre data la definizione di soluzione di tipo barriera. Nella Sezione 5 viene considerato il caso particolare delle equazioni geometriche di evoluzione.

2. – Notazioni

Dato un insieme $E \subseteq \mathbf{R}^n$, definiamo la funzione *distanza con segno* da E come segue: $d_E(x) := \text{dist}(x, E) - \text{dist}(x, \mathbf{R}^n \setminus E)$, $x \in \mathbf{R}^n$, dove si pone $\text{dist}(\cdot, \emptyset) \equiv +\infty$. Dato $\rho > 0$ poniamo

$$E_\rho^- = \{x \in \mathbf{R}^n : \text{dist}(x, \mathbf{R}^n \setminus E) > \rho\}, \qquad E_\rho^+ = \{x \in \mathbf{R}^n : \text{dist}(x, E) < \rho\}.$$

Data un'applicazione $\phi : I \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$, dove $I \subset \mathbf{R}$ è un intervallo, poniamo $d_\phi(t, x) := d_{\phi(t)}(x)$, $(t, x) \in I \times \mathbf{R}^n$. Data una funzione $f : E \to \mathbf{R}$, $E \subseteq \mathbf{R}^n$, indicheremo con f_* (resp. f^*) il rilassato inferiormente (risp. superiormente) semicontinuo di f. Scrivendo $f \in \mathbf{C}^\infty(E)$ intenderemo che f ammette un'estensione di classe $\mathbf{C}^\infty$ in un intorno aperto di E.

Dato un insieme aperto $A \subseteq \mathbf{R}^n$ indicheremo con $J(A)$ l'insieme $[0, +\infty) \times A \times \mathbf{R}^n \times \text{Sym}(n)$ e con J l'insieme $(\mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \times \text{Sym}(n)$. Diremo che una funzione $F : (t, p, X) \in [0, +\infty[\times J \to \mathbf{R}$ è *ellittica* se

$$F(t, p, X) \geq F(t, p, Y) \qquad \text{per ogni } Y \in \text{Sym}(n), Y \geq X.$$

Diremo inoltre che F è *geometrica* [6] se

$$F(t, \lambda p, \lambda X + \sigma p \otimes p) = \lambda F(t, p, X) \qquad \text{per ogni } \lambda > 0, \sigma \in \mathbf{R}.$$

Definiamo infine la funzione $F_c : [0, +\infty[\times J \to \mathbf{R}$ come segue:

$$F_c(t, p, X) := -F(t, -p, -X) \qquad (t, p, X) \in [0, +\infty[\times J.$$

3. – Definizione di barriera

In questa sezione diamo la definizione di minima e massima barriera, discutendone alcune proprietà generali.

Definizione 3.1 *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia di funzioni test $f : [a, b] \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$. Una funzione $\phi : I \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$, $I \subseteq \mathbf{R}$, si dice una* barriera esterna *(risp.* barriera interna*) rispetto ad $\mathcal{F}$ se vale la seguente proprietà: per ogni $f : [a, b] \subseteq I \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ appartenente ad $\mathcal{F}$ e tale che $f(a) \subseteq \phi(a)$ (risp. $f(a) \supseteq \phi(a)$) si ha $f(b) \subseteq \phi(b)$ (risp. $f(b) \supseteq \phi(b)$).*

Nel seguito indicheremo con $\mathcal{B}^e(\mathcal{F})$ (risp. $\mathcal{B}^i(\mathcal{F})$) la classe di tutte le barriere esterne (risp. interne) rispetto ad $\mathcal{F}$.

Definizione 3.2 *Sia $E \subseteq \mathbf{R}^n$ e $\bar{t} \in \mathbf{R}$. La* minima barriera *e la* massima barriera *$\mathcal{M}(E, \mathcal{F}, \bar{t})$, $\mathcal{N}(E, \mathcal{F}, \bar{t}) : [\bar{t}, +\infty) \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$, con origine in E al tempo $\bar{t}$ (rispetto alla famiglia $\mathcal{F}$) sono definite come segue:*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(E, \mathcal{F}, \bar{t})(t) &:= \bigcap \Big\{ \phi(t) : \ \phi \in \mathcal{B}^e(\mathcal{F}, [\bar{t}, +\infty)), \ \phi(\bar{t}) \supseteq E \Big\}, \\ \mathcal{N}(E, \mathcal{F}, \bar{t})(t) &:= \bigcup \Big\{ \psi(t) : \ \psi \in \mathcal{B}^i(\mathcal{F}, [\bar{t}, +\infty)), \ \psi(\bar{t}) \subseteq E \Big\}. \end{aligned}$$

La minima (risp. massima) barriera è essenzialmente l'inviluppo di tutte le funzioni test che sono contenute (risp. contengono) nella barriera stessa in un qualche tempo $a \geq \bar{t}$. Si noti che, se si impone $a = \bar{t}$ nella Definizione 3.1, si ottiene una minima (risp. massima) barriera a priori più piccola (risp. più grande) di quella qui considerata, che in molte applicazioni concrete risulta poco adatta a produrre soluzioni deboli definite anche dopo l'insorgere di singolarità.

Poiché l'intersezione di barriere interne è una barriera interna, così come l'unione di barriere esterne è una barriera esterna, si ha sempre

$$\mathcal{M}(E, \mathcal{F}, \bar{t}) \in \mathcal{B}^e(\mathcal{F}), \qquad \mathcal{N}(E, \mathcal{F}, \bar{t}) \in \mathcal{B}^i(\mathcal{F}).$$

Valgono inoltre le seguenti proprietà:

1. $E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \mathcal{M}(E_1, \mathcal{F}, \bar{t}) \subseteq \mathcal{M}(E_2, \mathcal{F}, \bar{t})$, $\mathcal{N}(E_1, \mathcal{F}, \bar{t}) \subseteq \mathcal{N}(E_2, \mathcal{F}, \bar{t})$ (principio di confronto);

2. $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}, \bar{t})(\bar{t}) = \mathcal{N}(E, \mathcal{F}, \bar{t})(\bar{t}) = E$;

3. $f(t) \subseteq \mathcal{M}(f(a), \mathcal{F}, a)(t)$ e $f(t) \supseteq \mathcal{N}(f(a), \mathcal{F}, a)(t)$ per ogni $f \in \mathcal{F}$, $a \leq t \leq b$;

4. se la famiglia $\mathcal{F}$ soddisfa la seguente condizione: $f|_{[a,t]}, f|_{[t,b]} \in \mathcal{F}$ per ogni $f \in \mathcal{F}$, $a < t < b$; allora

   $$\begin{aligned} \mathcal{M}(E, \mathcal{F}, \bar{t})(t_2) &= \mathcal{M}(\mathcal{M}(E, \mathcal{F}, \bar{t})(t_1), \mathcal{F}, t_1)(t_2), \\ \mathcal{N}(E, \mathcal{F}, \bar{t})(t_2) &= \mathcal{N}(\mathcal{N}(E, \mathcal{F}, \bar{t})(t_1), \mathcal{F}, t_1)(t_2), \end{aligned}$$

   per ogni $\bar{t} < t_1 < t_2$ (proprietà di semigruppo).

Nel seguito considereremo sempre famiglie $\mathcal{F}$ che soddisfano la condizione di semigruppo descritta al punto 4.

Un requisito di ogni nozione ragionevole di soluzione debole è che coincida con le soluzioni regolari quando queste ultime sono definite. Nel caso delle barriere, le soluzioni regolari sono rappresentate dalle funzioni test $f \in \mathcal{F}$, pertanto ci si può chiedere per quali famiglie $\mathcal{F}$ si abbia

$$f(t) = \mathcal{M}(f(a), \mathcal{F}, a)(t) = \mathcal{N}(f(a), \mathcal{F}, a)(t), \qquad \forall f \in \mathcal{F}. \tag{1}$$

Per definizione la minima barriera contiene sempre le funzioni test, quindi un'inclusione in (1) è sempre garantita, ed analogamente si ha l'inclusione opposta nel caso della massima barriera. Perché si abbia proprio l'uguaglianza in (1), deve valere un principio di confronto tra le funzioni test stesse, dati cioè $f, g : [a, b] \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$, $f, g \in \mathcal{F}$ tali che $f(a) \subseteq g(a)$ si deve avere $f(s) \subseteq g(s)$ per ogni $s \in [a, b]$. In questo caso diremo che la famiglia $\mathcal{F}$ soddisfa il *principio di confronto.*

Nel seguito indicheremo con $\mathcal{M}(E)$ e $\mathcal{N}(E)$ la minima e la massima barriera con origine in E tutte le volte che la scelta della famiglia $\mathcal{F}$ sarà chiara dal contesto.

Si osservi che, se la famiglia $\mathcal{F}$ soddisfa il principio di confronto, si ha $\mathcal{M}(E) \subseteq \mathcal{N}(E)$ per ogni $E \subseteq \mathbf{R}^n$. In effetti, ricordando la definizione di massima barriera, è sufficiente mostrare che $\mathcal{M}(E) \in \mathcal{B}^i(\mathcal{F})$. Data quindi $f \in \mathcal{F}$ tale che $f(a) \supseteq \mathcal{M}(E)(a)$, si deve avere $f(t) \supseteq \mathcal{M}(E)(t)$ per ogni $t \in [a, b]$, e questa inclusione segue facilmente notando che $\mathcal{M}(E) \cap f \in \mathcal{B}^e(\mathcal{F})$ per ogni $f \in \mathcal{F}$, poiché la famiglia $\mathcal{F}$ soddisfa il principio di confronto.

L'inclusine opposta, cioè $\mathcal{M}(E) \supseteq \mathcal{N}(E)$, è in generale molto più difficile da dimostrare e verrà discussa nelle sezioni successive per particolari scelte della famiglia $\mathcal{F}$ (si veda il Teorema 5.2).

Diremo che la famiglia $\mathcal{F}$ è *invariante per traslazioni* se per ogni $f \in \mathcal{F}$ e $y \in \mathbf{R}^n$ l'applicazione $f + y$ appartiene ad $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ è invariante per traslazioni è facile verificare che l'interno di una barriera è ancora una barriera, da cui segue ad esempio che se l'insieme E è aperto anche $\mathcal{M}(E)$ lo è.

In molte applicazioni concrete è necessario considerare unioni ed intersezioni infinite di minime o massime barriere. Al fine di rendere le barriere più stabili rispetto a tali operazioni, introduciamo le cosiddette barriere regolarizzate inferiori e superiori (che sono una sorta di inviluppo inferiormente e superiormente semicontinuo di $\mathcal{M}$ e $\mathcal{N}$).

Definizione 3.3 *Sia $E \subseteq \mathbf{R}^n$ e $\bar{t} \in \mathbf{R}$. La minima e la massima barriera regolarizzata inferiore e superiore $\mathcal{M}_*(E, \mathcal{F}, \bar{t}), \mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}, \bar{t}), \mathcal{N}_*(E, \mathcal{F}, \bar{t}), \mathcal{N}^*(E, \mathcal{F}, \bar{t}) : [\bar{t}, +\infty) \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ sono definite come segue:*

$$\mathcal{M}_*(E, \mathcal{F}, \bar{t}) = \bigcup_{\rho > 0} \mathcal{M}(E_\rho^-, \mathcal{F}, \bar{t}), \qquad \mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}, \bar{t}) = \bigcap_{\rho > 0} \mathcal{M}(E_\rho^+, \mathcal{F}, \bar{t}),$$
$$\mathcal{N}_*(E, \mathcal{F}, \bar{t}) = \bigcup_{\rho > 0} \mathcal{N}(E_\rho^-, \mathcal{F}, \bar{t}), \qquad \mathcal{N}^*(E, \mathcal{F}, \bar{t}) = \bigcap_{\rho > 0} \mathcal{M}(E_\rho^+, \mathcal{F}, \bar{t}).$$

Chiaramente si ha sempre $\mathcal{M}^*(E) \in \mathcal{B}^e(\mathcal{F})$, $\mathcal{N}_*(E) \in \mathcal{B}^i(\mathcal{F})$, mentre le inclusioni $\mathcal{M}_*(E) \in \mathcal{B}^e(\mathcal{F})$, $\mathcal{N}^*(E) \in \mathcal{B}^i(\mathcal{F})$ sono valide sotto ipotesi abbastanza generali sulla famiglia $\mathcal{F}$ (ad esempio se $\mathcal{F}$ è invariante per traslazioni e $\partial f(t)$ è un insieme compatto per ogni $f \in \mathcal{F}$, $a \leq t \leq b$). Osserviamo inoltre che, anche se la minima e la massima barriera godono della proprietà di semigruppo, non è vero in generale che le minime e le massime barriere regolarizzate continuino a godere di tale proprietà.

4. – Applicazione alle equazioni differenziali

In questa sezione consideriamo l'applicazione della teoria delle barriere ad alcune equazioni differenziali. In particolare, considereremo dapprima le equazioni ed i sistemi ordinari del primo ordine, ed in seguito le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine di tipo parabolico. Come caso particolare di equazioni paraboliche, nella prossima sezione verranno considerate con maggior attenzione le equazioni cosiddette geometriche, che consentono cioè di descrivere evoluzioni di ipersuperfici di $\mathbf{R}^n$.

4.1. – *Equazioni e sistemi ordinari del primo ordine.* – Vediamo ora come applicare la teoria delle barriere alle equazioni differenziali ordinarie. Presentiamo questo esempio principalmente per chiarire come implementare la definizione di barriera in un semplice caso.

Data una funzione $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, consideriamo la seguente equazione differenziale ordinaria del primo ordine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\, y(t) = g(t, y(t)), \qquad t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Definiamo la famiglia $\mathcal{F} = \mathcal{F}_g$ come segue: $f \in \mathcal{F}_g$, $f : [a, b] \to \mathcal{P}(\mathbf{R})$, se e solo se esiste $y(t)$, $a \leq t \leq b$, soluzione di (2) tale che

$$f(t) = \{y \in \mathbf{R} : y \leq y(t)\} \subset \mathbf{R}, \qquad t \in [a, b].$$

Osserviamo che, se la funzione g è continua in (t, y) e localmente lipschitziana nella variabile y allora la famiglia $\mathcal{F}_g$ soddisfa il principio di confronto e sia la minima barriera che la massima barriera estendono le soluzioni classiche dell'equazione, cioè

$$\mathcal{M}((-\infty, \overline{y}(t_0)], \mathcal{F}_g, t_0)(t) = \mathcal{N}((-\infty, \overline{y}(t_0)], \mathcal{F}_g, t_0)(t) = (-\infty, \overline{y}(t)], \quad t \in [t_0, T), \tag{3}$$

per ogni $t_0 \in \mathbf{R}$ e per ogni $\overline{y} : [t_0, T) \to \mathbf{R}$ soluzione regolare di (2). L'uguaglianza (3) segue facilmente dal principio di confronto per equazioni differenziali ordinarie del primo ordine. Poiché la minima e la massima barriera sono definite anche oltre il tempo massimale di esistenza di $\overline{y}(t)$, esse forniscono soluzioni globali (deboli) per l'equazione (2), che sono in generale meno regolari delle soluzioni classiche, ma che continuano comunque a soddisfare il principio di confronto. Dal teorema di esistenza ed unicità per equazioni ordinarie segue anche

$$\mathcal{M}((-\infty, \overline{y}], \mathcal{F}_g, t_0) = \mathcal{N}((-\infty, \overline{y}], \mathcal{F}_g, t_0) \qquad \forall\, \overline{y}, t_0 \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Nel caso in cui la funzione g sia solo continua, mancando l'unicità per le soluzioni regolari di (2) ed essendo al contrario sia la minima che la massima barriera sempre univocamente definite, l'uguaglianza (3) non può essere verificata, ed è facile dimostrare, in effetti, che la minima barriera seleziona sempre (localmente) la più grande soluzione classica, mentre la massima barriera seleziona sempre la più piccola.

Osserviamo infine che le nozioni di minima e massima barriera possono essere adattate anche al caso di sistemi di equazioni ordinarie del primo ordine del tipo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\, y(t) = h(t, y(t)), \qquad t \in \mathbf{R}, \tag{5}$$

dove $h : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ è una funzione assegnata. Cosideriamo infatti la famiglia $\mathcal{F} = \mathcal{F}_h$ composta dalle soluzioni regolari del sistema (5), cioè $f \in \mathcal{F}_h$, $f : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$, se e solo se $f(t) = y(t)$, $a \leq t \leq b$, dove $y : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ è una soluzione di (5). Poiché, con questa scelta di funzioni test, si ha sempre $\mathrm{int}(f(t)) = \emptyset$, è opportuno considerare le barriere regolarizzate $\mathcal{M}^*$ ed $\mathcal{N}^*$ al posto di $\mathcal{M}$ ed $\mathcal{N}$, al fine di ottenere una soluzione debole che non si banalizzi non appena si incontra una singolarità.

Anche in questo caso, se h è una funzione continua in (t, y), localmente lipschitziana nella variabile y, si ha

$$\mathcal{M}^*(\overline{y}(t_0), \mathcal{F}_h, t_0)(t) = \mathcal{N}^*(\overline{y}(t_0), \mathcal{F}_h, t_0)(t) = \overline{y}(t) \qquad t \in [t_0, T), \tag{6}$$

per ogni $t_0 \in \mathbf{R}$ e per ogni $\overline{y} : [t_0, T) \to \mathbf{R}^n$ soluzione regolare di (5). Se la funzione h invece è solo continua (o presenta addirittura discontinuità) l'uguaglianza (6) non è in generale verificata e le soluzioni di tipo barriera potrebbero rivelarsi utili per analizzare le singolarità delle soluzioni regolari.

Osserviamo che quanto detto per il sistema (5) si estende senza alcuna modifica al caso di equazioni ordinarie del primo ordine a valori in spazi di Banach. Poiché molti sistemi (ed equazioni) alle derivate parziali parabolici ed iperbolici possono essere considerati come equazioni del primo ordine a valori in opportuni spazi di Banach, la minima e la massima barriera regolarizzata superiore forniscono un metodo molto generale per ottenere soluzioni deboli globali per tali sistemi (almeno nel caso in cui valga un teorema di esistenza per tempi piccoli). Lo studio di tali soluzioni, condotto finora solo in casi molto particolari (si veda la Sezione 5), riveste un notevole interesse, essendo legato sia a proprietà di stabilità delle soluzioni regolari, sia all'analisi delle singolarità.

4.2. – *Equazioni alle derivate parziali paraboliche del secondo ordine.* – Consideriamo ora il caso delle equazioni paraboliche del secondo ordine. La caratteristica principale di queste equazioni, che le rende adatte ad implementare una teoria di tipo barriere, è la presenza di un principio di confronto tra le soluzioni classiche, sotto ipotesi di ellitticità dell'operatore associato.

Sia A un sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^n$, W un sottoinsieme denso di $J(A)$ e sia $F : W \to \mathbf{R}$ una funzione assegnata. Osserviamo che, poiché W è denso in $J(A)$, le funzioni F_* e F^* sono definite su tutto $J(A)$.

Definizione 4.1 *Siano $a, b \in \mathbf{R}$, $0 \leq a < b$ e sia $f : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbf{R} \times A)$. Scriveremo $f \in \mathcal{F}_F^{\geq}$ se e solo se esiste $u \in \mathbf{C}^\infty([a,b] \times A)$ tale che*

$$f(t) = \{(s,x) \in \mathbf{R} \times A : \ s \leq u(t,x)\} \qquad t \in [a,b],$$

e si abbia

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + F^*(t, x, \nabla u(t,x), \nabla^2 u(t,x)) \geq 0 \qquad (t,x) \in [a,b] \times A. \tag{7}$$

Scriveremo $f \in \mathcal{F}_F^{\leq}$ se si ha $\leq$ al posto di $\geq$ e F_* al posto di F^* in (7).

È facile verificare che, se la funzione F è limitata sui limitati di W, entrambe le famiglie $\mathcal{F}_F^{\geq}$, $\mathcal{F}_F^{\leq}$ sono diverse dal vuoto.

Introduciamo ora la classe delle *soluzioni di tipo barriera* per l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + F(t,x,\nabla u(t,x),\nabla^2 u(t,x)) = 0 \qquad (t,x) \in \mathbf{R}^+ \times A. \tag{8}$$

Poiché, quando $A \neq \mathbf{R}^n$, le soluzioni regolari di (8) dipendono dalle condizioni al bordo su $\mathbf{R}^+ \times \partial A$ (oltre che dal dato iniziale per $t = 0$), è necessario modificare leggermente la definizione di barriera esterna ed interna data nella Definizione 3.1, al fine di ottenere soluzioni di tipo barriera che non si banalizzino immediatamente.

Definizione 4.2 *Una funzione $\phi : [0,+\infty) \to \mathcal{P}(\mathbf{R}\times A)$ si dice una* barriera esterna parabolica *(risp.* barriera interna parabolica*) per l'equazione (8) se vale la seguente proprietà: per ogni $f : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbf{R} \times A)$, $0 \leq a < b$, appartenente ad $\mathcal{F}_F^{\geq}$ (risp. $\mathcal{F}_F^{\leq}$) e tale che $f(a) \subseteq \phi(a)$ e $\overline{f(t)} \cap (\mathbf{R} \times \partial A) \subseteq \overline{\phi(t)}$ per ogni $t \in [a,b]$ (risp. $f(a) \supseteq \phi(a)$ e $\overline{\phi(t)} \cap (\mathbf{R} \times \partial A) \subseteq \overline{f(t)}$ per ogni $t \in [a,b]$) si ha $f(b) \subseteq \phi(b)$ (risp. $f(b) \supseteq \phi(b)$). Indicheremo con $\mathcal{B}_p^e(\mathcal{F}_F^{\geq})$ (risp. $\mathcal{B}_p^i(\mathcal{F}_F^{\leq})$) la classe di tutte le barriere esterne (risp. interne) paraboliche.*

Definizione 4.3 *Data $F : W \to \mathbf{R}$ definiamo la classe $\mathcal{S}(F)$ delle soluzioni di tipo barriera per l'equazione (8) come*

$$\mathcal{S}(F) := \mathcal{B}_p^e(\mathcal{F}_F^{\geq}) \cap \mathcal{B}_p^i(\mathcal{F}_F^{\leq}).$$

Una funzione $F : W \to \mathbf{R}$ si dice ellittica (si veda la Sezione 2) se

$$F(t,x,p,X) \geq F(t,x,p,Y) \qquad \text{per ogni } (t,x,p,X),(t,x,p,Y) \in W,\ Y \geq X.$$

La proprietà di ellitticità della funzione F garantisce la validità del principio di confronto tra le soluzioni regolari di (8), la quale implica a sua volta che il sottografico di una soluzione regolare di (8) è una soluzione di tipo barriera (e quindi le soluzioni di tipo barriera estendono le soluzioni regolari).

La proposizione seguente mostra che, sotto l'ipotesi di ellitticità della funzione F, esiste sempre una soluzione di tipo barriera per (8). Osserviamo che nulla viene asserito circa l'unicità di tale soluzione (si confronti con il Teorema 5.2). La dimostrazione è analoga a [4, Proposition 4.1].

Proposizione 4.4 *Sia $F : J(A) \to \mathbf{R}$ ellittica e siano $\phi_1, \phi_2 : [0,+\infty) \to \mathcal{P}(\mathbf{R}\times A)$, $\phi_1 \in \mathcal{B}_p^e(\mathcal{F}_F^{\geq})$, $\phi_2 \in \mathcal{B}_p^i(\mathcal{F}_F^{\leq})$, tali che $\phi_1 \supseteq \phi_2$. Allora, esiste $\psi \in \mathcal{S}(F)$ tale che $\phi_1 \supseteq \psi \supseteq \phi_2$.*

Il problema del confronto tra soluzioni di tipo barriera e di conseguenza dell'unicità di tale soluzione (fissando il dato iniziale e le condizioni al bordo) non è stato affrontato in questa generalità e meriterebbe un ulteriore approfondimento. Analogamente, non è chiaro se la classe delle soluzioni di tipo barriera per l'equazione (8) coincida con quella delle soluzioni nel senso della viscosità [7].

5. – Equazioni geometriche di evoluzione

In questa sezione studieremo l'applicazione della teoria delle barriere alle evoluzioni geometriche di insiemi. Come vedremo nel seguito, tali evoluzioni possono essere considerate come un caso particolare di equazioni paraboliche.

Per semplicità espositiva, considereremo il caso di evoluzioni la cui legge non dipende dalla variabile spaziale. In questa sezione assumeremo sempre che la funzione $F : [0, +\infty) \times J \to \mathbf{R}$ sia ellittica e geometrica (si veda la Sezione 2).

Definizione 5.1 *Siano $a, b \in \mathbf{R}$, $0 \leq a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$. Scriveremo $f \in \mathcal{F}_F^{\geq}$ se e solo se*

1. *$f(t)$ è un insieme chiuso e $\partial f(t)$ è compatto per ogni $t \in [a, b]$;*
2. *esiste un insieme aperto $A \subseteq \mathbf{R}^n$ tale che $d_f \in \mathbf{C}^\infty([a, b] \times A)$, $\partial f(t) \subseteq A$ per ogni $t \in [a, b]$;*
3. $$\frac{\partial d_f}{\partial t}(t, x) + F^*(t, \nabla d_f(t, x), \nabla^2 d_f(t, x)) \geq 0, \qquad t \in [a, b],\ x \in \partial f(t). \tag{9}$$

Scriveremo $f \in \mathcal{F}_F^{\leq}$ se si ha $\leq$ al posto di $\geq$ e F_* al posto di F^* in (9).

Notiamo che, a t fissato, si richiede che la relazione (9) valga solo per $x \in \partial f(t)$. Per meglio chiarire il significato geometrico della (9), ricordiamo che $\frac{\partial d_f}{\partial t}(t, x)$ rappresenta la velocità normale del fronte in $x \in \partial f(t)$, $\nabla d_f(t, x)$ il vettore normale esterno e $\nabla^2 d_f(t, x)$ la seconda forma fondamentale. Più precisamente [1], $\nabla^2 d_f(t, x)$ è una matrice simmetrica che, ristretta allo spazio $T_x \partial f(t) = \big(\nabla d_f(t, x)\big)^\perp$, ha come autovalori le curvature principali di $\partial f(t)$ in x più un autovalore nullo corrispondente all'autovettore $\nabla d_f(t, x)$. Pertanto, la disuguaglianza (9) caratterizza tutte le evoluzioni per cui la velocità del fronte è maggiore o uguale (rispettivamente minore o uguale) ad una data funzione (espressa da F) della prima e della seconda forma fondamentale. Il fatto che la funzione F non dipenda dalla variabile spaziale x implica che le famiglie $\mathcal{F}_F^{\geq}$, $\mathcal{F}_F^{\leq}$ siano invarianti per traslazioni.

Osserviamo che la definizione qui presentata differisce lievemente da quella data in [5], [2], dove non compaiono i rilassati semicontinui di F. Si è preferita questa definizione (comunque equivalente all'altra non appena la funzione F è continua) poiché consente di considerare funzioni definite su un sottoinsieme denso di J (come nella Definizione 4.1) e richiama direttamente la definizione di sottosoluzione e soprasoluzione viscosa.

Nel caso particolare $F(t, \nabla d_f(t, x), \nabla^2 d_f(t, x)) = \mathrm{tr}(\nabla^2 d_f(t, x))$, l'equazione associata identifica l'evoluzione secondo la curvatura media.

Nella relazione (9) (così come nella (7) della sezione precedente) sarebbe ragionevole aspettarsi un'uguaglianza invece di una disuguaglianza, in quanto attraverso la minima e la massima barriera si vuole definire una soluzione debole per l'equazione

$$\frac{\partial d_f}{\partial t} + F(t, \nabla d_f, \nabla^2 d_f) = 0. \tag{10}$$

La ragione per cui si preferisce questa definizione è data dal fatto che, per particolari scelte della funzione F, potrebbero esistere pochissime soluzioni regolari di (10), mentre esistono sempre sopra e sottosoluzioni regolari non appena F è limitata sui compatti di J. D'altro canto, è facile verificare che nessuna delle due famiglie $\mathcal{F}_F^{\geq}$ e $\mathcal{F}_F^{\leq}$ può soddisfare il principio di confronto, a causa appunto della disuguaglianza in (10). Poiché la funzione F è ellittica, vale però un principio di confronto tra gli elementi di $\mathcal{F}_F^{\geq}$ e $\mathcal{F}_F^{\leq}$: dati infatti $f \in \mathcal{F}_F^{\geq}$, $g \in \mathcal{F}_F^{\leq}$, $f(\bar{t}) \subseteq g(\bar{t})$ si ha $f(t) \subseteq g(t)$ per ogni $t \geq \bar{t}$ (nel dominio di definizione di f e g). Da questa proprietà di confronto segue, come in precedenza, che data una soluzione regolare $f : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$ di (10) vale un'uguaglianza analoga a (1):

$$f(t) = \mathcal{M}(f(a), \mathcal{F}_F^{\geq}, a)(t) = \mathcal{N}(f(a), \mathcal{F}_F^{\leq}, a)(t) \qquad t \in [a,b],$$

cioè la minima e la massima barriera estendono le evoluzioni regolari.

Osserviamo che si ha sempre

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{M}_*(E, \mathcal{F}_F^{\geq}) &= \mathcal{N}^*(\mathbf{R}^n \setminus E, \mathcal{F}_F^{\leq}), \\ \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_F^{\geq}) &= \mathcal{N}_*(\mathbf{R}^n \setminus E, \mathcal{F}_F^{\leq}). \end{aligned}$$

Vale inoltre il seguente risultato [2], che riportiamo per semplicità nel caso di funzioni $F : J \to \mathbf{R}$ indipendenti dalla variabile t.

Teorema 5.2 *Sia $F : J \to \mathbf{R}$ una funzione continua. Allora, per ogni insieme $E \subseteq \mathbf{R}^n$ con ∂E compatto, si ha*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_*(E, \mathcal{F}_F^{\geq}) &= \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{M}^*(\mathbf{R}^n \setminus E, \mathcal{F}_{F_c}^{\geq}), \\ \mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_F^{\geq}) &= \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{M}_*(\mathbf{R}^n \setminus E, \mathcal{F}_{F_c}^{\geq}). \end{aligned}$$

Inoltre, se $F = F_c$ allora

$$\mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_F^{\geq}) \setminus \mathcal{M}_*(E, \mathcal{F}_F^{\geq}) \in \mathcal{B}^e(\mathcal{F}_F^{\geq}).$$

Enunciati analoghi, con le opportune modifiche, valgono nel caso di $\mathcal{N}_*$, $\mathcal{N}^*$.

Si ha infine

$$\mathcal{N}_*(E, \mathcal{F}_F^{\leq}) = \mathcal{M}_*(E, \mathcal{F}_F^{\geq}), \qquad \mathcal{N}^*(E, \mathcal{F}_F^{\leq}) = \mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_F^{\geq}). \tag{11}$$

Consideriamo ora la classe $S(F)$ delle soluzioni di tipo barriera di (10), definita come nella Definizione 4.3 (con $\mathcal{B}^e(\mathcal{F}_F^{\geq})$ e $\mathcal{B}^i(\mathcal{F}_F^{\leq})$ al posto di $\mathcal{B}_p^e(\mathcal{F}_F^{\geq})$ e $\mathcal{B}_p^i(\mathcal{F}_F^{\leq})$). Grazie alla (11) ed alle proprietà generali delle minime e massime barriere (si veda la Sezione 3), si ha

$$\mathcal{M}_*(E, \mathcal{F}_F^{\geq}) \in S(F), \qquad \mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_F^{\geq}) \in S(F).$$

Inoltre, sempre utilizzando la (11) è facile verificare che, per qualunque soluzione $\psi \in S(F)$ tale che $\mathrm{int}(E) \subseteq \psi(0) \subseteq \overline{E}$, vale l'inclusione

$$\mathcal{M}_*(E, \mathcal{F}_F^{\geq})(t) \subseteq \psi(t) \subseteq \mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_F^{\geq})(t) \qquad \forall t \geq 0.$$

Pertanto, le uguaglianze in (11) esprimono una proprietà di unicità delle soluzioni di tipo barriera, che può considerarsi l'analogo del Teorema di unicità per le soluzioni viscose [6].

In effetti, la dimostrazione del Teorema 5.2 presentata in [2] utilizza, come risultato preliminare, il fatto che le soluzioni di tipo barriera coincidono con le soluzini di viscosità nel caso delle equazioni geometriche di evoluzione, sempre assumendo che la funzione $F : J \to \mathbf{R}$ sia continua. Sarebbe interessante ottenere una dimostrazione di questo importante teorema che sia "self-contained" nell'ambito della teoria delle barriere, che non utilizzi cioè risultati provenienti dalla teoria della viscosità.

Riferimenti bibliografici

[1] L. Ambrosio. Lecture Notes on Geometric Evolution Problems, Distance Function and Viscosity Solutions. In *Proc. of the School on Calculus of Variation, Pisa 1996*. Springer–Verlag, Berlin, 1999.

[2] G. Bellettini and M. Novaga. Minimal barriers for geometric evolutions. *J. Differential Eqs.*, 139(1):76–103, 1997.

[3] G. Bellettini and M. Novaga. Comparison results between minimal barriers and viscosity solutions for geometric evolutions. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, XXVI(4):97–131, 1998.

[4] G. Bellettini and M. Novaga. Some aspects of De Giorgi's barriers for geometric evolutions. In *Proc. of the School on Calculus of Variation, Pisa 1996*. Springer–Verlag, Berlin, 1999.

[5] G. Bellettini and M. Paolini. Some results on minimal barriers in the sense of De Giorgi applied to driven motion by mean curvature. *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. (5)*, 19:43–67, 1995.

[6] Y.-G. Chen, Y. Giga, and S. Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *J. Differential Geom.*, 33:749–786, 1991.

[7] M.G. Crandall, H. Ishii, and P.L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. Am. Math. Soc.*, 27:1–67, 1992.

[8] M.G. Crandall and P.L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations. *Trans. AMS*, 277:1–43, 1983.

[9] E. De Giorgi. Barriers, boundaries, motion of manifolds. *Conference held at Department of Mathematics of Pavia, March 18*, 1994.

[10] P.L. Lions. *Generalized Solutions of Hamilton–Jacobi Equations*, volume 69 of *Research Notes in Math.* Pitman, Boston, 1982.