

**Su Alcune Definizioni Deboli di Curvatura per  
Insiemi Non Orientati**

Carlo Mantegazza



## Indice

Introduzione	5
Capitolo 1. Teoria della Misura	7
1. Misure di Borel	7
2. Misure a Valori in $R^n$	9
3. Misure di Radon	9
4. Convergenza Debole di Misure	10
5. Derivazione di Misure	11
6. Funzionali Definiti su Misure	11
7. Continuità e Differenziabilità Approssimata	15
8. Blow-up e Spazio Tangente ad una Misura	16
Capitolo 2. Misure di Hausdorff e Insiemi Rettificabili	18
1. Misure di Hausdorff	18
2. Densità	19
3. Funzioni Lipschitziane	19
4. Sottovarietà di $\mathbb{R}^k$ e Formule di Area e Coarea	20
5. Insiemi Rettificabili	21
6. Operatori Tangenziali su Varietà e Formula della Divergenza	23
7. Operatori Differenziali e Formule di Area e Coarea per Rettificabili	25
Capitolo 3. Teoria dei Varifold	27
1. Notazioni e Definizioni	27
2. Varifold Rettificabili	28
3. Varifold di Allard e Curvatura Media Generalizzata	30
4. Esempi	33
5. Varifold di Hutchinson	38
Capitolo 4. Varifold con Bordo	44
1. Varifold con Bordo	44
2. Dimostrazione dei Teoremi Enunciati	47
3. Il Teorema di Compattezza	59
4. Osservazioni e Congetture	60
Capitolo 5. Rettificabilità della Misura Bordo	62
1. Slicing e Localizzazione	62
2. Alcuni Risultati della Teoria delle Correnti	66
3. Rettificabilità del Bordo	68
4. Struttura degli $A\mu$ -Varifold 1-Dimensionali	72
5. Regolarità degli $A\mu$ -Varifold 1-Dimensionali	75
Capitolo 6. Applicazioni al Riconoscimento Automatico di Immagini	79
1. Introduzione al Problema	79
2. Un Teorema di Esistenza	80
3. Una Generalizzazione del Funzionale $F$	83

INDICE

4

Bibliografia

84

## Introduzione

Il concetto di curvatura è sicuramente uno dei più antichi della matematica e inoltre è tra i più intuitivi e comprensibili anche ai non matematici. Solitamente immaginiamo la curvatura come una prerogativa di oggetti dotati di una certa regolarità intrinseca come le varietà, ma studi ormai classici di Steiner, Minkowski ed altri hanno mostrato come abbia senso parlare di curvatura anche in presenza di grosse singolarità. Sono nate così numerose nozioni interessanti di curvatura in ambiti molto più generali degli spazi euclidei, per insiemi dotati di bassa o talvolta nessuna regolarità a priori.

Un forte interesse per una definizione di curvatura maneggevole dal punto di vista analitico viene dallo studio di numerosi problemi nel calcolo delle variazioni. Essenzialmente si tratta di problemi di minimo per funzionali definiti su una certa classe di oggetti regolari e dipendenti dalla curvatura di questi ultimi.

Lo sviluppo dei cosiddetti metodi diretti ha portato ad introdurre numerosi spazi di funzioni generalizzate più ampi di quelli classici, nei quali si possano estendere i funzionali da minimizzare, spazi dotati di una qualche nozione di compattezza e in cui è a volte possibile sviluppare teoremi di regolarità per poter ottenere soluzioni classiche. Questi due aspetti sono fondamentali ogni volta che si introducono spazi di "oggetti deboli" che sono ormai parte integrante dei metodi dell'analisi. Esempi siffatti sono gli spazi di Sobolev, le funzioni a variazione limitata e le distribuzioni.

Il discorso si estende in modo naturale al caso di funzionali definiti su varietà regolari e dipendenti dalle quantità ad esse associate, come l'area o la curvatura. Vi sono numerosi esempi storicamente interessanti di problemi di questo tipo, come il problema isoperimetrico, il problema di Plateau e questioni legate alle geodetiche sulle varietà (vedi [MO, PI]).

Il nostro interesse va proprio verso i problemi che coinvolgono la curvatura delle varietà immerse nello spazio euclideo. Lo studio di tale problematica comporta dunque l'estensione della nozione di curvatura ad insiemi più generali delle varietà. Una delle possibilità è una definizione di essa per mezzo di opportune formule di integrazione per parti, ed è proprio in questo spirito che svilupperemo il lavoro.

Il primo passo in questa direzione è stato compiuto da W. K. Allard (vedi [A1, A2]) con la definizione degli oggetti detti varifold, generalizzazioni delle varietà regolari e aventi una nozione distribuzionale di curvatura media. Sebbene essi siano dotati di buone caratteristiche di compattezza, non possiedono proprietà forti di struttura.

Un notevole miglioramento è stato ottenuto nell'86 da parte di J. E. Hutchinson (vedi [HU1, HU2]) che, modificando l'idea di Allard, ha dato una definizione debole di varietà senza bordo e dotate di seconda forma fondamentale, ottenendo oggetti con le stesse proprietà di compattezza ma con migliori caratteristiche di regolarità.

Quello che noi ci proponiamo in questa tesi è di sviluppare un analogo della teoria di Hutchinson nel caso delle varietà con bordo. Vorremmo cioè introdurre e

studiare oggetti che sono una generalizzazione delle varietà regolari con bordo in  $\mathbb{R}^n$ , dotati di nozioni generalizzate di seconda forma fondamentale e di frontiera, di buone proprietà di compattezza e infine abbastanza maneggevoli e utili per affrontare problemi del calcolo delle variazioni.

Il piano della tesi si riassume allora secondo questa linea.

I primi due capitoli sono introduttivi e servono per mostrare gli strumenti che sfrutteremo nello svolgimento della trattazione. Il primo è una breve esposizione dei concetti base della teoria della misura su cui tutto il lavoro si fonda. Abbiamo inserito in questo capitolo anche alcuni risultati di semicontinuità per funzionali definiti su misure che non fanno propriamente parte della teoria astratta della misura e che saranno spesso utilizzati nei capitoli seguenti. Il secondo capitolo contiene le nozioni di fondo della cosiddetta teoria geometrica della misura, dalla quale il calcolo delle variazioni attinge numerose tecniche tra le quali la teoria delle misure di Hausdorff e degli insiemi rettificabili, che sono gli strumenti principali che useremo.

Il terzo capitolo è una introduzione ai risultati già conosciuti riguardanti la nozione di curvatura generalizzata. Sviluppiamo la teoria dei varifold di Allard e di Hutchinson, mostrando vantaggi e svantaggi di questa teoria. Questo capitolo forma la base indispensabile per lo sviluppo e la comprensione dei concetti che andremo a introdurre nel capitolo successivo.

Nel quarto capitolo introduciamo la nostra nozione di varifold con bordo o  $A\mu$ -varifold, ove  $A$  indica il tensore delle derivate tangenziali dei piani tangenti e  $\mu$  è la misura bordo. Dimostriamo per prima cosa che  $A$  e  $\mu$  sono univocamente determinate, e che il tensore  $A$  conserva le proprietà formali valide nel caso classico. L'importanza di questi oggetti dal punto di vista delle applicazioni al calcolo delle variazioni risiede nel teorema di compattezza e semicontinuità qui dimostrato.

Il quinto capitolo è dedicato allo studio particolareggiato della misura bordo degli  $A\mu$ -varifold, fino all'importante teorema di rettificabilità che generalizza il risultato analogo per le correnti, dovuto a H. Federer e W. H. Fleming (vedi [FF]) e per gli insiemi di perimetro finito, dovuto a E. De Giorgi (vedi [DG1, DG2]). Si dimostra infatti che la misura  $\mu$  si concentra su un insieme rettificabile avente dimensione di uno inferiore rispetto alla dimensione del varifold.

Nella parte finale del capitolo determiniamo la struttura e la regolarità di tali oggetti nel caso unidimensionale, in vista delle applicazioni del capitolo successivo.

L'ultimo capitolo tratta di un esempio di applicazione di queste tecniche ad un problema concreto di calcolo delle variazioni, legato alla questione del riconoscimento automatico di immagini da parte di calcolatori. Mostriamo inoltre la flessibilità di questo approccio variazionale dimostrando un teorema di esistenza per una ampia generalizzazione del problema in questione.

La prospettiva futura di sviluppo di queste problematiche è legata allo studio di alcune congetture che formuliamo nel quarto capitolo, e al tentativo di studiare metodi di approssimazione per questi spazi di varietà generalizzate dotate di curvatura. Infatti, al contrario di altri ambiti come le correnti, mancano al momento buone tecniche di approssimazione che tengano conto anche della curvatura.

Pensiamo infine che altre applicazioni si possano trovare in problemi di teoria geometrica della misura legati all'esistenza e allo studio delle superfici minimali (vedi [PI, SI2]).

## Teoria della Misura

Raccogliamo in questo capitolo introduttivo una serie di nozioni relative alla teoria della misura che ci saranno necessarie nel seguito.

Premettiamo che non si tratterà di una introduzione comprensiva alla teoria, daremo infatti per scontate molte definizioni e proprietà di base che si possono trovare su un qualsiasi libro di integrazione astratta (vedi ad esempio [RU]). Vorremmo invece puntualizzare una serie di risultati strettamente connessi alla nostra trattazione. Citeremo dunque senza dimostrazione alcuni teoremi anche piuttosto noti, ma che riteniamo importante tenere presenti. Per una parte di essi indicheremo dove trovarne le dimostrazioni, in generale faremo riferimento al trattato di Federer, [FE1].

Vedremo e dimostreremo inoltre alcuni risultati, a volte banali e talvolta riposti, sempre appartenenti alla teoria della misura ma che solitamente sono conosciuti soltanto dagli specialisti del settore come il teorema di semicontinuità 6.3.

Nella parte finale del capitolo introdurremo alcune nozioni che sono più specifiche della teoria geometrica della misura, come i concetti di differenziale approssimato e di spazio tangente ad una misura.

### 1. Misure di Borel

Dato uno spazio  $X$ , una *misura esterna* o semplicemente una *misura* su di esso è una funzione monotona  $\mu$  dalle parti di  $X$  in  $[0, +\infty]$ , tale che  $\mu(\emptyset) = 0$  e valga la proprietà di  $\sigma$ -*subadditività*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \implies \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Un sottoinsieme  $A$  di  $X$  si dice  $\mu$ -*misurabile* se

$$\mu(S) = \mu(S \setminus A) + \mu(S \cap A)$$

per ogni  $S \subset X$ .

È ben noto che la classe dei misurabili di  $X$  forma una  $\sigma$ -*algebra*, cioè è una famiglia chiusa per intersezione e unione numerabili. Inoltre gli insiemi  $\mu$ -*trascurabili* sono tutti misurabili.

La restrizione di  $\mu$  alla sua classe di misurabili è *numerabilmente additiva*, cioè nella formula sopra vale l'uguale e inoltre si hanno le implicazioni

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \implies \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \implies \lim_{i \rightarrow \infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$

la seconda implicazione con la condizione che  $\mu(A_1) < +\infty$ .

Definiamo *supporto* di una misura  $\mu$  in uno spazio topologico  $X$  il chiuso più piccolo tale che il suo complementare abbia  $\mu$ -misura nulla e lo indichiamo con  $\text{supp } \mu$ .

Se  $X$  è uno spazio topologico, la  $\sigma$ -algebra generata dagli aperti si dice classe dei *boreliani* di  $X$ .

Chiamiamo  $\mu$  *di Borel* o *boreliana* se tutti i boreliani sono  $\mu$ -misurabili.

Una misura  $\mu$  su  $X$  si dice inoltre *Borel-regolare* se è di Borel e per ogni sottoinsieme  $A$  di  $X$  esiste un boreliano  $B \supset A$  tale che  $\mu(B) = \mu(A)$ .

Data una misura su  $X$  e un qualsiasi sottoinsieme  $A \subset X$ , possiamo definire la *misura restrizione*  $\mu \lfloor A$  come

$$(\mu \lfloor A)(B) = \mu(A \cap B)$$

per ogni  $B \subset X$ .

Chiamiamo *restrizione* anche l'operazione di prodotto di una misura  $\mu$  per una funzione positiva e  $\mu$ -misurabile  $f$ :

$$(\mu \lfloor f)(B) = \int_B f(x) d\mu(x)$$

talvolta indicata con  $f\mu$ .

Si vede facilmente che i misurabili si mantengono in questa operazione.

Se  $A$  è un sottoinsieme boreliano di  $X$ , e  $\mu$  è di Borel (risp. Borel-regolare), anche  $\mu \lfloor A$  è Borel (risp. Borel-regolare).

Analogamente se  $f$  è una *funzione boreliana*, cioè le controimmagini degli aperti sono insiemi boreliani in  $X$ ,  $\mu \lfloor f$  mantiene le proprietà di  $\mu$ .

Data  $f : X \rightarrow Y$  definiamo la *misura immagine*  $f_{\#}(\mu)$  ponendo

$$(1.1) \quad f_{\#}(\mu)(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$

Non è difficile dimostrare che  $S \subset Y$  è  $f_{\#}(\mu)$ -misurabile se  $f^{-1}(S)$  è  $\mu$ -misurabile.

L'importanza delle misure di Borel risiede nel fatto che le funzioni continue sono allora boreliane e dunque misurabili rispetto ad esse.

È dunque fondamentale stabilire se una misura è di Borel. Ciò si può ottenere col seguente criterio che si dimostra particolarmente utile in molti casi.

PROPOSIZIONE 1.1. (*Criterio di Caratheodory*)

Se  $\mu$  è una misura su di uno spazio metrico  $X$  tale che

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

ogniquale volta  $A$  e  $B$  sono due sottoinsiemi di  $X$  con  $d(A, B) > 0$ , allora  $\mu$  è una misura di Borel.

Per concludere la sezione indichiamo un risultato che useremo spesso, più o meno sottinteso, nel seguito.

TEOREMA 1.2. Sia  $\mu$  una misura Borel-regolare su  $X$ , spazio metrico localmente compatto e unione numerabile di aperti di  $\mu$ -misura finita, allora valgono

$$\mu(A) = \inf_{\substack{U \supset A \\ U \text{ aperto}}} \mu(U)$$

$$\mu(A) = \sup_{\substack{C \subset A \\ C \text{ chiuso}}} \mu(C)$$

per ogni misurabile  $A \subset X$ .

Se inoltre  $X$  è separabile il sup nella seconda equazione si può prendere solo sui compatti.



In quanto seguirà saremo sempre in ipotesi che ci assicureranno che le misure siano Borel-regolari, e gli spazi ambiente  $X$  soddisfino le ipotesi del Teorema 1.2, quindi d'ora in poi sottointenderemo che  $X$  e tutte le misure citate godano delle proprietà di cui sopra.

## 2. Misure a Valori in $\mathbb{R}^n$

Una misura vettoriale  $\underline{\mu}$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  su  $X$  è individuata da una misura  $\mu$  su  $X$  e da una funzione  $\nu(x)$ ,  $\mu$ -misurabile definita in  $X$  a valori in  $S^{n-1}$ .

Chiamiamo  $\mu$  *variazione totale* della misura vettoriale  $\underline{\mu}$ .

Talvolta, data una misura vettoriale  $\sigma$ , indicheremo con  $|\sigma|$  la sua variazione totale. Vale la seguente caratterizzazione della variazione totale

$$|\sigma|(A) = \sup \sum_{i=1}^{\infty} |\sigma(A_i)|$$

dove il sup è esteso a tutte le *partizioni* di  $A$  in  $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ .

L'integrazione rispetto ad una tale misura di un campo misurabile  $Y$  (cioè le cui componenti lo siano) a valori nello stesso spazio, è definita da

$$\int_X \langle Y(x), \nu(x) \rangle d\mu(x) = \int_X \langle Y, d\underline{\mu} \rangle$$

Parlare di borelianità o di Borel-regolarità per una misura vettoriale significa che la sua variazione totale possiede queste proprietà e che la  $\nu$  è una *funzione boreliana*.

Si definisce inoltre

$$\underline{\mu}(A) = \int_A \nu(x) d\mu(x)$$

componente per componente.

Ricordiamo che con questa definizione ancora vale l'additività numerabile e il teorema di limite 1.2, con l'ipotesi che  $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) < +\infty$ .

L'operazione di restrizione si definisce analogamente e ha le stesse proprietà.

Ricordiamo infine che l'integrale rispetto ad una misura vettoriale si può stimare con

$$\left| \int_X \langle Y, d\sigma \rangle \right| \leq \int_X |Y| d|\sigma|$$

dove  $\sigma$  e  $Y$  sono come sopra.

## 3. Misure di Radon

**DEFINIZIONE 3.1.** Diciamo che una misura Borel-regolare  $\mu$ , su uno spazio metrico  $X$  localmente compatto e separabile è *di Radon*, se per ogni compatto  $K \subset X$  si ha  $\mu(K) < +\infty$ .

La definizione si estende alle misure vettoriali richiedendo che la variazione totale sia di Radon.

**DEFINIZIONE 3.2.** Chiamiamo  $\mathcal{M}(X, \mathbb{R}^n)$  lo spazio vettoriale delle misure di Radon su  $X$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{M}^+(X)$  le misure di Radon positive su  $X$ .

La loro importanza è data dal fatto che le funzioni continue a supporto compatto sono misurabili e hanno integrale finito, per cui data una misura vettoriale  $\sigma$  a valori in  $\mathbb{R}^n$  è ben definito un funzionale lineare  $L_\sigma : C_c(X, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$

$$L_\sigma(Y) = \int_X \langle Y, d\sigma \rangle .$$

La teoria di questi funzionali e quella delle misure di Radon sono collegate dal seguente teorema.

**TEOREMA 3.3.** (*Teorema di Rappresentazione di Riesz*)

Dato  $X$  come nella definizione 3.1 in  $\mathbb{R}^k$  e sia  $L : C_c(X, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale lineare tale che per ogni compatto  $K \subset X$  si abbia

$$\sup \{L(Y) \mid Y \in C_c(X, \mathbb{R}^n), \|Y\|_\infty \leq 1, \text{supp } Y \subset K\} < c(K) < +\infty$$

con  $c(K)$  costante reale indipendente da  $Y$ .

Allora esiste unica una misura di Radon vettoriale  $\sigma$ , a valori in  $\mathbb{R}^n$ , tale che

$$L(Y) = \int_X \langle Y, d\sigma \rangle$$

per ogni  $Y \in C_c(X, \mathbb{R}^n)$ . Vale inoltre

$$\sup \{L(Y) \mid Y \in C_c(X, \mathbb{R}^n), \|Y\|_\infty \leq 1, \text{supp } Y \subset V\} = |\sigma|(V)$$

per ogni aperto  $V \subset X$ .

Chiamiamo questi funzionali localmente limitati.

#### 4. Convergenza Debole di Misure

Definiamo ora una nozione di convergenza nello spazio delle misure di Radon vettoriali su  $X$  a valori in  $\mathbb{R}^n$ .

**DEFINIZIONE 4.1.** Sia  $\sigma_i$  una successione in  $\mathcal{M}(X, \mathbb{R}^n)$ , diciamo che le  $\sigma_i$  convergono alla misura di Radon  $\sigma$  e scriviamo  $\sigma_i \rightarrow \sigma$ , se per ogni  $Y \in C_c(X, \mathbb{R}^n)$  fissato si ha

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_X \langle Y, d\sigma_i \rangle = \int_X \langle Y, d\sigma \rangle$$

Questa convergenza viene solitamente chiamata *convergenza debole di misure*.

Spesso si usano vari modi di dire che delle misure convergono in senso debole. Per non confonderci in tutta la nostra trattazione, a meno che esplicitamente enunciato, tutte le convergenze di misure che considereremo saranno di questo tipo.

Vale il Teorema di Banach-Alaoglu di cui faremo largo uso in seguito.

**TEOREMA 4.2.** (*Teorema di Banach-Alaoglu*)

Se  $\{\sigma_i\}$  è una successione di misure di Radon vettoriali tale che  $\sup_i |\sigma_i|(U) < +\infty$  per ogni aperto  $U \subset\subset X$ , esiste una sottosuccessione che converge in senso debole ad una misura di Radon vettoriale  $\sigma$ .

È chiara l'importanza di questo teorema di compattezza nei problemi variazionali dove sono coinvolte misure di Radon.

### 5. Derivazione di Misure

Siano date due misure  $\mu$  e  $\sigma$  su uno spazio  $X$ , diciamo che  $\sigma$  è *assolutamente continua rispetto a  $\mu$*  e scriviamo  $\sigma \ll \mu$ , se per ogni  $A \subset X$  tale che  $\mu(A) = 0$  anche  $\sigma(A) = 0$ . Diciamo che  $\sigma$  è *singolare rispetto a  $\mu$*  scrivendo  $\sigma \perp \mu$ , se esistono due sottoinsiemi  $A, B$  di  $X$  tali che

$$\mu \perp A = \mu \quad \sigma \perp B = \sigma \quad \mu(B) = 0 \quad \sigma(A) = 0.$$

Ovviamente la relazione  $\sigma \perp \mu$  è simmetrica.

Quando si ha che  $\mu \perp A = \mu$  si dice anche che  $\mu$  è *concentrata su  $A$* .

Enunciamo ora il teorema di derivazione di misure.

**TEOREMA 5.1.** (*Teorema di Radon-Nikodym*)

Sia  $\mu$  una misura di Radon positiva in un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $\sigma$  una misura di Radon vettoriale nello stesso aperto. Allora, per  $\mu$ -q.o.  $x \in \Omega$  esiste il limite

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sigma(B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))} \equiv D_\mu \sigma(x)$$

posto uguale a  $+\infty$  per  $x \notin \text{supp } \mu$ .

La funzione  $D_\mu \sigma(x)$  è boreliana, appartiene a  $L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mu)$  e per ogni boreliano  $B \subset X$  si ha

$$\sigma(B) = \int_B D_\mu \sigma(x) d\mu(x) + \sigma^s(B)$$

dove  $\sigma^s = \sigma \perp Z$ , con  $Z$  di Borel e  $\mu$ -trascurabile, definito da

$$Z = \{x \in \Omega \mid D_\mu \sigma(x) = +\infty\}.$$

Si vede che la parte integrale della rappresentazione di  $\sigma$  è naturalmente assolutamente continua rispetto a  $\mu$ , mentre  $\sigma^s$  gli è singolare.

Questa decomposizione di  $\sigma$  rispetto a  $\mu$  si dice *decomposizione di Lebesgue* ed è unicamente determinata.

La funzione  $D_\mu \sigma(x)$  si dice *derivata di  $\sigma$  rispetto a  $\mu$*  e  $\sigma^s$  si dice *parte singolare di  $\sigma$  rispetto a  $\mu$* . Indicheremo talvolta con  $\frac{d\sigma}{d\mu}(x)$  o con  $\frac{\sigma}{\mu}(x)$  la funzione  $D_\mu \sigma(x)$ .

Anche di questo teorema esistono varie generalizzazioni, la dimostrazione della proposizione così come noi l'abbiamo enunciata si trova in [SI1].

### 6. Funzionali Definiti su Misure

In questa sezione dimostreremo un risultato di semicontinuità per un funzionale definito nello spazio delle misure di Radon.

Per ottenerlo dovremo sfruttare alcune proprietà delle funzioni convesse e semicontinue in  $\mathbb{R}^n$  che ora enunceremo. Per ulteriori dettagli su questo argomento ci si può riferire a [BRZ].

**TEOREMA 6.1.** Siano  $\mu_k \in \mathcal{M}^+(\Omega)$ , definiamo per ogni aperto  $A \subset \Omega$

$$\mu(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^N \mu_i(A_i) \mid A_i \text{ aperti, disgiunti, } A_i \subset A \right\}.$$

Allora, se  $\mu_k = \sigma \perp f_k$  per una certa  $\sigma \in \mathcal{M}^+(\Omega)$  si ha

$$\mu(A) = \int_A \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) d\sigma(x)$$

per ogni aperto  $A \subset \Omega$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $L$  il secondo membro dell'equazione, la disuguaglianza  $\mu(A) \leq L$  è banale. Sia  $p \in \mathbb{N}$  e sia

$$k(x) = \min \left\{ j \leq p \mid f_j(x) = \max_{1 \leq i \leq p} f_i(x) \right\}.$$

Allora ponendo  $B_i = A \cap k^{-1}(i)$  si ottiene

$$\int_A \max_{1 \leq i \leq p} f_i(x) d\sigma(x) = \sum_{i=1}^p \int_{B_i} f_i(x) d\sigma(x) = \sum_{i=1}^p \mu_i(B_i).$$

Poiché, grazie al Teorema 1.2, gli insiemi  $B_i$  possono essere approssimati dall'interno con compatti disgiunti  $K_i$ , e questi a loro volta possono essere separati con aperti disgiunti  $A_i$  contenuti in  $A$  otteniamo

$$\int_A \max_{1 \leq i \leq p} f_i(x) d\sigma(x) \leq \mu(A).$$

Facendo tendere  $p$  a  $\infty$  la disuguaglianza segue dal teorema di convergenza monotona.  $\square$

Sia ora  $g : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, +\infty]$ ,  $g \not\equiv +\infty$ , e chiamiamo  $g^* : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, +\infty]$  la sua trasformata di Fenchel così definita

$$g^*(p) = \sup \{ \langle p, x \rangle - g(x) \mid x \in \mathbb{R}^m, g(x) < +\infty \}.$$

Notiamo che  $g^*$  è semicontinua inferiormente e convessa, poiché estremo superiore di una famiglia di funzioni continue e convesse.

TEOREMA 6.2. Sia  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow (-\infty, +\infty]$ ,  $f \not\equiv +\infty$ , semicontinua inferiormente e convessa. Allora  $f = (f^*)^*$ . Inoltre esiste una successione di funzioni affini  $L_h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  tali che

$$(6.1) \quad f(x) = \sup_{h \in \mathbb{N}} L_h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

DIMOSTRAZIONE. L'uguaglianza  $f = (f^*)^*$  è una nota conseguenza del Teorema di Hahn–Banach ([BRZ]). Chiamiamo  $D$  l'insieme convesso di tutti i  $p \in \mathbb{R}^m$  tali che  $f^*(p) < +\infty$ , e sia  $L_p(x) = -f^*(p) + \langle p, x \rangle$  per ogni  $p \in D$ . Possiamo allora riscrivere  $f = (f^*)^*$  in questo modo:

$$f(x) = \sup \{ L_p(x) \mid p \in D \} \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

Inoltre poiché il sottografico di  $f \equiv \{(x, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mid f(x) > s\}$  è l'unione dei sottografici aperti delle  $L_p$ , la proprietà di Lindelöf di  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$  dà una successione  $\{p_h\} \in D$  tale che  $L_h = L_{p_h}$  soddisfi (6.1).  $\square$

Definiamo ora un funzionale  $G$  sullo spazio  $\mathcal{M}(\Omega, \mathbb{R}^m) \times \mathcal{M}^+(\Omega)$ , in questo modo

$$G(\nu, \mu) = \int_{\Omega} f\left(\frac{d\nu}{d\mu}(x)\right) d\mu(x) + \int_{\Omega} f_{\infty}\left(\frac{d\nu^s}{d|\nu^s|}(x)\right) d\nu^s$$

dove  $f$  è una funzione convessa positiva e semicontinua inferiormente in  $\mathbb{R}^m$ , e  $f_{\infty}$  (detta *funzione di recessione*) è così definita: se  $f \not\equiv +\infty$  prendiamo  $z \in \mathbb{R}^m$  tale che  $f(z) < +\infty$  e poniamo

$$f_{\infty}(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{f(z + kx) - f(z)}{k}.$$

Si vede facilmente l'indipendenza da  $z$  della definizione. Se  $f \equiv +\infty$  poniamo  $f_{\infty} = f$ .

Ci sarà molto utile il seguente teorema di semicontinuit  (vedi [BF]).

**TEOREMA 6.3.** *Il funzionale  $G$    sequenzialmente semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole di misure, i.e.*

$$\nu_h \rightarrow \nu, \quad \mu_h \rightarrow \mu \quad \implies \quad G(\sigma, \mu) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} G(\sigma_h, \mu_h).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $\mu_h, \mu, \nu_h, \nu$  come nell'ipotesi, ed escludiamo il caso banale  $f \equiv +\infty$ .

Per il Teorema 6.2 possiamo trovare una successione  $(a_h, b_h) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  tale che

$$(6.2) \quad f(x) = \sup_{h \in \mathbb{N}} L_h(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m \quad \text{con} \quad L_h(x) = a_h + \langle b_h, x \rangle.$$

Scelto  $z \in \mathbb{R}^m$  tale che  $f(z) < +\infty$ , abbiamo

$$\begin{aligned} f_{\infty}(x) &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{f(z + kx) - f(z)}{k} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \sup_{h \in \mathbb{N}} \frac{a_h + \langle b_h, z + kx \rangle - f(z)}{k} + \langle b_h, x \rangle \\ &= \sup_{h \in \mathbb{N}} \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_h + \langle b_h, z \rangle - f(z)}{k} + \langle b_h, x \rangle \\ (6.3) \quad &= \sup_{h \in \mathbb{N}} \langle b_h, x \rangle. \end{aligned}$$

Sia ora  $k \in \mathbb{N}$  e siano  $A_1, \dots, A_k$  aperti disgiunti in  $\Omega$ .

Per ogni  $i \in \{1, \dots, k\}$  e ogni  $\varphi_i \in C_c^1(A_i)$  tale che  $0 \leq \varphi_i \leq 1$  abbiamo

$$\begin{aligned} &\int_{A_i} a_i \varphi_i d\mu_h + \langle b_i, \int_{A_i} \varphi_i d\nu_h \rangle \\ &= \int_{A_i} \varphi_i L_i\left(\frac{\nu_h}{\mu_h}\right) d\mu_h + \int_{A_i} \varphi_i \langle b_i, \frac{\nu_h^s}{|\nu_h^s|} \rangle d|\nu_h^s| \\ &\leq \int_{A_i} f\left(\frac{\nu_h}{\mu_h}\right) d\mu_h + \int_{A_i} f_{\infty}\left(\frac{\nu_h^s}{|\nu_h^s|}\right) d|\nu_h^s| \end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{i=1}^k \int_{A_i} a_i \varphi_i d\mu_h + \langle b_i, \int_{A_i} \varphi_i d\nu_h \rangle \leq G(\nu_h, \mu_h).$$

Passando al limite per  $h \rightarrow \infty$  e usando la prima identità dell'equazione sopra con  $\nu, \mu$  al posto di  $\nu_h, \mu_h$ , otteniamo

$$\sum_{i=1}^k \int_{A_i} \varphi_i L_i \left( \frac{\nu}{\mu} \right) d\mu + \int_{A_i} \varphi_i < b_i, \frac{\nu^s}{|\nu^s|} > d|\nu^s| \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} G(\nu_h, \mu_h).$$

Sia  $\sigma = \mu + |\nu^s|$  e sia  $N \subset \Omega$ , boreliano  $\mu$ -trascurabile dove si concentra  $|\nu^s|$ . Una forma equivalente della disuguaglianza sopra è allora

$$\sum_{i=1}^k \int_{A_i} \varphi_i \psi_i d\sigma \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} G(\nu_h, \mu_h)$$

dove

$$\psi_i(x) = \begin{cases} L_i \left( \frac{\nu}{\mu}(x) \right) & \text{se } x \in \Omega \setminus N \\ < b_i, \frac{\nu^s}{|\nu^s|}(x) > & \text{se } x \in N \end{cases}.$$

Poiché per il Teorema di Lusin,

$$\sup \left\{ \int_{A_i} \varphi \psi_i d\sigma \mid \varphi \in C_c^1(A_i), 0 \leq \varphi \leq 1 \right\} = \int_{A_i} \psi_i^+ d\sigma$$

e visto che possiamo scegliere arbitrariamente le  $\varphi_i$ , otteniamo

$$\sum_{i=1}^k \int_{A_i} \psi_i^+ d\sigma \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} G(\nu_h, \mu_h).$$

Infine usando il Teorema 6.1, e le equazioni (6.2), (6.3) abbiamo

$$\int_{\Omega} \psi d\sigma \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} G(\nu_h, \mu_h)$$

dove

$$\psi(x) = \begin{cases} f \left( \frac{\nu}{\mu}(x) \right) & \text{se } x \in \Omega \setminus N \\ f_{\infty} \left( \frac{\nu^s}{|\nu^s|}(x) \right) & \text{se } x \in N \end{cases}.$$

Poiché  $G(\nu, \mu) = \int_{\Omega} \psi d\sigma$  la tesi segue. □

**OSSERVAZIONE 6.4.** Se  $f$  è a crescita più che lineare (per esempio  $f(x) = |x|^p$  con  $p > 1$ ), allora  $f_{\infty}(x) = +\infty$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ , dunque  $G(\nu, \mu)$  è finito se e solo se  $|\mu| \ll \nu$ . In particolare siano  $\nu_h \rightarrow \nu, \mu_h \rightarrow \mu, |\nu_h| \ll \mu_h$  e inoltre valga

$$\int_{\Omega} \left| \frac{\nu_h}{\mu_h}(x) \right|^p d\mu_h \leq c$$

per un certo  $p > 1$  e  $c$  indipendente da  $h$ . Allora si ha anche  $|\nu| \ll \mu$ .

Useremo spesso nei capitoli seguenti questo risultato di assoluta continuità nel limite.

### 7. Continuità e Differenziabilità Approssimata

Diamo ora una definizione debole di continuità e di differenziabilità rispetto ad una fissata misura di Radon positiva.

In tutta la sezione lo spazio  $X$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mu$  è una misura di Radon positiva su  $X$  e  $x^0 \in \text{supp } \mu$ .

DEFINIZIONE 7.1. Sia  $f$  una funzione  $\mu$ -misurabile, diciamo che  $f$  in  $x^0 \in X$  ha  $\mu$ -limite approssimato uguale a  $l$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  l'insieme

$$E_\varepsilon = \{x \in X \mid |f(x) - l| > \varepsilon\}$$

ha  $\mu$ -densità zero in  $x^0$ , vale a dire

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu(E_\varepsilon \cap B_\rho(x^0))}{\mu(B_\rho(x^0))} = 0.$$

Scriveremo allora  $\mu - \text{ap} \lim_{x \rightarrow x^0} f = l$  e ometteremo di indicare  $\mu$ , quando sarà chiaro quale misura si sta considerando. Diciamo che  $f$  è  $\mu$ -apcontinua in  $x^0$  se esiste il limite approssimato ed è uguale a  $f(x^0)$ .

È facile verificare che i  $\mu$ -limiti approssimati hanno le stesse proprietà dei limiti classici (linearità, unicità, composizione con funzioni continue). Se  $x^0$  è un atomo di  $\mu$ , cioè  $\mu(\{x^0\}) > 0$ , allora  $f$  è  $\mu$ -apcontinua in  $x^0$ . Utili proprietà degli aplimiti sono le seguenti:

$$\mu - \text{ap} \lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = \nu - \text{ap} \lim_{x \rightarrow x^0} f(x)$$

se  $D_\mu \nu(x^0) = 1$  e

$$\mu - \text{ap} \lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = \mu - \text{ap} \lim_{x \rightarrow x^0} g(x)$$

se l'insieme dei punti dove  $f$  differisce da  $g$  ha densità nulla in  $x^0$ .

Un criterio per stabilire l'apcontinuità ci è dato dalla seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 7.2. Siano  $X$ ,  $\mu$  come sopra e  $f \in L^1_{loc}(\mu)$ , diciamo allora che  $x^0 \in X$  è punto di Lebesgue per  $f$  se vale

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_\rho(x^0))} \int_{B_\rho(x^0)} |f(x) - f(x^0)| d\mu(x) = 0.$$

Allora se  $x^0$  è punto di Lebesgue per  $f$ ,  $f$  è  $\mu$ -apcontinua in  $x^0$ .

L'implicazione inversa nella proposizione 7.2 vale solo se  $f$  è limitata.

Si ha il teorema fondamentale

TEOREMA 7.3. (Teorema di Lebesgue)

Se  $f$  appartiene a  $L^1_{loc}(X, \mu)$  allora  $\mu - \text{q.o. } x \in X$  è punto di Lebesgue per  $f$ . Se  $f$  è solo  $\mu$ -misurabile allora  $\mu - \text{q.o. } x \in X$  è punto di apcontinuità per  $f$ .

Definiamo ora l'apdifferenziabilità.

DEFINIZIONE 7.4. Sia  $f$  una funzione reale  $\mu$ -misurabile e supponiamo che  $\mu(\{x^0\}) = 0$ .

Indicheremo con  $\text{ap}\nabla^\mu f(x^0)$  l'insieme (convesso) di tutti i vettori  $L \in \mathbb{R}^n$  tali che

$$\mu - \text{ap} \lim_{x \rightarrow x^0} \frac{|f(x) - f(x^0) - \langle L, x - x^0 \rangle|}{|x - x^0|} = 0.$$

Prima di analizzare l'insieme  $ap\nabla^\mu f(x^0)$  diamo la seguente definizione ([DG3]).

DEFINIZIONE 7.5. Sempre nell'ipotesi che  $\mu(\{x^0\}) = 0$  indicheremo con  $Nor(\mu, x^0)$  lo spazio vettoriale dei  $v \in \mathbb{R}^n$  tali che

$$\mu - ap \lim_{x \rightarrow x^0} \langle v, \frac{x - x^0}{|x - x^0|} \rangle = 0.$$

Chiameremo  $Tan(\mu, x^0)$  lo spazio ortogonale a  $Nor(\mu, x^0)$ .

In termini geometrici,  $Tan(\mu, x^0)$  è il più piccolo spazio vettoriale  $S$  tale che, preso un arbitrario cono  $C$  avente  $S$  come asse, l'insieme  $x^0 + S$  ha  $\mu$ -densità 1 in  $x^0$ , cioè  $\mu$  si "concentra" su  $S$ .

È facile verificare che  $L \in ap\nabla^\mu f(x^0)$  implica  $L' \in ap\nabla^\mu f(x^0)$  purché  $L - L'$  appartenga a  $Nor(\mu, x^0)$ . Quindi l'insieme  $ap\nabla^\mu f(x^0)$ , se non vuoto, è un singolo punto solo se  $Nor(\mu, x^0) = \{0\}$ . In generale, indicando con  $\pi$  la proiezione da  $\mathbb{R}^n$  in  $Tan(\mu, x^0)$  abbiamo la semplice

PROPOSIZIONE 7.6. Nelle ipotesi della definizione 7.4 vale l'implicazione

$$L \in ap\nabla^\mu f(x^0) \implies \pi(L) \in ap\nabla^\mu f(x^0).$$

Inoltre  $\pi(L)$  è l'unico elemento di  $ap\nabla^\mu f(x^0) \cap Tan(\mu, x^0)$  ed è l'elemento di minima norma di  $ap\nabla^\mu f(x^0)$ .

Nel seguito, con lieve abuso di notazione, indicheremo con  $ap\nabla^\mu f(x^0)$  tale vettore.

Una definizione alternativa di apdifferenziabilità è questa:  $L = ap\nabla^\mu f(x^0)$  se e soltanto se esiste una funzione  $g$  differenziabile in  $x^0$ , con gradiente  $L \in Tan(\mu, x^0)$ , tale che detto  $C$  l'insieme dei punti dove  $f$  e  $g$  differiscono valga

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu(C \cap B_\rho(x^0))}{\mu(B_\rho(x^0))} = 0.$$

Segue allora facilmente da questa caratterizzazione che il gradiente approssimato possiede molte delle proprietà formali del gradiente classico come l'unicità, la linearità e la regola di Leibnitz di derivazione di un prodotto, che ci serviranno nel seguito.

OSSERVAZIONE 7.7. Le idee di questa sezione si estendono in modo naturale ad altri operatori di derivazione dell'analisi e a funzioni e spazi più generali di quelli considerati qui.

Ci siamo limitati a queste definizioni, perché sono quelle che useremo e per non appesantire la trattazione con troppi dettagli tecnici.

Un'esposizione esauriente di questi concetti, completa di tutte le dimostrazioni, si può trovare nel libro di Federer [FE1].

## 8. Blow-up e Spazio Tangente ad una Misura

Introduciamo una nozione di *spazio tangente approssimato ad una misura*  $\mu$  che ci seguirà in tutta la trattazione, e che risulterà più forte della nozione introdotta in 7.5.

Sia  $\mu$  un misura di Radon positiva in un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ ,  $x^0 \in \Omega$ . Vediamola in modo naturale come una misura su tutto  $\mathbb{R}^k$ .

Prendiamo  $\lambda > 0$  e consideriamo le misure di Radon  $\mu_{x^0, \lambda}$  in  $\mathbb{R}^k$  così definite

$$\mu_{x^0, \lambda}(A) = \frac{\mu(x^0 + \lambda A)}{\mu(B_\lambda(x^0))}$$

per ogni  $A$  di Borel.

Osserviamo che  $\mu_{x^0, \lambda}(B_R(0)) = \frac{\mu(B_{\lambda R}(x^0))}{\mu(B_\lambda(x^0))}$ .



DEFINIZIONE 8.1. Sia  $\mathcal{B}(\mu, x^0)$  l'insieme di tutti i possibili limiti deboli di  $\{\mu_{x^0, \lambda}\}$  per  $\lambda \rightarrow 0$ .

Chiamiamo l'insieme  $\mathcal{B}(\mu, x^0)$  il *blow-up* della misura  $\mu$  in  $x^0$ .

Il nome viene dal fatto che in un certo senso stiamo osservando la misura  $\mu$  ingrandita in palle sempre più piccole centrate in  $x^0$ .

Definiamo ora in modo diverso le misure di Radon  $\mu_{x^0, \lambda}$ . Siano

$$\mu_{x^0, \lambda}(A) = \frac{\mu(x^0 + \lambda A)}{\omega_n \lambda^n}$$

ove  $n \leq k$ ,  $A$  è di Borel e  $\omega_n$  è il volume della palla unitaria  $n$ -dimensionale.

Prendiamo sempre i limiti deboli di questa successione di misure e chiamiamo l'insieme di essi  $\mathcal{B}^n(\mu, x^0)$ .

Osserviamo che se la misura  $\mu$  soddisfa  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mu(B_\lambda(x^0))}{\omega_n \lambda^n} = L$  con  $L \neq 0, +\infty$  si ha  $\mathcal{B}^n(\mu, x^0) = L\mathcal{B}(\mu, x^0)$ , nel senso che le misure del primo insieme sono tutte e sole quelle che si ottengono moltiplicando per la costante  $L$  quelle appartenenti al secondo.

DEFINIZIONE 8.2. Supponiamo che  $\mathcal{B}^n(\mu, x^0)$  contenga una sola misura  $\eta$  del tipo

$$\eta(A) = \theta \mathcal{L}_P^n(A \cap P)$$

dove  $P$  è un  $n$ -sottospazio di  $\mathbb{R}^k$ ,  $\theta \in (0, +\infty)$  e  $\mathcal{L}_P^n$  è la misura di Lebesgue  $n$ -dimensionale sul sottospazio  $P$  identificato con  $\mathbb{R}^n$ . Si dice allora che  $P$  è il *piano tangente approssimato* a  $\mu$  in  $x^0$  e  $\theta$  la sua *molteplicità*.

Nel caso che ciò avvenga si deve allora avere

$$(8.1) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(x) d\mu_{x^0, \lambda} = \theta \int_P \varphi|_P(y) d\mathcal{L}_P^n(y)$$

per ogni  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^k)$ .

Questo concetto sarà fonte di numerosi risultati una volta che avremo introdotto le misure di Hausdorff e potrà allora essere applicato ad una classe particolare di misure di Radon per ottenere una nozione di spazio tangente per insiemi non regolari.

OSSERVAZIONE 8.3. Dalla 8.1 si deduce che

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mu(B_\lambda(x^0))}{\omega_n \lambda^n} = \theta.$$

Inoltre lo spazio  $Tan(\mu, x^0)$  definito in 7.5 coincide con  $P$ .

## Misure di Hausdorff e Insiemi Rettificabili

La misura di Hausdorff  $\mathcal{H}^n$  in  $\mathbb{R}^k$  è una misura “sensibile” al volume *n-dimensionale* di un insieme che coincide con la misura canonica per le *n*-varietà regolari embedded in  $\mathbb{R}^k$ .

La teoria di queste misure è strettamente correlata a quella degli *insiemi n-rettificabili*, che sono essenzialmente immagini di misurabili di  $\mathbb{R}^n$  mediante mappe lipschitziane.

La teoria dei rettificabili entra necessariamente nello sviluppo, che faremo nel prossimo capitolo dei cosiddetti varifold, una generalizzazione del concetto di varietà non orientata. Vedremo che c'è una profonda analogia sia tra varietà e insiemi rettificabili che tra mappe  $C^1$  e funzioni lipschitziane, una volta interpretate nel contesto della teoria geometrica della misura.

Introdurremo alcuni operatori differenziali sulle varietà e li estenderemo a funzioni definite sui rettificabili. Una trattazione comprensiva dei concetti di questo capitolo è contenuta nel libro di Simon [SI1]. Sviluppiamo ora la teoria delle misure di Hausdorff e degli insiemi rettificabili.

### 1. Misure di Hausdorff

Sia  $A$  un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^k$  e indichiamo d'ora in poi con  $B_r(x)$  la palla aperta di centro  $x$  e raggio  $r$ . Per ogni  $\delta \geq 0, \varepsilon > 0, A \subset \mathbb{R}^k$  sia

$$\mathcal{H}_\varepsilon^\delta(A) = \inf_{C_i \in \mathcal{F}} \sum_i \omega_\delta \left( \frac{\text{diam } C_i}{2} \right)^\delta$$

ove  $\mathcal{F}$  è una qualunque famiglia numerabile di sottoinsiemi di  $\mathbb{R}^k$  tale che

$$A \subset \bigcup_{C_i \in \mathcal{F}} C_i \quad \text{diam } C_i \leq \varepsilon \quad \forall C_i$$

e  $\omega_\delta$  è il volume della palla unitaria in  $\mathbb{R}^\delta$  se  $\delta$  è intero ( $\omega_0 = 1$ ), oppure una determinata costante se  $\delta$  non è intero.

DEFINIZIONE 1.1. La *misura di Hausdorff  $\delta$ -dimensionale* è definita da

$$\mathcal{H}^\delta(A) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^\delta(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{H}_\varepsilon^\delta(A)$$

è chiaro che il limite esiste eventualmente uguale a  $+\infty$  poiché  $\mathcal{H}_\varepsilon^\delta$  è monotona decrescente in  $\varepsilon$ .

OSSERVAZIONE 1.2. La misura  $\mathcal{H}^0$  è la misura cardinalità di un insieme.

OSSERVAZIONE 1.3. Poiché  $\text{diam } C_i = \text{diam } \overline{C_i}$ , possiamo anche richiedere nella definizione che i  $C_i$  siano chiusi senza che venga alterato il valore di  $\mathcal{H}^\delta(A)$ . Inoltre poiché per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un aperto  $U_i \supset C_i$  tale che  $\text{diam } U_i < \text{diam } C_i + \varepsilon/2^i$  possiamo prendere i  $C_i$  aperti, eccetto nel caso  $\delta = 0$ .

Evidentemente se  $A$  è totalmente limitato si ha  $\mathcal{H}_\varepsilon^\delta(A) < +\infty$ . Inoltre si vede immediatamente dalla definizione che vale

$$\mathcal{H}_\varepsilon^\delta(A \cup B) = \mathcal{H}_\varepsilon^\delta(A) + \mathcal{H}_\varepsilon^\delta(B) \quad \text{se } d(A, B) > 2\delta$$

quindi

$$\mathcal{H}^\delta(A \cup B) = \mathcal{H}^\delta(A) + \mathcal{H}^\delta(B) \quad \text{se } d(A, B) > 0.$$

Allora per il criterio di Caratheodory 1.1 tutti gli insiemi di Borel sono  $\mathcal{H}^\delta$ -misurabili. Usando l'osservazione 1.3 si ottiene inoltre che le misure  $\mathcal{H}^\delta$  sono Borel-regolari e invarianti per isometria.

Molte delle proprietà notevoli delle misure di Hausdorff si possono trovare in [RO], ricordiamo soltanto per i nostri scopi che in  $\mathbb{R}^k$  la misura  $\mathcal{H}^k$  coincide con la misura di Lebesgue:

TEOREMA 1.4.

$$\mathcal{L}^k(A) = \mathcal{H}^k(A) = \mathcal{H}_\varepsilon^k(A) \quad \text{per ogni } A \subset \mathbb{R}^k \text{ e } \varepsilon > 0.$$

## 2. Densità

DEFINIZIONE 2.1. Sia  $\mu$  una misura di Radon su uno spazio metrico  $X$ ,  $x \in X$  e sia  $A$  un arbitrario sottoinsieme di  $X$ .

Definiamo le densità  $n$ -dimensionali superiore e inferiore, rispettivamente  $\theta^{*n}(\mu, A, x)$  e  $\theta_*^n(\mu, A, x)$ , come

$$\theta^{*n}(\mu, A, x) = \limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu(A \cap \overline{B}_\rho(x))}{\omega_n \rho^n}$$

$$\theta_*^n(\mu, A, x) = \liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu(A \cap \overline{B}_\rho(x))}{\omega_n \rho^n}$$

dove  $\overline{B}_\rho(x)$  indica la palla chiusa.

Nel caso  $A = X$  trascureremo di indicare  $A$  nella notazione.

Se

$$\theta_*^n(\mu, A, x) = \theta^{*n}(\mu, A, x)$$

indicheremo il loro valore comune con  $\theta^n(\mu, A, x)$ , che diremo *densità  $n$ -dimensionale*.

Si può vedere facilmente che le densità sono funzioni boreliane nella  $x$  anche se  $A$  non è  $\mu$ -misurabile.

## 3. Funzioni Lipschitziane

DEFINIZIONE 3.1. Una funzione  $f : X \rightarrow Y$  tra due spazi metrici si dice *lipschitziana* o semplicemente *Lipschitz* se esiste una costante reale  $C$  tale che valga

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C d_X(x_1, x_2) \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X$$

La minima costante  $C$  tale che valga la disuguaglianza sopra si dice *costante di Lipschitz* di  $f$ , e si indica con  $Lip f$ .

Vale il teorema di estensione:

TEOREMA 3.2. Se  $A \subset X$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  è Lipschitz allora esiste una estensione lipschitziana  $\bar{f}$  a tutto  $X$  con la stessa costante di Lipschitz di  $f$ .

Enunciamo ora il *Teorema di Rademacher* riguardante la differenziabilità di funzioni Lipschitz in  $\mathbb{R}^k$  e il *Teorema di Approssimazione  $C^1$* .

Una loro dimostrazione può essere trovata nel libro di Simon [SI1].

TEOREMA 3.3. Ogni  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz è differenziabile per  $\mathcal{L}^{k-q.o.}$   $x \in \mathbb{R}^k$ .

TEOREMA 3.4. Sia  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz, e  $\varepsilon > 0$ . Esiste una funzione  $g \in C^1(\mathbb{R}^k)$  tale che

$$\mathcal{L}^k(\{x|f(x) \neq g(x)\} \cup \{x|\nabla f(x) \neq \nabla g(x)\}) < \varepsilon$$

dove  $\nabla f$  è dato dal teorema precedente.

#### 4. Sottovarietà di $\mathbb{R}^k$ e Formule di Area e Coarea

Sia d'ora in poi  $M$  una sottovarietà regolare di dimensione  $n$  embedded in  $\mathbb{R}^k$  e senza bordo.

Se  $\lambda$  è una trasformazione lineare di  $\mathbb{R}^k$  in sè, allora vale

$$\mathcal{L}^k(\lambda(A)) = |\det \lambda| \mathcal{L}^k(A)$$

Più generalmente se  $\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $m \geq n$ , allora  $\lambda(\mathbb{R}^n) \subset F$  dove  $F$  è un sottospazio  $n$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^m$ ; cambiando base ortonormale posso vederla come una trasformazione da  $\mathbb{R}^n$  in sè e dunque

$$\mathcal{L}^n|_F(\lambda(A)) = \mathcal{H}^n(\lambda(A)) = \sqrt{|\det(\lambda^* \circ \lambda)|} \mathcal{H}^n(A) \quad A \subset \mathbb{R}^n$$

dove  $\lambda^* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  indica l'aggiunta di  $\lambda$ .

Usando un argomento di approssimazione si ottiene la *formula dell'area*.

TEOREMA 4.1. Sia  $n \leq m$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  una mappa  $C^1$  iniettiva. Allora

$$\mathcal{H}^n(f(A)) = \int_A Jf d\mathcal{H}^n \quad \forall \mathcal{H}^n - \text{misurabile } A \subset M$$

dove  $Jf$  è il jacobiano di  $f$ , definito da

$$(4.1) \quad Jf(x) = \sqrt{|\det(df_x^* \circ df_x)|}$$

e  $df_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$  è il differenziale di  $f$ . Se  $f$  non è iniettiva vale la cosiddetta formula dell'area generale

$$\int_A Jf d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{f^{-1}(y)} d\mathcal{H}^0 d\mathcal{H}^n(y).$$

Più in generale vale il

TEOREMA 4.2. Sia  $n \leq m$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  una mappa  $C^1$ . Allora, per ogni funzione  $g$  non negativa e  $\mathcal{H}^n$ -misurabile su  $M$  si ha

$$(4.2) \quad \int_M g Jf d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{f^{-1}(y)} g d\mathcal{H}^0 d\mathcal{H}^n(y).$$

Vediamo ora un'altra formula, che vale nel caso in cui sia  $n > m$ , la *formula di coarea*.

Con ragionamenti ancora basati sull'approssimazione lineare si ottiene il

TEOREMA 4.3. Sia  $n > m$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  una mappa  $C^1$ . Allora, per ogni funzione  $g$  non negativa e  $\mathcal{H}^n$ -misurabile su  $M$  si ha

$$(4.3) \quad \int_M g J^* f d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{f^{-1}(y)} g d\mathcal{H}^{n-m} d\mathcal{H}^m(y)$$

dove  $J^* f$  è il cojacobiano di  $f$ , definito da

$$J^* f(x) = \sqrt{\det(df_x \circ df_x^*)}$$

e  $df_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^m$  è il differenziale di  $f$ .

Queste due formule sono fonte di numerosi risultati nella teoria geometrica della misura, ci limitiamo a mostrarne uno che ci riguarda direttamente

TEOREMA 4.4. Data  $M$  come sopra,  $\mathcal{H}^n$  coincide con la misura canonica di volume della varietà.

DIMOSTRAZIONE. È chiaro che basta verificarlo localmente.

Sia  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$  una carta locale di  $M$ , con  $\Omega$  aperto in  $\mathbb{R}^n$  e  $\Phi(\Omega) = M \cap \Gamma$ ,  $\Gamma$  aperto in  $\mathbb{R}^k$ . Se  $A$  è di Borel in  $M \cap \Gamma$ , la sua misura canonica è

$$\mu(A) = \int_{\tilde{A}} \sqrt{g} d\mathcal{L}^n$$

dove  $\tilde{A} = \Phi^{-1}(A)$  e  $g = \det(g_{ij})$ ,  $g_{ij} = \langle \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \rangle$ . Non è difficile verificare che  $\sqrt{g} = J\Phi$ , con  $J\Phi$  definito dalla (4.1). Dunque per la formula dell'area

$$\int_{\tilde{A}} \sqrt{g} d\mathcal{L}^n = \mathcal{H}^n(\phi(\tilde{A})) = \mathcal{H}^n(A)$$

da cui  $\mu(A) = \mathcal{H}^n(A)$ . □

## 5. Insiemi Rettificabili

Gli insiemi rettificabili ci forniscono la giusta nozione di "varietà generalizzata" che ci servirà in seguito per definire i varifold.

L'importanza di questi insiemi nella teoria geometrica della misura fu riconosciuta da De Giorgi nel lavoro [DG2], nel quale si dimostra che la derivata distribuzionale di un insieme di perimetro finito si concentra su un insieme rettificabile di dimensione  $n - 1$ .

Vediamo alcune proprietà di base e la loro caratterizzazione mediante una proprietà di esistenza di piano tangente. Nel seguito vedremo anche come si estendono le formule di area e coarea a questi insiemi.

Per questa sezione faremo riferimento al libro di Simon [SI1].

DEFINIZIONE 5.1. Un insieme  $M \subset \mathbb{R}^k$  si dice *numerabilmente  $n$ -rettificabile* se

$$M \subset M_0 \cup \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j(\mathbb{R}^n) \right)$$

dove  $M_0$  è un insieme di  $\mathcal{H}^n$ -misura nulla e le  $F_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  sono funzioni lipschitziane. Nel seguito useremo semplicemente il termine  *$n$ -rettificabili* per indicare tali insiemi.

OSSERVAZIONE 5.2. Per il Teorema 3.2, la  $n$ -rettificabilità equivale a

$$M = M_0 \cup \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} F_j(A_j) \right)$$

dove  $M_0$  è un insieme  $\mathcal{H}^n$ -trascurabile,  $F_j : A_j \rightarrow \mathbb{R}^k$  sono Lipschitz e  $A_j \subset \mathbb{R}^n$ .

Usando la formula dell'area e il Teorema 3.4 si ottiene una caratterizzazione meno evidente e più interessante.

PROPOSIZIONE 5.3.  $M$  è numerabilmente  $n$ -rettificabile se e soltanto se può essere rappresentato nel seguente modo

$$M = M_0 \cup \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j \right)$$

con  $\mathcal{H}^n(M_0) = 0$  e  $K_j$  compatti a due a due disgiunti, ciascuno contenuto in una varietà di classe  $C^1$ .

Definiamo ora una nozione di spazio tangente per un insieme rettificabile.

DEFINIZIONE 5.4. Sia  $M$  un sottoinsieme  $\mathcal{H}^n$ -misurabile di  $\mathbb{R}^k$  e  $\theta$  una funzione positiva su  $M$  localmente  $\mathcal{H}^n$ -integrabile. Diciamo che un sottospazio  $n$ -dimensionale  $P$  di  $\mathbb{R}^k$  è il piano tangente approssimato a  $M$  in  $x$  rispetto alla funzione  $\theta$  se, posto  $\eta_{x,\lambda}(y) = x + \lambda y$ , vale

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\eta_{x,\lambda}(M)} f(y) \theta(x + \lambda y) d\mathcal{H}^n(y) = \theta(x) \int_P f(y) d\mathcal{H}^n(y)$$

per ogni  $f \in C_c(\mathbb{R}^k)$ . Operando il cambio di variabile  $z = x + \lambda y$  ciò è equivalente a richiedere che

$$(5.1) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-n} \int_M f\left(\frac{z-x}{\lambda}\right) \theta(z) d\mathcal{H}^n(z) = \theta(x) \int_P f(y) d\mathcal{H}^n(y)$$

per ogni  $f \in C_c(\mathbb{R}^k)$ .

OSSERVAZIONE 5.5. Notiamo che la condizione (5.1) è equivalente a dire che la misura  $\mu = \theta \mathcal{H}^n \llcorner M$  ha spazio tangente approssimato  $P$  in  $x$ , nel senso della definizione 8.2.

Vediamo allora il teorema che assicura l'esistenza dello spazio tangente per  $\mathcal{H}^n - q.o. x \in M$ , [SI1].

TEOREMA 5.6. Sia  $M$   $\mathcal{H}^n$ -rettificabile, sia  $\theta : M \rightarrow (0, +\infty)$ , localmente  $\mathcal{H}^n \llcorner M$ -integrabile e sia  $\mu = \theta \mathcal{H}^n \llcorner M$ . Allora per  $\mathcal{H}^n - q.o. x \in M$  esiste il piano tangente approssimato  $apT_x M$  rispetto a  $\theta$ .

Inoltre

1.  $x \mapsto P(x)$  è  $\mu$ -misurabile;
2. per ogni superficie  $n$ -dimensionale  $\Gamma$  si ha  $P(x) = T_x \Gamma$  per  $\mathcal{H}^n - q.o. x \in \Gamma \cap M$ ;
3. per ogni scelta di  $i$  e  $j$  in  $\{1, \dots, k\}$  si ha  $P_{ij}(x) = \langle ap\nabla^\mu x_i, e_j \rangle$  per  $\mu - q.o. x \in \mathbb{R}^k$ .

Nel teorema precedente un  $n$ -piano  $P$  in  $\mathbb{R}^k$  è identificato con la matrice  $P_{ij}$  associata alla proiezione su di esso (vedi la sezione 3.1).

Sulla base di questo teorema possiamo allora parlare dello spazio tangente approssimato  $apT_x M$  ad un  $n$ -rettificabile, univocamente determinato  $\mathcal{H}^n$ -quasi ovunque. Osserviamo inoltre che la 1 segue da 2 e dalla proposizione 5.3.

### 6. Operatori Tangenziali su Varietà e Formula della Divergenza

Sia  $M$  una  $n$ -varietà  $C^1$  embedded in  $\mathbb{R}^k$  e introduciamo alcuni operatori differenziali tangenziali che ci serviranno in seguito.

DEFINIZIONE 6.1. Data  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^1$ , definiamo il *gradiente tangenziale* di  $f$  in  $x_0 \in M$  come

$$\nabla^M f(x_0) = \pi_M \nabla \tilde{f}(x_0)$$

dove  $\tilde{f}$  è una arbitraria estensione  $C^1$  di  $f$  in un intorno di  $x_0$  e  $\pi_M$  è la proiezione ortogonale di  $\mathbb{R}^k$  su  $T_{x_0}M$ .

OSSERVAZIONE 6.2. È facile vedere che  $\nabla^M f(x_0)$  è indipendente dall'estensione scelta: la differenza di due qualunque estensioni è nulla in  $M$ , e quindi il suo differenziale si deve annullare sul piano tangente a  $M$  e il gradiente tangenziale è nullo.

OSSERVAZIONE 6.3. Se  $f \in C^1(U_{x_0})$ , dove  $U_{x_0}$  è un intorno di  $x_0$  in  $\mathbb{R}^k$  e  $P$  è un  $n$ -piano in  $\mathbb{R}^k$ , possiamo definire  $\nabla^P f(x_0) = \pi_P \nabla f(x_0)$ .

DEFINIZIONE 6.4. Analogamente se  $f : M \rightarrow N$  è di classe  $C^1$  tra due varietà  $M$  e  $N$ , definiamo il *differenziale tangenziale* di  $f$  in  $x_0 \in M$  come

$$d_{x_0}^M f = d_{x_0} \tilde{f}|_{T_{x_0}M}$$

con  $\tilde{f}$  definita sopra.

È chiaro che le osservazioni 6.2 e 6.3 sono valide anche in questo caso.

DEFINIZIONE 6.5. Definiamo la *divergenza tangenziale* di un campo vettoriale  $X \in C^1(M, \mathbb{R}^k)$  come

$$\operatorname{div}^M X(x_0) = \sum_{i=1}^k \nabla_i^M X_i(x_0)$$

dove  $X_i$  sono le sue componenti nella base canonica.

È facile vedere che la divergenza tangenziale è indipendente dalla base ortonormale nella quale la si calcola, quindi scegliendo una base  $\{v_1 \dots v_n, \nu^1 \dots \nu^{k-n}\}$ , dove i  $\{v_i\}$  sono una base ortonormale dello spazio tangente  $T_x M$  e i  $\{\nu^j\}$  dello spazio normale  $N_x M$  alla varietà in  $x$ , la si può esprimere come

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^M X(x) &= \sum_{i=1}^n \langle v_i, \nabla X_i(x) \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \langle v_i, d_x X(v_i) \rangle \end{aligned}$$

con  $X_i$  componenti nella base  $\{v_i\}$ .

OSSERVAZIONE 6.6. Per campi  $X$  tangenziali la divergenza tangenziale così definita coincide con la divergenza intrinseca nella varietà riemanniana astratta associata.

Ancora valgono le stesse osservazioni 6.2, 6.3 e poiché la useremo estensivamente nel seguito, definiamo esplicitamente per una funzione  $f \in C^1(U_{x_0})$

$$\operatorname{div}^P X(x_0) = \sum_{i=1}^k \nabla_i^P X_i(x_0).$$

Con queste notazioni vale il teorema della divergenza (vedi [DC]).

**TEOREMA 6.7.** *Data  $M$ ,  $n$ -varietà  $C^1$  embedded in  $\mathbb{R}^k$  con frontiera  $\partial M$  di classe  $C^1$  e  $X$  campo tangente  $C_c^1$  definito su di essa, si ha*

$$\int_M \operatorname{div}^M X \, d\mathcal{H}^n = - \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

ove  $\nu$  è la normale interna al bordo della varietà.

Ci chiediamo ora come si rappresenta

$$\int_M \operatorname{div}^M X \, d\mathcal{H}^n$$

se il campo  $X$  non è necessariamente tangente.

Ovviamente basta considerare campi normali alla varietà.

**DEFINIZIONE 6.8.** Il vettore  $H$ , *curvatura media* di una varietà  $M$  di classe  $C^2$  è definito localmente da

$$H(x) = - \sum_{j=1}^{k-n} (\operatorname{div}^M \nu^j(x)) \nu^j(x)$$

con  $\{\nu^j\}$  campi regolari su  $M$ , ortonormali e base locale di  $N_x M$ .

$H$  è un vettore normale. Infatti, presi  $\{v_i\}$  e  $\{\nu^j\}$ , campi regolari ortonormali definiti in un intorno di  $x$  in  $M$ , e rispettivamente basi dello spazio tangente e normale, si ha

$$\begin{aligned} H &= - \sum_{j=1}^{k-n} \left( \sum_{i=1}^n \langle v_i, d_x^M \nu^j(v_i) \rangle \right) \nu^j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{k-n} \langle d_x^M v_i(v_i), \nu^j \rangle \nu^j \\ &= \sum_{i=1}^n (d_x^M v_i, (v_i))^\perp \\ &= \sum_{i=1}^n B_x(v_i, v_i) \\ &= \operatorname{tr} B_x \end{aligned}$$

dove  $B_x : T_x M \times T_x M \rightarrow N_x M$  è una forma bilineare definita da

$$B_x(v, w) = (d_x^M v(w))^\perp$$

detta *seconda forma fondamentale* di  $M$  in  $x$ , e che ritroveremo in seguito, parlando dei varifold di Hutchinson.

Calcoliamo ora la divergenza tangenziale della componente normale di un campo  $X$ :



$$\operatorname{div}^M X^\perp = \sum_{j=1}^{k-n} \langle X, \nu^j \rangle \operatorname{div}^M \nu^j = - \langle X, H \rangle$$

sfruttando la formula sopra. Allora per ogni campo  $X$  regolare in  $\mathbb{R}^k$  si ha

$$\operatorname{div}^M X = \operatorname{div}^M X^\top - \langle X, H \rangle.$$

Quindi per ogni  $X \in C_c^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$  e ogni varietà  $M$  di classe  $C^2$  con frontiera regolare, embedded in  $\mathbb{R}^k$  vale la formula di integrazione per parti

$$(6.1) \quad \int_M \operatorname{div}^M X d\mathcal{H}^n = - \int_M \langle X, H \rangle d\mathcal{H}^n - \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1}.$$

### 7. Operatori Differenziali e Formule di Area e Coarea per Rettificabili

Una volta definito il piano tangente ad un rettificabile possiamo enunciare le generalizzazioni degli operatori del capitolo precedente che valgono nel contesto più generale degli insiemi rettificabili.

**TEOREMA 7.1.** *Sia  $M$   $\mathcal{H}^n$ -rettificabile, sia  $\theta : M \rightarrow (0, +\infty)$ , localmente  $\mathcal{H}^n \llcorner M$ -integrabile e sia  $\mu = \theta \mathcal{H}^n \llcorner M$ . Allora, ogni funzione Lipschitz  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  è  $\mu$ -apdifferenziabile  $\mu$ -quasi ovunque in  $\mathbb{R}^k$ . Inoltre per  $\mu$ -q.o.  $x \in \mathbb{R}^k$  il vettore  $ap\nabla^\mu f(x)$  non dipende dalla scelta di  $\theta$  e verrà quindi indicato con  $\nabla^M f(x)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Se  $M$  è una varietà di classe  $C^1$  la tesi segue facilmente, mediante carte locali, dalla formula dell'area e dal Teorema di Rademacher 3.3. Se  $M$  è un sottoinsieme di Borel di una varietà  $\Gamma$  di classe  $C^1$ , la tesi si ottiene osservando che  $\nabla^\mu f(x)$  esiste in ogni punto  $x \in M$  ove esiste il gradiente di  $f$  rispetto alla misura  $\sigma = \mathcal{H}^n \llcorner \Gamma$  e vale

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu(B_\rho(x))}{\sigma(B_\rho(x))} = \theta(x).$$

Il fatto che la formula sopra valga per  $\mathcal{H}^n$ -q.o.  $x \in M$  segue facilmente dal Teorema 5.1.

La tesi nel caso generale si ottiene sfruttando il caso precedente, la decomposizione data dalla proposizione 5.3 ed il fatto che  $D_\mu \mu \llcorner K_i = 1$  per  $\mathcal{H}^n$ -q.o.  $x \in K_i$ .

Infine l'indipendenza di  $ap\nabla^\mu f(x)$  da  $\theta$  segue direttamente dalla dimostrazione qui vista. □

**OSSERVAZIONE 7.2.** Definiamo  $d_x^M f : apT_x M \rightarrow \mathbb{R}$  come l'applicazione lineare individuata dal prodotto scalare con  $\nabla^M f(x)$  (nei punti dove questo esiste). Allo stesso modo, ragionando componente per componente, si può definire  $d_x^M f$  quando  $f$  è una mappa Lipschitz vettoriale.

È dunque chiaro a cosa ci riferiremo parlando di *gradiente e differenziale tangenziale di una funzione Lipschitz su un rettificabile*.

La divergenza tangenziale è definita in modo analogo a quella delle varietà.

Possiamo ora enunciare le formule di area e coarea per insiemi rettificabili.

TEOREMA 7.3. Siano  $n \leq m$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  mappa Lipschitz,  $M$   $n$ -rettificabile in  $\mathbb{R}^k$  e  $n \leq m$  e  $g$  funzione non negativa e  $\mathcal{H}^n$ -misurabile su  $M$ . Allora

$$(7.1) \quad \int_M g J_M f \, d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{f^{-1}(y)} g \, d\mathcal{H}^0 \, d\mathcal{H}^n(y)$$

$$J_M f(x) = \sqrt{\det(df_x^{M*} \circ df_x^M)}.$$

TEOREMA 7.4. Siano  $n > m$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$  mappa Lipschitz,  $M$   $n$ -rettificabile in  $\mathbb{R}^k$ ,  $g$  funzione non negativa e  $\mathcal{H}^n$ -misurabile su  $M$ . Allora per  $\mathcal{H}^n$ -q.o.  $y \in \mathbb{R}^m$  l'insieme  $f^{-1}(y)$  è  $\mathcal{H}^{n-m}$ -rettificabile e vale la formula

$$(7.2) \quad \int_M g J_M^* f \, d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}^m} \int_{f^{-1}(y)} g \, d\mathcal{H}^{n-m} \, d\mathcal{H}^m(y)$$

dove  $J_M^* f$  è il cojacobiano di  $f$ , definito da

$$J_M^* f(x) = \sqrt{\det(df_x^M \circ df_x^{M*})}.$$

OSSERVAZIONE 7.5. Si noti, come avevamo osservato, il parallelismo dei rettificabili e delle mappe Lipschitz con i loro analoghi regolari.

## Teoria dei Varifold

In molti problemi del calcolo delle variazioni i funzionali da minimizzare dipendono oltre che da funzioni definite su varietà immerse in  $\mathbb{R}^k$ , anche da quantità associate alle stesse varietà, come area, curvatura, orientazione. Un classico esempio è il problema isoperimetrico, cioè cercare tra le superfici in  $\mathbb{R}^3$  quella che, con area fissata, racchiude il massimo volume, oppure il problema di Plateau: trovare la superficie di area minima che si appoggi su una data curva.

Per studiare questo tipo di problemi con i metodi diretti del calcolo delle variazioni, si è pensato di allargare lo spazio delle varietà regolari a spazi di oggetti deboli, dotati di buone proprietà di compattezza.

La nostra attenzione si concentrerà sulle possibili generalizzazioni del concetto di curvatura, anche perché come vedremo questa interviene immediatamente nello studio dei problemi di area minima. Vedremo proprio come da questi problemi nascano i Varifold di Allard, dotati di curvatura media misura. Descriveremo la definizione debole di seconda forma fondamentale data da Hutchinson, e nel prossimo capitolo analizzeremo una nostra definizione che generalizza quella di Hutchinson.

### 1. Notazioni e Definizioni

Sia  $G_{n,k}$  la Grassmanniana degli  $n$ -piani in  $\mathbb{R}^k$  e definiamo una distanza su  $G_{n,k}$  ponendo:

$$d(T, S) = \|p_T - p_S\| = \left( \sum_{i,j=1}^k |p_T^{ij} - p_S^{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

dove  $p_T$  è la proiezione ortogonale su  $T$ , elemento di  $G_{n,k}$ , e  $p_T^{ij}$  sono gli elementi della matrice associata nella base ortonormale standard di  $\mathbb{R}^k$ .

Con questa metrica  $G_{n,k}$  è uno spazio topologico compatto, localmente euclideo e possiede una struttura di varietà differenziale analitica.

Se  $A$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^k$  definiamo  $G_n(A) = A \times G_{n,k}$ ; se  $A$  è compatto ovviamente anche  $G_n(A)$  è compatto e inoltre se  $A$  è aperto  $G_n(A)$  è una varietà regolare di dimensione  $k + n(k - n)$ .

**DEFINIZIONE 1.1.** Dato  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^k$ , per  $n$ -varifold in  $\Omega$  intenderemo una misura di Radon  $V$  su  $G_n(\Omega)$ .

- Per ogni  $n$ -varifold  $V$  in  $\Omega$ , è definita una misura di Radon  $\mu_V$  in  $\Omega$ , detta *misura peso*, con la formula:

$$\mu_V(A) = \pi_{\#} V(A) = V(\pi^{-1}(A)) \quad A \text{ boreliano in } \Omega$$

dove  $\pi : G_n(\Omega) \rightarrow \Omega$  è la proiezione su  $\Omega$ .

- La *massa* di  $V$  è definita da:

$$\mathcal{M}(V) = V(G_n(\Omega)) = \mu_V(\Omega).$$

- Se  $B$  è un sottoinsieme di Borel di  $\Omega$ , il *varifold restrizione* di  $V$  a  $B$  è la misura di Radon  $V \llcorner G_n(B)$  cioè

$$(V \llcorner G_n(B))(A) = V(A \cap G_n(B)) \quad A \text{ boreliano in } G_n(\Omega).$$

- Data  $f : \Omega \rightarrow \Gamma$  diffeomorfismo regolare tra aperti di  $\mathbb{R}^k$ , posso definire il *varifold immagine* di  $V$  in  $\Gamma$  per  $f$  come

$$(f_{\#}V)(A) = V(F^{-1}(A)) \quad A \text{ boreliano in } G_n(\Omega)$$

$$F^{-1}(A) = \{(x, P) \in G_n(\Gamma) \mid (f(x), df_x(P)) \in A\}$$

dove  $d_x f(P)$  indica il sottospazio lineare immagine di  $P$ .

DEFINIZIONE 1.2. Diciamo che una successione di  $n$ -varifold  $\{V_i\}$  in  $\Omega$ , aperto di  $\mathbb{R}^k$ , converge al  $n$ -varifold  $V$  in  $\Omega$  se  $V_i \rightarrow V$  come misure di Radon rispetto alla convergenza debole in  $G_n(\Omega)$ .

Diamo infine la seguente

DEFINIZIONE 1.3. Indicheremo con  $VarTan(V, x)$  l'insieme dei limiti deboli dei varifold

$$V_{x,\rho} = \frac{1}{\rho^n} \lambda_{x,\rho\#} V$$

per  $\rho \rightarrow 0$ , ove  $\lambda_{x,\rho}(y) = \frac{y-x}{\rho}$ .

Con un abuso di notazione, nel caso  $VarTan(v, x)$  consista di un unico elemento, indicheremo con  $VarTan(V, x)$  tale elemento.

## 2. Varifold Rettificabili

Sia  $M$  una  $n$ -varietà  $C^1$  embedded in  $\mathbb{R}^k$ , e sia  $\mu = \mathcal{H}^n \llcorner M$ . Possiamo allora definire in modo naturale un  $n$ -varifold  $V_M$  associato a  $M$  ponendo

$$V_M(A) = (Id \times P)_{\#} \mu(A)$$

per ogni insieme  $A$  contenuto in  $G_n(\mathbb{R}^k)$ , ove  $Id \times P$  è l'applicazione continua che associa ad  $x \in \mathbb{R}^k$  la coppia  $(x, T_x M)$ . In particolare per ogni funzione di Borel limitata  $\varphi(x, P) : G_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$  abbiamo

$$\int_{G_n(\mathbb{R}^k)} \varphi dV_M = \int_M \varphi(x, T_x M) d\mathcal{H}^n(x).$$

Sia ora  $M$  un  $n$ -rettificabile in  $\mathbb{R}^k$  e  $\theta$  una funzione boreliana da  $M$  in  $(0, +\infty)$ , localmente integrabile rispetto a  $\mathcal{H}^n \llcorner M$ . Posto  $\mu = \theta \mathcal{H}^n \llcorner M$ , definiamo

$$V_{M,\theta}(A) = (Id \times P)_{\#} \mu(A) =$$

per ogni insieme  $A \subset G_n(\mathbb{R}^k)$ , dove questa volta  $Id \times P$  è l'applicazione  $\mu$ -misurabile (vedi il Teorema 5.6) che associa a  $x \in \mathbb{R}^k$  la coppia costituita da  $x$  e dal piano tangente approssimato  $P(x) = apT_x M$  (vedi la definizione 5.4).

Essendo  $Id \times P$   $\mu$ -misurabile,  $V_{M,\theta}$  è una misura esterna e di Radon in  $G_n(\mathbb{R}^k)$ .

Per ogni funzione boreliana limitata  $\varphi(x, P) : G_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow \mathbb{R}$  vale la formula di integrazione

$$\int_{G_n(\mathbb{R}^k)} \varphi dV_{M,\theta} = \int_M \varphi(x, \text{ap}T_x M) \theta(x) d\mathcal{H}^n(x).$$

Ricordiamo questa formula perché numerose volte nel seguito interscambieremo le due integrazioni nella misura  $V_{M,\theta}$  e nella misura  $\mu$ , come indicato sopra.

Questa classe di varifold, che ovviamente comprende le varietà embedded in  $\mathbb{R}^k$ , si dice classe dei *varifold rettificabili*. Ci si convince facilmente che non tutti i varifold sono di questo tipo, ma esistono teoremi che danno condizioni perché ciò avvenga, detti appunto teoremi di rettificabilità.

La misura peso per un varifold rettificabile  $V \equiv V_{M,\theta}$  è data da  $\mu = \theta \mathcal{H}^n \llcorner M$ . Infatti

$$\mu_V = \pi_{\#}(V_{M,\theta}) = \pi_{\#}(Id \times P)_{\#}\mu = (\pi \circ (Id \times P))_{\#}\mu = \mu$$

La funzione  $\theta$  è detta *funzione densità* del varifold. Il nome è motivato dalla formula (vedi le osservazioni 8.3, 5.5)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mu(B_\lambda(x))}{\omega_n \lambda^n} = \theta(x) \quad \text{per } \mathcal{H}^n - q.o. x \in M.$$

Se la funzione densità di un varifold rettificabile è intera, il varifold si dice *varifold intero*. È inoltre chiaro che due varifold rettificabili  $V(M, \theta)$  e  $V(M', \theta')$  sono uguali se e solo se

$$\mathcal{H}^n(M \Delta M') = 0 \quad e \quad \theta(x) = \theta'(x) \quad \mathcal{H}^n - q.o. x \in \mathbb{R}^k.$$

OSSERVAZIONE 2.1. Intuitivamente, la misura  $V_{M,\theta}$  è concentrata sull'immagine di  $Id \times P$  e questo implica che ogni applicazione  $V$ -misurabile dipende solo in modo fittizio da  $P$ . Vediamo di precisare meglio queste nozioni nella seguente

PROPOSIZIONE 2.2. Sia  $V_{M,\theta}$  un  $n$ -varifold rettificabile. Allora, l'immagine di  $Id \times P$  è  $V_{M,\theta}$ -misurabile e  $V_{M,\theta}$  è concentrata su di esso. Data inoltre  $\varphi$   $V_{M,\theta}$ -misurabile, la funzione  $\hat{\varphi}(x) = \varphi(x, P(x))$  coincide  $V_{M,\theta}$ -quasi ovunque con  $\varphi$  e, come funzione di  $x$ , è  $\mu$ -misurabile.

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\Gamma$  l'immagine di  $Id \times P$  e poniamo  $V \equiv V_{M,\theta}$ . Per dimostrare che  $\Gamma$  è  $V$ -misurabile e  $V$  è concentrata su  $\Gamma$ , basta osservare che  $\mu$ -quasi tutto  $\mathbb{R}^k$  si ricopre con compatti  $K_i$  tali che  $Id \times P|_{K_i}$  è continua, quindi i compatti  $C_i = (Id \times P)(K_i)$  ricoprono  $V$ -quasi tutto  $\Gamma$ . L'insieme  $\{\hat{\varphi} \neq \varphi\}$  è contenuto in  $G_n(\mathbb{R}^k) \setminus \Gamma$  ed è quindi  $V$ -trascurabile. Sia inoltre  $\psi$  boreliana e coincidente con  $\varphi$   $V$ -quasi ovunque. Allora  $\hat{\psi}(x) = \psi(x, P(x))$  è  $\mu$ -misurabile e coincide con  $\hat{\varphi}$   $\mu$ -quasi ovunque, quindi anche  $\hat{\varphi}$  è  $\mu$ -misurabile.  $\square$

Possiamo definire ora lo *spazio tangente* al varifold rettificabile  $V \equiv V_{M,\theta}$ .

DEFINIZIONE 2.3. Usando la definizione 5.4, diciamo che nei punti  $x$  dove esiste il piano tangente approssimato  $P$  al rettificabile  $M$  rispetto alla funzione  $\theta$ , il varifold  $V_{M,\theta}$  ammette piano tangente  $P(x) = P$  con molteplicità  $\theta(x)$ .

È chiaro allora per il Teorema 5.6 che il piano tangente esiste per  $\mu_V - q.o. x \in \mathbb{R}^k$  e lo denoteremo d'ora in poi con  $P(x)$ , funzione unicamente determinata a meno di insiemi di  $\mu_V$ -misura nulla.

OSSERVAZIONE 2.4. Non è difficile dimostrare che per tutti i punti  $x^0$  tali che esista il piano tangente approssimato  $P(x^0)$  di  $V_{M,\theta}$  e che siano punti di Lebesgue per l'applicazione  $P(x)$  rispetto alla misura  $\mu_V$ , si ha che  $VarTan(V, x^0)$  consiste del solo varifold  $V_{P(x^0),\theta(x^0)}$ .

Ovviamente se invece di  $\mathbb{R}^k$  consideriamo un generico aperto  $\Omega$ , tutte le definizioni e i risultati precedenti rimangono invariati.

Ricorrendo alla teoria della misura, abbiamo dunque ampliato lo spazio delle varietà regolari e abbiamo definito una convergenza su di esse che, come vedremo, ha buone proprietà di compattezza.

Dobbiamo dare ora per questi oggetti una nozione distribuzionale di curvatura, e per fare questo studieremo delle formule di integrazione per parti sulle varietà regolari che la coinvolgono.

La formula storicamente più significativa e dalla quale si sono essenzialmente originate tutte le altre, è la formula della divergenza tangenziale (6.1).

Nella prossima sezione vedremo proprio il suo utilizzo in questo senso.

### 3. Varifold di Allard e Curvatura Media Generalizzata

Vediamo come lo studio del funzionale area ha portato ad una definizione "debole" di curvatura media per un varifold: supponiamo di volere cercare i punti critici del funzionale

$$A^\Omega(M) = \int_{M \cap \Omega} d\mathcal{H}^n = \text{Area di } \Omega \cap M$$

definito sulle  $n$ -varietà regolari embedded in  $\mathbb{R}^k$ , con  $\Omega$  aperto generico di  $\mathbb{R}^k$ .

Consideriamo una  $n$ -varietà regolare  $M$  embedded in  $\mathbb{R}^k$  e sia  $\Phi_t, t \in (-\varepsilon, +\varepsilon)$  una famiglia di diffeomorfismi  $C^\infty$  di  $\Omega$  in se stesso con le seguenti proprietà:

1.  $\Phi_t(x)$  è una mappa  $C^\infty$  in  $t$ , per ogni  $x \in \Omega$  fissato;
2.  $\Phi_0 = Id_\Omega$ ;
3. esiste un compatto  $K$  contenuto in  $\Omega$  tale che  $\forall t, \Phi_t|_{cK} = Id_{cK}$ .

È chiaro che considerando  $X(x) = \left. \frac{d}{dt} \Phi_t(x) \right|_{t=0}$  otteniamo un campo  $C^\infty$  a supporto compatto che chiameremo *generatore* della famiglia  $\Phi_t$ . Viceversa dato un campo  $X \in C^\infty$  a supporto compatto in  $\Omega$ ,  $\Phi_t(x) = x + tX(x)$  per  $t$  abbastanza piccolo è un diffeomorfismo  $C^\infty$  di  $\Omega$  in se con le proprietà 1,2,3, il cui generatore è proprio  $X$ .

Ovviamente  $M_t = \Phi_t(M)$  è una nuova  $n$ -varietà, ottenuta "perturbando"  $M$ . Calcoliamo la variazione

$$\left. \frac{d}{dt} A_t^\Omega \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \int_{M_t \cap \Omega} d\mathcal{H}^n \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \int_M J_n^M \Phi_t(x) d\mathcal{H}^n(x) \right|_{t=0}$$

$$J_n^M \Phi_t(x) = \sqrt{\det(d_x^M \Phi_t^* \circ d_x^M \Phi_t)}$$

sfruttando la formula dell'area già vista in precedenza. È chiaro che posso portare la derivazione sotto il segno di integrale

$$\frac{d}{dt} J_n^M \Phi_t(x) = \frac{1}{2J_n^M \Phi_t(x)} \frac{d}{dt} \det A(t) \quad \text{con } A(t) = d_x^M \Phi_t^* \circ d_x^M \Phi_t.$$

Osservando che  $A(0) = Id$ , sfruttando la formula

$$\frac{d}{dt} \det A(t) = \det A(t) \operatorname{tr}(A'(t) \circ A^{-1}(t))$$

si ottiene:

$$\left. \frac{d}{dt} J_n^M \Phi_t(x) \right|_{t=0} = \frac{1}{2} \sqrt{\det A(0)} \operatorname{tr}(A'(0) \circ A^{-1}(0)) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A'(0).$$

Prendendo  $\{v_i\}$  base di  $T_x M$  abbiamo

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} A'(0) &= \left. \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \langle v_i, (d_x^M \Phi_t^* \circ d_x^M \Phi_t)(v_i) \rangle \right|_{t=0} \\ &= \left. \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \|(d_x^M \Phi_t)(v_i)\|^2 \right|_{t=0} \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \left. \langle v_i, \frac{d}{dt} d_x^M \Phi_t(v_i) \rangle \right|_{t=0} \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \langle v_i, d_x^M X(v_i) \rangle \\ &= 2 \sum_{i=1}^n \langle v_i, \frac{\partial X}{\partial v_i}(x) \rangle \\ &= 2 \operatorname{div}^M X(x) \end{aligned}$$

da cui (vedi la formula (6.1))

$$(3.1) \quad \left. \frac{d}{dt} A_t^\Omega \right|_{t=0} = \int_M \operatorname{div}^M X \, d\mathcal{H}^n = - \int_M \langle X, H \rangle \, d\mathcal{H}^n - \int_{\partial M} \langle X, \nu \rangle \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

dove  $H$  è la curvatura media della varietà e  $\nu$  è la normale interna alla frontiera  $\partial M$ .

Si vede allora che la variazione prima del funzionale area dipende solo dal generatore della famiglia di diffeomorfismi. Una varietà che sia un punto critico del funzionale deve necessariamente avere allora  $H = 0$  in  $\Omega$  e  $\partial M \cap \Omega = \emptyset$ , per l'arbitrarietà di  $X$ .

È possibile ripetere gli stessi conti per un varifold rettificabile  $V \equiv V_{M,\theta}$  usando la formula dell'area generale 7.1 e la definizione di varifold immagine. Si giunge al risultato analogo

$$\left. \frac{d}{dt} A_t^\Omega \right|_{t=0} = \int_M \operatorname{div}^{P(x)} X \theta(x) \, d\mathcal{H} = \int_{G_n(\Omega)} \operatorname{div}^P X \, dV$$

Il problema è che non è detto che per un varifold rettificabile si possa "scaricare" la divergenza tangenziale per mezzo della curvatura media e del bordo, come nella formula (3.1) per le varietà regolari.

Vediamo dunque l'idea di Allard. Supponiamo di avere un  $n$ -varifold  $V$  in  $\Omega$ , aperto di  $\mathbb{R}^k$  e supponiamo che il funzionale lineare sui campi  $C^\infty$  a supporto compatto in  $\Omega$ :

$$F(X) = \int_{G_n(\Omega)} \operatorname{div}^P X(x) dV(x, P)$$

sia localmente limitato. Per il Teorema di Riesz esiste una misura di Radon vettoriale  $\delta V$  in  $\Omega$ , a valori in  $\mathbb{R}^k$  tale che

$$F(X) = - \int_{\Omega} \langle X, \delta V \rangle .$$

Chiamiamo  $H$  la funzione  $L^1_{loc}(\mu_V)$ , a valori in  $\mathbb{R}^k$ , data dalla derivazione di Radon-Nikodym di  $\delta V$  rispetto alla misura peso del varifold  $\mu_V$  e chiamiamo  $\sigma$  la parte singolare. Allora vale la formula:

$$(3.2) \quad \int_{G_n(\Omega)} \operatorname{div}^P X(x) dV(x, P) = - \int_{\Omega} \langle X, H \rangle d\mu_V - \int_{\Omega} \langle X, d\sigma \rangle .$$

**DEFINIZIONE 3.1.** Chiamiamo questi varifold di *prima variazione localmente finita* o *varifold di Allard* (vedi [A1]). Per analogia con il caso regolare  $H$  si dice *curvatura media generalizzata*,  $\nu = \frac{d\sigma}{d\|\sigma\|}$  *normale interna generalizzata* e  $|\sigma|$  *bordo generalizzato*. Osserviamo che  $H$ ,  $\nu$  e  $\sigma$  sono unicamente determinate.

**OSSERVAZIONE 3.2.** Spesso anche la parte singolare si considera come una “curvatura media singolare”, basti pensare a cosa accade approssimando con varietà regolari un angolo tra due semirette per l’origine.

Un punto critico del funzionale area, ora esteso a tutta la classe degli  $n$ -varifold, dovrà soddisfare la condizione  $\delta V = 0$ . Tali varifold si dicono stazionari e sono oggetto di ampio studio nell’ambito della teoria geometrica della misura (vedi ad esempio [A1, A2, SI1]).

Partendo dallo studio di un problema di minimo sulle varietà abbiamo introdotto degli oggetti deboli, dotati di una nozione di curvatura media che si comporta come quella classica nella formula di integrazione per parti della divergenza tangenziale.

È questa una tecnica che seguiremo anche nei prossimi paragrafi, definire curvature deboli per mezzo di formule di integrazione per parti classiche, valide su varietà regolari. Osserviamo che in maniera analoga vengono definiti gli spazi di Sobolev  $W^{k,p}$  o le funzioni  $BV$  in  $\mathbb{R}^k$ .

Enunciamo ora il teorema di compattezza di Allard per varifold con prima variazione localmente finita ([A1, SI1]).

**TEOREMA 3.3.** (*Teorema di Compattezza di Allard*)

Sia data una famiglia  $\{V_i\}_{i \in F}$  di  $n$ -varifold in  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^k$ , con prima variazione  $\delta V_i$  localmente finita, e tale che:

$$\sup_{i \in F} \{ \mathcal{M}(V_i \llcorner W) + |\delta V_i|(W) \} \leq c(W) < +\infty$$

per ogni aperto  $W \subset\subset \Omega$ .

Esiste allora una successione di indici  $i_k \in F$  e un  $n$ -varifold  $V$  in  $\Omega$  tali che  $V_{i_k} \rightarrow V$  come varifold in  $\Omega$ ,  $V$  ha prima variazione localmente finita e

$$|\delta V|(W) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} |\delta V_{i_k}|(W) \quad \forall W \text{ aperto } W \subset\subset \Omega.$$



Se inoltre tutti i  $V_i$  sono rettificabili e le loro densità sono equilimitate inferiormente anche  $V$  lo è e se sono interi anche  $V$  è intero.

È allora chiara l'importanza che rivestono i varifold interi di Allard nella teoria: sono una estensione delle varietà dotata di compattezza quando si controlla la prima variazione. Questi varifold hanno anche (deboli) proprietà di regolarità locale. Enunciamo ad esempio un risultato di Brakke (vedi [BR]) che vale per i varifold interi e del quale ci serviremo in seguito.

**TEOREMA 3.4.** Per ogni varifold intero  $V$  con prima variazione localmente limitata in un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^k$ , il vettore curvatura media generalizzata è perpendicolare al piano tangente approssimato per  $\mu_V - q.o. x \in \Omega$ .

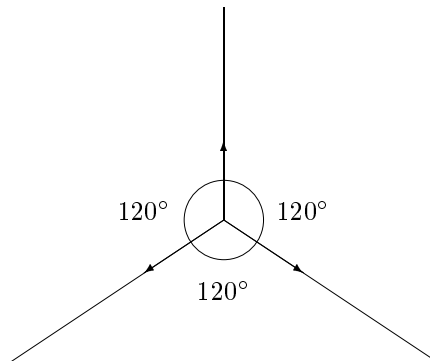
D'ora in poi noi considereremo soltanto varifold interi, eventualmente con altre restrizioni.

#### 4. Esempi

Vediamo alcuni esempi standard che evidenziano i difetti di struttura che possono presentare i varifold di Allard.

**ESEMPIO 4.1.** Un varifold di Allard non regolare con prima variazione nulla.

Consideriamo il rettificabile  $M$  formato dall'unione delle tre semirette per l'origine nel piano (detto "tripunto"), come in figura:



$V \equiv V(M, 1)$  è 1-varifold rettificabile intero in  $\mathbb{R}^2$ . Ci si convince facilmente che  $\delta V = 0$ : detti  $\{v_i\}$  i tre vettori unitari interni che generano le semirette, la curvatura di ogni semiretta è solo singolare, concentrata in 0 ed ha la rappresentazione  $\delta_0 v_i$  ( $\delta_0$  è la misura delta di Dirac concentrata in 0). Perciò sommando le semirette come varifold, per linearità anche le curvature si sommano e  $\delta V = \sum \delta_0 v_i = \delta_0 \sum v_i = 0$ .

Cioè la curvatura di Allard "non vede" alcuni incroci multipli dei vari rami di un varifold.

**ESEMPIO 4.2.** Un varifold la cui misura bordo è irregolare.

Sia  $\mathcal{C}$  l'insieme di Cantor in  $[0, 1]$ , e sia  $f$  la funzione di Cantor-Lebesgue, con  $\mathcal{C}_n$  e  $f_n$  gli approssimanti relativi. Ricordiamo che le  $f_n$  sono funzioni continue,  $C^\infty$  a tratti e convergono uniformemente a  $f$ .

La funzione  $f$  ha derivata nulla per  $\mathcal{L}^1 - q.o. x \in [0, 1]$  ed è una funzione  $BV$ , la cui

derivata distribuzionale è singolare rispetto alla misura di Lebesgue, è concentrata su  $\mathcal{C}$  e non ha atomi.

Ulteriori informazioni sulle funzioni  $BV$  e su questioni inerenti questo esempio si possono trovare in [FA] e in [RU].

Consideriamo le curve in  $\mathbb{R}^2$  date da

$$\alpha_n(t) = (t, F_n(t)) \quad t \in (0, 1)$$

$$F_n(t) = \int_0^t f_n(x) dx.$$

È chiaro che le  $\alpha_n$  sono curve  $C^1$ , e  $C^\infty$  a tratti. Inoltre i varifold associati  $V_n$  in  $\Omega = (0, 1) \times \mathbb{R}$  convergono al varifold  $V$  associato alla curva  $C^1$

$$\alpha(t) = (t, F(t)) \quad t \in (0, 1)$$

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx.$$

Infatti, se  $\varphi = \varphi(x, P)$  è una funzione  $C_c^0(G_n(\Omega))$  si ha

$$\int_{G_n(\Omega)} \varphi dV_n = \int_0^1 \varphi(x, T_x \alpha) |\dot{\alpha}_n(x)| dx \longrightarrow \int_0^1 \varphi(x, T_x \alpha) |\dot{\alpha}(x)| dx = \int_{G_n(\Omega)} \varphi dV$$

poiché  $\dot{\alpha}_n(x) = (1, f_n(x))$  e  $T_x \alpha = \langle \dot{\alpha}_n(x) \rangle$ , e quindi convergono uniformemente a  $\dot{\alpha}(x) = (1, f(x))$  e a  $T_x \alpha = \langle \dot{\alpha}(x) \rangle$  rispettivamente.

Calcoliamo ora  $|\delta V_n|$ . Ogni  $V_n$  è una curva  $C^\infty$  a tratti, dunque per ogni tratto bisognerà sommare la curvatura media con la misura bordo orientata, come si è visto, per ogni tratto regolare  $T \subset V_n$  si ha

$$\delta T = -H d\mathcal{H}^n - \delta_{x_0} v_0 - \delta_{x_1} v_1$$

dove  $H$  è la curvatura media all'interno,  $\delta_x$  indica la misura  $\delta$  di Dirac concentrata in  $x$  e  $v_0, v_1$  sono i due vettori unitari interni al bordo del tratto di curva.

Poiché la curva intera è l'unione di un numero finito di questi tratti, che si raccordano in modo  $C^1$ , e finiscono sul bordo dell'aperto  $\Omega$ ,  $\delta V_n$  è data solo dalla curvatura media all'interno, che ora calcoliamo.

La curvatura media per la curva  $\alpha_n(t)$  in  $\mathbb{R}^2$  è data dalla derivata del vettore tangente unitario

$$\tau_n(t, F_n(t)) = \frac{\dot{\alpha}_n(t)}{|\dot{\alpha}_n(t)|} = \frac{(1, f_n(t))}{(1 + f_n^2(t))^{1/2}}$$

rispetto all'elemento di lunghezza della curva:

$$H_n(t, F_n(t)) = \frac{d}{ds} \tau_n(t(s), F_n(t(s))) = \frac{1}{(1 + f_n^2(t))^{1/2}} \frac{d}{dt} \tau_n(t, F_n(t)).$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\tau_n(t, F_n(t)) &= -\frac{f_n f'_n}{(1+f_n^2)^{3/2}}(1, f_n) + \frac{1}{(1+f_n^2)^{1/2}}(0, f'_n) \\
&= \frac{1}{(1+f_n^2)^{3/2}}(-f_n f'_n, (1+f_n^2)f'_n - f_n^2 f'_n) \\
&= \frac{f'_n}{(1+f_n^2)^{3/2}}(-f_n, 1)
\end{aligned}$$

dove  $f_n$  e  $f'_n$  sono sempre calcolate in  $t$ .

Osserviamo che la formula ha senso eccetto il numero finito di punti dove  $f'_n$  non esiste.

Usando la formula dell'area e poiché  $f_n$  è non negativa si ottiene allora

$$\begin{aligned}
|\delta V_n|(\Omega) &= \int_{\alpha_n} |H_n(t)| d\mathcal{H}^1(t) = \int_0^1 |H_n(t)|(1+f_n^2(t))^{1/2} dt \\
&= \int_0^1 \frac{f'_n(t)}{1+f_n^2(t)} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} < 1
\end{aligned}$$

che dunque è indipendente da  $n$ . Allora per il teorema di Allard anche  $V$  è un varifold di prima variazione localmente finita.

Un ragionamento più diretto, che porta anche ad una relazione tra  $\delta V$  e la derivata distribuzionale  $\sigma$  di  $f$ , si basa sul calcolo della divergenza tangenziale di un campo  $X$  su  $\alpha$ :

$$\int_{\alpha} \operatorname{div}^{\alpha} X d\mathcal{H}^1 = - \int_{\Omega} \langle X, \nu \rangle d|\sigma| = - \int_{\Omega} \langle X, \delta V \rangle .$$

Allora si deve avere

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha} \langle \tau, dX(\tau) \rangle d\mathcal{H}^1 &= \int_0^1 \frac{\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial y} f}{(1+f^2)^{1/2}} dt + \int_0^1 \frac{\frac{\partial X_2}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} f}{(1+f^2)^{1/2}} f dt \\
&= \int_0^1 \frac{\frac{dX_1(F(t))}{dt}}{(1+f^2)^{1/2}} dt + \int_0^1 \frac{\frac{dX_2(F(t))}{dt}}{(1+f^2)^{1/2}} f dt \\
&= \int_0^1 \frac{X_1(F(t))f - X_2(F(t))}{(1+f^2)^{3/2}} d\sigma(t) \\
(4.1) \qquad \qquad \qquad &= - \int_{\alpha} \langle X, \nu \rangle d\theta
\end{aligned}$$

con  $\theta = (Id \times F)_{\#} \frac{1}{(1+f^2)} \sigma$ .

Quindi  $\delta V = \nu \theta$  è una misura non atomica concentrata sull'insieme  $\mathcal{H}^1$ -trascurabile  $(Id \times F)(\mathcal{C})$ .

In questo esempio, il problema sta nel fatto che, a differenza delle varietà regolari con bordo, la parte singolare della prima variazione non sempre è concentrata su un insieme di dimensione inferiore di uno rispetto a quella del varifold, ma può

possedere una parte distribuita su insiemi di dimensione intermedia, anche se il varifold è intero.

ESEMPIO 4.3. Un varifold di Allard con curvatura media in  $L^\infty$  non rappresentabile localmente da un'unione di grafici.

Fissata una costante positiva  $c$  vediamo come è possibile costruire un varifold intero di Allard  $V$ , di dimensione due in  $\mathbb{R}^3$ , tale che la sua curvatura media generalizzata sia una funzione appartenente a  $L^\infty(\mu_V)$ , con un insieme di punti di  $\mu_V$ -misura positiva nell'intorno dei quali  $V$  non sia descrivibile mediante un'unione di grafici di funzioni.

Fissato un raggio  $r > 0$  e un punto  $q$  del piano  $P_0 = \{z = 0\}$ , è possibile deformare lievemente un opportuno catenoidi di rotazione che, come si può vedere con un facile calcolo, possiede curvatura media nulla, in modo da ottenere un varifold  $V_{q,r}$  avente curvatura media  $H$  puntualmente minore o uguale di  $c$ , e coincidente con il piano  $P_0$  con molteplicità 2 al di fuori della palla di centro  $q$  e raggio  $r$ , come mostrato nelle figure sotto.

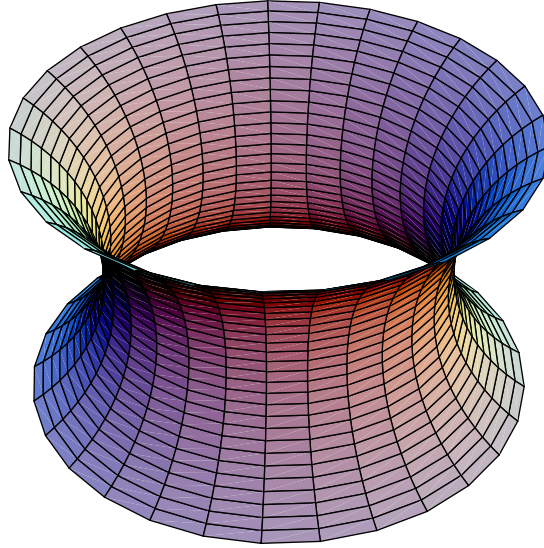


FIGURA 1. Catenoide di rotazione.

È allora evidente che la misura variazione prima del varifold  $V$ , consiste soltanto della parte assolutamente continua rispetto alla misura peso,  $H \llcorner \mu_V$ .

È possibile scegliere una successione di raggi  $r_i \in (0, 1)$  tali che  $\sum_i r_i < +\infty$ , e una successione  $q_i$  nel piano  $P_0$  tali che le palle  $B_i = B_{r_i}(q_i)$  siano disgiunte e il chiuso

$$C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i \quad C_i = P_0 \setminus \bigcup_{j=1}^i B_{r_j}(q_j)$$

sia contenuto nella chiusura di  $\{q_i\}$  (per esempio prendendo come centri i punti a coordinate razionali nel piano e escludendo una ad una le palle che non sono disgiunte dalle precedenti). Costruiamo il varifold intero  $V$  in questo modo:

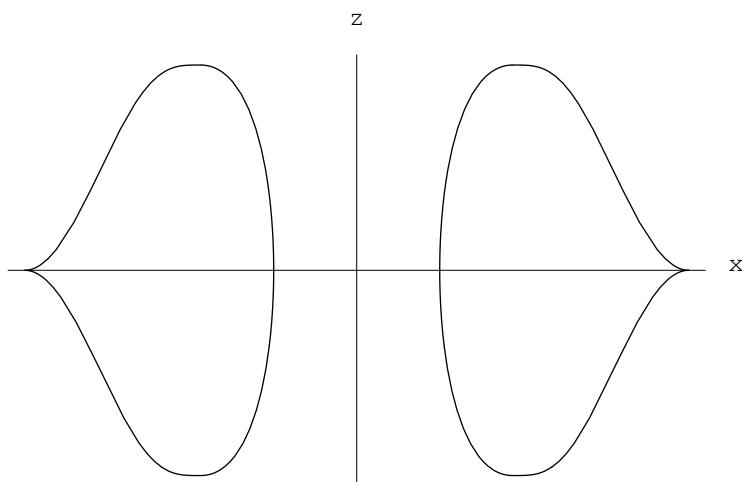


FIGURA 2. Catenoide deformato – sezione.

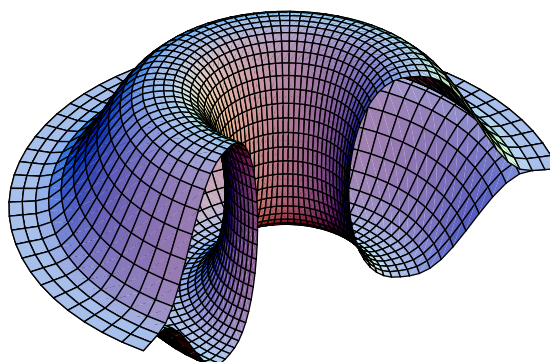


FIGURA 3. Catenoide deformato – spaccato.

consideriamo i varifold  $V_i$  definiti da

$$\mu_{V_i} = 2\mathcal{H}^2 \llcorner C_i + \sum_{j=1}^i \mu_{V_{r_j, q_j}} \llcorner B_j$$

si vede immediatamente che essi hanno curvatures medie equilimate in  $L^\infty$  dalla costante  $c$  e la parte singolare nulla. Per il teorema di compattezza di Allard si ha che a meno di una sottosuccessione essi convergono ad un varifold  $V$  di prima variazione localmente limitata, senza parte singolare e di curvatura media sempre puntualmente controllata dalla costante  $c$ . Si verifica facilmente che il varifold limite  $V$  si può descrivere in questo modo:

$$\mu_V = 2\mathcal{H}^2 \llcorner C + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{V_{r_j, q_j}} \llcorner B_j.$$

Il varifold  $V$  non si può esprimere localmente come unione di grafici nell'intorno di un punto appartenente al chiuso  $C$ , infatti per l'ipotesi sulla successione di palle  $B_i$ , per ogni intorno di  $x^0 \in C$  esiste una palla  $B_{i_0}$  contenuta in esso e dunque una successione di esse, tendente al punto  $x^0$  di raggi arbitrariamente piccoli. Una qualunque proiezione di  $V$  ristretto all'intorno, su di un piano  $P$  non perpendicolare (chiaramente  $V$  non può essere grafico su di un piano perpendicolare al piano  $P_0$ ), non contiene una palla centrata nell'immagine di  $x^0$ , a causa del fatto che, restringendo i raggi, per poter controllare la curvatura media con la costante  $c$ , i catenoidi vanno via via assottigliandosi e quindi da un certo valore del raggio in poi, la loro proiezione contiene l'immagine del buco centrale. Questo contraddice ovviamente la possibilità di rappresentare  $V$ , ristretto all'intorno, come grafico sul piano  $P$ .

### 5. Varifold di Hutchinson

Hutchinson ha dato in [HU1, HU2], una definizione di varifold con seconda forma fondamentale debole, sfruttando una formula di integrazione per parti che vale nel caso regolare.

Riassumiamo brevemente il concetto di seconda forma fondamentale per una  $n$ -varietà regolare  $M$  embedded in  $\mathbb{R}^k$  e vediamo come essa interviene nella definizione di Hutchinson.

Dati  $x \in M$  e  $v, w \in T_x M$  estendiamo  $w$  ad un campo tangente  $W$ , regolare in  $\mathbb{R}^k$  tale che  $W(x) = w$  e definiamo la forma bilineare

$$B_x : T_x M \times T_x M \rightarrow N_x M$$

$$B_x(v, w) = (d_x W(v))^\perp$$

dove  $N_x M$  è lo spazio normale alla varietà in  $x$  rispetto a  $\mathbb{R}^k$ .

$B_x$ , detta *seconda forma fondamentale* di  $M$ , è una forma simmetrica, e determina il tutto il tensore di curvatura della varietà.

Il vettore  $H(x) = \text{traccia di } B_x$ , detto *curvatura media*, è quello che interviene nella formula della divergenza tangenziale (vedi la definizione 6.8).

Estendiamo la forma bilineare  $B_x$  a tutto  $\mathbb{R}^k$  ponendo:

$$B_x(v, w) = B_x(\pi v, \pi w)$$

dove  $\pi : \mathbb{R}^k \rightarrow T_x M$  è la proiezione ortogonale sul piano tangente a  $M$ .

Indichiamo con  $B_{ij}^k$  le componenti di  $B$  come tensore nella base canonica di  $\mathbb{R}^k$ , cioè

$$B_{ij}^k = \langle B(e_i, e_j), e_k \rangle .$$

Il tensore  $B_{ij}^k$  è ancora una forma bilineare simmetrica in  $i, j$  e la curvatura media è il vettore  $H_i = B_{jj}^i$ .

Sia  $P(x) = [P_{ij}(x)]$  la matrice simmetrica in  $\text{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$  della proiezione ortogonale sul piano tangente  $T_x M$ .

Considereremo da qui in poi l'identificazione tra elementi della Grassmanniana e componenti della matrice di proiezione su di essi.

Definiamo ora, usando i gradienti tangenziali di  $P$  su  $M$ , il tensore  $A$  di componenti:

$$A_{ijk} = \langle \nabla^M P_{jk}(x), e_i \rangle .$$

Essendo  $\nabla_i^M x_j = P_{ij}$  (vedi il Teorema 5.6) si ha anche  $\nabla_i^M \nabla_j^M x_k = A_{ijk}$ , quindi  $A$  è la derivata tangenziale seconda dell'identità.

Vediamo che  $\{B_{ij}^k\}$  e  $\{A_{ijk}\}$  sono esprimibili gli uni in funzione degli altri, valgono infatti le seguenti relazioni:

PROPOSIZIONE 5.1. *Usando la convenzione che gli indici "muti" si sommano abbiamo*

1.  $B_{ij}^k = P_{lj} A_{ikl} = P_{li} A_{jkl}$ ;
2.  $A_{ijk} = B_{ij}^k + B_{ik}^j$ ;
3.  $H_i = A_{jij}$ .

DIMOSTRAZIONE. 1. Si ha

$$\begin{aligned}
 B_{ij}^k &= \langle d_x \pi e_i(\pi e_j), e_k^\perp \rangle \\
 &= \langle d_x P_{il} e_l(\pi e_j), e_k - \pi e_k \rangle \\
 &= d_x P_{il}(\pi e_j) \langle e_l, e_k - \pi e_k \rangle \\
 &= \langle \nabla^M P_{il}, e_j \rangle \langle e_l, e_k - P_{hk} e_h \rangle \\
 &= \nabla_j^M P_{il}(\delta_{lk} - P_{lk}) \\
 &= \nabla_j^M [P_{il}(\delta_{lk} - P_{lk})] - P_{il} \nabla_j^M (\delta_{lk} - P_{lk}) \\
 &= \nabla_j^M [P_{ik} - P_{il} P_{lk}] + P_{il} \nabla_j^M P_{lk} \\
 &= P_{il} \nabla_j^M P_{lk} \\
 &= P_{li} A_{jkl}
 \end{aligned}$$

dove  $\delta_{hk} = 1$  se e solo se  $h = k$ , e sfruttando il fatto che  $P_{is} P_{sk} = P_{ik}$ .

2.  $A_{ijk} = \nabla_i^M P_{jk} = \nabla_i^M (P_{jl} P_{lk}) = P_{jl} \nabla_i^M P_{lk} + P_{lk} \nabla_i^M P_{jl} =$   
 $= P_{lj} A_{ikl} + P_{lk} A_{ijl} = B_{ij}^k + B_{ik}^j$ .
3. Segue da 1.

□

Vediamo ora la formula che motiva la definizione di Hutchinson di un tensore  $A_{ijk}$  "debole" e dunque di una seconda forma fondamentale relativa, legata ad esso dalle relazioni di cui sopra.

Supponiamo  $\Omega$  aperto in  $\mathbb{R}^k$  e  $\partial M \cap \Omega = \emptyset$ , sia  $\varphi = \varphi(x, P) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^{k^2})$  avente supporto compatto e consideriamo il campo  $C^1$  a supporto compatto in  $\Omega$

$$X(x) = \varphi(x, P(x)) e_i.$$

D'ora in poi denoteremo la differenziazione parziale di  $\varphi$  rispetto alle variabili  $x_i$  e  $P_{jk}$ , rispettivamente con

$$D_i \varphi \quad e \quad D_{jk}^* \varphi.$$

Se  $\pi X$  è la proiezione del campo  $X$  sul piano tangente alla varietà, usando il teorema della divergenza tangenziale si ha

$$\begin{aligned}
0 &= \int_M \operatorname{div}^M(\pi X) d\mathcal{H}^n \\
&= \int_M P_{rs} \frac{\partial}{\partial x_s} (P_{ir} \varphi) d\mathcal{H}^n \\
&= \int_M P_{rs} \frac{\partial}{\partial x_s} (P_{ir}) \varphi + P_{rs} P_{ir} D_s \varphi + P_{rs} P_{ir} D_{jk}^* \varphi \frac{\partial}{\partial x_s} (P_{jk}) d\mathcal{H}^n \\
&= \int_M A_{rir} \varphi + P_{is} D_s \varphi + A_{ijk} D_{jk}^* \varphi d\mathcal{H}^n
\end{aligned}$$

dunque risistemando gli indici vale

$$0 = \int_M \{P_{ij} D_j \varphi + A_{ijk} D_{jk}^* \varphi + A_{jij} \varphi\} d\mathcal{H}^n.$$

Abbiamo cioè una formula di integrazione per parti, che coinvolge non solo la curvatura media ma tutta la seconda forma fondamentale, a patto di far intervenire campi dipendenti anche dal tangente nel punto alla varietà. Pensando la varietà come un varifold  $V$  si può scrivere

$$0 = \int_{G_n(\mathbb{R}^k)} \{P_{ij} D_j \varphi + A_{ijk} D_{jk}^* \varphi + A_{jij} \varphi\} dV.$$

Consideriamo allora la seguente definizione di Hutchinson:

**DEFINIZIONE 5.2.** Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^k$ , e sia  $V$  un  $n$ -varifold rettificabile intero in  $\Omega$ . Diciamo che  $V$  possiede una *curvatura generalizzata* in  $\Omega$  se esistono delle funzioni  $A_{ijk}$ , definite in  $G_n(\Omega)$  e appartenenti a  $L^1_{loc}(V)$ , tali che valga la seguente formula di integrazione per parti:

$$(5.1) \quad 0 = \int_{G_n(\Omega)} \{P_{ij} D_j \varphi + A_{ijk} D_{jk}^* \varphi + A_{jij} \varphi\} dV(x, P)$$

$$\text{per ogni } \varphi = \varphi(x, P) \in C_c^1(\Omega \times \mathbb{R}^{k^2}).$$

Chiameremo l'insieme di questi oggetti  *$n$ -varifold di Hutchinson in  $\Omega$*  e lo indicheremo con  $CV_n(\Omega)$ .

**OSSERVAZIONE 5.3.** Notiamo che nella definizione si integrano funzioni definite in  $\Omega \times \mathbb{R}^{k^2}$ , rispetto a misure nella Grassmanniana di  $\Omega$ .

Usiamo questa notazione perché, come si può vedere con facilità, la Grassmanniana è un sottoinsieme compatto di  $\mathbb{R}^{k^2}$ . A rigore si dovrebbero estendere le misure di Radon su di essa, ponendole uguali a zero sul complementare in  $\mathbb{R}^{k^2}$ .

Per le funzioni  $A_{ijk}$  vale naturalmente la proposizione 2.2, quindi esse dipendono solo in modo fittizio da  $P$ .

Vediamo alcune proprietà fondamentali, la cui dimostrazione si può trovare negli articoli originali di Hutchinson.

**PROPOSIZIONE 5.4.** Se  $V$  possiede una curvatura generalizzata  $A(x, P)$  in  $\Omega$ , allora essa è unica come funzione  $L^1_{loc}(V)$ .



PROPOSIZIONE 5.5. Per  $V - q.o. (x, P) \in G_n(\Omega)$  valgono:

1.  $A_{ijk}(x, P) = A_{ikj}(x, P)$ ;
2.  $\sum_j A_{ijj}(x, P) = 0$ ;
3.  $A_{ijk}(x, P) = P_{jr} A_{irk}(x, P) + P_{rk} A_{ijr}(x, P)$ .

Quindi le proprietà formali del tensore  $A_{ijk}$  sono coerenti col caso classico. Inoltre è chiaro dal calcolo precedente che i varifold  $V$  associati a varietà  $M$  di classe  $C^2$ , embedded e senza bordo in  $\Omega$ , hanno la proprietà di Hutchinson con

$$A_{ijk}(x, T_x M) = \nabla_i^M P_{jk}(x).$$

I varifold di Hutchinson sono anche varifold di Allard e  $\delta V = H \mu_V$  con il vettore curvatura media  $H$  dato da

$$H_i(x) = \sum_j A_{jij}(x, P(x)).$$

Prendendo infatti  $\varphi(x) = X_i(x)$  nella formula (5.1)

$$\begin{aligned} (5.2) \quad 0 &= \int_{G_n(\Omega)} [P_{ij} D_j X_i(x) + A_{jij}(x, P) X_i(x)] dV(x, P) \\ &= \int_{G_n(\Omega)} [P_{ij} D_j X_i(x) + A_{jij}(x, P(x)) X_i(x)] dV(x, P) \\ &= \int_{G_n(\Omega)} P_{ij} D_j X_i(x) dV(x, P) + \int_{\Omega} H_i(x) X_i(x) d\mu_V(x) \end{aligned}$$

poiché  $V$  è un varifold rettificabile. Sommando su  $i$  si ottiene

$$\int_{G_n(\Omega)} \operatorname{div}^P X dV = - \int_{\Omega} \langle X, H \rangle d\mu_V$$

da cui  $\delta V = H \mu_V$ .

DEFINIZIONE 5.6. Chiamiamo  $CV_n^p(\Omega)$  la classe degli  $n$ -varifold di Hutchinson tali che  $A_{ijk}(x, P) \in L_{loc}^p(V)$

Per avere compattezza nell'ambito dei varifold di Hutchinson non è sufficiente in generale controllare le masse e la norma  $L^1$  delle curvature. Supponiamo infatti di avere una successione  $V_m$  in  $CV_n^1(\Omega)$  tale che per ogni aperto  $B \subset\subset \Omega$  esista una costante reale  $c$ , per cui valga

$$\mu_{V_m}(B) + \int_{G_n(B)} |A| dV_m < c \quad \forall m.$$

Per il teorema di compattezza di Allard e l'osservazione sopra, posso estrarre una sottosuccessione convergente ad un varifold intero, con variazione prima localmente finita. Per il Teorema di Banach-Alaoglu le misure  $V \llcorner A_{ijk}^{(m)}$ , eventualmente passando ancora ad una sottosuccessione, convergeranno a delle misure di Radon  $A_{ijk}$ , per le quali vale

$$(5.3) \quad 0 = \int_{G_n(\Omega)} P_{ij} D_j \varphi dV + \int_{G_n(\Omega)} D_{jk}^* \varphi dA_{ijk} + \int_{G_n(\Omega)} \varphi dA_{jij}$$

per ogni  $\varphi \in C_c^1(G_n(\Omega))$ . L'inconveniente è che queste misure di Radon  $A_{ijk}$  non sono necessariamente assolutamente continue rispetto a  $V$ , infatti nella definizione si richiedeva che le  $A_{ijk}$  fossero *funzioni*.

Ciò che serve sono delle condizioni che permettano di assicurare che se abbiamo due successioni di misure di Radon debolmente convergenti,  $V_i \rightarrow V$  e  $A_i \rightarrow A$  tali che  $|A_i| \ll V_i$ , allora vale anche  $|A| \ll V$ .

Questo ci è proprio dato dall'osservazione 6.4 del capitolo 1, se si controlla uniformemente la norma  $L^p$  di  $D_{V_i}A_i$ , con  $p > 1$ .

Vale quindi il seguente

**TEOREMA 5.7.** (*Teorema di Compatezza  $L^p$* )

Data  $V_i$ , successione di varifold in  $CV_n^p(\Omega)$ , con  $p > 1$ , tale che per ogni aperto  $B \subset \subset \Omega$  esiste una costante reale  $c$  per cui

$$\mu_{V_i}(B) + \int_{G_n(B)} |A^{(i)}|^p dV_i < c$$

esiste una sottosuccessione estratta  $V_{l_h}$ , convergente ad un elemento  $V$  di  $CV_n^p(\Omega)$ . Inoltre per ogni funzione convessa e semicontinua inferiormente  $f : \mathbb{R}^{k^3} \rightarrow [0, +\infty]$  si ha

$$\int_{G_n(\Omega)} f(A_{ijk}) dV \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \left\{ \int_{G_n(\Omega)} f(A_{ijk}^{(l_h)}) dV_{l_h} \right\}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Per quanto visto sopra, l'osservazione 6.4 garantisce che il varifold limite  $V$  appartiene a  $CV_n^p(\Omega)$ . La disuguaglianza di semicontinuit  segue direttamente dal Teorema 6.3.  $\square$

**OSSERVAZIONE 5.8.** Si noti l'analogia con gli spazi di Sobolev  $W^{k,p}$  ( $p > 1$ ), per i quali vale un teorema di compatezza simile.

**OSSERVAZIONE 5.9.** L'esempio 4.2 mostra che il teorema pu  essere falso se si controlla solo la norma  $L^1$  di  $|A|$ . In questo caso, infatti, con un ragionamento analogo a quello visto per la sola curvatura media nella (4.1), si ottiene che il varifold limite associato al grafico di  $F$  soddisfa la (5.3) con misure  $A_{ijk}$  n  assolutamente continue, n  atomiche.

Vediamo due teoremi di struttura per i varifold di Hutchinson che dimostriamo in pi  ampia generalit  nel prossimo capitolo.

**TEOREMA 5.10.** Dato  $V \in CV_n(\Omega)$ , le funzioni  $P_{jk}(x)$  sono  $\mu_V$ -apdifferenziabili e i differenziali approssimati sono

$$ap\nabla_i P_{jk}(x) = A_{ijk}(x, P(x))$$

per  $\mu_V - q.o.$   $x \in \Omega$ .

**TEOREMA 5.11.** come nel caso regolare gli  $A_{ijk}$  sono "tangenziali", e la curvatura media   "normale": per  $V - q.o.$   $(x, P) \in G_n(\Omega)$  vale

$$P_{ir}A_{rjk}(x, P) = A_{ijk}(x, P)$$

$$P_{ir}A_{jrr} = 0.$$

Geometricamente questi oggetti si comportano dunque come i loro analoghi classici, a meno chiaramente di un insieme trascurabile.

I varifold di Hutchinson con sommabilità elevata hanno proprietà di struttura molto forti, che ne fanno uno strumento potente per affrontare, in ambiti deboli, problemi di minimo definiti sulle varietà regolari in  $\mathbb{R}^k$ .

Riguardo la regolarità dei varifold di Hutchinson, il seguente teorema definisce la loro struttura:

**TEOREMA 5.12.** *Sia  $V \in CV_n^p(\Omega)$  con  $p > n$  e  $x \in \text{supp } \mu_V$ . Allora valgono*

1. *La densità esiste in  $x$ .*
2. *Esiste in  $x$  un unico varifold tangente a  $\mu$  (vedi 1.3) ed è formato da un'unione finita di  $n$ -piani con molteplicità. Inoltre in un intorno  $U$  di  $x$  si può separare  $V$  in un numero finito di varifold  $V_j \in CV_n^p(U)$  la cui unione è  $V$  in  $G_n(U)$ , ognuno avente per piano tangente in  $x$ , uno e soltanto uno dei piani tangenti appartenenti a  $\text{VarTan}(V, x)$ . La somma di  $\text{VarTan}(V_j, x)$  dà proprio  $\text{VarTan}(V, X)$ .*
3. *Se  $V$  ha come tangente in  $x$  un piano  $T$ , in un intorno  $U$  di  $x$   $V$  è rappresentabile come grafico di una funzione  $C^{1,\alpha}$  multivoca.*

**NOTA 5.13.** Poiché la definizione di *funzione multivoca* esula nettamente dalla nostra trattazione, rimandiamo il lettore interessato agli articoli di Hutchinson, [HU1, HU2]. Abbiamo riportato qui comunque la versione originale del suo teorema.

Questo teorema ci dice per esempio, che la convergenza debole di  $n$ -varietà regolari con masse e curvatures  $L_{loc}^p$  localmente limitate, e  $p > n$ , deve avere per limite un oggetto che localmente è un grafico di una mappa regolare multivoca, cosa che non avviene invece per i varifold di Allard, anche controllando la curvatura media in  $L^p$ , con  $p$  grande (vedi 4.3). Notiamo anche che l'integrabilità con esponente  $p < n$  della seconda forma fondamentale non garantisce una rappresentazione locale per mezzo di grafici di funzioni. Questo può essere visto con una costruzione analoga a quella dell'esempio 4.3. Scelta infatti una successione di palle disgiunte  $B_{\rho_i}(q_i) \subset \mathbb{R}^3$  come nell'esempio 4.3, con la condizione aggiuntiva che

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{-1}{\log \rho_i} < +\infty$$

il 2-varifold  $V$ , ottenuto sostituendo all'interno delle palle  $B_{\rho_i}(q_i)$  una copia contratta di un fattore  $\rho_i^{-1}$  del varifold  $V_{q_i,1}$ , ha seconda forma fondamentale in  $L^p$  per ogni  $p < 2$ , ma per la stessa ragione dell'esempio 4.3 non si rappresenta come unione di grafici di funzioni sul piano orizzontale, nell'intorno di ogni punto di  $C$ . Eventualmente variando il varifold da contrarre, si ottiene un varifold non rappresentabile rispetto a nessun piano di  $\mathbb{R}^3$ .

L'unico difetto dei varifold di Hutchinson è che essi non comprendono le varietà con bordo, infatti nella stessa definizione si è sfruttata l'assenza di bordo per porre uguale a zero l'integrazione della divergenza tangenziale. Con facile calcolo si vede ad esempio che una semplice semiretta non può essere un varifold di Hutchinson.

Nel prossimo capitolo daremo una definizione, basata su una simile integrazione per parti, che generalizza quella di Hutchinson, che comprende anche le varietà dotate di bordo, e che mantiene analoghe proprietà di compattezza, struttura e regolarità.

## Varifold con Bordo

Abbiamo visto che, sebbene i varifold di Allard posseggano una curvatura debole, la parte singolare non ha delle buone caratteristiche di struttura, e gli stessi varifold possono in fondo essere molto irregolari. I varifold di Hutchinson superano questa difficoltà usando una formula di integrazione per parti più restrittiva che conferisce loro ottime proprietà di struttura e regolarità, le quali vengono però pagate escludendo da essi le varietà con bordo.

Vorremmo ora proporre una definizione che cerchi di fondere le proprietà di queste due classi di varifold, e conduca all'introduzione di una nozione di bordo che sia analoga a quella delle varietà regolari. Cioè vorremmo, oltre alla proprietà di avere una curvatura generalizzata, anche quella di possedere un bordo che sia un varifold rettificabile di una dimensione minore di quella del varifold di partenza.

### 1. Varifold con Bordo

Supponiamo  $\Omega$  aperto in  $\mathbb{R}^k$ ,  $M$  varietà di classe  $C^1$ ,  $n$ -dimensionale embedded in  $\Omega$  con bordo  $\partial M$  di classe  $C^1$ .

Siano  $P_{ij}(x)$  gli elementi della matrice proiezione  $P(x)$ , da  $\mathbb{R}^k$  in sè, sul piano tangente alla varietà in  $x$ , e  $A_{ijk}(x) = \nabla_i^M P_{jk}(x)$  i loro differenziali tangenziali come nel paragrafo 5 del capitolo precedente. Continuiamo inoltre a chiamare  $P(x)$  anche il piano tangente, *identificandolo con la matrice di proiezione su di esso*.

È chiaro che ancora valgono le relazioni già viste nella sezione 5 tra gli  $A_{ijk}$  e le componenti della seconda forma fondamentale della varietà.

Sia  $\varphi \equiv \varphi(x, P) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^{k^2})$  avente supporto compatto e consideriamo il campo  $C^1$  a supporto compatto in  $\Omega$

$$X(x) = \varphi(x, P(x))e_i.$$

D'ora in poi denoteremo la differenziazione parziale di  $\varphi$  rispetto alle variabili  $x_i$  e  $P_{jk}$ , rispettivamente con

$$D_i\varphi \quad e \quad D_{jk}^*\varphi.$$

Se  $\pi X$  è la proiezione del campo  $X$  sul tangente alla varietà, usando il teorema della divergenza tangenziale si ha

$$\begin{aligned}
& \int_M \operatorname{div}^M(\pi X) d\mathcal{H}^n \\
&= \int_M P_{rs} \frac{\partial}{\partial x_s} (P_{ir} \varphi) d\mathcal{H}^n \\
&= \int_M P_{rs} \frac{\partial}{\partial x_s} (P_{ir}) \varphi + P_{rs} P_{ir} D_s \varphi + P_{rs} P_{ir} D_{jk}^* \varphi \frac{\partial}{\partial x_s} (P_{jk}) d\mathcal{H}^n \\
&= \int_M A_{rir} \varphi + P_{is} D_s \varphi + A_{ijk} D_{jk}^* \varphi d\mathcal{H}^n \\
&= - \int_{\partial M} \langle \pi X, \nu \rangle d\mathcal{H}^{n-1}
\end{aligned}$$

dunque risistemando gli indici e sapendo che  $\nu$  è tangente vale

$$- \int_{\partial M} \varphi \nu_i d\mathcal{H}^{n-1} = \int_M \{P_{ij} D_j \varphi + A_{ijk} D_{jk}^* \varphi + A_{jij} \varphi\} d\mathcal{H}^n.$$

A differenza delle varietà senza bordo c'è una parte in più dovuta alla frontiera. Osserviamo che, vedendo la varietà come un varifold, e considerando  $\nu \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial M$  come una misura di Radon vettoriale  $\underline{\mu}$  nella Grassmanniana di  $\Omega$ , a valori in  $\mathbb{R}^k$ , si può scrivere

$$- \int_{G_n(\Omega)} \varphi d\mu_i = \int_M \{P_{ij} D_j \varphi + A_{ijk} D_{jk}^* \varphi + A_{jij} \varphi\} dV.$$

Passiamo quindi a dare la definizione di *varifold con bordo*

**DEFINIZIONE 1.1.** Sia  $V \equiv V_{M,\theta}$  un  $n$ -varifold intero in  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ , con  $0 < n < k$ . Diciamo che  $V$  è un varifold con bordo oppure un  $A\mu$ -varifold se esistono delle funzioni reali  $A_{ijk} \in L^1_{loc}(V)$  e una misura di Radon vettoriale  $\underline{\mu}$  in  $G_n(\Omega)$  a valori in  $\mathbb{R}^k$  tali che per ogni  $\varphi \equiv \varphi(x, P) \in C_c^1(\Omega \times \mathbb{R}^{k^2})$ , valga per ogni  $i$

$$\begin{aligned}
& \int_{G_n(\Omega)} P_{ij} D_j \varphi(x, P) + D_{jk}^* \varphi(x, P) A_{ijk}(x, P) + \varphi(x, P) A_{jij}(x, P) dV \\
(1.1) \quad &= - \int_{G_n(\Omega)} \varphi(x, P) d\mu_i(x, P)
\end{aligned}$$

come sempre con la convenzione degli indici ripetuti.

Nei casi estremi  $n = 0, k$ , per coerenza con quello che segue, *definiamo* le funzioni  $A_{ijk}(x, P) \equiv 0$  e la misura  $\underline{\mu}$ , se esiste, in modo tale che valga la formula sopra. Chiamiamo  $\underline{\mu}$  *misura bordo del varifold*  $V$ , e definiamo  $AV_n(\Omega)$  la classe degli  $n$ -varifold con bordo in  $\Omega$ .

Valgono qui le stesse considerazioni espresse nell'osservazione 5.3, riguardo alla dipendenza fittizia di  $A_{ijk}$  da  $P$ . Non è così per la misura  $\underline{\mu}$ . Il varifold dell'esempio 4.1, essendo una unione di tre semirette, è un  $A\mu$ -varifold in  $\mathbb{R}^2$  con  $A \equiv 0$  e  $\underline{\mu}$  data da

$$\underline{\mu} = \sum_{i=1}^3 v_i \delta_{(0, P_i)}$$

dove  $P_i \in G_{1,2}$  è la retta generata da  $v_i$ .

DEFINIZIONE 1.2. Chiamiamo  $AV_n^p(\Omega)$  la classe degli  $n$ -varifold con bordo in  $\Omega$  tali che  $A_{ijk} \in L_{loc}^p(V)$ .

Vediamo dunque alcune proposizioni fondamentali, di cui posponiamo la dimostrazione alla prossima sezione.

PROPOSIZIONE 1.3. Se  $V \in AV_n(\Omega)$  le funzioni  $A_{ijk}$  sono unicamente determinate  $V - q.o.$  e così la misura  $\underline{\mu}$ .

DEFINIZIONE 1.4. Se  $\mu$  è una misura di Radon nella Grassmanniana di  $\Omega$ , indichiamo con  $\tilde{\mu}$  la sua proiezione su  $\Omega$ , così definita

$$\tilde{\mu}(B) = \pi_{\#} \mu(B) = \mu(G_n(B)) \quad B \text{ boreliano in } \Omega$$

è allora chiaro che  $\tilde{\mu}$  è una misura di Radon in  $\Omega$ .

PROPOSIZIONE 1.5. Se le funzioni  $A_{ijk}$  e la misura  $\underline{\mu}$  soddisfano la definizione 1.1, allora la misura  $\underline{\mu}$  ha il supporto contenuto nel supporto della misura  $V$  e la proiezione di  $|\underline{\mu}|$  è singolare rispetto a  $\mu_V$ .

PROPOSIZIONE 1.6. Riguardo le proprietà formali delle funzioni  $A_{ijk}$  per  $V - q.o.$   $(x, P) \in G_n(\Omega)$  valgono:

1.  $A_{ijk}(x, P) = A_{ikj}(x, P)$ ;
2.  $\sum_j A_{ijj}(x, P) = 0$ ;
3.  $A_{ijk}(x, P) = P_{jr} A_{irk}(x, P) + P_{rk} A_{ijr}(x, P)$ .

PROPOSIZIONE 1.7. Nelle stesse ipotesi la misura  $\underline{\mu}$  è "tangenziale", nel senso che per ogni  $i$

$$P_{il} \mu_l(x, P) = \mu_i(x, P)$$

come misure nella Grassmanniana.

Le funzioni  $A_{ijk}(x, P)$  soddisfano le seguenti relazioni.

$$P_{il} A_{ljk}(x, P) = A_{ijk}(x, P)$$

$$H_i(x, P) = \sum_j A_{jij}(x, P) \quad P_{il} H_l(x, P) = 0$$

per  $V - q.o.$   $(x, P) \in G_n(\Omega)$ . Ciò significa che le  $A_{ijk}$  sono "tangenziali" e il vettore  $H$  è "normale" al varifold, così come nel caso classico.

Definiamo come per i varifold di Hutchinson la seconda forma fondamentale debole di  $V$ , a partire dalle  $A_{ijk}$ ; dalla proposizione 1.3 segue quindi l'unicità anche di questo tensore.

Prima di procedere oltre facciamo alcune precisazioni che varranno in tutto il seguito. D'ora in poi indicheremo con  $P(x)$  sia il tangente approssimato al varifold intero  $V$ , che esiste  $\mu_V - q.o.$   $x \in \Omega$ , sia la matrice di proiezione su di esso, di componenti  $P_{ij}(x)$ .

Inoltre, poiché il varifold  $V$  è rettificabile, spesso interscambieremo le integrazioni nella misura  $V(x, P)$ , in integrazioni rispetto alla misura peso del varifold  $\mu_V = \mathcal{H}^n \llcorner \theta$ , sostituendo  $P(x)$  al posto di  $P$ , come indicato nella sezione 2.

Riguardo alla struttura delle funzioni  $A_{ijk}$  vale il seguente teorema, che estende agli  $A\mu$ -varifold una proprietà valida nel caso regolare.

**TEOREMA 1.8.** *Le funzioni  $P_{jk}(x)$  sono  $\mu_V$ -apdi differenziabili e i loro differenziali approssimati sono dati da*

$$ap\nabla_i^{\mu_V} P_{jk}(x) = A_{ijk}(x, P(x))$$

per  $\mu_V$ -q.o.  $x \in \Omega$ . In particolare, dal Teorema 5.6 ricaviamo che il tensore  $A$  coincide con la derivata tangenziale seconda della funzione identità.

Questo risultato nel caso dei varifold di Hutchinson si può trovare essenzialmente in [DS].

**OSSERVAZIONE 1.9.** Vediamo che nel caso regolare la dimostrazione è facile, poiché  $A_{ijk} = \nabla_i^M P_{jk}$ .

Dobbiamo dimostrare che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{H}^n(B_\rho \cap M)} \int_{B_\rho \cap M} \frac{|P_{jk} - P_{jk}^0 - P_{il} \nabla_l \tilde{P}_{jk}(x_i - x_i^0)|}{r} d\mathcal{H}^n = 0$$

dove  $\tilde{P}$  è una estensione locale di  $P$ , secondo la definizione di gradiente tangenziale (vedi la sezione 2.6).

Poiché  $P_{il} \nabla_l \tilde{P}_{jk}(x_i - x_i^0) = \nabla_i \tilde{P}_{jk}(x_i - x_i^0) - \nu_i(x_i - x_i^0)$ , con  $\nu$  parte normale del gradiente classico di  $\tilde{P}_{jk}$  in  $x^0$ , posso maggiorare l'integrale con

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathcal{H}^n(B_\rho \cap M)} \int_{B_\rho \cap M} \frac{|P_{jk} - P_{jk}^0 - \nabla_i \tilde{P}_{jk}(x_i - x_i^0)|}{r} d\mathcal{H}^n + \\ & + \frac{1}{\mathcal{H}^n(B_\rho \cap M)} \int_{B_\rho \cap M} \frac{|\nu_i(x_i - x_i^0)|}{r} d\mathcal{H}^n. \end{aligned}$$

Il primo integrale chiaramente va a zero perché abbiamo il differenziale classico, ci si convince facilmente che anche il secondo converge a zero poiché i vettori  $\frac{(x_i - x_i^0)}{r}$  si avvicinano sempre più a vettori tangenti unitari, e  $\nu$  è normale.

Nel seguito ci sarà utile sapere che gli  $A\mu$ -varifold sono varifold di Allard. Questo può essere dimostrato inserendo funzioni  $\varphi$  dipendenti solo da  $x$  nella formula (1.1) e ragionando come in (5.2). Inoltre una volta dimostrata la proposizione 1.5, si vede che si può ottenere facilmente la descrizione completa della variazione prima, in termini delle funzioni  $A_{ijk}$  e della misura  $\underline{\mu}$ . Precisamente vale la

**PROPOSIZIONE 1.10.** *Un  $A\mu$ -varifold è un varifold di Allard, la cui curvatura media generalizzata è data da  $H_i(x) = \sum_j A_{jij}(x, P(x))$  (osserviamo che, come nel caso classico, è la traccia della seconda forma fondamentale generalizzata) e la parte singolare è la misura  $\tilde{\underline{\mu}}$ , proiezione su  $\Omega$  della misura  $\underline{\mu}$ . In formule si ha*

$$\delta V = H\mu_V + \tilde{\underline{\mu}}.$$

## 2. Dimostrazione dei Teoremi Enunciati

Facciamo una precisazione prima di vedere le dimostrazioni: nel caso di dimensione zero tutti gli enunciati si banalizzano, invece nel caso  $k = n$ , cioè di codimensione nulla, i teoremi enunciati in questo e nel prossimo capitolo non sono altro che risultati appartenenti alla teoria degli insiemi di perimetro finito, dovuta

a De Giorgi (vedi [DG1, DG2]). Svilupperemo dunque le dimostrazioni soltanto per i casi di dimensione intermedia tra 0 e  $n$ .

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 1.3. Supponiamo esistano due coppie  $(A_{ijk}^1, \mu_i^1)$  e  $(A_{ijk}^2, \mu_i^2)$ .

Siano allora  $A_{ijk} = A_{ijk}^1 - A_{ijk}^2$  e  $\mu_i = \mu_i^1 - \mu_i^2$ , per esse vale

$$\begin{aligned} & \int_{G_n(\Omega)} D_{jk}^* \varphi(x, P) A_{ijk}(x, P) + \varphi(x, P) A_{jij}(x, P) dV \\ &= - \int_{G_n(\Omega)} \varphi(x, P) d\mu_i(x, P) \end{aligned}$$

con  $\psi$  come nella definizione.

Posso allora scrivere

$$(2.1) \quad \int_{G_n(\Omega)} D_{jk}^* \varphi A_{ijk} dV = \int_{G_n(\Omega)} \varphi d\sigma_i$$

con  $\sigma_i = -\mu_i - A_{jij}V$ .

Dalla formula sopra ricaviamo che, comunque si scelga  $\phi(x) \in C_c^1(\Omega)$ , il funzionale

$$L_\phi(\psi) = \int_{G_n(\Omega)} \phi(x) A_{ijk}(x, P) D_{jk}^* \psi(P) dV$$

è continuo in  $C^1(G_{n,k})$  nella topologia indotta da  $C^0(G_{n,k})$ .

Se fosse  $A_{ijk} \not\equiv 0$  potremmo trovare un punto di Lebesgue  $x^0$  per  $P(x)$  e  $A_{ijk}(x, P(x))$ , nel quale  $A_{ijk}(x^0, P(x^0)) \neq 0$ , esista il piano tangente al varifold nel senso della definizione 2.3 e

$$(2.2) \quad \limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{\pi_{\#} |\sigma_i|(B_\rho(x^0))}{\omega_n \rho^n} < +\infty$$

Scelta allora  $\chi(t) \in C_c^1(\mathbb{R})$ ,  $\chi \geq 0$  e non identicamente nulla, e posto

$$\phi_h(x) = \frac{\chi(h|x - x^0|)}{\omega_n h^{-n}}$$

i funzionali  $L_{\phi_h}$  convergono puntualmente al funzionale

$$(2.3) \quad L(\psi) = \theta(x^0) A_{ijk}(x^0, P(x^0)) D_{jk}^* \psi(P(x^0)) \int_{P(x^0)} \chi(|y|) d\mathcal{H}^n(y)$$

in  $C^1(G_{n,k})$ . D'altro canto, per le (2.1), (2.2) posso estendere  $L_{\phi_h}$  a funzionali definiti su  $C^0(G_{n,k})$ , equilimitati in virtù della (2.1) e della maggiorazione

$$\|L_{\phi_h}\| \leq \int_{\Omega} \phi_h d\pi_{\#} |\sigma_i|.$$

Quindi il funzionale  $L$  è continuo in  $C^1(G_{n,k})$  rispetto a successioni convergenti in  $C^0(G_{n,k})$ , in evidente contraddizione con (2.3).

Allora  $A \equiv 0$  e  $\underline{\sigma} = 0$ . Dalla definizione di  $\underline{\sigma}$  segue che  $\underline{\mu} = 0$ .

□



DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1.8. Negli altri casi, dimostriamo prima un risultato particolare, assumendo che le  $A_{ijk}$  siano tangenziali.

$$(2.4) \quad P_{il}A_{ljk}(x, P) = A_{ijk}(x, P)$$

per  $V - q.o. (x, P) \in G_n(\Omega)$ . Ci serviranno i seguenti lemmi

LEMMA 2.1. Sia  $\mu$  una misura di Radon positiva nell'aperto  $\Omega$ ,  $x^0 \in \Omega$ ,  $0 < \sigma < \rho$ . Allora indicando con  $B_t$  la palla aperta  $B_t(x^0)$  si ha

$$\int_{B_\rho \setminus B_\sigma} \frac{1}{|x - x^0|^{k-1}} d\mu = (k-1) \int_\sigma^\rho \frac{\mu(B_t)}{t^k} dt + \rho^{1-k} \mu(B_\rho) - \sigma^{1-k} \mu(B_\sigma).$$

DIMOSTRAZIONE.

$$\begin{aligned} (k-1) \int_\sigma^\rho \frac{\mu(B_t)}{t^k} dt &= (k-1) \int_\sigma^\rho \frac{1}{t^k} \int_{B_t} d\mu dt \\ &= (k-1) \int_\sigma^\rho \frac{1}{t^k} \int_{B_\rho} \chi_{B_t}(x) d\mu(x) dt \\ &= (k-1) \int_{B_\rho} \int_\sigma^\rho \frac{1}{t^k} \chi_{B_t}(x) dt d\mu(x) \\ &= (k-1) \int_{B_\rho} \int_{\tilde{\sigma}}^\rho \frac{1}{t^k} dt d\mu(x) \\ &= - \int_{B_\rho} \frac{1}{t^{k-1}} \Big|_{\tilde{\sigma}}^\rho d\mu(x) \\ &= -\frac{1}{\rho^{k-1}} \mu(B_\rho) + \int_{B_\rho \setminus B_\sigma} \frac{1}{|x - x^0|^{k-1}} d\mu(x) \\ &\quad + \int_{B_\sigma} \frac{1}{\sigma^{k-1}} d\mu \end{aligned}$$

dove  $\tilde{\sigma} = \max\{\sigma, |x - x^0|\}$ . Risistemando l'equazione si ha la tesi.  $\square$

LEMMA 2.2. Sia  $\mu \geq 0$  una misura di Radon in  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ ,  $u \in L_{loc}^1(\mu)$ ,  $x^0 \in \Omega$  tale che  $\rho^{-n} \mu(B_\rho(x^0))$  tende a  $L \in (0, +\infty)$  per  $\rho \rightarrow 0$ . Supponiamo che esista  $c \in \mathbb{R}$  tale che

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} u(x) \wedge \delta d\mu(x) \leq c\delta \quad \forall \delta > 0.$$

Allora

$$ap \lim_{x \rightarrow x^0} \frac{u(x)}{|x - x^0|} = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\chi(x) = \frac{u(x)}{|x-x^0|}$ . Si vede facilmente che la tesi è implicata da

$$\text{ap } \lim_{x \rightarrow x^0} \chi(x) \wedge 1 = 0$$

che per le proprietà dei limiti approssimati segue da

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_\rho(x^0))} \int_{B_\rho(x^0)} \chi(x) \wedge 1 d\mu = 0.$$

Fissiamo arbitrariamente  $\lambda, \delta \in (0, 1)$ . Se  $\rho < \delta$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(B_\rho(x^0))} \int_{B_\rho(x^0)} \chi(x) \wedge 1 d\mu &= \frac{1}{\mu(B_\rho(x^0))} \int_{B_\rho(x^0)} \frac{u \wedge |x - x^0|}{|x - x^0|} d\mu \\ &= \frac{1}{\mu(B_\rho(x^0))} \int_{B_\rho(x^0) \setminus B_{\lambda\rho}(x^0)} \frac{u \wedge |x - x^0|}{|x - x^0|} d\mu \\ &\quad + \frac{1}{\mu(B_\rho(x^0))} \int_{B_{\lambda\rho}(x^0)} \frac{u \wedge |x - x^0|}{|x - x^0|} d\mu \\ &\leq \frac{1}{\lambda\rho} \frac{1}{\mu(B_\rho(x^0))} \int_{B_\rho(x^0)} u(x) \wedge \delta d\mu \\ &\quad + \frac{\mu(B_{\lambda\rho}(x^0))}{\mu(B_\rho(x^0))} \end{aligned}$$

da cui segue

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_\rho(x^0))} \int_{B_\rho(x^0)} \chi(x) \wedge 1 d\mu \leq \frac{c\delta}{L\lambda} + \lambda^n.$$

Ponendo  $\lambda = \sqrt{\delta}$  e facendo tendere  $\delta$  a zero si ottiene la tesi, per quanto detto sopra.  $\square$

TEOREMA 2.3. Per ogni  $n$ -varifold intero di Allard  $V$  in  $\Omega$ , la proprietà

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^{n+3}} \int_{B_\rho(x^0)} |(x - x^0)^{\perp_0}|^2 d\mu_V = 0$$

vale per  $V - q.o.$   $(x^0, P^0) \in G_n(\Omega)$ , dove  $\perp_0$  indica la proiezione sul sottospazio ortogonale a  $P^0$ .

Notiamo che nell'integrazione  $P^0$  è fissato.

LEMMA 2.4. Sia  $V$  come nel teorema precedente, sia  $P^0$  un arbitrario  $n$ -piano fissato e  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^k)$  positiva.

Indicando con  $|\delta V|$  la misura di Radon variazione prima del varifold, definiamo

$$\begin{aligned}
\alpha &= \int_{\Omega} \varphi^2 |\delta V| \\
\mu^2 &= \int_{\Omega} |(x - x^0)^{\perp_0}|^2 \varphi^2 d\mu_V \\
\xi^2 &= \int_{\Omega} |(x - x^0)^{\perp_0}|^2 |D\varphi|^2 d\mu_V \\
(2.5) \quad \beta^2 &= \int_{\Omega} \|P - P_0\|^2 \varphi^2 dV(x, P)
\end{aligned}$$

dove  $H$  è il vettore curvatura media di  $V$ , e  $\perp_0$  ha lo stesso significato del teorema precedente. Allora vale la disuguaglianza

$$\beta^2 \leq c_1 \alpha^{2/3} \mu^{2/3} + c_2 \xi^2$$

dove  $c_1, c_2$  sono due costanti positive dimensionali.

Le dimostrazioni di questi due risultati si trovano in **[BR]**, rispettivamente alle pagg. 153 e 138. Vediamo ora una conseguenza di essi che sfrutteremo nella dimostrazione del Teorema 1.8.

Stimiamo

$$\frac{1}{\rho^{n+3}} \int_{B_\rho(x^0)} |(x - x^0)^\perp|^2 d\mu_V$$

dove ora  $\perp$  indica la proiezione sul sottospazio ortogonale a  $P(x)$ , tangente al varifold in  $x$ .

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho^{n+3}} \int_{B_\rho(x^0)} |(x - x^0)^\perp|^2 d\mu_V &\leq \frac{2}{\rho^{n+3}} \int_{B_\rho(x^0)} |(x - x^0)^{\perp_0}|^2 d\mu_V \\
&\quad + \frac{2}{\rho^{n+3}} \int_{B_\rho(x^0)} |(x - x^0)^{\perp_0} - (x - x^0)^\perp|^2 d\mu_V.
\end{aligned}$$

Il primo addendo per il Teorema 2.3 tende a zero per  $V - q.o. (x^0, P^0) \in G_n(\Omega)$ . Si vede subito che il secondo addendo si può scrivere

$$\frac{1}{\rho^{n+3}} \int_{B_\rho(x^0)} |\pi_{P_0}(x - x^0) - \pi_{P(x)}(x - x^0)|^2 d\mu_V \leq \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} \|P(x) - P(x^0)\|^2 d\mu_V$$

Prendiamo nel lemma 2.4  $\varphi(x) = f(|x - x^0|)$ , dove  $f(t)$  è una funzione in  $C^\infty(\mathbb{R})$  tale che  $f(t) = 1$  per  $t \leq \rho$ ,  $f(t) = 0$  per  $t \geq 2\rho$ , inoltre  $-2/\rho \leq f'(t) \leq 0$ . Allora si ha, maggiorando la derivata di  $\varphi$

$$\begin{aligned}
& \int_{B_\rho(x^0)} \|P(x) - P(x^0)\|^2 d\mu_V \\
& \leq \int_{\Omega} \|P(x) - P(x^0)\|^2 \varphi^2 d\mu_V \\
& \leq c_1 \left( \int_{B_{2\rho}(x^0)} \varphi^2 |\delta V| \right)^{2/3} \left( \int_{B_{2\rho}(x^0)} |(x - x^0)^{\perp_0}|^2 \varphi^2 d\mu_V \right)^{1/3} \\
& \quad + c_2 \int_{B_{2\rho}(x^0)} |(x - x^0)^{\perp_0}|^2 |D\varphi|^2 d\mu_V \\
& \leq c_1 \left( \int_{B_{2\rho}(x^0)} |\delta V| \right)^{2/3} \left( \int_{B_{2\rho}(x^0)} |(x - x^0)^{\perp_0}|^2 d\mu_V \right)^{1/3} \\
& \quad + c_2 \int_{B_{2\rho}(x^0)} |(x - x^0)^{\perp_0}|^2 \frac{4}{\rho^2} d\mu_V.
\end{aligned}$$

Se ora vale il lemma 2.3 in  $(x^0, P(x^0))$  ed in  $x^0$  è verificata la condizione

$$\int_{B_{2\rho}(x^0)} |\delta V| = O(\rho^n)$$

che ovviamente vale  $\mu_V - q.o. x^0 \in \Omega$ , dalla stima

$$\int_{B_{2\rho}(x^0)} |(x - x^0)^{\perp_0}|^2 d\mu_V = o(\rho^{n+3})$$

segue che

$$(2.6) \quad \int_{B_\rho(x^0)} \|P(x) - P(x^0)\|^2 d\mu_V = o(\rho^{n+1}).$$

Otteniamo infine il risultato:

*nelle ipotesi del Teorema 2.3, per  $\mu_V - q.o. x^0 \in \Omega$  vale*

$$(2.7) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^{n+3}} \int_{B_\rho(x^0)} |(x - x^0)^{\perp_0}|^2 dV = 0.$$

*A differenza del Teorema 2.3, anche il piano tangente dove si calcola la parte ortogonale è variabile.*

Osserviamo che il risultato vale per gli  $A\mu$ -varifold, essendo anche varifold di Allard.

Dimostriamo ora il Teorema 1.8.

Prendiamo  $x^0 \in \Omega$ , sia  $B_R(x^0) \subset \subset \Omega$  e  $0 < \sigma < \rho < R$ .

Posto, per  $l, m$  fissati

$$\chi(x, P) = |P_{lm} - P_{lm}^0 - A_{ilm}(x^0, P(x^0))(x_i - x_i^0)|$$

cercheremo di stimare

$$\frac{1}{\rho} \int_{B_\rho(x^0)} \chi dV$$

studiando la sua derivata rispetto a  $\rho$ , secondo una tecnica standard della teoria. Consideriamo nella formula (1.1) una funzione  $\varphi = \alpha(\tilde{\chi}(x, P))\psi(x)$  ove

$$\tilde{\chi} = \sqrt{\varepsilon^2 + \chi^2}, \quad \varepsilon \text{ fissato.}$$

$\alpha(t)$  è una funzione  $C^\infty$  da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ , con  $\alpha(t) = t$  per  $t \leq \delta/2$ ,  $\alpha(t) = \delta$  per  $t \geq \delta$  e con  $0 \leq \alpha'(t) \leq 2$  e infine  $\psi(x)$  è una funzione  $C^1$  definita da

$$\psi(x) = h(r)(x_k - x_k^0) \quad r = |x - x^0|$$

con  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $h(t) = 1$  per  $t \leq \rho/2$ ,  $h(t) = 0$  per  $t \geq \rho$  e  $-2 \leq h'(t) \leq 0$ . Sviluppiamo allora i conti

$$\begin{aligned} \int_{G_n(\Omega)} P_{kj} D_j \varphi dV &= \int_M P_{kj} \alpha(\tilde{\chi}) D_j \psi d\mu_V \\ &\quad - \int_M \psi \alpha'(\tilde{\chi}) P_{ki} \frac{\chi}{\tilde{\chi}} A_{ilm}(x^0, P(x^0)) d\mu_V \\ &= - \int_M \psi \alpha'(\tilde{\chi}) \frac{\chi}{\tilde{\chi}} A_{klm}(x, P(x)) d\mu_V \\ &\quad - \int_M \psi \alpha(\tilde{\chi}) A_{jkj}(x, P(x)) d\mu_V \\ &\quad - \int_{G_n(\Omega)} \psi \alpha(\tilde{\chi}) d\mu_k \end{aligned}$$

Possiamo dunque mandare naturalmente  $\varepsilon$  a zero ed usare l'ipotesi che gli  $A_{ijk}$  siano tangenziali, ottenendo

$$\begin{aligned} &\int_M \alpha(\chi) P_{kj} D_j \psi d\mu_V - \int_M \psi \alpha'(\chi) A_{klm}(x^0, P(x^0)) d\mu_V \\ &= - \int_M \psi \alpha'(\chi) A_{klm}(x, P(x)) d\mu_V - \int_M \psi \alpha(\chi) A_{jkj}(x, P(x)) d\mu_V \\ &\quad - \int_{G_n(\Omega)} \psi \alpha(\chi) d\mu_k. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che

$$D_j \psi = (x_k - x_k^0) D_j h + \delta_{jk} h \quad e \quad D_j h(r) = h'(r) \frac{x_j - x_j^0}{r}.$$

Prendiamo  $h(r) = \eta(\frac{r}{\rho})$  con  $\eta$  funzione  $C^\infty(\mathbb{R})$  tale che  $-2 \leq \eta' \leq 0$ ,  $\eta(t) = 1$  per  $t \leq 1/2$  e  $\eta(t) = 0$  per  $t \geq 1$ , si ha

$$h'(r) = \frac{1}{\rho} \eta' \left( \frac{r}{\rho} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \eta \left( \frac{r}{\rho} \right) = - \frac{r}{\rho^2} \eta' \left( \frac{r}{\rho} \right)$$

da cui

$$h'(r) = -\frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial \rho} \eta\left(\frac{r}{\rho}\right)$$

allora sostituendo e portando fuori la derivazione, poiche il supporto di  $\psi$  è compatto, e dividendo tutto per  $\rho^{n+1}$  si ottiene dalla (2.8),

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho^n} \frac{d}{d\rho} \int_{B_\rho(x^0)} \eta\alpha(\chi) P_{kj} \frac{(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0)}{r^2} d\mu_V = \\ & - \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_M \eta\alpha(\chi) P_{kk} d\mu_V \\ & + \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_M \eta(x_k - x_k^0) \alpha'(\chi) [A_{klm}(x^0, P(x^0)) - A_{klm}(x, P(x))] d\mu_V \\ & - \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_M \eta(x_k - x_k^0) \alpha(\chi) A_{jkj}(x, P(x)) d\mu_V \\ & - \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{G_n(\Omega)} \eta(x_k - x_k^0) \alpha(\chi) d\mu_k. \end{aligned}$$

Facendo convergere  $\eta$  alla funzione caratteristica di  $[0, 1)$  si ha, nel senso delle distribuzioni,

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\rho^n} \frac{d}{d\rho} \int_{B_\rho(x^0)} \alpha(\chi) P_{kj} \frac{(x_j - x_j^0)(x_k - x_k^0)}{r^2} d\mu_V = \\ & - \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} P_{kk} \alpha(\chi) d\mu_V \\ & + \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} (x_k - x_k^0) \alpha'(\chi) [A_{klm}(x^0, P(x^0)) - A_{klm}(x, P(x))] d\mu_V \\ & - \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} (x_k - x_k^0) \alpha(\chi) A_{jkj}(x, P(x)) d\mu_V \\ & - \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{G_n(B_\rho(x^0))} (x_k - x_k^0) \alpha(\chi) d\mu_k. \end{aligned}$$

Adesso sommiamo su  $k$  nella formula precedente, notiamo che  $\sum P_{kk} = n$  poichè è una proiezione su di un sottospazio  $n$ -dimensionale, e che

$$\sum_{j,k} P_{kj} \frac{(x_k - x_k^0)(x_j - x_j^0)}{r^2} = 1 - |\nabla r^\perp|^2$$

dove  $\nabla r^\perp$  è la proiezione di  $\nabla r$ , che è un vettore di lunghezza unitaria, sul sottospazio ortogonale a  $P(x)$ . Quindi abbiamo

$$\frac{1}{\rho^n} \frac{d}{d\rho} \int_{B_\rho(x^0)} \alpha(\chi) d\mu_V =$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\rho^n} \frac{d}{d\rho} \int_{B_\rho(x^0)} \alpha(\chi) |\nabla r^\perp|^2 d\mu_V \\
& + \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} n\alpha(\chi) d\mu_V \\
& - \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} (x_k - x_k^0) \alpha'(\chi) [A_{klm}(x^0, P(x^0)) - A_{klm}(x, P(x))] d\mu_V \\
& + \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} (x_k - x_k^0) \alpha(\chi) A_{jkj}(x, P(x)) d\mu_V \\
& + \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{G_n(B_\rho(x^0))} (x_k - x_k^0) \alpha(\chi) d\mu_k
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{\rho^n} \int_{B_\rho(x^0)} \alpha(\chi) (1 - |\nabla^\perp r|^2) d\mu_V \right] = \\
& + \frac{n}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} \alpha(\chi) |\nabla r^\perp|^2 d\mu_V \\
& - \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} (x_k - x_k^0) \alpha'(\chi) [A_{klm}(x^0, P(x^0)) - A_{klm}(x, P(x))] d\mu_V \\
& + \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} (x_k - x_k^0) \alpha(\chi) A_{jkj}(x, P(x)) d\mu_V \\
& + \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{G_n(B_\rho(x^0))} (x_k - x_k^0) \alpha(\chi) d\mu_k.
\end{aligned}$$

Osserviamo che, poiché le funzioni  $\int_{B_\rho(x^0)} \chi d\mu_V$  e  $\int_{B_\rho(x^0)} \chi |\nabla r^\perp|^2 d\mu_V$  sono monotone la formula sopra vale in senso classico per  $\mathcal{L}^1 - q.o. \rho$ . Poniamo

$$\begin{aligned}
I_1 & = \frac{n}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} \alpha(\chi) |\nabla r^\perp|^2 d\mu_V \\
I_2 & = \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} (x_k - x_k^0) \alpha'(\chi) [A_{klm}(x, P(x)) - A_{klm}(x^0, P(x^0))] d\mu_V \\
I_3 & = \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} (x_k - x_k^0) \alpha(\chi) A_{jkj}(x, P(x)) d\mu_V \\
I_4 & = \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{G_n(B_\rho(x^0))} (x_k - x_k^0) \alpha(\chi) d\mu_k.
\end{aligned}$$

Posso allora scrivere

$$(2.8) \quad \frac{d}{d\rho} \left[ \frac{1}{\rho^n} \int_{B_\rho(x^0)} \alpha(\chi)(1 - |\nabla^\perp r|^2) d\mu_V \right] = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Stimiamo  $I_2, I_3, I_4$ :

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{2}{\rho^n} \int_{B_\rho(x^0)} |A_{klm}(x^0, P(x^0)) - A_{klm}(x, P(x))| d\mu_V \\ |I_3| &\leq \frac{\delta}{\rho^n} \int_{B_\rho(x^0)} |A_{jkj}(x, P(x))| d\mu_V \\ |I_4| &\leq \frac{\delta}{\rho^n} \int_{B_\rho(x^0)} d\lambda \end{aligned}$$

dove  $\lambda$  è la misura  $\pi_\#(|\mu|)$ .

Stimiamo ora  $I_1$  usando il risultato espresso nell'equazione (2.7). Infatti, essendo  $|\nabla^\perp r| = |(x - x^0)^\perp|/r$ , abbiamo (con  $\eta = \mu_V \llcorner |(x - x^0)^\perp|^2$ )

$$I_1 \leq \frac{\delta}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} |\nabla^\perp r|^2 d\mu_V = \frac{\delta}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} \frac{1}{r^2} d\eta.$$

Usando il lemma 2.1 con  $k = 3$  abbiamo allora

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\delta}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho \setminus B_\varepsilon} \frac{d\eta}{r^2} \\ &= \frac{\delta}{\rho^{n+1}} \left\{ 2 \int_0^\rho \frac{\eta(B_t)}{t^3} dt + \rho^{-2} \eta(B_\rho) - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-2} \eta(B_\varepsilon) \right\}. \end{aligned}$$

Supponiamo che per  $x^0$  valga l'equazione (2.7).  $I_1$  è infinitesimo per  $\rho \rightarrow 0$ , infatti con queste notazioni il risultato si esprime con

$$\eta(B_\rho) = o(\rho^{n+3})$$

dove  $n$  è la dimensione del varifold.

Prendiamo allora i punti  $x^0$  tali che

1. In  $x^0$  il tangente  $P(x^0)$  al varifold  $V$ .
2.  $x^0$  è punto di Lebesgue per tutte le  $A_{ijk}(x, P(x))$ , rispetto alla misura  $\mu_V$ .
3.  $x^0$  è punto di Lebesgue per tutte le  $P_{ij}(x)$  rispetto alle misure  $\mu_V \llcorner |A_{ijk}(x, P(x))|$ .
4. in  $x^0$  valga  $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^n} \int_{B_\rho(x^0)} d\lambda < +\infty$ .
5. in  $x^0$  valga la (2.7).

Ciò vale per tutti gli  $x^0 \in \Omega$  eccetto un insieme di misura  $\mu_V$ -nulla.

Per un tale  $x^0$  si ha allora, dalla (2.8), che

$$\frac{d}{d\rho} \left\{ \frac{1}{\rho^n} \int_{B_\rho(x^0)} \alpha(\chi)(1 - |\nabla^\perp r|^2) d\mu_V \right\} \leq \delta L + o(1)$$



per un certo  $L$  dipendente solo da  $x^0$ . Ciò implica che

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} \alpha(\chi) (1 - |\nabla r^\perp|^2) d\mu_V \right\} \leq \delta L.$$

Poiché sappiamo già che

$$\frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} \alpha(\chi) |\nabla r^\perp|^2 d\mu_V = \frac{I_1}{n} = o(1)$$

otteniamo

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} \alpha(\chi) d\mu_V \leq \delta L.$$

Notiamo ora che  $\alpha(\chi) \geq \chi \wedge \delta/2$ , quindi

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\rho^{n+1}} \int_{B_\rho(x^0)} \chi \wedge \delta/2 d\mu_V \leq \delta L.$$

La tesi segue allora dal lemma 2.2.

Vediamo come concludere la dimostrazione del teorema nel caso generale. Sia  $\varphi = \psi P_{li}$ , con  $\psi$  come nella definizione, sommando su  $i$

$$\begin{aligned} - \int_{G_n(\Omega)} \psi P_{li} d\mu_i &= \int_{G_n(\Omega)} P_{ij} P_{li} D_j \psi + P_{li} D_{jk}^* \psi A_{ijk} + \psi A_{ili} + \psi P_{li} A_{jij} dV \\ &= \int_{G_n(\Omega)} P_{lj} D_j \psi + D_{jk}^* \psi P_{li} A_{ijk} + \psi A_{ili} + \psi P_{li} A_{jij} dV. \end{aligned}$$

Ponendo

$$(2.9) \quad \widehat{\mu}_l = P_{li} \mu_i + A_{ili} V + P_{li} A_{jij} V - P_{js} A_{slj} V$$

$$\widehat{A}_{ljk} = P_{li} A_{ijk}$$

si vede che la coppia  $(\widehat{A}_{ljk}, \widehat{\mu}_l)$ , soddisfa ancora la definizione (1.1), inoltre stavolta  $\widehat{A}_{ljk}$  sono tangenziali. Per il teorema di unicità 1.3 la tesi segue.

Osserviamo che incidentalmente abbiamo dimostrato la tangenzialità delle  $A_{ijk}$ .  $\square$

Possiamo ora dimostrare le altre proposizioni.

**DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 1.7.** Il risultato sulla tangenzialità degli  $A_{ijk}$  è contenuto nella parte finale della dimostrazione del Teorema 1.8. Vediamo che il vettore  $N_i(x) = A_{jij}(x, P(x))$  è perpendicolare al piano  $P(x)$  per  $\mu_V - q.o. x \in \Omega$ . Poiché sappiamo che

$$A_{ijk}(x, P(x)) = P_{il}(x) a_p \nabla_l P_{jk}(x)$$

per  $\mu_V - q.o. x \in \Omega$ , usando le proprietà del gradiente approssimato vale

$$\begin{aligned}
P_{hi}(x)N_i(x) &= P_{hi}(x)P_{jl}(x)ap\nabla_l P_{ij}(x) \\
&= P_{jl}(x)ap\nabla_l(P_{hi}(x)P_{ij}(x)) - P_{ij}(x)P_{jl}(x)ap\nabla_l P_{hi}(x) \\
(2.10) \qquad &= A_{jhj}(x, P(x)) - A_{ihj}(x, P(x)) = 0
\end{aligned}$$

sommando su  $i$  e  $j$ .

Cioè la proiezione su  $P(x)$  del vettore  $N_i(x)$  è nulla  $\mu_V - q.o.$   $x \in \Omega$ , che è quanto volevamo ottenere.

Che anche  $\underline{\mu}$  sia tangente è conseguenza della formula (2.9), della perpendicolarità di  $N$  e del teorema di unicità. Infatti, per quanto appena visto, dalla formula (2.9) si ottiene

$$\tilde{\mu}_l = P_{li} \mu_i$$

che per unicità deve coincidere con  $\mu_l$ . □

**DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 1.5.** Il fatto che il supporto di  $\underline{\mu}$  sia contenuto nel supporto di  $V$  è banale, basta prendere infatti nella formula (1.1) una  $\varphi$  con supporto disgiunto dal supporto di  $V$ , per vedere che anche l'integrazione rispetto a  $\underline{\mu}$  è nulla.

Posto  $\lambda = \pi_{\#}|\underline{\mu}|$ , esistono (vedi [EV]) delle misure vettoriali  $\sigma_x$  a valori in  $\mathbb{R}^k$  tali che

$$\int_{G_n(\Omega)} \varphi(x, P) d\underline{\mu} = \int_{\Omega} \left( \int_{G_{n,k}} \varphi(x, P) d\sigma_x(P) \right) d\lambda(x)$$

per ogni funzione di Borel limitata  $\varphi(x, P)$ . Dal fatto che  $\underline{\mu}$  è tangenziale (vedi 1.7) segue facilmente che

$$(2.11) \qquad P_{ij}(\sigma_x)_j = (\sigma_x)_i$$

come misure, per  $\lambda$ -quasi ogni  $x \in \Omega$ . Sia ora  $\lambda \llcorner A$  la parte  $\mu_V$ -assolutamente continua di  $\lambda$ . Usando funzioni test  $\varphi$  dipendenti dalla sola variabile  $x$ , come in (5.2), si trova che il varifold  $V$  ha curvatura media generalizzata data, come misura  $\mu_V$ -assolutamente continua, da

$$A_{jij}(x, P(x))\mu_V + \int_{G_{n,k}} \sigma_x(P) \lambda \llcorner A$$

e bordo generalizzato dato da

$$\int_{G_{n,k}} \sigma_x(P) \lambda \llcorner CA.$$

Dalla perpendicolarità di  $A_{jij}$  (vedi 1.7) e dal Teorema di Brakke 3.4 ricaviamo che

$$P_{ij}(x) \int_{G_{n,k}} (\sigma_x)_j(P) = 0$$

per  $\lambda \llcorner A$ -quasi ogni  $x \in \Omega$ .

Supponendo di aver dimostrato che il supporto di  $|\sigma_x|$  è  $\{P(x)\}$  per  $\lambda \llcorner A$ -quasi ogni  $x \in \Omega$ , l'equazione sopra è in contraddizione con la (2.11) e quindi  $\lambda \llcorner A = 0$ .

Per dimostrare quest'ultimo fatto, consideriamo nell'equazione che definisce gli  $A\mu$ -varifold una funzione test del tipo

$$\varphi(x, P) = |P - P(x^0)|^2 \xi(P) \frac{\chi(\rho^{-1}|x - x^0|)}{\omega_n \rho^n}$$

ove  $\xi \in C^1(G_{n,k})$ ,  $\chi \in C_c^1(\mathbb{R})$  è positiva e non nulla e valgono le seguenti proprietà: in  $x^0$  esiste il piano tangente approssimato  $P(x^0)$ ,

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{-n-1} \int_{B_\rho(x^0)} |P(x) - P(x^0)|^2 d\mu_V = 0$$

$\lambda \ll \mathcal{C}A$  ha densità nulla rispetto a  $\mu_V$  e infine  $x^0$  è un punto di Lebesgue per tutte le applicazioni

$$x \mapsto \int_{G_{n,k}} \psi(P) d\sigma_x(P) \quad \psi \in C^0(G_{n,k})$$

rispetto alla misura  $\mu_V$ . Dall'equazione (2.6) e dal Teorema di Lebesgue non è difficile dedurre che tutte le proprietà sopra sono soddisfatte per  $\mu_V - q.o. x^0 \in \Omega$ . Passando al limite per  $\rho$  che tende a zero nell'equazione (1.1) troviamo

$$\left( \theta(x^0) \int_{P(x^0)} \chi(|y|) d\mathcal{H}^n(y) \right) \int_{G_{n,k}} |P - P(x^0)|^2 \xi(P) d\sigma_{x^0}(P) = 0.$$

Essendo  $\xi(P)$  arbitraria segue che il supporto di  $\sigma_{x^0}$  è  $\{P(x^0)\}$ . □

**DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 1.6.** La tesi segue facilmente dal fatto che  $A_{ijk}(x, P(x)) = ap \nabla_i^\mu P_{jk}(x)$ , differenziando le identità  $P_{jk} = P_{kj}$ ,  $P_{jj} = n$ ,  $P_{jk} = P_{jr} P_{rk}$ . □

### 3. Il Teorema di Compattezza

Studiamo in questa sezione le proprietà di compattezza dei varifold con bordo, essenzialmente generalizzando il teorema di Hutchinson.

**TEOREMA 3.1.** *Sia data una successione  $V_l$  di  $A\mu$ -varifold in  $AV_n^p(\Omega)$ , con  $p > 1$ , tali che per ogni aperto  $W \subset \subset \Omega$*

$$(3.1) \quad \mu_{V_l}(W) + \int_{G_n(W)} \|A^{(l)}\|^p dV_l + |\underline{\mu}^{(l)}|(G_n(W)) < c(W) \quad \forall l$$

dove  $c(W)$  è una costante reale indipendente da  $l$ , e  $\|A^{(l)}\| = \sum_{i,j,k} |A_{ijk}^{(l)}|$ . Allora si può estrarre una successione di indici  $l_h$  in modo tale che  $V_{l_h}$  convergano ad un  $A\mu$ -varifold  $V$ ,  $V_{l_h} \llcorner A_{ijk}^{l_h}$  convergano debolmente a  $V \llcorner A_{ijk}$  e  $\underline{\mu}^{(l_h)}$  convergano debolmente a  $\underline{\mu}$ .

Inoltre per ogni funzione convessa e semicontinua inferiormente  $f : \mathbb{R}^{k^3} \rightarrow [0, +\infty]$  vale la disuguaglianza

$$(3.2) \quad \int_{G_n(\Omega)} f(A_{ijk}) dV \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \int_{G_n(\Omega)} f(A_{ijk}^{(l_h)}) dV_{l_h}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che la condizione (3.1) e l'osservazione immediatamente precedente la proposizione 1.10 implicano che le variazioni prime dei varifold  $V_l$  sono localmente equilimitate. Allora si può applicare il teorema di compattezza di Allard, per estrarre una sottosuccessione  $V_{l_h}$  convergente ad un varifold intero  $V$ .

Per il Teorema di Banach-Alaoglu posso supporre, estraendo se necessario un'altra sottosuccessione, che anche le misure  $\underline{\mu}^{(l_h)}$  convergono in senso debole ad una misura  $\underline{\mu}$ , e le misure  $V_{l_h} \llcorner A_{ijk}^{(l_h)}$  convergono a delle misure  $\sigma_{ijk}$ . Per l'osservazione 6.4, esistono delle funzioni  $A_{ijk} \in L^p_{loc}(V)$  tali che  $\sigma_{ijk} = V \llcorner A_{ijk}$ .

Osservando allora che nella formula (1.1) tutto passa al limite si ha che  $V$  è ancora un  $A\mu$ -varifold.

La semicontinuità dei funzionali delle curvatures è assicurata dal Teorema 6.3.  $\square$

Questo teorema è molto importante nelle applicazioni, come vedremo, perché permette di dire che i limiti di successioni minimizzanti di funzionali che coinvolgono le norme  $L^p$  della seconda forma fondamentale e la variazione totale della misura bordo, sono ancora  $A\mu$ -varifold.

Nell'ultimo capitolo faremo vedere in dettaglio l'applicazione di questo metodo ad un problema concreto.

#### 4. Osservazioni e Congetture

È chiaro che nell'intorno di un punto non appartenente al supporto della misura bordo, gli  $A\mu$ -varifold si comportano come quelli di Hutchinson, ma nei punti del supporto si pongono numerosi problemi.

Il primo passo verso un qualsiasi teorema di struttura ci è parso dunque quello di studiare in dettaglio la natura della misura bordo.

**TEOREMA 4.1.** *Per ogni  $A\mu$ -varifold  $V_{M,\theta}$  la misura  $\pi_{\#}|\underline{\mu}|$  è concentrata su un insieme  $(n-1)$ -rettificabile  $\partial M$ . Più precisamente esiste un'applicazione  $\tau : \partial M \rightarrow (0, +\infty)$  tale che  $\pi_{\#}|\underline{\mu}| = \tau \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial M$ .*

Il teorema precedente (che dimostreremo nel prossimo capitolo) e noti teoremi di disintegrazione di misure garantiscono l'esistenza di misure vettoriali  $\underline{\sigma}_x$  in  $G_{n,k}$ , a valori in  $\mathbb{R}^k$ , tali che

$$\int_{G_n(\Omega)} \varphi(x, P) d\underline{\mu}(x, P) = \int_{\partial M} \left( \int_{G_{n,k}} \varphi(x, P) d\underline{\sigma}_x(P) \right) d\mathcal{H}^{n-1}(x)$$

per ogni funzione  $\varphi \in C_c^0(G_n(\Omega))$ . Le misure  $\underline{\sigma}_x$  sono unicamente determinate per  $\mathcal{H}^{n-1}$ -quasi ogni  $x \in \partial M$  ed inoltre  $|\underline{\sigma}_x|(G_{n,k}) = \tau(x)$  per  $\mathcal{H}^{n-1}$ -q.o.  $x \in \partial M$ .

Riguardo alla natura delle misure  $\underline{\sigma}_x$ , è naturale dare la seguente

**CONGETTURA 4.2.** *Per  $\mathcal{H}^{n-1}$ -q.o.  $x \in \partial M$   $\tau(x)$  è un intero e la misura  $\underline{\sigma}_x$  è del tipo*

$$\underline{\sigma}_x = \sum_{i=1}^{\tau(x)} v_i \delta_{P_i}$$

con  $v_i \in \mathbb{S}^{k-1}$ ,  $P_i \in G_{n,k}$  e

$$(4.1) \quad \text{span}\{apT_x \partial M, v_i\} = P_i.$$

La congettura precedente verrà da noi dimostrata nel capitolo 5, nel caso  $n = 1$ .

L'equazione (4.1) esprime in forma debole il fatto classico che lo spazio vettoriale generato dal piano tangente al bordo e dalla conormale è lo spazio tangente alla varietà.

Se la congettura sopra fosse valida allora  $\partial M$  sarebbe ancora un varifold rettificabile con molteplicità intera  $\tau$ . Avrebbe quindi senso chiedersi se questo nuovo varifold ha ancora curvatura media, seconda forma fondamentale, bordo.

In tal caso l'iterazione di questo processo definirebbe qualcosa che potrebbe essere chiamato bordo  $m$ -dimensionale di un varifold. A differenza dell'operazione di bordo per oggetti orientati (le correnti), questa operazione non sarebbe necessariamente nulla, una volta ripetuta. Nel caso dei poliedri questa operazione porta facce in spigoli e spigoli in vertici, con molteplicità che tengono conto del numero di facce concorrenti in uno spigolo e del numero di spigoli concorrenti in un vertice (vedi [DG3]).

La congettura 4.2 è intimamente collegata, attraverso tecniche di blow-up, alla seguente

**CONGETTURA 4.3.** Per  $\mathcal{H}^{n-1} - q.o. x^0 \in \Omega \setminus \partial M$ , l'insieme  $VarTan(V_{M,\theta}, x^0)$  contiene un solo varifold, somma di  $n$ -piani con molteplicità intera. Per  $\mathcal{H}^{n-1} - q.o. x^0 \in \partial M$ , l'insieme  $VarTan(V_{M,\theta}, x^0)$  contiene un solo varifold avente seconda forma fondamentale nulla e bordo dato dalla misura

$$\mathcal{H}^{n-1} \llcorner apT_{x^0} \partial M \times \underline{\sigma}_{x^0}.$$

## Rettificabilità della Misura Bordo

Dimostreremo in questo capitolo che la variazione totale della misura bordo di un  $A\mu$ -varifold, una volta proiettata sull'aperto di  $\mathbb{R}^k$  dove il varifold è definito, si concentra su un  $(n - 1)$ -rettificabile, ottenendo così un risultato che estende ovviamente il caso classico delle varietà regolari e la teoria della frontiera degli insiemi di perimetro finito, dovuta a De Giorgi, che possono essere visti come particolari  $A\mu$ -varifold di codimensione nulla.

Per ottenere questo teorema useremo alcuni strumenti tecnici provenienti dalla teoria delle correnti. Per ragioni di spazio non potremo che introdurre brevemente le nozioni di base di questa teoria e enunciare alcuni teoremi che sfrutteremo senza darne una dimostrazione.

Tutto il capitolo è indipendente dal resto della trattazione poiché i metodi che qui useremo non si rifanno necessariamente a concetti introdotti in precedenza.

Nella parte finale del capitolo applicheremo i risultati ottenuti nel caso generale per avere una descrizione completa della misura bordo nel caso di  $A\mu$ -varifold 1-dimensionali, in accordo con la congettura 4.2 del capitolo precedente. Analizzeremo inoltre la struttura di tali varifold quando la seconda forma fondamentale sta in  $L^p$ , per  $p > 1$ .

### 1. Slicing e Localizzazione

In tutta la sezione consideriamo  $M$  un  $n$ -rettificabile in un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ ,  $\tau : M \rightarrow [0, +\infty)$  localmente  $\mathcal{H}^n$ -integrabile.

Definiamo  $\mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  come l'insieme delle misure di Radon vettoriali  $\sigma$  in  $\Omega$ , a valori in  $\mathbb{R}^m$  tali che siano concentrate su un insieme  $\mathcal{H}^{n-1}$ -rettificabile e nulle sugli insiemi  $\mathcal{H}^{n-1}$ -nulli.

**OSSERVAZIONE 1.1.** Poiché il Teorema di Radon-Nykodim vale anche in spazi di misura astratti, purché  $\sigma$ -finiti, si vede che  $\sigma \in \mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  se e soltanto se esiste un  $(n - 1)$ -rettificabile  $N$  in  $\Omega$  e una funzione  $f : N \rightarrow \mathbb{R}^m$  appartenente a  $L^1_{loc}(\mathcal{H}^{n-1} \llcorner N)$  tale che  $\sigma = f\mathcal{H}^{n-1} \llcorner N$ .

Notiamo inoltre che  $\mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R}^m)$  è un insieme chiuso per la convergenza di misure in variazione, cioè la variazione totale della differenza tende a zero.

**PROPOSIZIONE 1.2.** Sia  $\mu = \tau\mathcal{H}^n \llcorner M$  e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^m$   $\mu$ -apdifferenziabile  $\mu$ -quasi ovunque. Allora esiste una successione di compatti  $K_h$  disgiunti e contenuti in  $M$  tale che

$$(1.1) \quad \mathcal{H}^n(M \setminus \bigcup_h K_h) = 0$$

inoltre  $f|_{K_h}$  è lipschitziana per ogni  $h$ .

La dimostrazione può essere trovata sul libro di Federer [FE1].

Definiamo ora per una misura positiva  $\mu$  in  $\Omega$  e una funzione di Borel  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\rho \in \mathbb{R}^+$  e un generico elemento  $y^0 \in \mathbb{R}^m$ , l'insieme  $\theta_\rho(\mu, f, y_0)$  come la classe

di tutti i limiti deboli della famiglia di misure di Radon

$$(1.2) \quad \frac{\mu \llcorner f^{-1}(B_\rho(y^0) \setminus B_{\rho-\varepsilon}(y^0))}{\varepsilon}$$

per  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

OSSERVAZIONE 1.3. Si vede facilmente che per  $\mathcal{L}^1 - q.o. \rho \in \mathbb{R}^+$  l'insieme  $\theta_\rho(\mu, f, y^0)$  non è vuoto. Precisamente ciò vale per tutti i valori  $\rho$  in cui la funzione reale monotona  $M(\delta) = \mu(f^{-1}(B_\delta(y^0)))$  è differenziabile, poiché allora la famiglia di misure di Radon definite nella (1.2) è localmente equilimitata e possiamo dunque applicare il Teorema di Banach–Alaoglu.

Vale allora il lemma di “slicing”:

LEMMA 1.4. *Date  $\mu$  e  $f$  come nella proposizione 1.2, siano  $K_h$  i compatti dati dalla (1.1). Poniamo  $F(x) = |f(x) - y^0|$  con  $y^0 \in \mathbb{R}^m$  fissato. Allora per  $\mathcal{L}^1 - q.o. \rho \in \mathbb{R}^+$  si ha che*

$$N = \bigcup_h K_h \cap f^{-1}(\partial B_\rho(y^0))$$

è un  $(n-1)$ -rettificabile in  $\Omega$  e che

$$(1.3) \quad \theta_\rho(|\nabla^M F| \mu, f, y^0) \equiv \{\tau \mathcal{H}^{n-1} \llcorner N\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo prima il caso in cui  $f$  è lipschitziana.

Con un abuso di notazione indichiamo con  $\theta_\rho(|\nabla^M F| \mu, f, y^0)$  uno dei limiti deboli, eventualmente passando ad una sottosuccessione, definiti nella formula (1.2) (abbiamo già visto che possiamo supporre che ne esista almeno uno). La prima parte della tesi segue banalmente dalla formula di coarea generale (7.2) ed è inoltre chiaro che  $\theta_\rho(|\nabla^M F| \mu, f, y^0)$  si concentra su  $N$  che in questo caso è un insieme relativamente chiuso in  $\Omega$ . Ci resta da dimostrare la formula (1.3).

Per la formula di coarea applicata alla funzione lipschitziana  $F$  si ha per ogni funzione  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  boreliana e positiva

$$\int_M \varphi(x) |\nabla^M F(x)| d\mathcal{H}^n = \int_{\mathbb{R}} \int_{F^{-1}(y) \cap M} \varphi(x) d\mathcal{H}^{n-1} d\mathcal{H}^1(y).$$

Considerando  $\varphi(x) = \psi(x)\tau(x)$  se  $\rho - \varepsilon < F(x) \leq \rho$ , zero altrimenti, otteniamo

$$(1.4) \quad \int_{F^{-1}((\rho-\varepsilon, \rho])} \psi |\nabla^M F| d\mu = \int_{\rho-\varepsilon}^{\rho} \int_{F^{-1}(y) \cap M} \psi \tau d\mathcal{H}^{n-1} d\mathcal{H}^1(y)$$

dove  $\psi$  è una arbitraria funzione boreliana positiva.

Consideriamo nella formula sopra una famiglia numerabile e densa  $\{\psi_i\}$  di funzioni continue a supporto compatto e positive e scegliamo  $\rho$  punto di Lebesgue per tutte le funzioni reali

$$g_i(y) = \int_{F^{-1}(y)} \psi_i \tau d\mathcal{H}^{n-1}$$

(il fatto che le funzioni  $g_i$  appartengano a  $L^1(\mathcal{L}^1)$  è dato ancora dalla formula di coarea). Dividendo per  $\varepsilon$  entrambi i membri della equazione (1.4) e facendo tendere  $\varepsilon \rightarrow 0$  si ottiene

$$(1.5) \quad \int_{\Omega} \psi_i d\theta_{\rho}(|\nabla^M F| \mu, f, y^0) = \int_{F^{-1}(\rho)} \psi_i \tau d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Per la densità delle funzioni  $\psi_i$  si ottiene allora

$$\theta_{\rho}(|\nabla^M F| \mu, f, y^0) = \tau(x) \mathcal{H}^{n-1} \llcorner f^{-1}(\partial B_{\rho}(y^0))$$

per  $\mathcal{L}^1 - q.o.$   $\rho \in \mathbb{R}^+$ . È allora chiaro che la tesi segue.

Vediamo allora il caso in cui  $f$  sia solo  $\mu$ -apdifferenziabile. La prima parte del lemma segue dalla decomposizione descritta nella proposizione 1.2 e continuiamo a chiamare  $\theta_{\rho}(|\nabla^M F| \mu, f, y^0)$  un arbitrario limite debole della famiglia (1.2). Definiamo la misure di Radon  $\mu^h = \mu \llcorner K_h$ , con gli stessi conti visti nel caso lipschitziano per una funzione  $\varphi$  boreliana positiva si ha

$$\begin{aligned} \int_M \varphi(x) |\nabla^M F(x)| d\mathcal{H}^n &= \sum_h \int_{K_h} \varphi(x) |\nabla^M F(x)| d\mathcal{H}^n = \\ &= \sum_h \int_{\mathbb{R}} \int_{K_h \cap F^{-1}(y)} \varphi(x) d\mathcal{H}^{n-1} d\mathcal{H}^1(y) \end{aligned}$$

allo stesso modo possiamo allora ottenere che

$$\begin{aligned} \int_{F^{-1}((\rho-\varepsilon, \rho])} \psi(x) |\nabla^M F(x)| d\mu &= \sum_h \int_{F^{-1}((\rho-\varepsilon, \rho])} \psi(x) d\mu^h = \\ &= \sum_h \int_{\rho-\varepsilon}^{\rho} \int_{K_h \cap F^{-1}(y)} \psi(x) \tau(x) d\mathcal{H}^{n-1} d\mathcal{H}^1(y). \end{aligned}$$

Per il teorema di convergenza monotona possiamo scambiare il segno di integrale e la sommatoria e avere

$$\int_{F^{-1}((\rho-\varepsilon, \rho])} \psi(x) |\nabla^M F(x)| d\mu = \int_{\rho-\varepsilon}^{\rho} \int_{\bigcup_h K_h \cap F^{-1}(y)} \psi(x) \tau(x) d\mathcal{H}^{n-1} d\mathcal{H}^1(y)$$

a questo punto la dimostrazione procede come nel caso lipschitziano.  $\square$

Come conseguenza del teorema di slicing dimostriamo il seguente *lemma di localizzazione* che ci sarà necessario più volte nel seguito.

Praticamente esso dice che, dato un  $A\mu$ -varifold  $V$ , esiste una famiglia sostanziale di palle  $B_{\rho}(P_0) \subset G_{n,k}$ , nella grassmanniana, e  $B_{\delta}(x^0)$ , in  $\Omega$ , tali che  $V \llcorner B_{\delta}(x^0) \times B_{\rho}(P_0)$  è ancora un  $A\mu$ -varifold.

LEMMA 1.5. *Sia  $V$  un  $A\mu$ -varifold di dimensione  $n$  in  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ . Scelti  $x^0 \in \Omega$  e  $P_0 \in G_{n,k}$  e  $\delta', \rho' > 0$ , esistono due numeri positivi  $\delta'/2 \leq \delta \leq \delta'$ ,  $\rho'/2 \leq \rho \leq \rho'$  tali che definito  $B_{\delta}^{\rho} = B_{\delta}(x^0) \times B_{\rho}(P_0) \subset G_n(\Omega)$ , si ha che  $V_{\delta}^{\rho} = V \llcorner B_{\delta}^{\rho}$  è ancora un  $A\mu$ -varifold la cui misura bordo è la somma della misura bordo di  $V$ , ristretta a  $B_{\delta}^{\rho}$  e di una misura di Radon tale che la proiezione della sua variazione totale appartiene a  $\mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R})$ .*



DIMOSTRAZIONE. Siano dati  $x^0, P_0, \delta', \rho'$  come nelle ipotesi, vediamo prima la localizzazione nelle  $x$ : sia  $0 < \delta < \delta'$  un valore per cui  $\theta_\delta(\mu_V, Id_M, x^0)$  consista di una misura di Radon positiva appartenente a  $\mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R})$ , dimostriamo allora che  $V \llcorner G_n(B_\delta(x^0))$  è ancora un  $A\mu$ -varifold.

Consideriamo nella formula (1.1) una funzione  $\varphi$  della forma  $\varphi(x, P) = \psi(x, P)\chi(x)$ , dove  $\chi(x)$  è una funzione cut-off così definita:  $\chi(x) = h(r)$ ,  $r = |x - x^0|$  e  $h(t)$  è una funzione  $C^\infty(\mathbb{R})$ , con le proprietà  $h(t) = 1$  per  $t < \delta/2$ ,  $h(t) = 0$  per  $t > \delta$ ,  $h'(t) \leq 0$ .

La formula si riscrive allora

$$\begin{aligned} & \int_{G_n(\Omega)} \chi(x) P_{ij} D_j \psi(x, P) + \chi(x) D_{jk}^* \psi(x, P) A_{ijk}(x, P) + \chi(x) \psi(x, P) A_{jij}(x, P) dV \\ &= - \int_{G_n(\Omega)} \chi(x) \psi(x, P) d\mu_i(x, P) - \int_{\Omega} \psi(x, P(x)) P_{ij} D_j \chi(x) d\mu_V \\ &= - \int_{G_n(\Omega)} \chi(x) \psi(x, P) d\mu_i(x, P) - \int_{\Omega} \psi(x, P) h'(r) P_{ij} \frac{x_j - x_j^0}{r} dV. \end{aligned}$$

Consideriamo una successione di funzioni  $h_l(t)$  con le proprietà di cui sopra e inoltre sia  $h_l(t) = 1$  per  $t < \delta - 1/l$ ,  $|h'(t)| < 4l$  (è facile vedere come costruirle). È chiaro che la successione  $h_l$  tende alla funzione caratteristica di  $(-\infty, \delta)$ . Consideriamo le misure di Radon in  $G_n(\Omega)$

$$\sigma_l = V \llcorner h_l'(r) P_{ij}(x) \frac{x_j - x_j^0}{r}$$

si vede subito che  $\sigma_l$  si concentra su  $G_n B_\delta(x^0) \setminus B_{\delta-1/l}(x^0)$ , calcoliamone allora la variazione totale.

$$\begin{aligned} |\sigma_l|(G_n(B_\delta(x^0) \setminus B_{\delta-1/l}(x^0))) &\leq 4l \mu_V(B_\delta(x^0) \setminus B_{\delta-1/l}(x^0)) = \\ &= 4 \frac{\mu_V(B_\delta(x^0)) - \mu_V(B_{\delta-1/l}(x^0))}{1/l}. \end{aligned}$$

Sfruttando a questo punto il lemma di slicing applicato alla misura  $\mu_V$  e alla funzione  $Id_M : M \rightarrow \mathbb{R}^k$  si ottiene che, per la nostra scelta iniziale di  $\delta$ , le misure  $\sigma_l$  sono equilimitate localmente e dunque, a meno di una sottosuccessione, convergono debolmente ad una misura  $\sigma$ . Possiamo inoltre supporre che le loro variazioni totali convergano ad una misura  $\lambda$  e che quindi valga  $|\sigma| \leq \lambda$ . Dall'equazione (1) deduciamo  $\pi_\# \lambda \ll \theta_\delta(\mu_V, Id_M, x^0)$ . Poiché quest'ultima appartiene a  $\mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R})$  così deve essere per la misura  $\pi_\# |\sigma|$ .

Sostituendo le funzioni  $h_{l_k}$  nella formula sopra e passando al limite si ottiene allora

$$\begin{aligned} & \int_{G_n(\Omega)} P_{ij} D_j \psi(x, P) + D_{jk}^* \psi(x, P) A_{ijk}(x, P) + \psi(x, P) A_{jij}(x, P) d(V \llcorner G_n(B_\delta(x^0))) \\ &= - \int_{G_n(B_\delta(x^0))} \psi(x, P) d\mu_i(x, P) - \int_{\Omega} \psi(x, P) d\sigma_i(x, P). \end{aligned}$$

Abbiamo dunque ottenuto che  $V \llcorner G_n(B_\delta(x^0))$  è ancora un  $A\mu$ -varifold con una parte aggiuntiva di misura bordo  $\underline{\sigma}$  dovuta al "taglio", concentrata su  $G_n(\partial B_\delta(x^0)) \cap$

$M$ ).

Operando in modo analogo con una funzione cut-off nella variabile  $P$ ,  $\chi(P) = h(|P - P_0|)$  si ottiene una parte in più di misura bordo data dalla convergenza debole di una sottosuccessione delle misure

$$\sigma_l = V \llcorner \{h_l'(|P - P_0|)A_{ijk}(x, P)D_{jk}|P - P_0|\} \rightarrow \sigma(x, P)$$

che si concentra su  $\Omega \times \partial B_\rho(P_0)$ .

È chiaro che componendo le due operazioni di restrizione troviamo una coppia  $\delta, \rho$  come nella tesi, tale che  $V \llcorner B_\delta(x^0) \times B_\rho(P_0)$  è ancora un  $A\mu$ -varifold.

Per ottenere la tesi ci basta allora dimostrare che anche in questo secondo caso si può scegliere  $\rho \leq \rho'$  tale che la proiezione della variazione totale della misura di bordo aggiuntiva appartiene a  $\mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R})$ .

Consideriamo le misure  $\sigma_l$  già supponendo, a meno di una sottosuccessione, che convergano debolmente alla misura  $\sigma(x, P)$  e che le loro variazioni totali  $|\sigma_l|$  convergano anch'esse ad una misura di Radon positiva  $\alpha(x, P)$ . È evidente allora che  $\pi_\# \sigma_l \rightarrow \pi_\# \sigma$ , che  $\pi_\# |\sigma_l| \rightarrow \pi_\# \alpha$  e che  $|\sigma| \leq \alpha$ . Otteniamo la tesi dimostrando che  $\pi_\# \alpha \in \mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R})$ . Vale infatti la maggiorazione

$$\pi_\# |\sigma_l| = \mu_V \llcorner \left\{ \left| h_l' A_{ijk}(x, P(x)) \frac{P_{jk}(x) - P_{0jk}}{|P(x) - P_0|} \right| \right\}.$$

Sappiamo che la funzione  $P : M \rightarrow G_{n,k}$  che dà il piano tangente approssimato per  $\mu_V - q.o.$   $x \in M$  è  $\mu_V$ -apdifferenziabile per il Teorema 1.8 del capitolo precedente, possiamo dunque riscrivere la disuguaglianza sopra come

$$\pi_\# |\sigma_l| \leq 4 |\nabla^M F| \frac{\mu_V \llcorner P^{-1}(B_{\rho+1/l}(P_0) \setminus \overline{B}_\rho(P_0))}{1/l}$$

con  $F(x) = |P(x) - P_0|$ . È chiaro allora che applicando il lemma di slicing con  $f(x) = P(x)$ ,  $\mu = \mu_V$ , si ottiene che ogni limite debole di sottosuccessioni di  $\pi_\# |\sigma_l|$  appartiene a  $\mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R})$ . □

**OSSERVAZIONE 1.6.** Osserviamo che il lemma 1.5 ci permetterà, nello studio della  $(n-1)$ -rettificabilità della proiezione dell'insieme dove si concentra la misura bordo, di supporre che gli  $A\mu$ -varifold abbiano supporto contenuto nell'insieme  $B_\delta(x^0) \times B_\varepsilon(P_0)$ , per  $\varepsilon, \delta, x^0$  e  $P_0$  fissati.

## 2. Alcuni Risultati della Teoria delle Correnti

Per ottenere la dimostrazione del teorema di struttura per la misura bordo useremo alcuni risultati appartenenti alla teoria delle correnti. Introduciamo quindi alcune definizioni e notazioni.

Consideriamo lo spazio vettoriale  $\bigwedge_c^n \Omega$  delle  $n$ -forme  $C^\infty$  a supporto compatto in  $\Omega$ . Diciamo che una successione di  $n$ -forme a supporto compatto  $\omega_i$  converge a  $\omega_0$  se esiste un compatto  $K \subset \Omega$  che contenga tutti i supporti delle  $\omega_i$  e, decomponendo ogni forma in modo canonico come

$$\omega_i(x) = \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_n \leq k} \phi_{i_1, \dots, i_n}^i(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

le funzioni  $\phi_{i_1, \dots, i_n}^i(x)$  convergono uniformemente con tutte le loro derivate alle funzioni  $\phi_{i_1, \dots, i_n}^0(x)$  su  $K$ .

Questa definizione delle successioni convergenti descrive una topologia per  $\bigwedge_c^n \Omega$  di spazio vettoriale topologico localmente convesso.

Nel seguito, al fine di semplificare le notazioni, se  $I \equiv (i_1, \dots, i_n)$  è un multiindice indichiamo con  $dx_I$  la  $n$ -forma

$$dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}.$$

DEFINIZIONE 2.1. Una  $n$ -corrente in  $\Omega$  è semplicemente un funzionale lineare e continuo  $T$  su  $\bigwedge_c^n \Omega$  nella topologia descritta sopra. Indicheremo con  $\langle T, \omega \rangle$  l'azione della corrente  $T$  sulla forma  $\omega$ .

Si noti che nel caso  $n = 0$  il procedimento porta a definire le distribuzioni in un aperto  $\Omega$ .

DEFINIZIONE 2.2. Definiamo la *massa in un aperto*  $U \subset\subset \Omega$  di una  $n$ -corrente  $T$  in  $\Omega$  come

$$\mathcal{M}_U(T) = \sup_{\substack{\omega \in \bigwedge_c^n(\Omega) \\ |\omega| \leq 1}} \langle T, \omega \rangle$$

dove, data la rappresentazione canonica

$$\omega(x) = \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_n \leq k} \phi_{i_1, \dots, i_n}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_n}$$

si definisce

$$|\omega| = \sup_{x \in \Omega} \left( \sum_{0 \leq i_1 < \dots < i_n \leq k} \phi_{i_1, \dots, i_n}^2(x) \right)^{1/2}.$$

DEFINIZIONE 2.3. Chiamiamo  $n$ -corrente (rettificabile) intera in un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  la  $n$ -corrente  $S$  determinata da un  $n$ -varifold intero  $V_{M, \theta}$  e una funzione  $\mu_V$ -misurabile  $\eta : M \rightarrow \bigwedge_n \mathbb{R}^k$ , dove  $\bigwedge_n \mathbb{R}^k$  indica lo spazio degli  $n$ -vettori alternanti in  $\mathbb{R}^k$ , tale che per ogni  $x \in M$ ,

$$\eta(x) = \eta^1(x) \wedge \dots \wedge \eta^n(x)$$

è un  $n$ -vettore semplice e unitario che orienta  $apT_x M$  per  $\mathcal{H}^n - q.o. x \in M$  (vedi [MO, FE1, SI1]).

Si vede facilmente che possiamo definire su  $M$  una operazione di integrazione di  $n$ -forme differenziali  $C^\infty$  a supporto compatto in  $\mathbb{R}^k$ , in questo modo:

$$\langle \omega, S \rangle = \int_M \langle \omega(x), \eta^1(x) \wedge \dots \wedge \eta^n(x) \rangle \theta(x) \mathcal{H}^n(x)$$

dove  $\omega$  è una  $n$ -forma di cui sopra e  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  è la dualità standard tra  $n$ -forme e  $n$ -vettori.

Notiamo che questa operazione definisce un funzionale lineare

$$L_S : \bigwedge_c^n \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$$

con la proprietà di essere continuo quando sulle  $n$ -forme a supporto compatto si considera la topologia descritta sopra.

Indichiamo dunque con  $S \equiv (M, \theta, \eta)$  la corrente così definita.

DEFINIZIONE 2.4. Definiamo *bordo di una  $n$ -corrente*  $S$  la  $(n-1)$ -corrente  $\partial S$  che è definita dalla sua azione sulle  $(n-1)$ -forme in questo modo:

$$\langle \partial S, \omega \rangle = \langle S, d\omega \rangle$$

dove  $d\omega$  indica l'usuale differenziale di una forma  $C^\infty$ .

Si verifica facilmente che questa è una buona definizione poiché l'operazione  $d : \bigwedge_c^n \Omega \rightarrow \bigwedge_c^{n-1} \Omega$  è continua nella topologia di cui sopra.

**OSSERVAZIONE 2.5.** Si può immaginare anche soltanto con queste poche nozioni introduttive sulle correnti quali siano le loro analogie e quali le differenze con i varifold. Poiché sulle correnti si integrano forme, in un certo senso, esse risentono soltanto delle componenti tangenti di quest'ultime, mentre come abbiamo visto nella definizione dei varifold di Allard le informazioni interessanti venivano dall'integrazione di campi normali. Il grosso vantaggio delle correnti sta nel trattamento della nozione di bordo che è definita in modo quasi algebrico, e che possiede delle notevoli proprietà di struttura. Un esempio ci viene dal fondamentale teorema che segue sul bordo delle correnti intere.

Consideriamo in un esempio una delle principali differenze tra il bordo per oggetti orientati e non, confrontando le due operazioni di bordo dei varifold di Allard e delle correnti per il nastro di Möebius immerso in  $\mathbb{R}^3$ .

Nel caso dei varifold di Allard il bordo sarà la frontiera geometrica della varietà, come si vede facilmente usando il teorema della divergenza ma nel caso delle correnti il bordo non potrà mai coincidere con la frontiera. Consideriamo infatti, come è usuale, la striscia di Möebius come un rettangolo i cui lati verticali sono incollati in senso inverso tra loro, l'interno del rettangolo diviso nei due insiemi  $A$  e  $B$  definiti dalla scelta dell'orientazione della striscia come corrente. Se uno di essi ha misura di Lebesgue nulla, con un semplice calcolo si vede che la linea di bordo verticale apparirà con molteplicità 2 nel bordo della corrente. Se entrambi non hanno misura nulla allora si vede che la funzione caratteristica di ognuno di essi è una funzione  $BV$  e il supporto della sua derivata deve essere contenuto nel supporto della corrente bordo che quindi non si può limitare al bordo geometrico della striscia di Möebius.

Uno dei teoremi fondamentali della teoria delle correnti che noi useremo è il seguente.

**TEOREMA 2.6. (Teorema di Rettificabilità del Bordo)**

*Se  $T$  è una  $n$ -corrente intera in  $\Omega$  tale che  $\mathcal{M}_U(\partial T) < +\infty$  per ogni aperto  $U \subset\subset \Omega$ , allora  $\partial T$  è una  $n-1$  corrente intera.*

La dimostrazione di questo teorema, che generalizza i risultati del lavoro di De Giorgi [DG2] relativo al caso  $n = k$ , è dovuta a Federer–Fleming e si può trovare nel libro di Federer [FE1]. Nella prossima sezione dimostreremo una versione più debole dello stesso risultato di rettificabilità per gli  $A\mu$ -varifold.

**OSSERVAZIONE 2.7.** La finitezza locale della massa del bordo di una corrente, si può verificare con il seguente criterio:  $\mathcal{M}_U(\partial T) < +\infty$  se e soltanto se, per ogni multiindice  $I \equiv (i_1, \dots, i_{n-1})$ , il funzionale

$$\varphi \in C_c^\infty(U) \mapsto \langle \partial T, \varphi(x) dx_I \rangle$$

è limitato.

### 3. Rettificabilità del Bordo

Sfruttando i risultati ottenuti finora e il Teorema 2.6 dimostriamo il teorema di rettificabilità del bordo per gli  $A\mu$ -varifold. L'idea è quella di limitare l'oscillazione dei piani tangenti in modo tale da guadagnare un'orientazione canonica di  $M$ . La formula di integrazione per parti che definisce gli  $A\mu$ -varifold garantisce allora che  $M$  è associato ad una corrente intera il cui bordo dipende da  $\underline{\mu}$ .

**TEOREMA 3.1.** *La proiezione della variazione totale della misura bordo appartiene a  $\mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R})$ . In particolare, la misura bordo è concentrata su  $N \times G_{n,k}$  con  $N \subset \Omega$   $(n-1)$ -rettificabile.*

**DIMOSTRAZIONE.** Per l'osservazione 1.6 possiamo supporre che il varifold  $V$  abbia supporto contenuto in  $\Omega \times B_{\rho_0}(P_0)$  con  $\rho_0$  piccolo a piacere. Possiamo inoltre supporre, a meno di una rotazione in  $\mathbb{R}^k$ , che  $P_0$  sia il piano generato da  $e_1, \dots, e_n$ , e che  $\rho_0$  sia sufficientemente piccolo in modo tale che se  $|P - P_0| < \rho_0$  allora, indicando con  $\pi_P : \mathbb{R}^k \rightarrow P$  la proiezione ortogonale su  $P$ , i vettori  $\eta^i = \pi_P(e_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  siano una base di  $P$  e

$$\beta(P) = \frac{\langle dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \eta^1(P) \wedge \dots \wedge \eta^n(P) \rangle}{|\eta^1(P) \wedge \dots \wedge \eta^n(P)|} > 1/2.$$

È allora chiaro che per  $\mu_V - q.o. x \in \Omega$  i vettori  $\eta^i(P(x))$  sono una base di  $P(x)$ . Sia ora, per  $\rho$  e  $\delta$  opportuni,  $V_\delta^\rho = V \llcorner B_\delta^\rho$  il varifold restrizione come nel lemma di localizzazione, siano  $M_\delta^\rho$  e  $\theta_\delta^\rho$  il rettificabile dove si concentra e la sua funzione densità, e sia  $\underline{\sigma}$  la parte di bordo dovuta al taglio, tale che  $\pi_\#|\underline{\sigma}| \in \mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R})$ . Consideriamo la corrente intera  $S$  in  $\mathbb{R}^k$  associata all'integrazione su  $M_\delta^\rho$ , con molteplicità  $\theta$  e orientazione data da  $\eta(P(x))$ , dove

$$\eta(P) = \frac{\eta^1(P) \wedge \dots \wedge \eta^n(P)}{|\eta^1(P) \wedge \dots \wedge \eta^n(P)|}.$$

Per linearità consideriamo le forme

$$\omega(x) = \varphi(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{n-1}}.$$

Ponendo  $I \equiv \{i_1, \dots, i_{n-1}\}$  abbiamo

$$\begin{aligned} \langle \partial S, \omega \rangle &= \langle S, d\omega \rangle = \langle S, \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I \rangle \\ &= \int_{M_\delta^\rho} \theta_\delta^\rho(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \langle dx_i \wedge dx_I, \eta(x) \rangle d\mathcal{H}^n(x) \\ &= \int_{B_\delta^\rho} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \frac{\langle dx_i \wedge dx_I, \eta^1(P) \wedge \dots \wedge \eta^n(P) \rangle}{|\eta^1(P) \wedge \dots \wedge \eta^n(P)|} dV(x, P) \\ &= \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^k (-1)^l \int_{B_\delta^\rho} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx_i (\eta^l(P)) f_l(P) dV(x, P) \end{aligned}$$

dove

$$f_l(P) = \frac{\langle dx_I, \eta^1(P) \wedge \dots \wedge \widehat{\eta^l(P)} \wedge \dots \wedge \eta^n(P) \rangle}{|\eta^1(P) \wedge \dots \wedge \eta^n(P)|}.$$

Poiché  $dx_i(\eta^l(P)) = P_{li}$  si ottiene

$$\langle \partial S, \omega \rangle = \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^k (-1)^l \int_{G_n(\Omega)} P_{li} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} f_l(P) dV_\delta^\rho(x, P).$$

Sfruttando allora la formula (1.1) che definisce gli  $A\mu$ -varifold e il lemma di localizzazione 1.5 si ha

$$\begin{aligned} \langle \partial S, \omega \rangle = & - \sum_{l=1}^n (-1)^l \left\{ \int_{B_\delta^p} \varphi(x) A_{ljk}(x, P) D_{jk}^* f_l(P) dV(x, P) \right. \\ & + \int_{B_\delta^p} \varphi(x) f_l(P) A_{jli}(x, P) dV(x, P) \\ & + \int_{B_\delta^p} \varphi(x) f_l(P) d\mu_l(x, P) \\ & \left. + \int_{G_n(\Omega)} \varphi(x) f_l(P) d\sigma_l(x, P) \right\}. \end{aligned}$$

Si vede facilmente che le funzioni  $f_l$  sono di classe  $C^\infty$  nel supporto di  $V_\delta^p$ , quindi

$$|\langle \partial S, \omega \rangle| \leq C \|\varphi\|_\infty$$

dove  $C$  è una costante positiva dipendente solo dal supporto di  $\varphi$ . Allora per l'osservazione 2.7 segue che  $\partial S$  è una  $(n-1)$ -corrente rettificabile intera,  $\partial S \equiv (N, \tau, \xi)$ . Si ha dunque

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n (-1)^l \left\{ \int_{B_\delta^p} \varphi(x) A_{ljk}(x, P) D_{jk}^* f_l(P) dV(x, P) \right. \\ & + \int_{B_\delta^p} \varphi(x) f_l(P) A_{jli}(x, P) dV(x, P) \\ & + \int_{B_\delta^p} \varphi(x) f_l(P) d\mu_l(x, P) \\ & \left. + \int_{G_n(\Omega)} \varphi(x) f_l(P) d\sigma_l(x, P) \right\} \\ & = \int_N \varphi(x) \tau(x) \langle dx_I, \xi \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x). \end{aligned}$$

Poiché sappiamo già che  $\pi_\# |\underline{\mu}|$  e  $\pi_\# |\underline{\sigma}|$  sono singolari rispetto a  $\mu_V$  segue che la somma dei due integrali nella misura  $V$  deve dare zero, per l'arbitrarietà di  $\varphi$ . La formula si riduce dunque a

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^n (-1)^l \left\{ \int_{B_\delta^p} \varphi(x) f_l(P) d\mu_l(x, P) + \int_{G_n(\Omega)} \varphi(x) f_l(P) d\sigma_l(x, P) \right\} \\ & = \int_N \varphi(x) \tau(x) \langle dx_I, \xi \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x). \end{aligned}$$

L'arbitrarietà di  $\varphi$  implica

$$\pi_\# \left( \sum_{l=1}^n (-1)^l f_l \mu_l \llcorner B_\delta^p + f_l \sigma_l \right) = \tau \langle dx_I, \xi \rangle \mathcal{H}^{n-1} \llcorner N$$

quindi, ricordando che  $\pi_{\#}|\sigma| \in \mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R})$ ,

$$(3.1) \quad \pi_{\#} \sum_{l=1}^n (-1)^l f_l \mu \llcorner B_{\delta}^{\rho} \in \mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R}).$$

Indichiamo ora con  $\nu(x, P)$  la densità di  $\mu$  rispetto a  $|\mu|$ . Dal fatto che  $\mu$  è tangenziale ricaviamo che  $\nu(x, P) \in P$  per  $|\mu|$ -quasi ogni  $(x, P)$  e quindi

$$(3.2) \quad \sum_{j=1}^n |\alpha_j|(x, P) > 0 \quad |\mu| - q.o. \text{ in } G_n(\Omega)$$

ove  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sono le componenti di  $\nu$  nella base  $\eta^1, \dots, \eta^n$ .

Fissiamo ora  $j \in \{1, \dots, n\}$  e scegliamo  $I$  in modo che  $I \cup \{j\} = \{1, \dots, n\}$ . L'equazione (3.1) può essere riscritta nel seguente modo:

$$(3.3) \quad \sum_{i=1}^n \pi_{\#} \sum_{l=1}^n (-1)^l \alpha_i \eta_i^l f_l |\mu| \llcorner B_{\delta}^{\rho} \in \mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R}).$$

Dato che  $\eta_i^i = \eta_i^i$  e

$$\sum_{l=1}^n (-1)^l \eta_i^l f_l = -\langle dx_i \wedge dx_I, \eta(P) \rangle$$

l'unico addendo che non si annulla nella (3.3) è quello con  $i = j$ , che vale  $(-1)^j \beta(P)$ . Abbiamo quindi

$$\pi_{\#} \alpha_j \beta |\mu| \llcorner B_{\delta}^{\rho} \in \mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R}).$$

Dal lemma sotto e dal fatto che  $\beta$  non si annulla ricaviamo che  $\pi_{\#} |\alpha_j| |\mu| \in \mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R})$  e dalla (3.2) otteniamo  $\pi_{\#} |\mu| \in \mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R})$ . □

**LEMMA 3.2.** *Sia  $\sigma$  una misura di Radon valori in  $\mathbb{R}$  su  $G_n(\Omega)$ , tale che comunque si fissi  $x^0$  e  $P_0$ , posto  $B_{\rho} = B_{\rho}(x^0) \times B_{\rho}(P_0)$ , per  $\rho$  arbitrariamente piccolo valga*

$$(3.4) \quad \pi_{\#} \sigma \llcorner B_{\rho} \in \mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R}).$$

Allora vale la formula

$$\pi_{\#} |\sigma| \in \mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R}).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $A \subset G_n(\Omega)$  un insieme di Borel tale che  $\sigma \llcorner A = \sigma^+$  e sia  $K \subset A$  un arbitrario compatto. L'insieme delle palle  $B_{\rho}$  per cui vale l'equazione (3.4) è un ricoprimento fine di  $G_n(\Omega)$ . Per il Teorema di Besicovitch (vedi [MO], pag. 14), è possibile trovare, per ogni  $\varepsilon > 0$ , una successione di palle disgiunte  $B_{\rho_i}^{\varepsilon}$  contenute nell'intorno di raggio  $\varepsilon$  di  $K$  e ricoprenti  $|\sigma|$ -quasi tutto  $K$ . Le misure

$$\sigma_{\varepsilon} = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma \llcorner B_{\rho_i}^{\varepsilon}$$

convergono in variazione totale a  $\sigma \llcorner K$ . Dato che  $\pi_{\#} \sigma_{\varepsilon} \in \mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R})$ , per l'osservazione 1.1 anche  $\pi_{\#} \sigma \llcorner K \in \mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R})$ . Facendo tendere  $K$  ad  $A$  otteniamo che la proiezione della parte positiva di  $\sigma$  è in  $\mathcal{R}_{n-1}(\Omega, \mathbb{R})$ . Un discorso analogo vale per la parte negativa. □

#### 4. Struttura degli $A\mu$ -Varifold 1-Dimensionali

In vista delle applicazioni del capitolo successivo, che interesseranno soprattutto funzionali definiti su curve, sviluppiamo a fondo in questa sezione e nella prossima lo studio della struttura degli 1-varifold la cui seconda forma fondamentale è in  $L^p$  per un certo  $p > 1$ .

Applichiamo i risultati ottenuti nelle sezioni precedenti ad un  $A\mu$ -varifold 1-dimensionale  $V$  per ottenere in questo caso particolare una completa descrizione della struttura della misura bordo  $\underline{\mu}$ .

Dal teorema di rettificabilità segue che  $\pi_{\#}|\underline{\mu}|$  si concentra su di un insieme numerabile di punti in  $\Omega$ , posso cioè rappresentare  $\underline{\mu}$  come

$$(4.1) \quad \underline{\mu}(x, P) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i} \times (\nu_{x_i}(P) \sigma_{x_i}(P))$$

dove  $\sigma_{x_i}(P)$  sono misure di Radon positive nella Grassmanniana  $G_{n,k}$ ,  $\delta_{x_i}$  sono le misure delta di Dirac in  $\Omega$  concentrate nei punti  $x_i$ ,  $\nu_{x_i}$  sono funzioni di Borel a valori in  $\mathbb{S}^{k-1}$  tali che  $\pi_P \nu_{x_i}(P) = \nu_{x_i}(P)$  per  $\sigma_{x_i}$  - q.o.  $P \in G_{n,k}$ . Per comodità nei conti successivi, se  $x^0$  non appartiene all'insieme  $\{x_i\}$  di cui sopra definiamo  $\sigma_{x^0} = 0, \nu_{x^0} = 0$ .

Per studiare nel dettaglio le misure  $\sigma_{x_i}(P)$  analizzeremo la struttura dei blow-up del varifold  $V$  nei punti  $x_i$ , quindi inizialmente avremo bisogno del seguente lemma che ci assicura l'esistenza dei blow-up in ogni punto del supporto di  $\mu_V$ .

LEMMA 4.1. Per ogni  $A\mu$ -varifold  $V \equiv V_{M,\theta}$  di dimensione 1 in  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  si ha

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu_V(B_\rho(x^0))}{\rho} < +\infty \quad \forall x^0 \in \Omega.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo  $\varepsilon > 0$ . Essendo  $G_{n,k}$  uno spazio compatto possiamo supporre, grazie al lemma di localizzazione che  $\text{supp } V \subset B_\delta(x^0) \times B_\varepsilon(P_0)$ , con  $B_\delta(x^0) \subset \Omega$ . Componendo con una rotazione possiamo inoltre supporre che  $P_0 = \text{span}\{e_1\}$  e che  $\varepsilon$  sia così piccolo che

$$(4.2) \quad P \in B_\varepsilon(P_0) \implies P_{11} \geq 1/4.$$

È possibile orientare  $M$  con l'1-vettore unitario dato dalla normalizzazione di  $\pi_{P(x)}(e_1)$ ,  $\eta(x) = (\eta_1(x), \dots, \eta_k(x))$  tale che  $\eta_1(x) > 0$ . Dalla (4.2) segue che allora che  $\eta_1(x) = \sqrt{P_{11}(x)} \geq 1/2$   $\mu_V$ -quasi ovunque in  $M$ . consideriamo la corrente  $T$  associata all'integrazione su  $M$ , con molteplicità  $\theta\eta_1$ , e orientazione  $\eta$ .

Si ha, per ogni 0-forma  $\omega = \varphi(x)$  con  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ,

$$\begin{aligned} \langle \partial T, \omega \rangle &= \langle T, d\omega \rangle = \sum_{i=1}^k \int_M \theta(x) \eta_1(x) \eta_i(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) d\mathcal{H}^1(x) \\ &= \int_M \theta(x) P_{1i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) d\mathcal{H}^1(x) \\ &= - \int_\Omega \varphi \delta_1 V \end{aligned}$$

dove  $\delta V$  è la misura di Radon vettoriale, variazione prima nel senso di Allard, e abbiamo usato l'identità  $P_{ij} = \eta_i \eta_j$ .

È allora chiaro che  $\partial T$  ha massa localmente finita e



$$\mathcal{M}_U(T) = |\delta_1 V|(U) \quad \forall U \subset \subset \Omega.$$

Sia ora  $\pi_1 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  la proiezione sulla prima coordinata e consideriamo la corrente  $S = \pi_{1\#}(T)$  definita da

$$\langle S, \omega \rangle = \langle T, \pi_1^\#(\omega) \rangle.$$

Dato che gli operatori  $\partial$  e  $\#$  commutano (vedi [MO]), ed essendo  $\pi_1$  una funzione Lipschitz di costante 1,

$$(4.3) \quad \mathcal{M}_U(\partial S) = \mathcal{M}_U(\pi_{1\#}(\partial T)) \leq \mathcal{M}_U(\partial T) = |\delta_1 V|(U).$$

Poniamo, per  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi(t) = \sum_{\substack{x \in M \\ \pi(x)=t}} \theta(x) \eta_1(x).$$

Dalla formula di coarea, usando il fatto che  $J_M^* \pi_1 = \eta_1$  su  $M$ , otteniamo, con  $\omega = \varphi(x) dt$

$$\begin{aligned} \langle S, \omega \rangle &= \langle T, \pi_1^\#(\omega) \rangle = \int_M \theta(x) \varphi(x_1) \eta_1^2(x) d\mathcal{H}^1(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\pi^{-1}(t)} \theta(x) \eta_1(x) \varphi(x_1) d\mathcal{H}^0(x) \right) d\mathcal{H}^1(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \phi(t) dt. \end{aligned}$$

Quindi  $S$  è rappresentabile mediante l'integrazione in  $\phi dt$ . Avendo  $S$  bordo di massa localmente finita, esso coincide col la derivata distribuzionale della funzione  $\phi$ , si ha allora che  $\phi$  è una funzione  $BV(\mathbb{R})$  e poiché  $\phi$  ha supporto compatto è una funzione in  $L^\infty(\mathbb{R})$ .

La tesi seguirà allora dalla disuguaglianza

$$(4.4) \quad \mu_V(B_\rho(x^0)) \leq 4 \int_{x_1^0 - \rho}^{x_1^0 + \rho} \phi(t) dt.$$

Dimostriamo questa formula, usando il fatto che  $\eta_1 \geq 1/2$ :

$$\begin{aligned} \mu_V(B_\rho(x^0)) &\leq 4 \int_{B_\rho(x^0) \cap M} \theta(x) \eta_1^2(x) d\mathcal{H}^1(x) \\ &= 4 \int_{x_1^0 - \rho}^{x_1^0 + \rho} \left( \int_{\pi^{-1}(t) \cap M} \theta(x) \eta_1(x) d\mathcal{H}^0(x) \right) d\mathcal{H}^1(t) \\ &= 4 \int_{x_1^0 - \rho}^{x_1^0 + \rho} \phi(t) dt. \end{aligned}$$

□

Consideriamo allora un punto arbitrario  $x^0 \in \Omega$ , poiché vale il lemma precedente  $VarTan(V, x^0)$  non è mai vuoto (vedi la definizione 1.3). Sia  $T$  un elemento di  $VarTan(V, x^0)$ , associato ad una successione  $\{\rho_l\}$  convergente a zero. Sia  $V_l$  la successione di varifold interi convergente a  $T$ . Ricordiamo la formula che li definisce:

$$\int_{G_n(\mathbb{R}^k)} \varphi(x, P) dV_l(x, P) = \frac{1}{\rho_l} \int_{G_n(\Omega)} \varphi\left(\frac{x - x^0}{\rho_l}, P\right) dV(x, P).$$

È chiaro che i  $V_l$  sono sempre  $A\mu$ -varifold 1-dimensionali in  $\Omega_l = \rho_l^{-1}(\Omega - x^0)$ , con seconda forma e bordo dati rispettivamente da

$$A_{ijk}^{(l)}(x, P) = \rho_l A_{ijk}(x^0 + \rho_l x, P) \quad \underline{\mu}^{(l)} = \lambda_l \# \underline{\mu}$$

e  $\lambda_l(x, P) = (\frac{x - x^0}{\rho_l}, P)$ . Ponendo infatti

$$\psi_l(x, P) = \varphi\left(\frac{x - x^0}{\rho_l}, P\right)$$

per  $\varphi \in C_c^1(G_n(\Omega_l))$ , vale

$$\begin{aligned} \int_{G_n(\Omega_l)} P_{ij} D_j \varphi(x, P) dV_l(x, P) &= \frac{1}{\rho_l} \int_{G_n(\Omega)} P_{ij} D_j \varphi\left(\frac{x - x^0}{\rho_l}, P\right) dV(x, P) \\ &= \int_{G_n(\Omega)} P_{ij} D_j \psi_l(x, P) dV(x, P) \\ &= - \int_{G_n(\Omega)} A_{ijk}(x, P) D_{jk}^* \psi_l(x, P) dV(x, P) \\ &\quad - \int_{G_n(\Omega)} A_{jij}(x, P) \psi_l(x, P) dV(x, P) \\ &\quad - \int_{G_n(\Omega)} \psi_l(x, P) d\mu_i(x, P) \\ &= - \int_{G_n(\Omega)} A_{ijk}(x, P) D_{jk}^* \varphi\left(\frac{x - x^0}{\rho_l}, P\right) dV(x, P) \\ &\quad - \int_{G_n(\Omega)} A_{jij}(x, P) \varphi\left(\frac{x - x^0}{\rho_l}, P\right) dV(x, P) \\ &\quad - \int_{G_n(\Omega)} \varphi\left(\frac{x - x^0}{\rho_l}, P\right) d\mu_i(x, P). \end{aligned}$$

Passando al limite per  $l \rightarrow \infty$  e ragionando come nel teorema di compattezza 3.1, dal fatto che le  $\underline{\mu}^{(l)}$  sono equilibrate sui compatti e dal fatto che

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{G_n(K)} |A^{(l)}| dV_l = 0$$

per ogni compatto  $K \subset \mathbb{R}^k$ , deduciamo che  $T$  è un  $A\mu$ -varifold in  $\mathbb{R}^k$  con  $A \equiv 0$  e bordo dato dal limite debole delle  $\underline{\mu}^{(l)}$ . Il limite si calcola facilmente sfruttando la descrizione della misura bordo data nell'equazione (4.1) e si ottiene

$$(4.5) \quad \int_{G_n(\mathbb{R}^k)} P_{ij} D_j \varphi(x, P) dT = - \int_{G_{n,k}} \varphi(0, P) \nu_{x^0_i}(P) d\sigma_{x^0}(P).$$

TEOREMA 4.2. *Dato un  $A\mu$ -varifold 1-dimensionale  $V$  in  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ , sia  $\underline{\mu}$  la sua misura bordo. Esiste un insieme al più numerabile di punti isolati  $\{x_i\}$  in  $\Omega$  tale che*

$$(4.6) \quad \underline{\mu}(x, P) = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{x_i} \times (\nu_{x_i}(P) \sigma_{x_i}(P))$$

dove ogni  $\sigma_{x_i}(P)$  è una misura nella Grassmanniana  $G_{n,k}$ , somma finita di delta di Dirac di piani. Inoltre  $\nu_{x_i}$  assegna ad ogni atomo  $P$  di  $\sigma_{x_i}$  un vettore unitario  $v \in P$ .

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un punto  $x^0 \in \Omega$  dove si concentra  $\underline{\mu}$ . Facendo un blow-up e sfruttando la formula (4.5) si vede che si ottiene un  $A\mu$ -varifold  $T$  in  $\mathbb{R}^k$  per cui vale

$$\int_{G_n(\mathbb{R}^k)} P_{ij} D_j \varphi(x, P) dT = \int_{G_{n,k}} \varphi(0, P) \nu_{x^0_i}(P) d\sigma_{x^0}(P)$$

quindi tutta la misura bordo di  $T$  si concentra nell'origine. Questo implica che vedendo  $T$  come un varifold nell'aperto  $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ , otteniamo un varifold di Hutchinson con tutta la seconda forma nulla.

Un risultato dello stesso Hutchinson asserisce che un varifold con seconda forma nulla e bordo nullo in un aperto è una unione di sottospazi affini (nel nostro caso rette) intersecate con l'aperto (vedi [HU1, HU2]). Il varifold  $T$  è allora dunque una unione di rette e di semirette che possono terminare solo nell'origine e di molteplicità intera. Notiamo subito che le rette e le semirette che passano per l'origine devono essere in numero finito poiché la densità in 0 di  $T$  è finita per il lemma 4.1. È chiaro inoltre, essendo  $T$  una unione di varietà affini, che la sua misura bordo può essere descritta come nella tesi.

L'asserzione sulla struttura dell'insieme dei punti dove  $\underline{\mu}$  si concentra segue dal fatto che  $\pi_{\#} \underline{\mu}$  è una misura di Radon e il peso di ogni suo atomo è almeno 1.  $\square$

## 5. Regolarità degli $A\mu$ -Varifold 1-Dimensionali

Come spiegato in precedenza, in questa sezione assumiamo che l'1-varifold  $V$ , abbia l'ulteriore proprietà che la seconda forma fondamentale generalizzata, cioè le funzioni  $A_{ijk}$ , appartengano a  $L^p_{loc}(V)$ , con  $p > 1$  (ricordiamo che abbiamo definito questa classe con  $AV_1^p(\Omega)$ ). Questo ci permetterà di metterci nelle ipotesi del teorema di compattezza e di ottenere un teorema di regolarità per questi oggetti utile nelle applicazioni. Premettiamo che una volta ottenuta la struttura atomica della misura  $\underline{\mu}$ , vista nella sezione precedente, questa parte non è altro che un rifacimento del lavoro di Hutchinson, del quale citeremo ampiamente i risultati.

Consideriamo  $V$  come un varifold  $\tilde{V}$  nell'aperto  $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \{x_i\}$ , dove  $\{x_i\}$  è l'insieme dei punti dove la proiezione della variazione della misura bordo si concentra, come visto nel Teorema 4.2; è chiaro, poiché tale insieme è discreto, che  $\tilde{\Omega}$  è aperto. Il varifold  $\tilde{V}$  è ovviamente un 1-varifold di Hutchinson in  $\tilde{\Omega}$ , mantenendo inalterata la seconda forma fondamentale e se supponiamo, come premesso, che le funzioni  $A_{ijk}$  appartengano a  $L^p_{loc}(V)$ , segue che allora  $\tilde{V} \in CV_1^p(\tilde{\Omega})$ .

Sfruttando allora il teorema di Hutchinson 5.12, abbiamo che in tutti i punti di  $\tilde{\Omega}$  il

varifold tangente è unico, è unione finita di rette con molteplicità e localmente  $\tilde{V}$  si rappresenta come un grafico di una funzione  $C^{1,\alpha}$  multivoca.

Con questa notazione dimostriamo la seguente stima di densità, valida per varifold di Allard senza parte singolare della prima variazione e con curvatura media generalizzata in  $L^p$ .

LEMMA 5.1. *Sia  $p > 1$  e  $V_{M,\theta}$  un varifold di Allard in  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  con bordo generalizzato nullo e curvatura media generalizzata in  $L^p(\mu_V)$ , cioè*

$$\delta V = H\mu_V$$

dove  $|H| \in L^p(\mu_V)$ . Esiste allora una costante  $c$ , dipendente solo da  $p$  e da

$$\Gamma = \int_{\Omega} |H|^p d\mu_v$$

tale che

$$\mu_V(B_\rho(x^0)) \geq \rho$$

per ogni palla  $B_\rho(x^0) \subset \Omega$  con  $x^0 \in \text{supp } \mu_V$  e  $\rho < c$ .

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione sfrutta uno strumento standard per lo studio della regolarità, la *formula di monotonia* (vedi [S1], Teorema 17.7):

$$(5.1) \quad \left( \frac{\mu_V(B_\sigma(x^0))}{\sigma} \right)^{1/p} \leq \left( \frac{\mu_V(B_\rho(x^0))}{\rho} \right)^{1/p} + \frac{\Gamma^{1/p}}{p-1} (\rho^{1-1/p} - \sigma^{1-1/p}),$$

che vale per tutti i valori  $0 < \sigma < \rho < d(x^0, \partial\Omega)$ . Usando la definizione di  $\Gamma$  e facendo tendere  $\sigma$  a zero, otteniamo

$$\left( \frac{\mu_V(B_\rho(x^0))}{\rho} \right)^{1/p} \geq 2^{1/p} - \frac{\Gamma^{1/p}}{p-1} \rho^{1-1/p}$$

in tutti i punti  $x^0$  dove  $\mu_V$  ha densità maggiore o uguale a 1. Poiché  $V$  è intero la disuguaglianza vale per tutte le palle  $B_\rho(x^0) \subset \Omega$  con  $x^0 \in \text{supp } \mu_V$ . si sceglie allora  $c$  in modo tale che

$$2^{1/p} - \frac{\Gamma^{1/p}}{p-1} c^{1-1/p} > 1$$

e la tesi segue.  $\square$

Vediamo come conseguenza del lemma appena visto la dimostrazione del fatto che il rettificabile  $\tilde{M}$  dove si concentra  $\tilde{V}$  si può scegliere chiuso in  $\tilde{\Omega}$ , da cui segue che questo vale anche per  $M$  in  $\Omega$ .

PROPOSIZIONE 5.2. *Per ogni  $A\mu$ -varifold  $V \equiv V_{M,\theta}$  di dimensione 1 in  $\Omega$ , appartenente a  $AV_1^p(\Omega)$  con  $p > 1$ , vale*

$$\mathcal{H}^1(\text{supp } \mu_V \Delta M) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. È chiaro che basta vedere che  $\mathcal{H}^1(\text{supp } \mu_V \setminus M) = 0$ . Per il lemma 5.1 abbiamo

$$\liminf_{\rho \rightarrow 0} \frac{\mu_V(B_\rho(x^0))}{\rho} \geq 1 \quad \forall x^0 \in \text{supp } (\mu_V) \cap \tilde{\Omega}$$

che implica (vedi [S1]) che

$$2\theta\mathcal{H}^1\llcorner M \geq \mathcal{H}^1\llcorner \text{supp}(\mu_V) \cap \tilde{\Omega}$$

da cui segue, essendo  $\Omega \setminus \tilde{\Omega}$  al più numerabile,  $\mathcal{H}^1(\text{supp} \mu_V \setminus M) = 0$ .  $\square$

OSSERVAZIONE 5.3. È facile vedere, sfruttando la formula di monotonia (5.1), che nelle ipotesi del lemma 5.1 la densità esiste in ogni punto del supporto di  $\mu_V$  ed è una funzione semicontinua superiormente.

Infine, sfruttando questi fatti e ricostruendo la dimostrazione del teorema di Hutchinson 5.12 senza particolari modificazioni, vale il seguente teorema di struttura e regolarità per varifold in  $AV_1^p(\Omega)$  con  $p > 1$ , che enunciamo senza dimostrazione e per il quale rimandiamo agli articoli [HU1, HU2].

TEOREMA 5.4. *Sia  $V \equiv V_{M,\theta} \in AV_n^p(\Omega)$  con  $p > 1$  e  $x^0 \in \text{supp} \mu_V$ . Allora valgono*

1. *La densità esiste in  $x^0$ .*
2. *Esiste in  $x^0$  il varifold tangente a  $\mu$  ed è formato da un'unione finita di rette per l'origine con molteplicità, se in  $x^0$  non è concentrata la misura bordo, altrimenti è una unione di rette e semirette nell'origine come descritto nel Teorema 4.2. Inoltre in un intorno  $U$  di  $x^0$  si può separare  $V$  in un numero finito di varifold  $V_j \in AV_1^p(U)$  la cui somma è  $V$  in  $G_n(U)$ , ognuno avente per varifold tangente in  $x^0$ , una e soltanto una delle rette o semirette tangenti appartenenti a  $\text{VarTan}(V, x^0)$ . La somma di  $\text{VarTan}(V_j, x^0)$  dà proprio  $\text{VarTan}(V, x^0)$ .*
3. *Se  $V$  ha come tangente in  $x$  una retta o una semiretta  $T$ , in un intorno  $U$  di  $x^0$  è rappresentabile come grafico di una funzione  $C^{1,\alpha}$  multivoca definita su  $T$ .*
4. *Il rettificabile  $M$  di supporto per  $V$  può essere scelto chiuso, e la funzione densità definita su di esso è semicontinua superiormente eccetto nei punti dove si concentra la misura bordo.*
5. *Il varifold  $V$  può essere descritto come una unione localmente finita di curve  $C^{1,\alpha}$  in  $\Omega$ , con bordo.*

Dimostriamo ora un lemma che definisce una proprietà di regolarità anche nella convergenza di tali oggetti, cioè dimostriamo che quando una successione di  $A\mu$ -varifold 1-dimensionali con curvatures in  $L_{loc}^p$  converge con masse, seconde forme fondamentali e misure bordo localmente equilimitate (come nelle ipotesi del teorema di compattezza), allora si può estrarre una sottosuccessione che converge allo stesso oggetto secondo Kuratowski (vedi [FA]), a meno di un insieme finito di punti, precisamente vale il

LEMMA 5.5. *Sia  $V_n \equiv V_{M_n,\theta_n}$  una successione di  $A\mu$ -varifold di dimensione uno in  $\Omega \subset \mathbb{R}^k$  tali che, se  $A^{(n)}$  e  $\underline{\mu}^{(n)}$  sono rispettivamente le loro seconde forme fondamentali e le loro misure bordo, si abbia*

$$\mu_{V_n}(W) + \int_W |A^{(n)}|^p d\mu_{V_n} + |\underline{\mu}^{(n)}|(G_n(W)) < c(W) < +\infty$$

per ogni aperto  $W \subset\subset \Omega$ . Supponiamo che  $V_n$  converga a  $V \equiv V_{M,\theta}$ . Allora per ogni aperto relativamente compatto  $U$  contenuto in  $\Omega$  esiste un insieme finito  $D \subset \Omega$  tale che, comunque si fissi un insieme compatto  $K \subset U \setminus (\text{supp} \mu_V \cup D)$ , l'inclusione

$$K \subset U \setminus \text{supp} \mu_{V_n}$$

vale per un insieme infinito di valori dell'indice  $n$ .

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo  $U \subset\subset \Omega$ , dal teorema di rettificabilità 2.6 deduciamo che  $\pi_{\#}|\underline{\mu}_n|$  ha al più  $c(U)$  atomi in  $U$ . Passando, se necessario, ad una sottosuccessione possiamo supporre che l'insieme  $D$  dei punti limite degli atomi di  $\pi_{\#}|\underline{\mu}_n|$  in  $U$  abbia cardinalità non più grande di  $c(U)$ . Sia ora  $K$  contenuto in  $U$  e disgiunto da  $\text{supp } \mu_V \cup D$ .

Supponiamo per assurdo che  $K \cap \text{supp } \mu_{V_n} \neq \emptyset$  definitivamente, scegliamo  $x_n \in K \cap \text{supp } \mu_{V_n}$  e sia  $x_{n_h}$  convergente  $x \in K$ . Sia  $\rho > 0$  così piccolo che  $B_\rho(x) \subset U$  e  $\pi_{\#}|\underline{\mu}_n|(B_\rho(x)) = 0$  definitivamente. Per  $n$  abbastanza grande i  $V_n$  sono varifold di Hutchinson in  $B_\rho(x)$  ed esiste, per il lemma 5.1,  $0 < \delta < \rho$  e indipendente da  $n$ , tale che

$$\mu_{V_n}(B_\eta(x_n)) \geq \eta \quad \forall \eta < \delta.$$

Passando al limite otteniamo

$$\mu_V(B_\delta(x)) \geq \delta$$

e potendo essere scelto  $\delta$  arbitrariamente piccolo,  $x \in \text{supp } \mu_V$ , contraddicendo le ipotesi su  $K$ . □

Per concludere il capitolo e con esso anche la parte puramente teorica della tesi, vorremmo dare una motivazione alla nostra definizione di questa nuova classe di varifold, mostrando che con questi oggetti si possono superare alcuni problemi presentati dai varifold di Allard negli esempi della sezione 4. È chiaro che nel nostro caso non vi sono le difficoltà legate alla parte cantoriana della misura bordo, inoltre una volta ottenuto un teorema di regolarità analogo a quello di Hutchinson in dimensione maggiore di uno, avremmo anche la rappresentazione come grafici di funzioni multivoche. Il grosso vantaggio a nostro parere sta nel mantenimento di tutte le informazioni nel caso di incroci multipli: avevamo visto che la misura di curvatura media dei varifold di Allard non "vedeva" i tripunti, poiché i vettori di curvatura singolare si semplificavano tra loro. È ovvio, nel caso del tripunto come sia fatta la misura bordo del varifold associato: abbiamo la somma di tre misure delta di Dirac nei punti  $\{(0, P_i)\}$ , che essendo concentrate in punti distinti *nella Grassmanniana*, non si annullano tra loro.

Crediamo sia possibile sfruttare questo carico di informazioni sulla fibra di un punto, per studiare funzionali dipendenti anche dagli angoli tra le varie curve concorrenti. È questa anche una giustificazione del formalismo talvolta pesante legato alla Grassmanniana, che abbiamo usato per introdurre questi oggetti e dimostrarne le proprietà, ma che permette una descrizione più accurata del bordo di un varifold.

## Applicazioni al Riconoscimento Automatico di Immagini

In questo capitolo mostriamo una applicazione degli  $A\mu$ -varifold ad un problema di calcolo delle variazioni. Introdurremo come è ormai usuale la nozione di soluzione debole per un dato problema, e discuteremo la sua eventuale regolarità. Vogliamo mostrare come per una certa classe di problemi, l'ambiente degli  $A\mu$ -varifold costituisca un'estensione piuttosto naturale delle varietà. La classe a cui ci riferiamo è quella di funzionali definiti sulle varietà embedded in  $\mathbb{R}^k$  e dipendenti dalle curvatures.

Avendo sviluppato a fondo la teoria unidimensionale affronteremo un problema definito sulle curve regolari in un aperto del piano euclideo, tale problema si inserisce bene nel contesto del riconoscimento automatico di immagini da parte di calcolatori. Faremo dunque una breve introduzione alle problematiche legate all'argomento e all'approccio variazionale che noi seguiremo.

### 1. Introduzione al Problema

Nell'ambito della teoria della segmentazione d'immagini, un problema molto studiato è quello di ricostruire, a partire da un'immagine digitale (tipicamente rappresentabile come una funzione  $g$  costante a tratti in un opportuno reticolo) i bordi degli oggetti rappresentati. Per risolvere questo tipo di problema sono stati proposti vari algoritmi deterministici o stocastici (vedi [BZ]).

Un approccio variazionale a questo problema è stato proposto nell'88 da Mumford e Shah (vedi [MS]). L'idea è quella di discriminare le "vere" discontinuità dell'immagine  $g$  da quelle dovute solo a effetti di rumore o al procedimento di discretizzazione. Tale obiettivo viene raggiunto minimizzando il seguente funzionale:

$$(1.1) \quad F(u, \Gamma) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \alpha |\nabla u|^2 + \beta |u - g|^2 dx + \mathcal{H}^1(\Gamma)$$

al variare di  $\Gamma$  nei sottoinsiemi relativamente chiusi di  $\Omega$  e di  $u$  in  $C^1(\Omega \setminus \Gamma)$ . Nella 1.1 l'insieme  $\Omega$  è un aperto di  $\mathbb{R}^2$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  sono parametri strettamente positivi. I tre termini del funzionale nascono dalla necessità di penalizzare insiemi  $\Gamma$  eccessivamente lunghi, funzioni  $u$  molto irregolari al di fuori di  $\Gamma$  oppure molto distanti dalla funzione  $g$ .

Nel lavoro [MS] è congetturata l'esistenza di minimi e sono studiate varie proprietà di essi, in ipotesi di regolarità. Usando una formulazione debole di questo problema, De Giorgi, Carriero e Leaci hanno dimostrato in [DCL] l'esistenza di soluzioni, almeno se  $g \in L^\infty(\Omega)$ . La formulazione debole si basa sull'uso dello spazio  $SBV(\Omega)$  delle funzioni "speciali" a variazione limitata, introdotto da De Giorgi e Ambrosio in [DGA] e sui teoremi di compattezza e semicontinuità sviluppati in [AM1] e in [AM2].

Dato un aperto  $V$  di  $\mathbb{R}^n$ , lo spazio  $SBV(V)$  consiste di tutte le funzioni  $u$  a variazione limitata in  $V$  tali che la derivata  $Du$  nel senso delle distribuzioni è somma di una misura assolutamente continua e di una misura concentrata su un insieme  $\sigma$ -finito rispetto a  $\mathcal{H}^{n-1}$ . Le funzioni in  $SBV$  sono quindi “ $C^1$  a tratti”, in analogia con la teoria degli  $A\mu$ -varifold che possono essere pensati come insiemi il cui piano tangente è “ $C^1$  a tratti”.

Tecniche di  $\Gamma$ -convergenza hanno anche permesso lo sviluppo di metodi di analisi numerica per il problema variazionale proposto da Mumford e Shah (vedi [AT, MA]). Un problema largamente aperto è quello della regolarità degli insiemi  $\Gamma$  minimizzanti.

Una generalizzazione naturale del problema di Mumford e Shah è quella di considerare penalizzazioni su  $\Gamma$  che dipendono anche dalla curvatura. Questo con il duplice scopo di ottenere insiemi minimizzanti più regolari e una maggiore sensibilità del problema alla presenza di spigoli. Infatti, dal punto di vista applicativo è importante localizzare i bordi dell’immagine e soprattutto i suoi vertici.

Una delle strade possibili per affrontare questo problema è minimizzare un funzionale definito sugli insiemi  $\Gamma$  che sono unione finita di curve  $\Gamma_i$  di classe  $W^{2,p}$ , che penalizzi la potenza  $p$ -esima della curvatura (con  $p > 1$ ) e il numero dei punti terminali delle stesse. Tali curve possono essere parametrizzate mediante la lunghezza d’arco ed è quindi possibile, usando teoremi di compattezza negli spazi di Sobolev unidimensionali, arrivare ad un teorema di esistenza di minimo per il problema

$$\tilde{F}(\Gamma, u) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \alpha |\nabla u|^2 + \beta |u - g|^2 dx + \sum_{i=1}^n l(\Gamma_i) + \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} |A^i|^p d\mathcal{H}^1 + \sum_{i=1}^n \int_{\partial \Gamma_i} d\mathcal{H}^0.$$

Il vantaggio di questo approccio parametrico è nella relativa semplicità degli strumenti matematici sfruttati; lo svantaggio è nel fatto che le parametrizzazioni non danno una descrizione chiara della struttura di  $\Gamma$  nei punti di incrocio delle varie curve.

In questo capitolo adotteremo un approccio “intrinseco”, del tutto svincolato dalla parametrizzazione, approccio che diviene l’unico praticabile in dimensioni più alte. L’idea è di vedere l’insieme  $\Gamma$  come un varifold con molteplicità intera (potendo le curve, come nella formulazione parametrica, sovrapporsi tra loro), e seconda forma fondamentale e bordo nel senso debole specificato nei capitoli precedenti. Il vantaggio di questa formulazione del problema, che certamente richiede strumenti matematici più sofisticati, è nel fatto che tutti i termini presenti nel funzionale sono definibili in modo intrinseco mediante opportune formule di integrazione per parti.

Il metodo che proponiamo ha una certa flessibilità rispetto a variazioni del tipo di penalizzazione e rispetto alla descrizione dei punti d’incrocio dei vari rami, che è interamente contenuta nella misura bordo  $\underline{\mu}$  (si vedano le considerazioni fatte alla fine del capitolo 5).

Infine, almeno localmente, si recupera una descrizione di  $\Gamma$  come unione finita di curve di classe  $C^{1,\alpha}$ , come specificato nel Teorema 5.4.

## 2. Un Teorema di Esistenza

Dimostriamo in questa sezione un teorema di esistenza nell’ambientazione debole degli  $A\mu$ -varifold 1-dimensionali, per dei funzionali con penalizzazioni dipendenti dalle curvature.



Consideriamo un aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e definiamo un funzionale  $F$  sulle coppie  $(\Gamma, u)$ , con  $\Gamma$  un  $A\mu$ -varifold 1-dimensionale in  $\Omega$ , con seconda forma fondamentale in  $L^p_{loc}$  e  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ . Con un abuso di notazione indicheremo con  $\Gamma$  sia la misura varifold che il rettificabile in  $\Omega$  dove si concentra. Grazie al Teorema 5.4 possiamo supporre che  $\Gamma$  sia chiuso. Poniamo

$$F(\Gamma, u) = G(u, \Omega \setminus \Gamma) + \mu_\Gamma(\Omega) + \int_\Gamma \varphi(A) d\mu_\Gamma + \int_\Omega \sigma(x) d\pi_\#|\underline{\mu}|(x)$$

dove  $A$  è la seconda forma fondamentale di  $\Gamma$  e  $\underline{\mu}$  è la sua misura bordo. Il funzionale positivo  $G(u, V)$  è definito per  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$  e  $V$  aperto in  $\Omega$  e supporremo che soddisfi le seguenti proprietà:

- $G$  è *additivo*, nel senso che l'applicazione  $V \mapsto G(u, V)$  è la restrizione di una misura di Borel agli aperti;
- $G$  è *semicontinuo*, nel senso che  $u \mapsto G(u, V)$  è semicontinua inferiormente nella topologia  $L^1_{loc}(\Omega)$ ;
- $G$  è *locale*, nel senso che se  $u$  e  $v$  coincidono quasi ovunque sull'aperto  $V$  allora  $G(u, V) = G(v, V)$ ;
- $G$  è *coercivo*, nel senso che per ogni aperto  $V$  e ogni costante  $c$ , l'insieme

$$\{u \in L^1_{loc}(V) \mid G(u, V) \leq c\}$$

è compatto in  $L^1_{loc}(V)$ . Osserviamo che grazie alla località di  $G$ , ha senso considerare  $G(u, V)$  quando  $u \in L^1_{loc}(V)$ , ponendo  $u = 0$  fuori di  $V$ ;

- $G$  è *non atomico*, nel senso che  $G(u, V) = G(u, V')$  se  $V \Delta V'$  è un insieme finito.

La funzione  $\varphi : \mathbb{R}^{n^3} \rightarrow [0, +\infty]$  è semicontinua inferiormente, convessa e ha crescita più che lineare, cioè

$$\varphi(x) \geq c(|x|^p - 1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n^3}$$

con  $p > 1$  e  $c > 0$ . Infine  $\sigma : \Omega \rightarrow (0, +\infty]$  è semicontinua inferiormente.

Il funzionale  $F$  è una estensione naturale allo spazio degli  $A\mu$ -varifold del seguente funzionale

$$\tilde{F}(\Gamma, u) = G(u, \Omega \setminus \Gamma) + \sum_{i=1}^n l(\Gamma_i) + \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \varphi(A^i) d\mathcal{H}^1 + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Gamma_i} \sigma(x) d\mathcal{H}^0(x)$$

dove  $\Gamma$  è un sistema finito di curve  $C^2$  in  $\Omega$ , rappresentate da  $\Gamma_i$ ,  $\varphi$  e  $\sigma$  sono come sopra e  $l$  indica la lunghezza di una curva.

Dimostriamo che  $F$  possiede minimo. Escludendo il caso banale in cui  $F$  vale identicamente  $+\infty$ , supponiamo che  $(\Gamma_n, u_n)$  sia una successione minimizzante di coppie  $A\mu$ -varifold, funzione. Allora si vede facilmente che la successione  $\Gamma_n$  soddisfa le ipotesi del teorema di compattezza 3.1, e che quindi possiamo supporre convergente ad un  $A\mu$ -varifold  $\Gamma$ . Infatti, a causa del fatto che  $\sigma$  ha minimo strettamente positivo su ogni compatto di  $\Omega$ , la variazione totale delle misure bordo di  $\Gamma_n$  è localmente equilimitata.

Inoltre i contributi dovuti alla parte di massa e alla parte di integrazione della seconda forma fondamentale diminuiscono nel limite e analogamente l'integrazione rispetto alla misura bordo. Infatti essendo  $\sigma$  estremo superiore di funzioni continue, il funzionale

$$\int_{\Omega} \sigma(x) d\pi_{\#}|\underline{\mu}|(x) = \int_{\Omega \times G_{1,n}} \sigma(x) d|\underline{\mu}|(x, P)$$

è semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole della misura  $\underline{\mu}$  (vedi ad esempio [BU]).

Consideriamo l'aperto  $\tilde{\Omega} = \Omega \setminus \Gamma$ . Grazie al lemma 5.5, sappiamo che, per ogni aperto  $U$  relativamente compatto in  $\tilde{\Omega}$ , esiste un insieme finito  $D$  tale che per ogni compatto  $K \subset U \setminus D$  vale

$$K \subset U \setminus \Gamma_n$$

per infiniti indici  $n$ .

Grazie alla coercività possiamo estrarre una sottosuccessione di funzioni, che indicheremo ancora con  $u_n$ , convergente in  $L^1_{loc}(\tilde{\Omega})$  a  $u$  e tale che  $G(u_n, \Omega \setminus \Gamma_n)$  abbia limite. Dimostriamo che  $F(\Gamma, u)$  è minimo per  $F$ . Consideriamo una famiglia di aperti  $U_k \subset\subset \tilde{\Omega}$  che invadono  $\tilde{\Omega}$ . Fissato  $k$  esiste un insieme finito  $D_k$  tale che comunque si fissi un compatto  $K \subset U_k \setminus D_k$ , si ha che  $\Gamma_n \cap K = \emptyset$  per infiniti indici  $n$ . Quindi per ogni aperto  $A \subset\subset U_k \setminus D_k$ ,

$$G(u_n, A) \leq G(u_n, U_k \setminus \Gamma_n) \leq G(u_n, \Omega \setminus \Gamma_n)$$

per infiniti indici  $n$ . Passando al limite per  $n$  che tende all'infinito e usando le ipotesi di additività, semicontinuità e non atomicità fatte su  $G$ , otteniamo

$$G(u, U_k) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} G(u_n, \Omega \setminus \Gamma_n).$$

Facendo tendere  $k$  all'infinito si ha

$$G(u, \tilde{\Omega}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} G(u_n, \Omega \setminus \Gamma_n).$$

Infine sommando i termini dipendenti dalla curvatura e dal bordo si ottiene

$$F(\Gamma, u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(\Gamma_n, u_n).$$

Possiamo dunque enunciare il risultato

**PROPOSIZIONE 2.1.** *Il funzionale  $F(\Gamma, u)$  definito sopra possiede minimo nella classe delle coppie  $(\Gamma, u)$ , dove  $\Gamma$  è un  $A\mu$ -varifold 1-dimensionale e  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ .*

**OSSERVAZIONE 2.2.** Facciamo una osservazione sulla regolarità dei minimi: l' $A\mu$ -varifold limite ha almeno le proprietà di struttura precisate nel teorema di regolarità. La regolarità di  $u$  dipende dal funzionale  $G$ . Per esempio nel caso del funzionale ellittico di Mumford–Shah

$$G(u, V) = \int_V \alpha |\nabla u|^2 + \beta |u - g|^2 dx$$

posto uguale a  $+\infty$  se  $u \notin H^1(V)$ , è un risultato classico che si ottengano come minimi funzioni  $u \in C^1(\Omega \setminus \Gamma)$  nel caso  $g$  appartenga a  $L^\infty_{loc}(\Omega)$ .

Osserviamo infine che è facile far rientrare in questo quadro anche funzionali dipendenti da derivate di ordine maggiore di uno, ad esempio

$$G(u, V) = \int_V |\Delta u|^2 + \alpha |\nabla u|^2 + \beta |u - g|^2 dx.$$

### 3. Una Generalizzazione del Funzionale $F$

Vediamo brevemente come con l'approccio basato sui varifold si possano ottenere facilmente teoremi di esistenza del minimo per funzionali più generali del funzionale  $F$  visto nella sezione precedente.

La variazione che considereremo è il funzionale  $F$  senza penalizzazione sulla lunghezza.

Fissato un aperto limitato  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  vincoliamo il varifold  $\Gamma$  ad essere contenuto in  $\overline{\Omega}$  e definiamo il funzionale  $F_1$ ,

$$F_1(\Gamma, u) = G(u, \mathbb{R}^n \setminus \Gamma) + \int_{\Gamma} \varphi(A) d\mu_{\Gamma} + \int_{\mathbb{R}^n} \sigma(x) d\pi_{\#}|\underline{\mu}|$$

dove abbiamo le stesse ipotesi che avevamo nel caso di  $F$ . Si noti la differenza con  $F$ : non abbiamo il termine di area del varifold ma dobbiamo allora considerare i punti di bordo anche sulla frontiera di  $\Omega$ , questo poiché altrimenti potremmo invadere tutto  $\Omega$  con un reticolo arbitrariamente fitto di rette e ottenere estremo inferiore uguale a 0. Il fatto che il problema sia ambientato in  $\Omega$  viene proprio dal vincolo sul supporto di  $\Gamma$ .

Per dimostrare l'esistenza del minimo anche in questo caso, dobbiamo riportarci alle ipotesi del teorema di compattezza e questo si ottiene dimostrando una disuguaglianza isoperimetrica.

LEMMA 3.1. *Sia  $\Gamma$  un 1-varifold Allard in  $\mathbb{R}^k$  avente supporto contenuto in  $\overline{\Omega}$ . Allora*

$$(3.1) \quad \mu_{\Gamma}(\mathbb{R}^n) \leq (\text{diam } \Omega) |\delta\Gamma|(\mathbb{R}^n).$$

DIMOSTRAZIONE. Sia  $x^0$  un punto di  $\Omega$ , la palla chiusa  $B_R(x^0)$  con  $R = \text{diam } \Omega$  contiene tutto  $\Omega$ . Sfruttando allora la formula 3.2 con il campo  $g(x) = x - x^0$  si ottiene

$$\mu_{\Gamma}(\mathbb{R}^n) = \int_{\Gamma} \text{div}^{\Gamma} g(x) d\mu_{\Gamma} = - \int_{\mathbb{R}^n} \langle g(x), \delta\Gamma \rangle \leq (\text{diam } \Omega) |\delta\Gamma|(\mathbb{R}^n)$$

a causa del fatto che la divergenza tangenziale di  $g$  vale identicamente uno.  $\square$

Sfruttando il lemma, la dimostrazione segue allora nello stesso modo del funzionale  $F$ , come è facile capire.

## Bibliografia

- [A1] W. K. ALLARD, *On the first variation of a varifold*, Ann. of Math. (2), **95** (1972), pp. 417-491.
- [A2] W. K. ALLARD, *On the first variation of a varifold: Boundary behaviour*, Ann. of Math. (2), **101** (1975), pp. 418-446.
- [AA1] W. K. ALLARD & F. J. ALMGREN, *The structure of stationary one-dimensional varifolds with positive density*, Invent. Math., **34** (1976), pp. 83-97
- [AA2] W. K. ALLARD & F. J. ALMGREN, *Geometric Measure Theory and the Calculus of Variations*, Proc. Symp. Pure Math., **44** (1985).
- [AD] R. ADAMS, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [ADS] G. ANZELLOTTI, S. DELLADIO & G. SCIANNA, *BV functions over Rectifiable Currents*, Presentato a Indiana Univ. Math. Jou.
- [AGP] L. AMBROSIO, M. GOBBINO & D. PALLARA, *Approximation Problems for Curvature Varifolds*, Sc. Nor. Sup. Pisa, Preprint, (1993).
- [AL1] F. J. ALMGREN, *Theory of Varifolds*, Princeton, 1965.
- [AL2] F. J. ALMGREN, *Basic techniques in geometric measure theory*, Astérisque, **154-255** (1987), pp. 267-306.
- [AL3] F. J. ALMGREN, *Deformation and multiple-valued functions*, in: Geometric measure theory and the calculus of variations, W. K. Allard e F. J. Almgren ed., Proc. Symp. Pure Math., **44** Am. Math. Soc. (1986), pp. 29-130.
- [AM1] L. AMBROSIO, *A compactness theorem for a new class of functions of bounded variation*, Boll. Un. Mat. Ital., **3-B** (1989), pp. 857-881.
- [AM2] L. AMBROSIO, *A new proof of the SBV compactness theorem*, Dip. Mat. Univ. Pisa, Preprint, (1993).
- [AN] G. ANZELLOTTI, *Functionals depending on curvatures*, Rend. Mat. Univ. Politec. Torino, Fascicolo speciale: Partial Differential Equations and Geometry, (1989).
- [AST] G. ANZELLOTTI, R. SERAPIONI & I. TAMANINI, *Curvatures, Functionals, Currents*, Indiana Univ. Math. Jou., **39** (1990), pp. 617-669.
- [AT] L. AMBROSIO & V. M. TORTORELLI, *Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via  $\Gamma$ -convergence*, Comm. Pure Appl. Math., **43** (1990), pp. 999-1036.
- [BDP] G. BELLETTINI, G. DAL MASO & M. PAOLINI, *Semicontinuity and relaxation properties of a curvature depending functional in 2d*, Ann. Sc. Norm. Sup., **XX** (2), serie IV, (1993), pp. 247-298.
- [BF] G. BUTTAZZO & L. FREDDI, *Functional defined on measures and applications to non equi-uniformly elliptic problems*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **CLIX** (1991), pp. 133-149.
- [BG] M. BERGER & B. GOSTIAUX, *Differential geometry, manifolds, curves and surfaces*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [BR] K. A. BRAKKE, *The motion of a surface by its mean curvature*, Math. notes (20), Princeton Univ. Press, N.J., Princeton, N.J., 1978.
- [BRZ] H. BREZIS, *Analyse Fonctionnelle: Theorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [BU] G. BUTTAZZO, *Semicontinuity, Relaxation, and Integral Representation in the Calculus of Variations*, Pitman Res. Notes in Math., Longman Scientific & Technical, Harlow, 1989.
- [BZ] A. BLAKE & A. ZISSERMAN, *Visual Reconstruction*, MIT Press, Cambridge, 1987.
- [DC] M. P. DO CARMO, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [DCL] E. DE GIORGI, M. CARIERO & A. LEACI, *Existence Theorem for a Minimum Problem with Free Discontinuity Set*, Arch. Rational Mech. Anal., **108** (1989), pp. 195-218.
- [DG1] E. DE GIORGI, *Su una teoria generale della misura  $(r-1)$ -dimensionale in uno spazio euclideo a  $r$  dimensioni*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **36** (1954), pp. 191-213.
- [DG2] E. DE GIORGI, *Nuovi teoremi relativi alle misure  $(r-1)$ -dimensionali in uno spazio euclideo a  $r$  dimensioni*, Ricerche Mat., **4** (1955), pp. 95-113.
- [DG3] E. DE GIORGI, *Introduzione ai problemi di discontinuità libera*, in: Symmetry in Nature: A volume in honour of Luigi A. Radicati di Brozolo (1), Quad. Sc. Nor. Sup., Pisa, 1989, pp. 265-285.
- [DGA] E. DE GIORGI & L. AMBROSIO, *New Functionals in Calculus of Variations*, Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Mat. Fis. Natur., **82** (1988), pp. 199-210.
- [DI] N. DINCULEANU *Vector measures*, Pergamon Press, Oxford, 1967.

- [DS] S. DELLADIO & G. SCIANNA, *Oriented and nonoriented curvature varifolds*, di prossima pubblicazione su Proc. Royal Soc. Edinburgh, (1993).
- [DU1] J. P. DUGGAN, *Regularity Theorems for Varifolds with Mean Curvature*, Indiana Univ. Math. Jou., **35-1** (1986), pp. 117-144.
- [DU2] J. P. DUGGAN,  *$W^{2,p}$  regularity for varifolds with mean curvature*, Comm. Partial Differential Equation, **11** (1986), pp. 903-926.
- [EG] L. C. EVANS & R. F. GARIEPY, *Lectures notes on measure theory and fine properties of functions*, CRC Press, Ann Arbor, 1992.
- [EV] L. C. EVANS, *Weak Convergence Methods for P.D.E.*, AMS, 1990.
- [FA] K. J. FALCONER, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge Univ. Press, 1985.
- [FE1] H. FEDERER, *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [FE2] H. FEDERER, *Curvature measures*, Trans. Amer. Math. Soc., **93** (1959), pp. 418-491.
- [FF] H. FEDERER & W. H. FLEMING, *Normal and integral currents*, Ann. of Math., **72** (1960), pp. 458-520.
- [GI] E. GIUSTI, *Minimal surfaces and function of bounded variation*, Monographs in Math. 80, Birkhäuser Verlag, Boston, 1984.
- [GMS] M. GIAQUINTA, G. MODICA & J. SOUCEK, *Cartesian currents, weak diffeomorphisms and existence theorems in nonlinear elasticity*, Arch. Rational Mech. Anal., **106** (1989), pp. 97-159.
- [HU1] J. E. HUTCHINSON, *Second fundamental form for varifold and the existence of surfaces minimising curvature*, Indiana Univ. Math. Jou., **35** (1986), pp. 45-71.
- [HU2] J. E. HUTCHINSON,  *$C^{1,\alpha}$  Multiple function regularity and tangent cone behaviour for varifold with second fundamental form in  $L^p$* , in: Geometric measure theory and the calculus of variations, W. K. Allard e F. J. Almgren ed., Proc. Symp. Pure Math., **44** Am. Math. Soc. (1986), pp. 281-306.
- [HU3] J. E. HUTCHINSON, *Some regularity theory for curvature varifolds*, in: Miniconferenze on geometry and partial differential equations, Proc. Centre Math. Anal., vol. 12, Australian National University, Camberra, 1987, pp. 60-66.
- [HS] R. HARDT & L. SIMON, *Seminar on Geometric Measure Theory*, Birkhäuser Verlag. Basel 1986.
- [MA] R. MARCH & M. DOZIO, *Visual reconstruction with discontinuities using variational methods*, Image and Vision Computing, **10** (1) (1992), pp. 30-38.
- [MD] R. MARCH & M. DOZIO, *A variational method for the recovery of piecewise smooth boundaries*, presentato per la pubblicazione a Pattern Recognition Letters, (1993).
- [MO] F. MORGAN, *Geometric Measure Theory— A Beginner's Guide*, Academic Press, Boston, 1988.
- [MS] D. MUMFORD & J. SHAH, *Optimal Approximation by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems*, Comm. Pure Appl. Math., **17** (1989), pp. 577-685.
- [MU] D. MUMFORD, *Elastica and Computer Vision*, Preprint CICS, MIT, 1991.
- [PI] J. PITTS, *Existence and regularity of minimal submanifolds in Riemannian manifold*, Math. Notes 27, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981.
- [RO] C. A. ROGERS, *Hausdorff Measures*, Cambridge Univ. Press, 1970.
- [RU] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, Mc Graw-Hill, 1966. Torino, 1974.
- [SI1] L. SIMON, *Lectures on geometric measure theory*, Proc. Centre Math. Analysis, vol. 3, Australian National University, Camberra, 1984.
- [SI2] L. SIMON, *Existence of Surfaces Minimizing the Willmore Functional*, Preprint, (1993).
- [SP] M. SPIVAK, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Berkeley, 1979.
- [VO] A. I. VOL'PERT, *Spaces BV and quasi-linear equations*, Math. USSR Sb., **17** (1969), pp. 225-267.
- [ZI] W. P. ZIEMER, *Weakly differentiable functions*, Springer, 1989.