

Étude d'une méthode de recherche
de points selle pour certains
problèmes de reconstruction
d'image.

Stage de M2

Sous la direction de :
Antonin Chambolle

Réalisé à :
École Polytechnique

Remerciements.

Je voudrais chaleureusement remercier Antonin Chambolle pour avoir accepté de m'encadrer à nouveau pendant ce stage. Il a beaucoup compté pour moi au cours de mes quatre années d'études à l'école normale. Aussi bien en encadrant deux de mes stages, l'un en L3 et l'autre en cette année en M2, qu'en me guidant dans mes choix, notamment en me mettant en contact avec Selim Esedoglu pour mon stage de M1, il a eu une grande influence sur ces premières années d'apprentissage du métier de mathématicien. Je voudrais aussi remercier Hugues Talbot de l'ESIEE qui a accepté de me recevoir et de me parler de ses travaux qui sont à l'origine de ce mémoire. Enfin j'aimerais remercier Jean-Michel Morel qui a gentiment accepté de me consacrer de son temps et de faire partie du jury pour la soutenance de mon stage.

Introduction

Le point de départ de ce stage est l'article d'Appleton et Talbot [7] dans lequel les auteurs proposent une nouvelle méthode pour la segmentation d'images. Comme pour beaucoup de problèmes en analyse d'image, il s'agit de minimiser une fonctionnelle du type

$$\min_u \int_{\Omega} F(x, Du) + G(u) \quad (1)$$

Ici, $F(x, p)$ vaut $g(x)|p|$ et G est l'indicatrice de la boule unité fermée de L^{∞} . En partant d'une analogie avec le théorème de "max flow / min cut" pour les graphes, Appleton et Talbot ont proposé de résoudre un certain système hyperbolique pour effectuer cette minimisation. Par ailleurs, en écrivant que $\int_{\Omega} F(x, Du) = \sup_{\xi} (\xi, Du) - \int_{\Omega} F^*(x, \xi)$, on voit que le problème de minimisation équivaut à la recherche d'un point selle, c'est-à-dire à résoudre

$$\min_u \sup_{\xi} (\xi, Du) - \int_{\Omega} F^*(x, \xi) + G(u)$$

La méthode d'Appleton et Talbot peut alors être vue comme une méthode de type Arrow-Hurwitz, à savoir descente de gradient en u et montée en ξ , pour le nouveau problème. Pour trouver le minimiseur, on cherche donc à résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\xi) - \partial G(u) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = Du - \partial F^*(x, \xi) \end{cases} \quad (2)$$

L'approche d'Appleton et Talbot ainsi que son lien avec la méthode d'Arrow-Hurwitz fait l'objet de la première partie de ce mémoire.

L'étude du système (2) se base sur la monotonie de l'opérateur $\begin{pmatrix} -\operatorname{div} \xi + \partial G \\ -Du + \partial F^* \end{pmatrix}$. Dans la deuxième partie, nous rappelons donc la théorie des opérateurs maximaux monotones.

L'étude du système obtenu pour la segmentation étant difficile, la troisième partie de ce mémoire débute par l'application de cette méthode à deux autres problèmes en analyse d'images. Pour ceux-ci, les fonctions F et G sont différentes de celles permettant la segmentation, ce qui en facilite l'analyse mathématique. Cette partie est conclue par les premiers résultats obtenus

dans l'étude de la méthode d'Appleton et Talbot.

Nous avons eu besoin d'introduire au cours du texte de nombreuses notations pour les espaces utilisés. Afin de faciliter la lecture, une annexe rappelle ces notations.

Table des matières

1	Présentation du problème	2
1.1	Problèmes de segmentation en analyse d'images	2
1.2	Les méthodes dites de "max flow / min cut"	4
1.2.1	Un analogue discret, coupures minimales et flots maximaux sur les graphes	4
1.2.2	L'approche d'Appleton et Talbot	5
1.3	Liens entre méthode d'Appleton-Talbot et recherche de points selles	11
2	Opérateurs Maximaux Monotones dans les espaces de Hilbert	15
2.1	Définitions et propriétés des opérateurs maximaux monotones	15
2.1.1	L'exemple de l'équation de la chaleur	19
2.2	Application à la recherche de points selles	21
3	Étude de trois problèmes de points selle liés à la méthode d'Appleton-Talbot	26
3.1	Régularisation de Tychonov	26
3.1.1	Étude théorique	26
3.1.2	Implémentation numérique	34
3.2	Le modèle de Rudin-Osher-Fatemi	34
3.2.1	Étude théorique	35
3.2.2	Implémentation numérique	43
3.3	Le modèle d'Appleton et Talbot	44
3.3.1	Étude théorique	44
3.3.2	Implémentation numérique	47
A	Les espaces fonctionnels utiles	50

1 Présentation du problème

1.1 Problèmes de segmentation en analyse d'images

Depuis l'avènement des ordinateurs, la communauté mathématiques s'est emparée de l'étude de la vision et de l'analyse d'images, domaines réservés jusque là à la psychologie. La compression, le débruitage, plus généralement la restauration ou encore la classification d'images sont quelques exemples de problèmes que les mathématiques ont aidé à résoudre, du moins partiellement. Le problème qui va nous intéresser ici est celui de la segmentation d'images. L'objectif est de trouver de façon automatisée les contours des objets dans une image. Ce problème est difficile, voir mal posé tellement la notion de contour ou même d'objet est mal définie. Ce que nous appelons objet dépend beaucoup de notre interprétation. Par exemple, ce qui sera décrit comme une texture à une certaine échelle apparaîtra comme une superposition d'objets à une autre échelle.

L'intérêt du problème de segmentation, au-delà du défi qu'il pose, est multiple. D'après la théorie de la Gestalt, les contours contiennent une part importante de l'information contenue dans une image. Les extraire peut par exemple permettre de reconnaître les objets contenus dans l'image ce qui constitue actuellement un défi majeur. Par ailleurs, connaître les contours d'un objet permet d'en estimer la taille ce qui peut être crucial, en particulier en médecine où l'on veut évaluer le volume de tumeurs ou d'organes à partir de photographies. On pourra consulter les livres de Morel et Solimini [30] ainsi que celui de Morel, Moisan et Desolneux [29] pour une introduction à la théorie de la Gestalt. Le deuxième utilise ces principes pour proposer des algorithmes de nature statistique en analyse d'image et pour la détection de contours en particulier. Notons que les principes Gestaltiques permettent de définir dans une certaine mesure la notion d'objet.

De nombreuses méthodes ont été proposées pour aborder, du moins partiellement, le problème de la segmentation. Parmi celles-ci, une classe importante est issue du calcul des variations. Il s'agit de définir une fonctionnelle dont le minimiseur donnerait le contour recherché. On peut séparer les méthodes variationnelles en deux grandes catégories.

La première est constituée par les méthodes de type régions qui cherchent à partager l'image en régions dont les frontières forment les contours recherchés. La fonctionnelle la plus connue et sûrement la plus étudiée est proposée par Mumford-Shah. Le livre d'Ambrosio, Fusco et Pallara [4] en donne une étude complète et celui de Morel et Solimini [30] en fournit une introduction.

Ce dernier est par ailleurs une bonne (bien que peu récente) introduction aux méthodes variationnelles en analyse d'images.

La seconde catégorie consiste à chercher directement des courbes, le plus souvent fermées, qui forment les contours. Le modèle qui s'est imposé est celui des contours actifs proposé par Kass et al. dans [27] puis réinterprété par Caselles et al. dans [16] sous le nom de contours actifs géodésiques. Une image est pour nous une fonction u de $\Omega = [0, 1]^2$ dans \mathbb{R} (on s'intéresse à des images en niveaux de gris). Dans ce modèle, on associe à l'image u , une fonction g positive qui est petite là où le gradient de l'image est grand et inversement. On cherche alors une courbe fermée qui passe par les zones où la valeur de g est faible. En effet, les contours sont localisés aux endroits où le gradient de l'image a une grande norme. On cherche donc à trouver Γ , une courbe qui est un minimum local de :

$$\int_{\Gamma} g(s) ds \quad (3)$$

En effet, les minima globaux étant réduits à des points, seuls certains minima locaux sont intéressants. On utilise généralement pour g des fonctions de la forme :

$$g = \frac{1}{1 + |\nabla(G_{\sigma} * u)|} + \varepsilon$$

Le terme $G_{\sigma} * u$, qui est la convolution de l'image par une gaussienne de variance σ permet de traiter des images dégradées par du bruit. Le terme $\varepsilon > 0$ pénalise la longueur de la courbe ce qui permet d'obtenir des courbes régulières. Remarquons que ce problème se généralise en dimension supérieure pour la recherche de surfaces minimales.

De nombreuses approches ont été proposées pour minimiser cette fonctionnelle. La première idée a été de procéder par descente de gradient. Les inconvénients de cette méthode sont d'une part qu'elle aboutit souvent à des minima locaux non désirables, d'autre part qu'elle est très sensible à l'initialisation et enfin qu'elle ne permet pas de changement de topologie par rapport à la courbe initiale. Une solution à certains de ces problèmes, en particulier celui de changement de topologie, a été proposée par Osher et Sethian dans [31]. Leur méthode dite des "level sets" consiste à voir Γ comme donnée implicitement par une équation $\Phi = 0$. L'équation obtenue pour Γ par la descente de gradient fournit alors une équation de type Hamilton-Jacobi pour Φ . Celle-ci est résolue par une méthode appelée "Fast Marching". Cet algorithme s'apparente à celui de Dijkstra pour la recherche de chemins mi-

nimaux dans les graphes.

1.2 Les méthodes dites de “max flow / min cut”

La méthode que nous étudierons ici est radicalement différente des méthodes précédentes. On suppose que l’on veut détecter les bords d’un unique objet. Il s’agit donc d’un problème de partition binaire (on veut séparer la forme du fond). Notons tout de même que le fond peut contenir d’autres “objets”. On suppose connue une partie de l’objet et une partie du fond. Cette connaissance est donnée par l’utilisateur. Il s’agit donc de méthodes dites semi-supervisées. Si on note S (respectivement T) la partie de l’objet (respectivement du fond) connue, on cherche une courbe Γ qui minimise l’énergie (3) parmi les courbes ayant S dans leur intérieur et T dans leur extérieur. Si on note E l’intérieur de Γ , cela revient à minimiser,

$$\min_{E \supset S, E^c \supset T} \int_{\partial E} g(s) ds \quad (4)$$

1.2.1 Un analogue discret, coupures minimales et flots maximaux sur les graphes

Boykov et Kolmogorov ont remarqué dans [10] que la discrétisation du problème (4) n’est autre que la question classique de recherche de coupures minimales dans les graphes.

Soit G un graphe orienté de sommets V et d’arêtes E . A chaque arête $e \in E$ on associe une capacité $C(e) \geq 0$. Pour une partition (V_1, V_2) donnée de V , on définit la coupure Γ comme l’ensemble des arêtes de E ayant un sommet dans V_1 et l’autre dans V_2 . Le coût de Γ est alors égal à la somme des capacités des arêtes de Γ . Soient s et t deux sommets fixés de V . On cherche alors parmi les coupures qui séparent s et t i.e. telles que $s \in V_1$ et $t \in V_2$, celle qui minimise le coût. Pour le résumer en une formule, on cherche

$$\min_{\Gamma} \sum_{e \in \Gamma} C(e)$$

La recherche de coupures minimales se fait à l’aide du théorème “de max flow/ min cut”.

Un flot ξ depuis une source s vers un puit t est une fonction de E dans \mathbb{R}^+ ayant les propriétés suivantes :

- Loi de Kirchhoff ou conservation du flot : pour tout sommet autre que la source ou le puit, le flot entrant est égal au flot sortant. Si on note e_v l'ensemble des arêtes ayant v comme sommet, on a donc pour v différent de s ou t , $\sum_{e \in e_v} \pm \xi(e) = 0$ où le signe est plus si l'arête est entrante en v et moins si elle est sortante.
- Le flot dans une arête ne peut dépasser sa capacité. Autrement dit, pour tout $e \in E$, $\xi(e) \leq C(e)$.

La valeur du flot est définie comme la somme des flots sortants de s . Le théorème du “max flow/ min cut” établit une correspondance entre les flots ayant une valeur maximale et les coupures minimales. Les arêtes saturées par un flot maximal i.e. celles où $\xi(e) = C(e)$, forment une coupure minimale.

Une méthode rapide pour calculer un flot maximal est la méthode du “preflow-push”. Le principe est l'abandon de la contrainte de conservation du flot (on parle alors de préflot) et l'introduction d'une variable auxiliaire.

Pour la démonstration du théorème, la description du “preflow-push” ainsi que pour plus de précisions sur l'optimisation sur les graphes, on pourra par exemple consulter le livre de Ahuja, Magnanti et Orlin [1].

Les méthodes d'optimisation sur les graphes aboutissent en un nombre fini d'opérations à une minimisation exacte et globale. C'est l'avantage sur les méthodes d'optimisation continue. Le prix à payer est l'apparition de biais dûs à la discrétisation.

1.2.2 L'approche d'Appleton et Talbot

Pour éviter ce biais, Appleton et Talbot ont étudié dans leur article [7] le problème continu directement. Leur idée est de pousser l'analogie avec le discret. Ils utilisent une version continue du théorème de “max flow / min cut” démontrée par Strang dans [35] pour un problème légèrement différent. Notons dès à présent que Strang était en partie motivé par des problèmes en plasticité. Ceux-ci possèdent de nombreuses similarités avec celui des surfaces minimales. On pourra consulter à ce sujet le très beau livre de Temam [36]. Remarquons que l'idée d'étudier directement le problème continu a été reprise depuis, par exemple dans l'article de Houhou et al. [26]. Avant de présenter la méthode d'Appleton-Talbot, posons correctement le problème. Le bon cadre pour étudier les questions de surfaces minimales est

celui des ensembles de périmètre fini appelés aussi ensembles de Caccioppoli. Ces ensembles sont définis par le fait que la dérivée de leur indicatrice est une mesure de Radon bornée. Cette indicatrice est donc à variations bornées. Pour la définition et les propriétés utiles de l'ensemble des fonctions à variations bornées $BV(\Omega)$, j'ai utilisé les livres d'Ambrosio, Fusco et Pallara [4], celui d'Evans et Gariepy [24] ou encore celui de Giusti [20].

Notations 1.1. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Pour S et T des parties de $\partial\Omega$, on note $\partial\Omega_D$ l'ensemble $S \cup T \subset \partial\Omega$.

Soit φ une fonction de $\partial\Omega$ telle que $\varphi = 1$ sur S et 0 sur T . Les valeurs de φ en dehors de $\partial\Omega_D$ n'ayant aucune importance. Soient $f \in L^2(\Omega)$ et g une fonction strictement positive continue sur $\bar{\Omega}$. On cherche alors un ensemble de Caccioppoli E inclus dans Ω minimisant :

$$\inf_{\substack{1_E \in BV(\Omega) \\ 1_E = \varphi \text{ sur } \partial\Omega_D}} \int_{\Omega} g(x) |D1_E| - \int_E f dx$$

Remarque 1.2. Pour le cas où $g = 1$ et $\partial\Omega_D = \emptyset$ on pourra consulter les notes de cours [3] pour une étude de la régularité des solutions.

Ce problème peut être rendu convexe en élargissant la classe des fonctions admissibles à l'ensemble des fonctions à variations bornées, égales à φ sur $\partial\Omega_D$ et qui prennent des valeurs entre 0 et 1 (et qui ne valent donc pas presque partout 0 ou 1). La proposition suivante montre que ceci ne modifie pas la valeur de l'inf.

Proposition 1.3. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , $g \in C(\bar{\Omega})$ strictement positive et $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ alors

$$\inf_{\substack{1_E \in BV(\Omega) \\ 1_E = \varphi \text{ sur } \partial\Omega_D}} \int_{\Omega} g(x) |D1_E| - \int_E f dx = \inf_{\substack{u \in BV(\Omega), u \in [0,1] \\ u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega_D}} \int_{\Omega} g(x) |Du| - \int_{\Omega} f u dx$$

De plus si u minimise le membre de droite alors $E_t = \{x / u(x) > t\}$ minimise le membre de gauche pour presque tout $t \in]0, 1[$.

Démonstration. Si E est un ensemble de Caccioppoli alors 1_E est dans BV et $0 \leq 1_E \leq 1$ donc le membre de droite est inférieur au membre de gauche. Montrons l'inégalité inverse.

Notons tout d'abord que si $u \in BV(\Omega)$, d'après la formule de la co-aire (Ambrosio-Fusco-Pallara [4] p. 145) :

$$\int_{\Omega} |Du| = \int_0^1 \int_{\Omega} |D1_{E_t}|$$

D'autre part, d'après le Théorème 7 p. 13 du livre d'Evans et Gariepy [24] on a que $g = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} 1_{V_i}$ où les V_i sont des ouverts (on voit dans la preuve du Théorème que si g est continue, en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes dans la définition des V_i , on a bien V_i ouvert). On a alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g|Du| &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} \int_{V_i} |Du| \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} \int_0^1 \left(\int_{V_i} |D1_{E_t}| \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{i} 1_{V_i} |D1_{E_t}| \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_{\Omega} g|D1_{E_t}| \right) dt \end{aligned}$$

D'autre part $u(x) = \int_0^1 1_{E_t}(x) dt$ donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x)|Du| - \int_{\Omega} fu dx &= \int_0^1 \left(\int_{\Omega} g|D1_{E_t}| - \int_{\Omega} f1_{E_t} \right) dt \\ &\geq \inf_{\substack{1_E \in BV(\Omega) \\ 1_E = \varphi \text{ sur } \partial\Omega_D}} \int_{\Omega} g(x)|D1_E| - \int_E f dx \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. \square

Remarque 1.4. *Les solutions du problème initial sont donc obtenues en seillant à un seuil quelconque les solutions du problème relaxé.*

Le problème reste cependant mal posé car il n'est pas sûr que l'inf soit atteint. En effet, si u_n est une suite minimisante rien ne garantit qu'à la limite les conditions aux bords soient respectées. Ceci est un phénomène

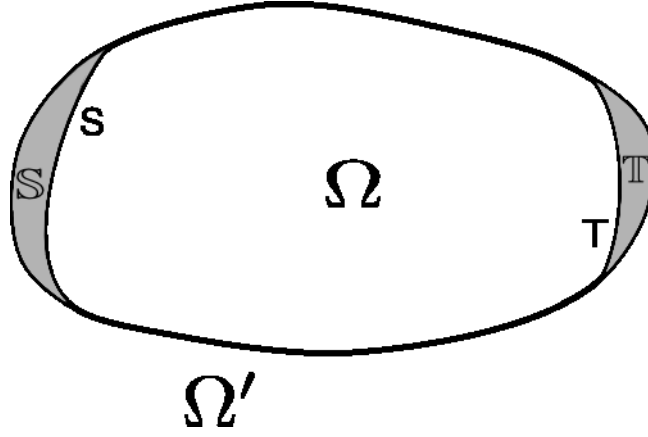


FIG. 1 – L'ensemble Ω' .

classique lorsque l'on s'intéresse à des problèmes dans BV car la trace n'est pas continue pour la convergence faible-* (voir Ambrosio, Fusco et Pallara [4] p. 181). Pour pallier à cela il faut comprendre les conditions aux bords de manière un peu différente. L'une des possibilités est "d'épaissir" les ensembles S et T de sorte qu'ils forment des ensembles de mesure de Lebesgue non nulle.

Notations 1.5.

- Soit Ω' un ouvert de \mathbb{R}^n . Soient \mathbb{S} et \mathbb{T} deux fermés de Ω' de mesures de Lebesgue positives et d'intersection vide. On note S (respectivement T) la frontière de \mathbb{S} (respectivement \mathbb{T}) dans Ω' . On pose $\Omega = \Omega' \setminus (\mathbb{S} \cup \mathbb{T})$ (voir figure 1). On note encore $\partial\Omega_D = S \cup T$.
- Pour φ une fonction de $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$, on pose alors $BV_D(\Omega') = \left\{ u \in BV(\Omega') / u|_{\mathbb{S} \cup \mathbb{T}} = \varphi \right\}$.
- Pour $f \in L^2(\Omega)$, on note toujours f la fonction prolongée par 0 sur $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$.
- On note $|u|_p$ la norme de la fonction u dans L^p lorsqu'aucune confusion n'est possible.

Problème 1.6. Pour simplifier un peu le problème étudié, nous supposons désormais que $g = 1$. En faisant le changement d'inconnue $u' = 2u - 1$ et en posant $\varphi = 1$ sur \mathbb{S} et $\varphi = -1$ sur \mathbb{T} le problème initial devient un cas particulier de

$$\inf_{\substack{u \in BV_D(\Omega') \\ |u|_\infty \leq 1}} \left(\int_{\Omega'} |Du| - \int_{\Omega'} f u \, dx \right) \quad (5)$$

On a alors existence de solutions.

Proposition 1.7. *Soient Ω' un ouvert borné et $f \in L^2(\Omega)$ alors le problème (5) possède une solution.*

Démonstration. Comme nous allons le voir, c'est une simple application de la méthode directe du calcul des variations. En effet soit u_n une suite minimisante alors pour tout n , $|u_n|_\infty \leq 1$ et $u_n|_{\mathbb{S} \cup \mathbb{T}} = \varphi$. De plus il existe une constante C telle que

$$C \geq \int_{\Omega'} |Du_n| - \int_{\Omega'} f u_n dx \geq \int_{\Omega'} |Du_n| - C_2 |f|_2$$

Donc par le Théorème de compacité dans BV (Evans-Gariepy [24] p. 176), il existe une sous-suite $u_{\psi(n)}$ qui converge faiblement-* vers $u \in BV(\Omega')$. On peut de plus supposer que $u_{\psi(n)}$ converge presque partout vers u donc $|u|_\infty \leq 1$. Enfin comme $u_{\psi(n)}$ converge dans $L^1(\Omega')$ vers u , à la limite on a $u|_{\mathbb{S} \cup \mathbb{T}} = \varphi$. Par la semi-continuité de la variation totale, u est bien un minimiseur. \square

Remarque 1.8.

- On peut prendre en compte les conditions aux bords de diverses manières. On pourra par exemple s'inspirer de l'article de Giaquinta, Modica et Souček [25].
- Quelle que soit la façon de traiter ces conditions aux bords, l'idée est (comme pour les problèmes en plasticité) que l'on doit compter le saut intérieur de la fonction u le long du bord $\partial\Omega_D$. Avec la méthode que nous avons choisie, si $u \in BV(\Omega')$ avec $u = \varphi$ sur $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$ alors $Du = Du \llcorner \Omega + (\varphi - u)\nu \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial\Omega_D$ où ν est la normale sortante de Ω (voir Ambrosio-Fusco-Pallara [4] p. 177). Le problème s'écrit alors

$$\min_{\substack{u \in BV(\Omega) \\ |u|_\infty \leq 1}} \left(\int_{\Omega} |Du| + \int_{\partial\Omega_D} |u - \varphi| d\mathcal{H}^{n-1} - \int_{\Omega} f u dx \right)$$

Maintenant que le problème est bien posé, voyons comment on peut retrouver formellement un théorème de type "max flow/ min cut" dans le cas continu. Pour simplifier les choses, oublions la contrainte sur la norme de u et reprenons donc $\varphi = 1$ sur \mathbb{S} et 0 sur \mathbb{T} . On a alors

$$\begin{aligned}
\inf_{BV_D(\Omega')} \int_{\Omega'} |Du| - \int_{\Omega'} f u &= \inf_{BV_D(\Omega')} \sup_{\substack{\xi \in C_c^1(\Omega') \\ |\xi|_\infty \leq 1}} - \int_{\Omega'} u \operatorname{div}(\xi) - \int_{\Omega'} f u \\
&= \sup_{\substack{\xi \in C_c^1(\Omega') \\ |\xi|_\infty \leq 1}} \inf_{BV_D(\Omega')} - \int_{\Omega'} u \operatorname{div}(\xi) - \int_{\Omega'} f u \\
&= \sup_{\substack{\xi \in C_c^1(\Omega') \\ |\xi|_\infty \leq 1}} \inf_{BV(\Omega)} - \int_{\Omega} u(\operatorname{div}(\xi) + f) - \int_{\mathbb{S}} \varphi \operatorname{div}(\xi)
\end{aligned}$$

Si $\operatorname{div}(\xi)$ n'est pas égale à $-f$ presque partout sur Ω on voit alors que $\inf_{u \in BV(\Omega)} - \int_{\Omega} u(\operatorname{div}(\xi) + f) dx = -\infty$. De plus, par la formule de Green-Riemann (voir Evans-Gariepy [24] p. 209), $\int_{\mathbb{S}} \operatorname{div}(\xi) dx = - \int_S \xi \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1}$ donc finalement,

$$\inf_{BV_D(\Omega')} \int_{\Omega'} |Du| - \int_{\Omega'} f u dx = \sup_{\substack{|\xi|_\infty \leq 1 \\ \operatorname{div}(\xi) = -f}} \int_S \xi \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1}$$

Ce qui présente une forte analogie avec le théorème “max flow/ min cut” (en particulier pour $f = 0$), le terme $\int_S \xi \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1}$ étant le flot sortant de \mathbb{S} . La partie formelle du raisonnement précédent réside d'une part dans la non prise en compte de la contrainte sur la norme infinie de u et d'autre part dans la justification de l'échange de l'inf et du sup.

L'idée d'Appleton et Talbot est alors de trouver un flot maximal en utilisant un analogue continu de la méthode de “preflow-push”. Il se trouve que la variable auxiliaire qu'ils introduisent est l'inconnue u du problème de départ. Ils proposent alors de minimiser (5) en résolvant le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\xi) + f \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = Du \end{cases} \quad |\xi|_\infty \leq 1$$

Ce système d'EDP n'est a priori pas facile à résoudre. C'est en effet un système hyperbolique avec contraintes. Sachant que les systèmes hyperboliques sans contraintes sont encore mal compris, on peut penser que peu de choses sont connues sur ce genre de problèmes. Par ailleurs, ce système a été

trouvé par pure analogie avec le discret donc son lien avec le problème initial n'est pas clair.

1.3 Liens entre méthode d'Appleton-Talbot et recherche de points selles

Pour mieux comprendre le lien entre le problème initial et le système d'EDP proposé par Appleton et Talbot, donnons une nouvelle interprétation de ce système. Cette nouvelle interprétation aura l'avantage d'offrir un point de départ pour son étude théorique.

Notations 1.9.

- On note $I_{B(0,1)}$ la fonction indicatrice de la boule unité fermée de L^∞ . C'est donc la fonction,

$$I_{B(0,1)}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\xi|_\infty \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Pour $f \in L^2(\Omega)$ on note $G(u)$ la fonction,

$$G(u) = \begin{cases} - \int_{\Omega'} f u \, dx & \text{si } |u|_\infty \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec ces notations on a pour $u \in BV_D(\Omega')$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega'} |Du| + G(u) &= \sup_{\substack{\xi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega') \\ |\xi|_\infty \leq 1}} - \int_{\Omega'} u \operatorname{div}(\xi) + G(u) \\ &= \sup_{\xi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega')} - \int_{\Omega'} u \operatorname{div}(\xi) + G(u) - I_{B(0,1)}(\xi) \end{aligned}$$

Soit $K(u, \xi) = - \int_{\Omega'} u \operatorname{div}(\xi) + G(u) - I_{B(0,1)}(\xi)$. K est une fonction convexe en u et concave en ξ . Le problème de minimisation (5) peut alors être résolu en trouvant un point selle de K . On cherche donc (u, ξ) réalisant

$$\min_{u \in BV_D(\Omega')} \sup_{\xi \in \mathcal{C}_c^1(\Omega')} K(u, \xi) \quad (6)$$

Pour trouver ce point selle on procède par descente de gradient en u et montée de gradient en ξ . On regarde donc le système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\partial(K(\cdot, \xi))(u) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\partial(-K(u, \cdot))(\xi) \end{cases}$$

Où $\partial(K(\cdot, \xi))(u)$ dénote le sous-gradient de la fonction convexe $K(\cdot, \xi)$ (voir Ekeland-Temam [22] pour la définition). La question est de savoir pour quelle dualité on entend ce sous-gradient.

Pour $\partial(K(\cdot, \xi))(u)$ on voit que la dualité entre L^1 et L^∞ convient. On a alors $-\partial(K(\cdot, \xi))(u) = \text{div}(\xi) - \partial G(u)$. Pour la deuxième équation c'est plus compliqué.

Par la formule de Green dans BV (voir Evans-Gariepy [24] p. 177), on a $K(u, \xi) = \int_{\Omega'} \xi \cdot Du - I_{B(0,1)}(\xi) + G(u)$. Pour u fixé dans BV , la fonction $-K(u, \cdot)$ est convexe sur $\mathcal{C}_0(\Omega')$. On a alors, au sens de la dualité $(\mathcal{C}_0(\Omega'), \mathcal{M}_1(\Omega'))$, l'égalité $-\partial(-K(u, \cdot))(\xi) = Du - \partial I_{B(0,1)}(\xi)$. On retrouve ainsi sur un système analogue à celui d'Appleton et Talbot à savoir :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(\xi) - \partial G(u) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = Du - \partial I_{B(0,1)}(\xi) \end{cases} \quad (7)$$

Remarque 1.10.

- On a noté $\frac{\partial \xi}{\partial t} = Du - \partial I_{B(0,1)}(\xi)$ alors que $\partial I_{B(0,1)}$ est en général un ensemble. Il faudrait donc écrire $-\frac{\partial \xi}{\partial t} + Du \in \partial I_{B(0,1)}(\xi)$. Nous écrirons tout de même souvent des égalités là où il faudrait des inclusions.
- Le sens à donner au système (7) n'est pas clair. En effet, si V et V^* sont en dualité et si φ est une fonction convexe sur V alors $\partial\varphi(u) \subset V^*$. Si maintenant $u(t)$ est une fonction à valeurs dans V , $\frac{du}{dt}$ est aussi dans V donc l'équation $-\frac{du}{dt} \in \partial\varphi(u)$ n'a pas de sens. Nous verons par la suite que le bon cadre pour comprendre ce système est le cadre hilbertien L^2 car alors $V = V^*$.
- On voit que les contraintes sont ici incluses dans l'EDP ce qui n'était pas le cas dans le système d'Appleton-Talbot. En particulier on tient compte de la contrainte sur la norme de u .
- La méthode de recherche de points selles par descente de gradient dans une direction et montée dans l'autre a été introduite par Arrow et Hurwicz (voir leur livre [8]) pour des problèmes en dimension finie. Cette

méthode a été reprise récemment en analyse d'images par Zhu et Chan dans [38] pour minimiser la variation totale puis par Chambolle, Cremers et Pock dans [18] pour un problème proche du nôtre à savoir le calcul de partitions minimales. Remarquons toutefois que ces deux articles appliquent la méthode d'Arrow-Hurwicz à l'énergie discrète. Ils restent donc en dimension finie. L'étude théorique de cette méthode en dimension infinie n'a encore jamais été réalisée.

Définition 1.11. Soit X un espace vectoriel topologique localement convexe et soit X^* son dual topologique. Un opérateur A (multivoque) est une application de X dans $\mathcal{P}(X^*)$, l'ensemble des parties de X^* . On note $D(A) = \{x \in X / A(x) \neq \emptyset\}$ le domaine de A et $R(A) = \bigcup_{x \in X} A(x)$ son image. On identifiera A et son graphe dans $X \times X^*$.

Notations 1.12. Pour (u, ξ) dans $BV(\Omega') \times \mathcal{C}_c^1(\Omega')$ avec $u|_{\mathbb{S} \cup \mathbb{T}} = \varphi$, $|u|_\infty \leq 1$ et $|\xi|_\infty \leq 1$. On appelle $T(u, \xi)$ l'opérateur $\begin{pmatrix} -\operatorname{div} \xi + \partial G(u) \\ -Du + \partial I(\xi) \end{pmatrix}$.

Définition 1.13. Un opérateur A est monotone si :

$$\forall x_1, x_2 \in D(A), \quad (A(x_1) - A(x_2), x_1 - x_2) \geq 0$$

ou plus précisément si pour tout $x_1^* \in A(x_1)$ et $x_2^* \in A(x_2)$,

$$(x_1^* - x_2^*, x_1 - x_2) \geq 0$$

La remarque fondamentale sur laquelle se base l'étude théorique de l'équation $-\left(\frac{du}{dt}, \frac{d\xi}{dt}\right) \in T(u, \xi)$, est la monotonie de l'opérateur T .

Proposition 1.14. L'opérateur T est monotone.

Démonstration. Soient $x_1 = (u_1, \xi_1)$ et $x_2 = (u_2, \xi_2)$ dans $D(T)$. Alors par la formule de Green on a

$$(-\operatorname{div}(\xi_1 - \xi_2), u_1 - u_2) + (-D(u_1 - u_2), \xi_1 - \xi_2) = 0$$

D'où

$$\begin{aligned} (T(x_1) - T(x_2), x_1 - x_2) = \\ (\partial G(u_1) - \partial G(u_2), u_1 - u_2) + (\partial I(\xi_1) - \partial I(\xi_2), \xi_1 - \xi_2) \end{aligned}$$

La monotonie de T découle alors de celle des sous-gradients des fonctions convexes. Nous démontrerons cette dernière dans la prochaine partie. \square

Remarque 1.15. *On verra plus loin que les opérateurs obtenus par la méthode d'Arrow-Hurwicz sont toujours monotones.*

En utilisant la monotonie de T et la théorie des opérateurs maximaux monotones nous montrerons qu'il est possible d'obtenir des résultats d'existence de solutions pour le système (7).

2 Opérateurs Maximaux Monotones dans les espaces de Hilbert

Dans cette partie nous présenterons les résultats de la théorie des opérateurs maximaux monotones qui nous seront utiles pour la suite. Nous reprenons ici la présentation faite par Brézis dans son ouvrage [12]. Dans une deuxième partie nous verrons comment cette théorie éclaire le problème de recherche de points selles. Nous y exposerons essentiellement des résultats établis par Rockafellar dans [33].

2.1 Définitions et propriétés des opérateurs maximaux monotones

Soit H un espace de Hilbert. Les définitions données précédemment d'opérateurs monotones s'appliquent sans modification aucune. Montrons maintenant que le sous-gradient de toute fonction convexe est un opérateur monotone.

Proposition 2.1. *Soit φ une fonction convexe propre sur H alors $\partial\varphi$ est un opérateur monotone .*

Démonstration. Soit $y_1 \in \partial\varphi(x_1)$ et $y_2 \in \partial\varphi(x_2)$ alors par définition du sous-différentiel on a

$$\begin{aligned}\varphi(x_2) &\geq \varphi(x_1) + (y_1, x_2 - x_1) \\ \varphi(x_1) &\geq \varphi(x_2) + (y_2, x_1 - x_2)\end{aligned}$$

donc par addition

$$(y_1 - y_2, x_1 - x_2) \geq 0$$

□

Proposition 2.2. *Soit A un opérateur sur H . A est monotone si et seulement si :*

$$\forall x_1, x_2 \in D(A), \forall \lambda > 0, \quad |x_1 - x_2| \leq |(x_1 - x_2) + \lambda(A(x_1) - A(x_2))|$$

Définition 2.3. *Pour A un opérateur multivoque on note A^{-1} l'opérateur dont le graphe est le symétrique de celui de A i.e $y \in A^{-1}(x) \Leftrightarrow x \in A(y)$.*

Un opérateur A est donc monotone si et seulement si pour tout réel $\lambda > 0$ l'opérateur $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction de $R(I + \lambda A)$ dans H . Ceci implique en particulier que $(I + \lambda A)^{-1}$ est univoque (c'est-à-dire une fonction au sens classique du terme). On va maintenant s'intéresser aux opérateurs tels que $R(I + \lambda A) = H$.

Définition 2.4. *Un opérateur est dit maximal monotone s'il est maximal dans l'ensemble des opérateurs monotones. La maximalité étant comprise au sens de l'inclusion des graphes.*

On a alors la caractérisation suivante :

Proposition 2.5. *Soit A un opérateur de H les assertions suivantes sont équivalentes :*

- A est maximal monotone.
- A est monotone et $R(I + \lambda A) = H$ pour tout $\lambda > 0$.
- Pour tout $\lambda > 0$ $(I + \lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur H tout entier.

En utilisant le lemme de Zorn, on voit que

Corollaire 2.6. *Pour tout A opérateur monotone il existe un prolongement \tilde{A} maximal monotone dont le domaine est contenu dans $\text{conv}D(A)$.*

Énonçons maintenant un résultat important pour nous :

Proposition 2.7. *Soit φ une fonction convexe propre sci sur H alors $\partial\varphi$ est maximal monotone.*

Démonstration. Soit $y \in H$ fixé. Soit alors $\psi(x) = \varphi(x) + \frac{1}{2}|x - y|^2$. La fonction ψ est convexe sci et tend vers $+\infty$ quand $|x|$ tend vers l'infini. Elle atteint donc son minimum en $x_0 \in H$. Grâce au lemme suivant on conclue que $y \in x_0 + \partial\varphi(x_0)$. La démonstration de ce lemme découle de la définition du sous-gradient.

Lemme 2.8. *Soit φ une fonction convexe propre sur H et $\alpha \geq 0$. Alors la fonction $\psi(x) = \varphi(x) + \frac{\alpha}{2}|x - y|^2$ atteint son minimum en x_0 si et seulement si $\alpha(y - x_0) \in \partial\varphi(x_0)$.*

□

Pour les opérateurs linéaires univoques, la théorie des opérateurs maximaux monotones est beaucoup plus classique (voir le chapitre VII du livre de Brézis [11]). La proposition suivante montre que pour ces opérateurs, les deux notions coïncident.

Proposition 2.9. *Soit A un opérateur linéaire univoque, A est maximal monotone si et seulement si $D(A)$ est dense dans H et si A est maximal dans l'ensemble des opérateurs univoques linéaires monotones.*

Avant d'énoncer le théorème principal de cette partie, à savoir l'existence de solutions pour l'équation $-\frac{du}{dt} \in A(u(t))$ donnons encore une définition.

Définition 2.10. Soit A un opérateur maximal monotone. Pour $x \in D(A)$ on note $A^\circ(x)$ la projection de 0 sur $A(x)$ (cette projection existe bien car Ax est un convexe fermé, voir Brézis [12] p. 20).

Théorème 2.11. Pour tout $u_0 \in D(A)$, il existe une fonction $u(t)$ de $[0, +\infty[$ dans H unique telle que

- $u(t) \in D(A)$ pour tout $t > 0$
- $u(t)$ est lipschitzienne sur $[0, +\infty[$, i.e $\frac{du}{dt} \in L^\infty(0, +\infty; H)$ (au sens des distributions) et

$$\left| \frac{du}{dt} \right|_{L^\infty(0, +\infty; H)} \leq |A^\circ(u_0)|$$

- $-\frac{du}{dt} \in A(u(t))$ pour presque tout t
- $u(0) = u_0$
- u admet en tout $t \in [0, +\infty[$ une dérivée à droite et $-\frac{d^+u}{dt} \in A^\circ(u(t))$
- la fonction $t \rightarrow A^\circ(u(t))$ est continue à droite et la fonction $t \rightarrow |A^\circ(u(t))|$ est décroissante
- si u et \hat{u} désignent deux solutions alors $|u(t) - \hat{u}(t)| \leq |u(0) - \hat{u}(0)|$

La démonstration de ce théorème suit les mêmes lignes que celles de la démonstration du théorème d'Hille-Yosida dans la cas linéaire univoque. L'idée est d'introduire une version régularisée (univoque et lipschitzienne) de l'opérateur A et de lui appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz pour obtenir des solutions approchées. On montre ensuite à l'aide d'estimations a priori, que les solutions approchées forment une suite de Cauchy. Elles convergent donc vers une solution du problème initial. Le lecteur intéressé pourra trouver les détails de cette démonstration à la page 55 du livre de Brézis [12].

Introduisons tout de même la résolvante et l'approximation Yosida de A .

Définition 2.12. Pour A un opérateur maximal monotone et $\lambda > 0$, on désigne par $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ la résolvante de A . On appelle approximation Yosida de A la fonction $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$.

Proposition 2.13. A_λ est lipschitzienne de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Comme dans le cas linéaire il existe une formule exponentielle qui montre la convergence du schéma d'Euler implicite.

Proposition 2.14. *Soit A un opérateur maximal monotone et $u_0 \in D(A)$ alors $(I + \frac{t}{n}A)^{-n}u_0$ converge vers la solution $u(t)$ de $-\frac{du}{dt} \in A(u(t))$ avec $u(0) = u_0$, lorsque n tend vers l'infini. Plus précisément on a :*

$$|(I + \frac{t}{n}A)^{-n}u_0 - u(t)| \leq \frac{2t}{\sqrt{n}}|A^\circ(u_0)|$$

Introduisons enfin la notion d'opérateur fortement monotone.

Définition 2.15. *Un opérateur A est dit fortement monotone s'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$\forall x_1, x_2 \in D(A), \quad (A(x_1) - A(x_2), x_1 - x_2) \geq \alpha|x_1 - x_2|^2$$

Ces opérateurs jouissent de bonnes propriétés de convergence asymptotique.

Proposition 2.16. *Soit A un opérateur maximal fortement monotone tel que 0 soit dans l'image de A . Soit alors u_∞ l'élément de H pour lequel $0 \in Au_\infty$. Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ la solution de l'équation $-\frac{du}{dt} \in Au(t)$ avec $u(0) = u_0$ converge vers u_∞ . De plus on a les estimations*

$$\begin{aligned} |u(t) - u_\infty| &\leq |u(0) - u_\infty| \exp(-\alpha t) \\ \left| \frac{d^+u}{dt} \right| &\leq |A^\circ u(0)| \exp(-\alpha t) \end{aligned}$$

Démonstration. Nous reprenons en la simplifiant la démonstration de Brézis. Cette simplification vient de l'absence de second membre dans les équations que nous étudions.

L'unicité de u_∞ se montre assez aisément en partant de la définition d'opérateur fortement monotone.

On a $0 \in \frac{du_\infty}{dt} + Au_\infty$ donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u(t) - u_\infty|^2 &= \left(\frac{du}{dt} - \frac{du_\infty}{dt}, u - u_\infty \right) \\ &= -(Au - Au_\infty, u - u_\infty) \\ &\leq -\alpha |u - u_\infty|^2 \end{aligned}$$

Posons $f(t) = |u(t) - u_\infty|^2$. La fonction f est décroissante et positive donc si $f(t_0) = 0$, f est nulle pour tout $t \geq t_0$. On peut alors supposer que f ne s'annule jamais. Ceci étant, on a

$$f'(t) \leq -2\alpha f(t) \quad \text{donc}$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} \leq -2\alpha \quad \text{d'où en intégrant entre 0 et } t,$$

$$\ln(f(t)) - \ln(f(0)) \leq -2\alpha t \quad \text{ce qui donne en prenant l'exponentielle}$$

$$f(t) \leq f(0) \exp(-2\alpha t)$$

Ceci prouve la première estimation. La seconde s'obtient de même en posant $v(t) = u(t+h)$ et en estimant $|v(t) - u(t)|$ puis en faisant tendre h vers 0. \square

Remarque 2.17.

- *N'oublions pas que la solution u n'est pas dérivable en tout point. Les calculs faits dans la preuve sont cependant justifiés car u est absolument continue (car lipschitzienne). Les égalités et inégalités ne sont donc vraies que presque partout.*
- *L'hypothèse $u_\infty \in R(A)$ est peut être superflue car il est possible que tout opérateur fortement monotone soit surjectif. Je n'ai cependant pas trouvé de preuve de ce résultat. On peut douter qu'une telle preuve existe sachant que dans [13] Brézis ajoute une hypothèse d'hémicontinuité sur A .*

2.1.1 L'exemple de l'équation de la chaleur

Pour illustrer cette théorie, voyons comment elle s'applique à l'énergie de Dirichlet $\int_{\Omega} |\nabla u|^2$. La théorie des opérateurs maximaux monotones nous donnera alors un théorème d'existence de solutions pour l'équation de la chaleur. L'intérêt de cet exemple est qu'il contient déjà tous les ingrédients que nous allons utiliser par la suite dans l'étude des points selles. Les flots de gradients et en particulier l'équation de la chaleur servent pour ainsi dire de cas modèle.

On pourra retrouver ce développement au chapitre 9 du très beau livre d'Evans [23].

Soit la fonctionnelle

$$I(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 & \text{si } u \in H_0^1(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème 2.18.

- I est convexe propre sci dans $L^2(\Omega)$.
- $D(\partial I) = H^2 \cap H_0^1$
- $\partial I(u) = -\Delta u$

Démonstration. La semi-continuité inférieure de I est classique (voir par exemple Evans [23] p. 446 pour une démonstration dans le cas général des fonctionnelles ellitiques). La démonstration utilise en particulier le fait que H_0^1 est un convexe fermé fort dans H^1 ce qui en fait un fermé faible. Ceci garantit que les minimiseurs vérifient bien les conditions aux limites.

Soit A l'opérateur défini par, $D(A) = H^2 \cap H_0^1$ et $A(u) = -\Delta u$. Montrons que $A = \partial I$.

Il est assez facile de voir que $A \subset I$. Montrons maintenant que A est maximal, ce qui permettra de conclure.

Soit $f \in L^2$. En minimisant sur H_0^1 , la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{u^2}{2} - fu \, dx$$

On trouve u solution faible de

$$u - \Delta u = f$$

Mais par la théorie sur la régularité des solutions de l'équation de Poisson, $u \in H^2$ (voir Evans [23] p. 459 ou Brézis [11] p. 181). Donc $u \in D(A)$ et $u + A(u) = f$. Ce qui veut dire que $R(I + A) = L^2$ ou encore que A est maximal. On a donc bien montré que $A = \partial I$. \square

En d'autres termes nous venons de démontrer le théorème,

Théorème 2.19. *Le flot de gradient associé à l'énergie de Dirichlet est l'équation de la chaleur. Celle-ci possède donc une solution.*

Remarque 2.20.

- Dans son livre [11] Brézis applique directement la théorie de Hille-Yosida pour résoudre l'équation de la chaleur.
- Une autre illustration de cette méthode pour les flots de gradients pourra être trouvée dans le livre d'Andreu-Vaillio, Caselles et Mazòn [5]. Ils s'y

intéressent au même problème que nous à savoir minimiser la fonctionnelle $\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} |Du| + G(u)$. Ils étudient alors le flot de gradient associé à \mathcal{F} dans L^2 . Notre étude suit la même philosophie que la leur.

- Comme le fait remarquer Villani dans son livre [37] p. 252 de nombreuses EDP peuvent être vues comme des flots de gradients pour des fonctionnelles bien choisies.

2.2 Application à la recherche de points selles

Voyons maintenant comment la théorie développée ci-dessus s'applique pour la recherche de points selles. Comme indiqué précédemment, nous suivons ici la présentation faite dans l'article de Rockafellar [33]. Commençons par quelques définitions.

Définition 2.21. Soit $X = Y \oplus Z$ où Y et Z sont deux espaces de Hilbert. Une fonction selle propre sur X est une fonction K telle que :

- pour tout $z \in Z$, la fonction $K(\cdot, z)$ est convexe
- pour tout $y \in Y$, la fonction $K(y, \cdot)$ est concave
- il existe $x = (y, z)$ tel que $K(y, z') < +\infty$ pour tout $z' \in Z$ et $K(y', z) < -\infty$ pour tout $y' \in Y$. L'ensemble des points x qui vérifient cela est appelé le domaine effectif de K et sera noté $\text{dom}K$.

Donnons maintenant la définition de point selle.

Définition 2.22. Un point $(y, z) \in X$ sera appelé point selle de K si

$$K(y, z') \leq K(y, z) \leq K(y', z) \quad \forall y' \in Y, \forall z' \in Z$$

La démonstration de la proposition suivante est facile et pourra être trouvée dans le livre de Rockafellar [32] p. 380.

Proposition 2.23. Un point (y, z) est un point selle d'une fonction selle si et seulement si

$$K(y, z) = \sup_{z' \in Z} \inf_{y' \in Y} K(y', z') = \inf_{y' \in Y} \sup_{z' \in Z} K(y', z')$$

Le théorème suivant affirme que la méthode d'Arrow-Hurwicz fournit toujours un opérateur monotone.

Théorème 2.24. Soit K une fonction selle propre. Pour $x = (y, z)$, soit

$$T(x) = \left\{ (y^*, z^*) \in Y^* \oplus Z^* / \begin{array}{l} y^* \text{ est un sous-gradient de } K(\cdot, z) \text{ en } y \\ z^* \text{ est un sous gradient de } -K(y, \cdot) \text{ en } z \end{array} \right\}$$

Alors T est un opérateur monotone avec $D(T) \subset \text{dom}K$.

Démonstration. Soient $(y_1^*, z_1^*) \in T(y_1, z_1)$ et $(y_2^*, z_2^*) \in T(y_2, z_2)$. Par définition,

$$K(y, z_1) \geq K(y_1, z_1) + (y - y_1, y_1^*) \quad \forall y \in Y \quad (8)$$

$$-K(y_1, z) \geq K(y_1, z_1) + (z - z_1, z_1^*) \quad \forall z \in Z \quad (9)$$

$$K(y, z_2) \geq K(y_2, z_2) + (y - y_2, y_2^*) \quad \forall y \in Y \quad (10)$$

$$-K(y_2, z) \geq K(y_2, z_2) + (z - z_2, z_2^*) \quad \forall z \in Z \quad (11)$$

Comme en particulier (y, z) pourrait être un point de $\text{dom}K$, on a par (8) $K(y_1, z_1) < +\infty$ et par (9), $-K(y_1, z_1) < +\infty$ donc $K(y_1, z_1)$ est fini et toujours par (8) et (9), $(y_1, z_1) \in \text{dom}K$. De même $K(y_2, z_2)$ est fini. En prenant $y = y_2$ dans (8), $z = z_2$ dans (9), $y = y_1$ dans (10) et enfin $z = z_1$ dans (11) et en sommant les inégalités, on obtient :

$$(y_1 - y_2, y_1^* - y_2^*) + (z_1 - z_2, z_1^* - z_2^*) \geq 0$$

Donc T est monotone. \square

La proposition suivante permet de caractériser les points selles à l'aide de l'opérateur T .

Proposition 2.25. *Soit K une fonction selle propre alors x est point selle de K si et seulement si $0 \in T(x)$.*

Démonstration. Il suffit d'écrire la définition de T . \square

Remarque 2.26. *Cette propriété est l'analogue pour les fonctions selle du fait que x minimise une fonction convexe propre φ si et seulement si $0 \in \partial\varphi(x)$.*

Le théorème suivant montre que pour les fonctions K assez régulières l'opérateur T associé est maximal.

Théorème 2.27. *Soit K une fonction selle propre sur X . Supposons que K soit semi-continue inférieurement en y et semi-continue supérieurement en z alors l'opérateur T est maximal monotone.*

Démonstration. L'idée est de se ramener au théorème équivalent pour les fonctions convexes. Pour cela on va "inverser" l'opérateur T par rapport à la deuxième variable. Posons

$$H(y, z^*) = \sup_z z^* \cdot z + K(y, z)$$

On a alors le lemme fondamental suivant :

Lemme 2.28. H est une fonction convexe semi-continue inférieurement sur X et

$$(y^*, z^*) \in T(y, z) \Leftrightarrow (y^*, z) \in \partial H(y, z^*)$$

Démonstration. Le caractère convexe et sci est clair. Il reste donc à prouver l'équivalence.

Montrons d'abord un autre lemme :

Lemme 2.29. Si $G(y^*, z) = \sup_y y^* \cdot y - K(y, z)$ alors G est convexe et

$$(y^*, z^*) \in T(y, z) \Leftrightarrow (y, z^*) \in \partial G(y^*, z)$$

Démonstration. Pour cela nous suivons la démonstration faite dans [32] p. 395 en simplifiant les notations.

1. Si $(y, z^*) \in \partial G(y^*, z)$, alors

$$G(y^*, z) + G^*(y, z^*) = y^* \cdot y + z^* \cdot z \quad (12)$$

La fonction $K_z(y) = K(y, z)$ est convexe sci en y , donc $K_z^{**} = K_z$.
Mais comme $K_z^*(y^*) = G(y^*, z)$,

$$y^* \cdot y - G(y^*, z) \leq K(y, z) \quad (13)$$

D'autre part la fonction $g_y(z) = -K(y, z)$ est convexe sci donc $g_y^{**} = g_y$
d'où

$$g_y(z) \geq -g_y^*(z^*) + z \cdot z^* \quad (14)$$

Calculons maintenant $g_y^*(z^*)$.

$$\begin{aligned} g_y^*(z^*) &= \sup_z z^* \cdot z + K(y, z) \\ &= \sup_{z, y^*} z^* \cdot z + y \cdot y^* - G(y^*, z) \\ &= G^*(y, z^*) \end{aligned}$$

On déduit donc des inégalités (13) et (14),

$$y^* \cdot y - G(y^*, z) \leq K(y, z) \leq G^*(y, z^*) - z \cdot z^*$$

Donc

$$y^* \cdot y + z \cdot z^* \leq G(y^*, z) + G^*(y, z^*)$$

Mais comme on l'a remarqué en (12), il y a égalité ce qui implique que toutes les inégalités étaient des égalités et on a finalement

$$\begin{aligned} y^* &\in \partial(K(\cdot, z))(y) && \text{et} \\ z^* &\in \partial(-K(y, \cdot))(z) \end{aligned}$$

Ce qui veut dire que $(y^*, z^*) \in T(y, z)$.

2. Si maintenant $(y^*, z^*) \in T(y, z)$, en reprenant les notations précédentes, on a

$$\begin{aligned} y^* \cdot y &= K_z(y) + K_z^*(y^*) && \text{et} \\ z^* \cdot z &= g_y(z) + g_y^*(z^*) \end{aligned}$$

Donc en sommant ces deux égalités et en se rappelant les calculs faits plus haut, on obtient

$$y^* \cdot y + z^* \cdot z = G(y^*, z) + G^*(y, z^*)$$

Ceci équivaut à $(y, z^*) \in \partial G(y^*, z)$.

□

Posons maintenant $K' = -K$. La fonction K' est concave dans la première variable et convexe dans la deuxième. Si on note T' l'opérateur,

$$T'(x) = \left\{ (y^*, z^*) \in Y^* \oplus Z^* / \begin{array}{l} y^* \text{ est un sous-gradient de } -K(\cdot, z) \text{ en } y \\ z^* \text{ est un sous gradient de } K(y, \cdot) \text{ en } z \end{array} \right\}$$

Alors $T' = T$ et on a

$$\begin{aligned} H(y, z^*) &= \sup_z z^* \cdot z + K(y, z) \\ &= \sup_z z^* \cdot z - K'(y, z) \end{aligned}$$

Donc par le lemme 2.29 appliqué à K' on trouve bien que

$$(y^*, z^*) \in T(y, z) \Leftrightarrow (y^*, z) \in \partial H(y, z^*)$$

□

Montrons enfin que T est maximal.

Soit T' monotone avec $T \subset T'$. Notons $\partial H'$, l'opérateur défini par

$$\partial H'(y, z^*) = \{(y^*, z) / (y^*, z^*) \in T'(y, z)\}$$

Alors $\partial H'$ est monotone et $\partial H \subset \partial H'$ donc $\partial H' = \partial H$ (rappelons que ∂H est maximal montone). Mais si

$$\begin{aligned} (y^*, z^*) \in T'(y, z) \setminus T(y, z) & \quad \text{alors} \\ (y^*, z) \in \partial H'(y, z^*) \setminus \partial H(y, z^*) \end{aligned}$$

Ce qui est impossible donc $T' = T$ et T est maximal. □

Remarque 2.30. *On verra par la suite que si ce théorème ne s'applique pas tel quel aux problèmes que nous étudions, l'idée de sa démonstration nous servira de guide. En particulier nous utiliserons de façon déterminante la fonction H et le lemme 2.28.*

3 Étude de trois problèmes de points selle liés à la méthode d'Appleton-Talbot

Dans cette dernière partie nous verrons comment la théorie des opérateurs maximaux monotones peut permettre de résoudre notre problème initial. Celui-ci étant difficile, nous commencerons par étudier deux problèmes intermédiaires. Nous mettrons ainsi en place un programme d'étude pour le modèle d'Appleton-Talbot. L'étude complète de celui-ci n'est pas encore achevée mais nous présenterons les résultats déjà obtenus. Chacune des études théoriques sera complétée par une contrepartie numérique.

3.1 Régularisation de Tychonov

3.1.1 Étude théorique

Le problème initial est difficile pour plusieurs raisons. Nombre d'entre elles sont liées au cadre BV . L'espace H^1 étant plus facile à comprendre, nous allons remplacer le terme $\int_{\Omega} |Du|$ par $\int_{\Omega} |\nabla u|^2$. L'énergie de Dirichlet a l'avantage d'être différentiable alors que la variation totale ne l'est pas. De plus, dans H^1 les dérivées faibles sont des fonctions tandis que dans BV ce sont des mesures. Enfin, dans les espaces de Sobolev, les conditions aux bords se traitent facilement. Celles-ci étant conservées par passage à la limite, il n'est pas nécessaire d'"épaissir" l'ensemble $\partial\Omega_D$. Une deuxième simplification est obtenue en modifiant le terme $G(u)$ de sorte qu'il ne prenne plus en compte la contrainte de norme sur u . Nous allons donc nous intéresser ici au problème

$$\min_{u \in H_D^1(\Omega)} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx$$

L'espace $H_D^1(\Omega)$ étant défini comme suit :

Notations 3.1. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et soit $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Pour $\partial\Omega_D \subset \partial\Omega$, on pose

$$H_D^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) / u|_{\partial\Omega_D} = \varphi \right\}$$

Le second terme a été choisi de la forme $G(u) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 dx$ car cela permet de retrouver la régularisation de Tychonov en débruitage d'images

lorsque $\partial\Omega_D = \emptyset$.

On veut donc minimiser la fonctionnelle définie sur $L^2(\Omega)$ par

$$J(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + G(u) & \text{si } u \in H_D^1. \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est classique que ce problème possède bien une solution.

Proposition 3.2. *Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . J est une fonction convexe sci sur L^2 qui atteint son minimum. Celui-ci est caractérisé par l'équation d'Euler-Lagrange*

$$-\Delta u + \lambda(u - f) = 0 \quad u|_{\partial\Omega_D} = \varphi$$

Il s'agit maintenant d'écrire le problème sous forme de min / sup. Donnons tout d'abord une définition.

Définition 3.3. *Soit B un borélien de \mathbb{R}^n . Une application f de $\Omega \times B$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ est appelée une intégrande normale si :*

- pour presque tout $x \in \Omega$, $f(x, \cdot)$ est sci sur B
- il existe une fonction \tilde{f} borélienne telle que $\tilde{f}(x, \cdot) = f(x, \cdot)$ pour presque tout $x \in \Omega$

On a alors le Théorème,

Théorème 3.4. *Soit f une intégrande normale. Soit $1 \leq \alpha \leq +\infty$ et u une fonction de $L^\alpha(\Omega)^m$. Posons alors $F(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x)) dx$. Supposons qu'il existe $u_0 \in (L^\infty)^m$ tel que $F(u_0)$ soit finie. Alors pour tout $u^* \in L^{\alpha'}(\Omega)^m$ ($\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$) on a*

$$F^*(u^*) = \int_{\Omega} f^*(x, u^*(x)) dx$$

Démonstration. Donnons l'idée de la preuve. Les détails se trouvent p. 252 du livre d'Ekeland et Temam [22].

$$F^*(u^*) = \sup_{u \in L^\alpha} \int_{\Omega} u \cdot u^* dx - \int_{\Omega} f(x, u(x)) dx$$

Il s'agit alors d'échanger le sup et l'intégrale. Ceci est fait à l'aide d'un théorème de sélection mesurable (voir Ekeland-Temam [22] p. 220). On a alors

$$\begin{aligned}
F^*(u^*) &= \int_{\Omega} \sup_{u \in \mathbb{R}^m} \{u \cdot u^*(x) - f(x, u)\} dx \\
&= \int_{\Omega} f^*(x, u^*(x)) dx
\end{aligned}$$

□

Posons maintenant pour $v \in L^2(\Omega)^n$, $E(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v|^2$. On voit aisément que la fonction $\frac{|x|^2}{2}$ est une intégrande normale et que E vérifie les hypothèses du Théorème 3.4. De plus E est une fonction convexe sci sur $L^2(\Omega)^n$ donc $E^{**} = E$ et

$$E(v) = \sup_{\xi \in L^2(\Omega)^n} (v, \xi) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\xi|^2 dx$$

Or $J(u) = E(\nabla u) + G(u)$ donc finalement on trouve :

$$J(u) = \sup_{\xi \in L^2(\Omega)^n} (\nabla u, \xi) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\xi|^2 + G(u)$$

On recherche donc un point selle de

$$K(u, \xi) = \begin{cases} (\nabla u, \xi) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\xi|^2 + G(u) & \text{si } u \in H_D^1(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous voyons que si K est bien une fonction selle propre, elle n'est en revanche pas sci en u dans L^2 . Le théorème 2.27 ne s'applique donc pas. L'idée est d'introduire tout de même la fonction H du lemme 2.28. Comme nous le verrons cette fonction est elle, bien semi-continue inférieurement. On pose donc

$$H(u, \xi^*) = \sup_{\xi \in (L^2)^n} (\xi^*, \xi) + K(u, \xi)$$

Si $u \notin H_D^1$, $H(u, \xi^*) = +\infty$ sinon,

$$\begin{aligned}
H(u, \xi^*) &= \sup_{\xi \in (L^2)^n} (\xi^*, \xi) + (\nabla u, \xi) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\xi|^2 dx + G(u) \\
&= G(u) + \sup_{\xi \in (L^2)^n} (\xi^* + \nabla u, \xi) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\xi|^2 dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u + \xi^*|^2 dx + G(u)
\end{aligned}$$

Proposition 3.5. H est une fonction convexe sci sur $L^2 \times (L^2)^n$.

Démonstration. Soit (u_n, ξ_n^*) qui converge dans $L^2 \times (L^2)^n$ vers (u, ξ^*) . Quitte à extraire on peut supposer que $H(u_n, \xi_n^*)$ tend vers $\underline{\lim} H(u_n, \xi_n^*)$. Il existe donc une constante C telle que

$$H(u_n, \xi_n^*) \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Par convergence de u_n vers u dans L^2 on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G(u_n) = G(u)$$

De plus,

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n + \xi_n^*|^2 \leq C$$

La suite ξ_n^* étant bornée dans $(L^2)^n$, ∇u_n l'est aussi. On peut donc en extraire une sous-suite $\nabla u_{\psi(n)}$ qui converge faiblement vers $v \in (L^2)^n$. On a alors $u \in H^1$ et $v = \nabla u$. Ceci montre que $u_{\psi(n)}$ converge faiblement dans H^1 vers u . Comme nous l'avons remarqué plus haut, les conditions aux limites ne sont pas perdues par convergence faible dans H^1 donc $u \in H_D^1(\Omega)$. Enfin, par semi-continuité de la norme dans $(L^2)^n$ on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u + \xi^*|^2 &\leq \underline{\lim} \int_{\Omega} |\nabla u_{\psi(n)} + \xi^*|^2 \\ &= \lim \int_{\Omega} |\nabla u_n + \xi^*|^2 \end{aligned}$$

□

On peut donc définir un opérateur maximal monotone T :

$$T(u, \xi) = \{(u^*, \xi^*) / (u^*, \xi) \in \partial H(u, \xi^*)\}$$

Le domaine de T est inclus dans

$$\{(u, \xi) / u \in H_D^1(\Omega) \text{ et } \xi \in L^2(\Omega)^n\}$$

Il s'agit maintenant de calculer T ainsi que son domaine plus explicitement. Partons de la définition du sous-gradient pour H et écrivons que

$$(u^*, \xi) \in \partial H(u, \xi^*) \Leftrightarrow (u^*, u) + (\xi^*, \xi) = H(u, \xi^*) + H^*(u^*, \xi)$$

Le problème est donc tout d'abord de calculer $\text{dom}(H^*)$ et H^* . Introduisons une notation qui nous sera utile.

Notations 3.6.

- On note $\partial\Omega_N = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_D$.
- $H_N^1(\text{div})$ est l'espace des fonctions de $(L^2)^n$ dont la divergence est dans L^2 et telles que leur trace est nulle sur $\partial\Omega_N$. C'est donc

$$H_N^1(\text{div}) = \{ \xi \in H^1(\text{div}) / \xi \cdot \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega_N \}$$

Pour la définition de l'espace $H^1(\text{div})$ et ses propriétés élémentaires, dont l'existence d'une trace, nous renvoyons le lecteur au livre de Dautray et Lions [21] chapitre IX.

Proposition 3.7. On a $\text{dom}(H^*) = \{ (u^*, \xi) / u^* \in L^2(\Omega) \text{ et } \xi \in H_N^1(\text{div}) \}$ et

$$H^*(u^*, \xi) = G^*(u^* + \text{div}(\xi)) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\xi|^2 dx - \int_{\partial\Omega_N} \varphi \xi \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1}$$

Démonstration. Commençons par calculer le domaine de H^* .

$$H^*(u^*, \xi) = \sup_{u \in H_D^1} \sup_{\xi^* \in (L^2)^n} (u^*, u) + (\xi^*, \xi) - H(u, \xi^*)$$

Donc $(u^*, \xi) \in \text{dom}(H^*)$ implique qu'il existe une constante C telle que pour tout $u \in H_D^1$ et tout $\xi \in (L^2)^n$ on ait

$$\begin{aligned} C &\geq (u^*, u) + (\xi^*, \xi) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u + \xi^*|^2 dx - G(u) \quad \text{donc} \\ C &\geq (u^*, u) - G(u) - (\nabla u, \xi) + (\nabla u + \xi^*, \xi) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u + \xi^*|^2 dx \end{aligned}$$

Donc en posant $\xi' = \nabla u + \xi^*$ et en prenant le sup sur les $\xi' \in (L^2)^n$, on trouve d'une part que $\xi \in (L^2)^n$ (cette étape ne nous a rien appris ici mais on verra plus tard son importance). D'autre part on voit que

$$(u^*, u) - G(u) - (\nabla u, \xi) \leq C \quad \forall u \in H_D^1$$

Comme H_D^1 n'est pas un espace vectoriel, on ne peut pas en déduire directement que $\text{div}(\xi) \in L^2$.

Soit u_0 une fonction de H_D^1 . Tout $u \in H_D^1$ s'écrit alors sous la forme $u = u_0 + \psi$ où ψ est une fonction de H^1 dont la trace est nulle sur $\partial\Omega_D$. On a alors en utilisant la forme de G ,

$$(u^*, \psi) - (\nabla \psi, \xi) \leq C + |\psi|_2^2 \quad \forall \psi \in H^1 \text{ telle que } \psi|_{\partial\Omega_D} = 0$$

Posons $\psi' = \lambda\psi$ avec $\lambda > 0$. On a alors

$$(u^*, \psi) - (\nabla\psi, \xi) \leq \frac{C}{\lambda} + \lambda|\psi|_2^2 \quad \forall \psi \in H^1 \text{ telle que } \psi|_{\partial\Omega_D} = 0$$

En minimisant le membre de droite par rapport à λ on trouve,

$$(u^*, \psi) - (\nabla\psi, \xi) \leq C|\psi|_2 \quad \forall \psi \in H^1 \text{ telle que } \psi|_{\partial\Omega_D} = 0$$

La forme linéaire $\Lambda(\psi) = (u^*, \psi) - (\nabla\psi, \xi)$ se prolonge donc en une forme linéaire continue sur L^2 par densité. Il existe alors $\eta \in L^2$ telle que

$$(u^*, \psi) - (\nabla\psi, \xi) = \int_{\Omega} \eta u \, dx \quad \forall \psi \in H^1 \text{ telle que } \psi|_{\partial\Omega_D} = 0$$

En considérant en particulier les fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$, on voit que $u^* + \operatorname{div}(\xi) = \eta \in L^2$ donc

$$\operatorname{div}(\xi) \in L^2(\Omega)$$

Enfin, si $\psi \in H_D^1$, par la formule de Green dans $H^1(\operatorname{div})$ (voir Dautray-Lions [21] p. 205) on a

$$\int_{\partial\Omega_N} \psi \xi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0 \quad \forall \psi \in L^2(\partial\Omega_N)$$

On trouve donc comme condition $\xi \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega_N$.

Il reste maintenant à calculer H^* .

Soit $(u^*, \xi) \in \operatorname{dom}(H^*)$,

$$\begin{aligned} H^*(u^*, \xi) &= \sup_{u \in H_D^1} \sup_{\xi^* \in (L^2)^n} \{(u^*, u) + (\xi^*, \xi) - H(u, \xi^*)\} \\ &= \sup_{u \in H_D^1} \sup_{\xi^* \in (L^2)^n} \left\{ (u^*, u) + (\xi^*, \xi) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u + \xi^*|^2 \, dx - G(u) \right\} \\ &= \sup_{u \in H_D^1} \{(u^*, u) - G(u) - (\nabla u, \xi)\} + \sup_{\xi' \in (L^2)^n} \left\{ (\xi', \xi) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\xi'|^2 \, dx \right\} \\ &= \sup_{u \in H_D^1} \{(u^* + \operatorname{div}(\xi), u) - G(u)\} - \int_{\partial\Omega_N} \varphi \xi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\xi|^2 \, dx \\ &= G^*(u^* + \operatorname{div}(\xi)) - \int_{\partial\Omega_N} \varphi \xi \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\xi|^2 \, dx \end{aligned}$$

□

On peut maintenant calculer T .

Proposition 3.8. *On a $\text{dom}(T) = \{(u, \xi) / u \in H_D^1 \text{ et } \xi \in H_N^1(\text{div})\}$ et*

$$T(u, \xi) = (-\text{div}(\xi) + \partial G(u), -\nabla u + \xi)$$

De plus T est fortement monotone.

Démonstration. Le calcul du domaine de T est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

Par définition, $(u^*, \xi^*) \in T(u, \xi)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} (u, u^*) + (\xi, \xi^*) &= H(u, \xi^*) + H^*(u^*, \xi) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u + \xi^*|^2 dx + G(u) + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\xi|^2 dx + G^*(u^* + \text{div}(\xi)) - \int_{\partial\Omega_N} \varphi \xi \cdot \nu d\mathcal{H}^{n-1} \end{aligned}$$

La définition des fonctions convexes conjuguées permet de voir que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u + \xi^*|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\xi|^2 &\geq (\nabla u, \xi) + (\xi^*, \xi) \quad \text{et} \\ G(u) + G^*(u^* + \text{div}(\xi)) &\geq (u, u^*) + (u, \text{div}(\xi)) \end{aligned}$$

En sommant et en utilisant la formule de Green on trouve que

$$(u, u^*) + (\xi, \xi^*) \geq (u, u^*) + (\xi, \xi^*)$$

Donc toutes les inégalités sont des égalités. Par définition du sous-différentiel ceci termine le calcul de T .

Le fait que T soit fortement monotone se montre ensuite par un calcul simple. \square

Remarque 3.9.

- *On voit que si on avait restreint K aux $\xi \in H_N^1(\text{div})$ dans sa définition (ce qui ne modifie pas la valeur de l'inf / sup par densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans L^2), T serait alors exactement l'opérateur obtenu par la méthode d'Arrow-Hurwicz.*
- *Le raisonnement précédent se généralise en grande partie à des fonctionnelles du type*

$$\int_{\Omega} f(x, \nabla u) dx + G(u)$$

Sous les hypothèses :

- f est de croissance $\alpha > 1$ i.e. il existe M et N des constantes strictement positives telles que $M(p^\alpha + 1) \geq f(x, p) \geq Np^\alpha$.
 - G est de croissance $\beta \geq 2$ i.e. il existe M' et N' des constantes strictement positives telles que $M'(|u|_{L^\beta}^\beta + 1) \geq G(u) \geq N'|u|_{L^\beta}^\beta$.
- T n'est alors cependant pas fortement monotone.

Pour conclure, montrons que K possède un point selle.

Proposition 3.10. K possède un point selle (u, ξ) . De plus, u est alors solution de l'équation d'Euler-Lagrange associée à J .

Démonstration. Le point (u, ξ) est un point selle de K si et seulement si $(0, 0) \in T(u, \xi)$. Les points selles sont donc les $(u, \xi) \in H_D^1 \times H_N^1(\text{div})$ tels que :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\lambda} \text{div}(\xi) + f \\ \xi = \nabla u \end{cases}$$

Soit

$$\mathbb{K} = \left\{ u \in H^1 / (u - \varphi)|_{\partial\Omega_D} = 0 \right\}$$

\mathbb{K} est un convexe fermé non vide de H^1 donc en utilisant le Théorème de Stampacchia et un raisonnement analogue à celui fait p. 177 du livre de Brézis [11] on trouve qu'il existe un unique $u \in \mathbb{K}$ tel que

$$\frac{1}{\lambda} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \psi + u\psi \, dx = \int_{\Omega} f\psi \, dx \quad \forall \psi \in H^1, \psi|_{\partial\Omega_D} = 0$$

En posant $\xi = \nabla u$, on montre comme à la proposition 3.7 que $\text{div}(\xi) \in L^2$ et que $u = \frac{1}{\lambda} \text{div}(\xi) + f$. En utilisant la formule de Green on voit ensuite que $\xi \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega_N$. \square

En combinant ces résultats, on obtient enfin le Théorème suivant :

Théorème 3.11. Pour tout $(u_0, \xi_0) \in H_D^1 \times H_N^1(\text{div})$ le système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(\xi) - \lambda(u - f) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = \nabla u - \xi \\ (u(0), \xi(0)) = (u_0, \xi_0) \end{cases}$$

Possède une solution $(u(t), \xi(t))$. De plus u converge exponentiellement vite vers la solution du problème

$$\min_{u \in H_D^1} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2 \, dx$$

Remarque 3.12. Dans cet exemple précis, l'opérateur T est en fait univoque et linéaire. On a donc montré qu'il était maximal parmi les opérateurs linéaires. Il faut cependant faire attention au fait que le domaine de T est un espace affine. On peut alors utiliser un théorème de Hille-Yosida pour les équations linéaires non homogènes que l'on pourra par exemple trouver p. 117 du livre de Brézis [11]. Cette deuxième méthode montre que les solutions sont en fait de classe \mathcal{C}^1 .

3.1.2 Implémentation numérique

On a implémenté ici un schéma de différences finies inspiré du schéma proposé par Appleton et Talbot dans [7]. Celui-ci s'écrit donc pour u^n ,

$$u^{n+1}(i, j) = (1 - \lambda \delta t) u^n(i, j) + \delta t \left[\xi_x^n(i + \frac{1}{2}, j) - \xi_x^n(i - \frac{1}{2}, j) + \xi_y^n(i, j + \frac{1}{2}) - \xi_y^n(i, j - \frac{1}{2}) + \lambda f(i, j) \right]$$

Et pour ξ^n ,

$$\begin{aligned} \xi_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j) &= (1 - \delta t) \xi_x^n(i + \frac{1}{2}, j) + \delta t [u^{n+1}(i + 1, j) - u^{n+1}(i, j)] \\ \xi_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}) &= (1 - \delta t) \xi_y^n(i, j + \frac{1}{2}) + \delta t [u^{n+1}(i, j + 1) - u^{n+1}(i, j)] \end{aligned}$$

Pour l'application au débruitage de Tychonov on prend $\partial\Omega_D = \emptyset$. La figure 2 montre le résultat obtenu en partant de l'image de Léna dégradée et en choisissant $\lambda = 0.1$, $\delta t = 0.01$. Comme prévu, le résultat obtenu est une version floue de l'image de départ.

3.2 Le modèle de Rudin-Osher-Fatemi

Étudions maintenant le modèle de Rudin, Osher et Fatemi. Ce modèle est aujourd'hui l'un des plus en vogue pour le débruitage d'images. Le terme de régularisation H^1 du modèle de Tychonov est remplacé par un terme BV . Il s'agit alors de minimiser

$$\min_{u \in BV(\Omega)} \int_{\Omega} |Du| + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u - f)^2$$

L'étude de cette fonctionnelle est une étape de plus vers l'étude du problème initial. On laisse cependant de côté les questions liées aux conditions aux bords.

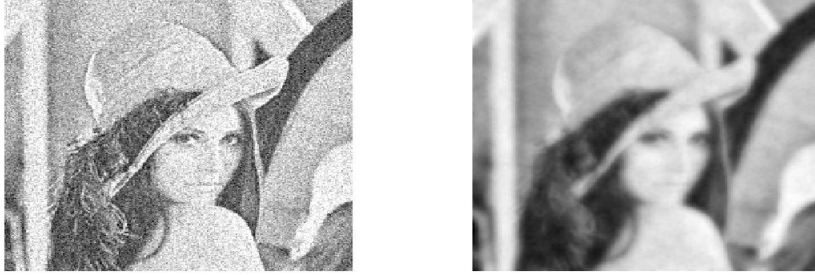


FIG. 2 – Résultat pour le débruitage de Tychonov

3.2.1 Étude théorique

L'idée est de reprendre l'étude faite pour le modèle de Tychonov en modifiant ce qui doit l'être. Posons comme précédemment $G(u) = \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} (u-f)^2$. On étudie alors la fonctionnelle J définie sur L^2 par

$$J(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} |Du| + G(u) & \text{si } u \in BV \cap L^2 \\ +\infty & \text{si } u \in L^2 \setminus BV \end{cases}$$

En reprenant les calculs précédents, on voit que les conditions sur la variable duale ξ seront $\operatorname{div}(\xi) \in L^2$, $\xi \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega$ et $|\xi|_{\infty} \leq 1$. Il sera alors nécessaire de donner un sens à (Du, ξ) pour de tels ξ . Pour cela on utilise les résultats obtenus par Anzellotti dans son article [6].

Introduisons tout d'abord quelques nouvelles notations.

Notations 3.13. On notera $BV^2 = BV \cap L^2$ et X_0^2 l'espace $H_0^1(\operatorname{div}) \cap (L^{\infty})^n$.

Définition 3.14. Soit $(u, \xi) \in BV^2 \times X_0^2$ on définit alors la distribution $[\xi, Du]$ par

$$([\xi, Du], \varphi) = - \int_{\Omega} u \varphi \operatorname{div}(\xi) - \int_{\Omega} u \xi \cdot \nabla \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^{\infty}(\Omega)$$

Théorème 3.15. La distribution $[\xi, Du]$ est une mesure de Radon bornée sur Ω . Si de plus Ω est borné à bord lipschitz, on a la formule de Green,

$$\int_{\Omega} [\xi, Du] = - \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\xi)$$

La proposition suivante montre que pour ξ continue on retombe bien sur la mesure $\xi \cdot Du$.

Proposition 3.16. *Si $\xi \in C_0$ on a alors l'égalité*

$$[\xi, Du] = \xi \cdot Du$$

Le résultat suivant sera important pour la suite. Il exprime le fait que pour notre problème, X_0^2 est le bon espace pour la variable duale ξ .

Proposition 3.17. *Soit Ω un ouvert convexe borné à bords lipschitz de \mathbb{R}^n . Alors pour tout $u \in BV^2(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} |Du| = \sup_{\substack{\xi \in X_0^2 \\ |\xi|_{\infty} \leq 1}} \int_{\Omega} [\xi, Du]$$

Démonstration. Par définition de la variation totale, celle-ci est inférieure ou égale à $\sup_{\substack{\xi \in X_0^2 \\ |\xi|_{\infty} \leq 1}} \int_{\Omega} [\xi, Du]$. Il s'agit donc de montrer l'inégalité inverse.

Soit $\xi \in X_0^2$ avec $|\xi|_{\infty} \leq 1$. Construisons une suite $\xi_n \in C_c^{\infty}(\Omega)$ avec $|\xi_n|_{\infty} \leq 1$ et telle que ξ_n (respectivement $\text{div}(\xi_n)$) tende vers ξ (respectivement vers $\text{div}(\xi)$) dans L^2 . Ceci terminera la démonstration. Quitte à translater Ω , on peut supposer que $0 \in \Omega$.

Supposons dans un premier temps que $\xi \in C_c^{\infty}(\Omega)$. Soit alors $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Posons $\tilde{\xi}_n(x) = \xi(x + \varepsilon_n x)$. Par convexité de Ω , $\tilde{\xi}_n$ est à support compact dans celui-ci. On pose enfin $\xi_n = \rho_n * \tilde{\xi}_n$ où ρ_n est une suite régularisante choisie de sorte que $\text{supp}(\xi_n) \subset\subset \Omega$ (voir Brézis [11] p. 70). On a alors $|\xi_n|_{\infty} \leq 1$ et

$$\begin{aligned} |\xi_n - \xi|_2 &\leq |\tilde{\xi}_n * \rho_n - \xi * \rho_n|_2 + |\xi * \rho_n - \xi|_2 \\ &\leq |\tilde{\xi}_n - \xi|_2 + |\xi * \rho_n - \xi|_2 \end{aligned}$$

Pour la deuxième inégalité, voir le Théorème IV. 15 de Brézis [11] p. 66. De plus, $|\xi * \rho_n - \xi|_2$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (voir [11] p. 71) et

$$\begin{aligned} |\tilde{\xi}_n - \xi|_2^2 &= \int_{\Omega} |\xi((1 + \varepsilon_n)x) - \xi(x)|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\xi'|_{\infty}^2 \varepsilon_n^2 |x|^2 dx \\ &\leq C \varepsilon_n^2 \end{aligned}$$

Donc ξ_n tend vers ξ dans L^2 . De même $\text{div}(\xi_n)$ tend vers $\text{div}(\xi)$. Le cas $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty$ est donc traité.

Soit maintenant $\xi \in X_0^2$ avec $|\xi|_\infty \leq 1$ et soit $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $H_0^1(\text{div})$ (voir Dautray-Lions [21]) il existe une fonction $\xi^1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} |\xi^1 - \xi|_2 &\leq \varepsilon \\ |\text{div}(\xi^1) - \text{div}(\xi)|_2 &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

On prolonge alors ξ par 0 en dehors de Ω , ce qui nous donne une fonction $\xi \in H^1(\text{div})(\mathbb{R}^n)$. On pose alors $\tilde{\xi}_n(x) = \xi((1 + \varepsilon_n)x)$ et $\xi_n = \tilde{\xi}_n * \rho_n$ où l'on a repris les notations du cas précédent. Posons aussi $\tilde{\xi}^1(x) = \xi^1((1 + \varepsilon_n)x)$. On a alors $\xi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, $|\xi_n|_\infty \leq |\xi|_\infty$ et

$$\begin{aligned} |\xi_n - \xi|_2 &= |\rho_n * (\tilde{\xi}_n - \tilde{\xi}^1) + (\rho_n * \tilde{\xi}^1 - \xi^1) + (\xi^1 - \xi)|_2 \\ &\leq |\tilde{\xi}_n - \tilde{\xi}^1|_2 + \varepsilon + |\rho_n * \tilde{\xi}^1 - \xi^1|_2 \end{aligned}$$

En utilisant le cas $\xi \in \mathcal{C}_c^\infty$ pour ξ^1 et le fait que $|\tilde{\xi}_n - \tilde{\xi}^1|_2 \leq |\xi - \xi^1|_2$ on voit que pour n assez grand,

$$|\xi_n - \xi|_2 \leq 3\varepsilon$$

De même on a

$$|\text{div}(\xi_n) - \text{div}(\xi)|_2 \leq 3\varepsilon$$

□

Remarque 3.18.

- Si on demandait à la suite ξ_n d'être seulement à support compact ou seulement de norme infinie plus petite que un, on retomberait sur des résultats connus. En effet, on a d'une part la densité de \mathcal{C}_c^∞ dans $H_0^1(\text{div})$ et d'autre part un résultat d'approximation des fonctions de X_0^2 par des fonctions de $C^\infty(\bar{\Omega})$ avec contrôle sur la norme infinie dans l'article d'Anzellotti [6].
- Ce résultat doit se généraliser à des ouverts qui sont localement des sous-graphes continus au prix de quelques développements techniques. Il s'agit de construire un champ de vecteurs V tel que pour tout $x \in \Omega$, $x + V(x)$ soit inclus dans un compact fixé de Ω . On pourra consulter le mémoire de Jalalzai [28] pour la construction d'un tel champ de vecteurs.

On a alors le théorème

Théorème 3.19. *J est une fonctionnelle convexe sci qui possède un unique minimum. De plus celui-ci est caractérisé par l'équation d'Euler-Lagrange*

$$\begin{cases} \exists \xi \in X_0^2 & |\xi|_\infty \leq 1 \\ \operatorname{div}(\xi) = \lambda(u - f) \\ \int_\Omega [\xi, Du] = \int_\Omega |Du| \end{cases}$$

Démonstration. La première partie du théorème s'obtient de façon classique. Le calcul de l'équation d'Euler-Lagrange pourra être trouvée dans le livre d'Andreu-Vaillio et al. [5]. Nous en donnons ici une preuve plus simple.

Posons $TV(u) = \int_\Omega |Du|$. La fonction J atteint son minimum en u si et seulement si $0 \in \partial TV(u) + \lambda(u - f)$. Il s'agit donc de calculer $\partial TV(u)$. Soit $\mathbb{K} = \{\operatorname{div}(\xi) / \xi \in X_0^2, |\xi|_\infty \leq 1\}$. Alors $TV(u) = I_{\mathbb{K}}^*$ où $I_{\mathbb{K}}$ est l'indicatrice de \mathbb{K} dans L^2 . Montrons que \mathbb{K} est fermé dans L^2 .

Soit $\operatorname{div}(\xi_n)$ convergeant vers η dans L^2 avec $|\xi_n|_\infty \leq 1$. Quitte à extraire on peut supposer que ξ_n converge dans L^2 et presque partout vers $\xi \in L^2$ avec $|\xi|_\infty \leq 1$. On voit alors aisément que $\operatorname{div}(\xi) = \eta$. Par continuité de la trace pour la convergence $H^1(\operatorname{div})$, on a $\xi \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega$. Donc $\operatorname{div}(\xi) \in \mathbb{K}$ qui est fermé.

On a alors

$$\begin{aligned} \partial TV(u) &= \{p / I_{\mathbb{K}}^*(u) + I_{\mathbb{K}}(p) = (p, u)\} \\ &= \{p \in \mathbb{K} / TV(u) = (p, u)\} \\ &= \left\{ -\operatorname{div}(\xi) / \int_\Omega |Du| = \int_\Omega [\xi, Du] \right\} \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. □

Remarque 3.20.

- Soit f une fonction 1 homogène sci convexe on a plus généralement ,

$$\partial f(u) = \{p \in \partial f(0) / (p, u) = f(u)\}$$

- Une étude plus approfondie des propriétés de J pourra être trouvée dans l'article de Chambolle et Lions [19]. Rappelons de plus que dans leur livre, Andreu et al. [5] font l'étude du flot de gradient associé à J . Leur étude est parallèle à la nôtre.

Maintenant que nous avons vu que le problème est bien posé et que nous en avons caractérisé les solutions, passons à l'étude de la méthode de point selle pour le modèle de Rudin-Osher-Fatemi. La proposition 3.17 montre que

$$\min_{u \in L^2} \int_{\Omega} |Du| + G(u) = \min_{u \in L^2} \sup_{\xi \in (L^2)^n} K(u, \xi)$$

Avec

$$K(u, \xi) = \begin{cases} \int_{\Omega} [\xi, Du] - I_{B(0,1)}(\xi) + G(u) & \text{si } (u, \xi) \in BV^2 \times X_0^2 \\ -\infty & \text{si } u \in BV^2, \xi \notin X_0^2 \\ +\infty & \text{si } u \notin BV^2 \end{cases}$$

En reprenant la démonstration de la proposition 3.17, on a pour $u \in BV^2$,

$$\begin{aligned} H(u, \xi^*) &= \sup_{\xi \in (L^2)^n} (\xi^*, \xi) + K(u, \xi) \\ &= G(u) + \int_{\Omega} |\xi^* + Du| \end{aligned}$$

Ici $\int_{\Omega} |\xi^* + Du|$ est la variation totale de la mesure $\xi^* dx + Du$. On voit alors que H est convexe sci dans $L^2 \times (L^2)^n$. On définit l'opérateur maximal monotone T comme dans l'étude du modèle de Tychonov :

$$T(u, \xi) = \{(u^*, \xi^*) / (u^*, \xi) \in \partial H(u, \xi)\}$$

Proposition 3.21. *On a $\text{dom}(H^*) = \{(u^*, \xi) / u^* \in L^2(\Omega) \text{ et } \xi \in X_0^2, |\xi|_{\infty} \leq 1\}$ et*

$$H^*(u^*, \xi) = G^*(u^* + \text{div}(\xi)) + I_{B(0,1)}(\xi)$$

Démonstration. La démonstration suit celle de la proposition 3.7.

Calcul de $\text{dom}(H^*)$.

Si $(u^*, \xi) \in \text{dom}(H^*)$ alors il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(u, \xi^*) \in BV^2 \times (L^2)^n$,

$$(u^*, u) + (\xi^*, \xi) - G(u) - \int_{\Omega} |Du + \xi^*| \leq C$$

En appliquant cela en particulier aux $u \in H^1$ et en montrant que dans $(L^2)^n$, la fonction $I_{B(0,1)}$ est convexe sci avec $I_{B(0,1)}^*(\xi^*) = \int_{\Omega} |\xi^*|$, on voit qu'on doit avoir $I_{B(0,1)}(\xi) < +\infty$ et

$$(u^*, u) - (\nabla u, \xi) \leq C|u|_2 \quad \forall u \in H^1$$

D'où l'on déduit que $\xi \in H^1(\text{div})$ puis que $\xi \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega$.

Calcul de H^* :

Soit $(u^*, \xi) \in L^2 \times X_0^2$.

$$H^*(u^*, \xi) = \sup_{\xi^* \in L^2} \sup_{u \in BV^2} \left\{ (u^*, u) + (\xi^*, \xi) - \int_{\Omega} |Du + \xi^*| - G(u) \right\}$$

Soit $\xi^* \in L^2$ fixé. Alors d'après le lemme 5.2 p. 316 de l'article d'Anzellotti [6], pour tout $u \in BV^2$ il existe une suite $u_n \in C^\infty \cap BV^2$ telle que

$$u_n \xrightarrow{L^2} u \quad \text{et} \\ \int_{\Omega} |Du_n + \xi^*| \rightarrow \int_{\Omega} |Du + \xi^*|$$

On peut donc restreindre le sup aux fonctions u de classe C^∞ . On a alors

$$\begin{aligned} H^*(u^*, \xi) &= \sup_{u \in BV^2 \cap C^\infty} \sup_{\xi^* \in L^2} \left\{ (u^*, u) + (\xi^*, \xi) - \int_{\Omega} |Du + \xi^*| - G(u) \right\} \\ &= I_{B(0,1)}(\xi) + \sup_{u \in BV^2 \cap C^\infty} \left\{ (u^*, u) - (\nabla u, \xi) - G(u) \right\} \\ &= I_{B(0,1)}(\xi) + G^*(u^* + \text{div}(\xi)) \end{aligned}$$

□

On peut maintenant passer au calcul de T .

Proposition 3.22. *Soit $(u, \xi) \in BV^2 \times X_0^2$ alors $(u^*, \xi^*) \in T(u, \xi)$ si et seulement si*

$$\begin{cases} u^* + \text{div}(\xi) = \lambda(u - f) \\ I_{B(0,1)}(\xi) + \int_{\Omega} |\xi^* + Du| = (\xi^*, \xi) + \int_{\Omega} [\xi, Du] \end{cases}$$

De plus si $u \in H^1$ ou si $\xi \in C_0$ la deuxième condition devient

$$\xi^* + Du \in \partial I_{B(0,1)}(\xi)$$

Où le sous-gradient est à comprendre dans le premier cas dans le sens de la dualité L^2 et dans le second pour la dualité $(\mathcal{C}_0, \mathcal{M}_1)$.

Démonstration. La première partie de la preuve s'obtient par les mêmes calculs que pour la régularisation de Tychonov.

1. Si $u \in H^1$, la condition s'écrit

$$\begin{aligned} (\xi^* + \nabla u, \xi) &\geq (\xi^* + \nabla u, v) & \forall v \in X_0^2, |v|_\infty \leq 1 & \text{ donc} \\ (\xi^* + \nabla u, \xi) &\geq (\xi^* + \nabla u, v) & \forall v \in \mathcal{C}_c^\infty, |v|_\infty \leq 1 \end{aligned}$$

Si on regarde la démonstration de la densité de \mathcal{C}_c dans L^2 (voir Rudin [34] p. 68) et celle de la densité de \mathcal{C}_c^∞ dans L^2 (voir Brézis [11] p. 71) on voit que si $v \in L^2$ avec $|v|_\infty \leq 1$, on peut trouver $v_n \in \mathcal{C}_c^\infty$ avec $|v_n|_\infty \leq 1$ qui tend vers v dans L^2 . Donc si $(u^*, \xi^*) \in T(u, \xi)$ on doit avoir

$$(\xi^* + \nabla u, \xi) \geq (\xi^* + \nabla u, v) \quad \forall v \in L^2, |v|_\infty \leq 1$$

Ce qui veut exactement dire que $\xi^* + \nabla u \in \partial I_{B(0,1)}(\xi)$ où le sous-gradient est compris au sens L^2 .

2. Si maintenant $\xi \in \mathcal{C}_0$

D'après la proposition 3.16,

$$\int_{\Omega} [\xi, Du] = \int_{\Omega} \xi \cdot Du$$

Donc si $(u^*, \xi^*) \in T(u, \xi)$ on doit avoir

$$I_{B(0,1)}(\xi) + \int_{\Omega} |Du + \xi^*| = (\xi, \xi^* + Du)_{(\mathcal{C}_0, \mathcal{M}_1)}$$

Or l'indicatrice de la boule unité de \mathcal{C}_0 est la fonction conjuguée de la variation totale pour la dualité $(\mathcal{C}_0, \mathcal{M}_1)$ donc cette condition est bien

$$\xi^* + Du \in \partial I_{B(0,1)}(\xi)$$

□

Ceci montre de plus que K possède un point selle. En effet, (u, ξ) est un point selle de K si et seulement si il vérifie le système d'Euler-Lagrange pour J calculé au Théorème 3.19.

Proposition 3.23. *K possède des points selles (u, ξ) . Tous les points selles ont pour u le minimiseur de J .*

Théorème 3.24. *Soit $(u_0, \xi_0) \in BV^2 \times X_0^2$ avec $|\xi_0|_\infty \leq 1$. L'équation*

$$-\left(\frac{du}{dt}, \frac{d\xi}{dt}\right) \in T(u, \xi)$$

possède une unique solution. De plus si u_∞ est le minimiseur de J , $|u(t) - u_\infty|_2$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini.

Démonstration. La seule chose qu'il reste à démontrer est que $|u(t) - u_\infty|_2$ tend vers 0.

Soit (u_∞, ξ_∞) tel que $0 \in T(u_\infty, \xi_\infty)$. Posons $f(t) = |u(t) - u_\infty|_2^2$ et $g(t) = |\xi(t) - \xi_\infty|_2^2$. Un calcul simple montre que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(f + g) \leq -Cf$$

Comme u et ξ sont lipschitziennes en t et bornées (par décroissance de $f + g$), f et g sont lipschitziennes. Soit L la constante de lipschitz de f . Posons enfin $h = f + g$.

S'il existait $\alpha > 0$ tel que $f \geq \alpha$ pour tout t , on aurait $h' \leq -C\alpha$ et donc h tendrait vers $-\infty$ ce qui est impossible car h est positive. Donc

$$\forall \alpha > 0 \forall T > 0 \exists t \geq T \quad f(t) \leq \alpha$$

Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $T \geq 0$ il existe $t \geq T$ avec $f(t) \geq \varepsilon$.

La fonction f étant continue, il existe une suite t_n tendant vers l'infini et telle que

$$f(t_{2n}) = \frac{\varepsilon}{2} \quad f(t_{2n+1}) = \varepsilon$$

De plus sur $[t_{2n-1}, t_{2n}]$, on a $f(t) \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Comme f est lipschitzienne de constante L on a

$$\begin{aligned} |f(t_{2n}) - f(t_{2n-1})| &\leq L(t_{2n} - t_{2n-1}) \quad \text{donc} \\ \frac{\varepsilon}{2L} &\leq t_{2n} - t_{2n-1} \end{aligned}$$

D'où finalement,

$$\begin{aligned}
h(t_{2n+2}) &= h(t_{2n+1}) + \int_{t_{2n+1}}^{t_{2n+2}} h'(t) dt \\
&\leq h(t_{2n+1}) - \varepsilon C(t_{2n+2} - t_{2n+1}) \\
&\leq h(t_{2n}) - \frac{C\varepsilon^2}{2L}
\end{aligned}$$

Donc f tend vers 0. □

3.2.2 Implémentation numérique

On reprend ici un schéma inspiré de celui qui a été proposé par Appleton et Talbot dans [7]. La variable u est traitée exactement comme dans la régularisation de Tychonov. La difficulté est ici de traiter la contrainte de norme sur ξ . On utilise alors comme schéma numérique pour ξ ,

$$\begin{aligned}
\xi_x^{m+1}(i + \frac{1}{2}, j) &= \xi_x^n(i + \frac{1}{2}, j) + \delta t [u^{n+1}(i + 1, j) - u^{n+1}(i, j)] \\
\xi_y^{m+1}(i, j + \frac{1}{2}) &= \xi_y^n(i, j + \frac{1}{2}) + \delta t [u^{n+1}(i, j + 1) - u^{n+1}(i, j)]
\end{aligned}$$

On applique ensuite la contrainte sur la norme. Soit tout d'abord

$$\begin{aligned}
|\xi_x^{n+1}(i, j)|' &= \max(-\xi_x^{m+1}(i - \frac{1}{2}, j), 0, \xi_x^{m+1}(i + \frac{1}{2}, j)) \\
|\xi_y^{n+1}(i, j)|' &= \max(-\xi_y^{m+1}(i, j - \frac{1}{2}), 0, \xi_y^{m+1}(i, j + \frac{1}{2}))
\end{aligned}$$

On pose alors

$$v^{n+1}(i, j) = \max(\sqrt{(|\xi_x^{n+1}(i, j)|')^2 + (|\xi_y^{n+1}(i, j)|')^2}, 1)$$

Puis

$$|\xi_x^{n+1}(i, j)| = \frac{|\xi_x^{n+1}(i, j)|'}{v^{n+1}(i, j)} \quad |\xi_y^{n+1}(i, j)| = \frac{|\xi_y^{n+1}(i, j)|'}{v^{n+1}(i, j)}$$

Enfin on a

$$\begin{aligned}
\xi_x^n(i - \frac{1}{2}, j) &= \max(\xi_x^{m+1}(i - \frac{1}{2}, j), -|\xi_x^{n+1}(i, j)|) \\
\xi_x^n(i + \frac{1}{2}, j) &= \min(\xi_x^{m+1}(i + \frac{1}{2}, j), |\xi_x^{n+1}(i, j)|) \\
\xi_y^n(i, j - \frac{1}{2}) &= \max(\xi_y^{m+1}(i, j - \frac{1}{2}), -|\xi_y^{n+1}(i, j)|) \\
\xi_y^n(i, j + \frac{1}{2}) &= \min(\xi_y^{m+1}(i, j + \frac{1}{2}), |\xi_y^{n+1}(i, j)|)
\end{aligned}$$



FIG. 3 – Résultat pour le débruitage de ROF

La figure 3 montre, à gauche le résultat obtenu par cette méthode et à droite celui obtenu par l’algorithme d’Antonin Chambolle (voir l’article [17]). Nous avons utilisé pour celui-ci une implémentation due à Gabriel Peyré que l’on pourra retrouver sur sa page internet. On voit, notamment au niveau du chapeau de Léna ou de son épaule que notre méthode permet de bien reconstruire les bords. Toutefois, on peut remarquer (en particulier dans les zones de texture) que des artefacts liés à la saturation de ξ apparaissent. Ces artefacts ont pour effets de modifier le contraste de l’image mais aussi de dégrader la qualité de l’image reconstruite. Une meilleure compréhension de l’algorithme et du traitement des contraintes en particulier, permettrait sûrement de corriger ces défauts.

3.3 Le modèle d’Appleton et Talbot

Nous revenons ici au problème original. Son étude complète est loin d’être achevée. Nous donnerons les premiers résultats obtenus ainsi que quelques-unes des pistes qui nous restent à explorer. Nous terminerons ce mémoire par une discussion de la partie numérique de cette méthode.

3.3.1 Étude théorique

Nous allons comme dans les deux exemples précédents, rester dans le cadre L^2 pour appliquer la théorie des opérateurs maximaux monotones. Le problème est donc de minimiser

$$\min_{BV_D(\Omega') \cap L^2} \int_{\Omega'} |Du| + G(u)$$

Où

$$G(u) = \begin{cases} - \int_{\Omega'} f u \, dx & \text{si } |u|_{\infty} \leq 1 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notations 3.25. On note $BV_D^2 = BV_D(\Omega') \cap L^2$.

Pour $u \in BV_D^2$ et $\xi^* \in (L^2)^n$ on pose

$$H(u, \xi^*) = \int_{\Omega'} |Du + \xi^*| + G(u)$$

Proposition 3.26. H est convexe sci sur $L^2(\Omega') \times L^2(\Omega')^n$. De plus, $\text{dom}(H^*) \subset L^2 \times \{\xi / |\xi|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \text{ et } \text{div}(\xi) \in \mathcal{M}_1(\Omega)\}$.

Démonstration. La semi-continuité inférieure de H vient du fait que l'ensemble

$\{u|_{\text{SUT}} = \varphi, |u|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1\}$ est un fermé de $L^2(\Omega')^n$.

Soit $(u^*, \xi) \in \text{dom}(H^*)$.

Pour tout $u \in H^1(\Omega)$ avec $|u|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$, la fonction prolongée par φ à Ω' est dans BV_D^2 . On a donc que pour tout $u \in H^1(\Omega)$ avec $|u|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ et tout $\xi^* \in L^2(\Omega')^n$,

$$\int_{\Omega} \xi^* \cdot \xi + \int_{\Omega} u^* \cdot u - \int_{\Omega} |\nabla u + \xi^*| - \int_{\text{SUT}} |0 + \xi^*| - \int_{\partial\Omega_D} |u - \varphi| - \int_{\Omega} f u \leq C$$

On en déduit que $|\xi|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$ et que pour tout $u \in H^1(\Omega)$ avec $|u|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1$,

$$\int_{\Omega} (u^* - f)u - \int_{\Omega} \xi \cdot \nabla u - \int_{\partial\Omega_D} |u - \varphi| \leq C$$

En se restreignant aux $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ tels que $u|_{\partial\Omega_D} = 0$ et en regardant les λu pour $\lambda > 0$ on trouve enfin que

$$\int_{\Omega} (u^* - f)u - \int_{\Omega} \xi \cdot \nabla u \leq C|u|_{\infty} \quad \forall u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \quad u|_{\partial\Omega_D} = 0$$

La forme linéaire $\Lambda(u) = \int_{\Omega} (u^* - f)u - \int_{\Omega} \xi \cdot \nabla u$ peut donc se prolonger par Hahn-Banach à $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. Le théorème de Riesz montre alors l'existence d'une mesure de Radon bornée μ sur $\overline{\Omega}$ telle que

$$\Lambda(u) = \int_{\overline{\Omega}} u \, d\mu$$

En appliquant cette égalité aux fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$ on voit que

$$\mu \llcorner \Omega = u^* - f + \operatorname{div}(\xi)$$

Donc $\operatorname{div}(\xi) \in \mathcal{M}_1(\Omega)$. □

Remarque 3.27. *On voit que la fin de la preuve montre que*

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div}(\xi) + \int_{\partial\Omega_N} u d\mu = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \xi \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega}), u|_{\partial\Omega_D} = 0$$

Il faudrait maintenant en déduire que $\xi \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega_N$.

Pour poursuivre l'étude il va falloir donner un sens à $\xi \cdot \nu = 0$ sur $\partial\Omega_N$ pour des fonctions ξ dont on sait seulement que leur divergence est une mesure bornée. Pour cela on pourra s'inspirer de ce que fait Temam dans son livre [36] p. 234. Il faudra ensuite donner un sens à (ξ, Du) . Ceci devrait permettre de finir de calculer $\operatorname{dom}(H^*)$ ainsi que H^* .

Remarque 3.28.

- *On peut penser à généraliser notre approche à des fonctionnelles du type*

$$\int_{\Omega} F(x, Du) + G(u)$$

Andreu et al. ont fait cette étude pour le flot de gradient associé à de telles fonctionnelles dans leur livre [5]. On peut remarquer qu'il sera alors nécessaire dans un premier temps de donner un sens à $\int_{\Omega} F(x, Du)$ et d'obtenir des résultats de semi-continuité inférieure pour de telles fonctionnelles. Ces questions ont été l'objet d'une littérature abondante. On pourra consulter par exemple les livres de Buttazzo [14] (entièrement consacré à ce sujet), d'Ambrosio, Fusco et Pallara [4], celui de Temam [36] et les articles de Giaquinta et al. [25], Bouchitté et Valadier [9] ou encore celui de Buttazzo et Dal Maso [15].

- *En s'inspirant du livre d'Andreu et al. [5] on peut espérer démontrer des principes du max pour les solutions de notre système ou encore prouver des résultats de convergence asymptotique.*

3.3.2 Implémentation numérique

Jusqu'ici on avait laissé de côté le poids g . Pour l'application à la segmentation celui-ci joue cependant un rôle crucial. Posons

$$F(p) = \int_{\Omega} g(x)|p(x)| dx$$

On a alors dans L^2 ,

$$F^*(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\xi(x)| \leq g(x) \text{ p.p.} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On veut alors résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(\xi) - \partial G(u) \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} = Du - \partial F^*(\xi) \end{cases}$$

On avait vu que g était souvent pris de la forme,

$$g = \frac{1}{1 + |\nabla G_{\sigma} * u|} + \varepsilon$$

En suivant l'article d'Appleton et Talbot, remarquons qu'avec ce poids, la solution dépend de l'initialisation et favorise les petits contours. Appleton et Talbot ont donc proposé de modifier g .

Soit O un ouvert borné régulier contenant Ω' . Soit $\rho \in L^2(O)$ positive et d'intégrale 1 sur \mathbb{S} , négative et d'intégrale -1 sur \mathbb{T} et nulle en dehors. On cherche alors une fonction ψ qui minimise

$$\min_{\substack{\psi \in H_0^1(\operatorname{div}) \\ \operatorname{div}(\psi) = \rho}} \frac{1}{2} \int_O |\psi|^2$$

Remarquons que d'après Dautray-Lions [21] p. 233, pour O ouvert borné et régulier, $\operatorname{div}((H_0^1)^n) = \{v \in L^2 / \int_O v = 0\}$ donc l'ensemble sur lequel on minimise n'est pas vide. L'ensemble $\{\psi \in H_0^1(\operatorname{div}) / \operatorname{div}(\psi) = \rho\}$ est un convexe fermé de $L^2(O)^n$ donc la projection de 0 sur cet ensemble est bien définie et le minimum est atteint. Soit ψ un minimiseur on a alors

$$\int_O \psi \cdot \eta = 0 \quad \forall \eta \in H_0^1(\operatorname{div}), \operatorname{div}(\eta) = 0$$

Donc par le corollaire 3 p. 117 de Dautray-Lions [21], il existe une fonction Φ de H^2 telle que $\psi = \nabla\Phi$. Cette fonction Φ doit donc vérifier $\Delta\Phi = \rho$ sur O avec des conditions de Neumann au bord. Cette équation possède une solution unique à addition de constante près (voir Théorème 5.2.18 p. 124 du livre d'Allaire [2]). On pose alors $\omega = |\nabla\Phi|$ et

$$g = \omega \left(\frac{1}{1 + |\nabla G_\sigma * u|^p} + \varepsilon_1 \right) + \varepsilon_2$$

L'idée est qu'en presque tout point passe une surface minimale pour le poids ω . En effet supposons que Φ soit régulière (ce qui est le cas si ρ l'est), alors pour Σ une surface fermée contenant \mathbb{S} dans son intérieur V et \mathbb{T} dans son extérieur,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \omega &\geq \int_{\Sigma} \nabla\Phi \cdot \nu \\ &= \int_V \operatorname{div}(\psi) \\ &= \int_{\mathbb{S}} \rho \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'autre part si Σ est une iso-surface de Φ , i.e si $\nabla\Phi \cdot \nu = |\nabla\Phi|$ en tout point de Σ , il y a égalité. Donc les iso-surfaces sont minimisantes. Or par tout point où $\nabla\Phi \neq 0$ passe une iso-surface.

Numériquement, on prend comme approximation de Φ , la convolée de ρ avec Φ_0 , la solution fondamentale de l'équation de Poisson i.e $\Delta\Phi_0 = \delta$ sur \mathbb{R}^n avec $\nabla\Phi_0$ qui tend vers 0 à l'infini. Dans \mathbb{R}^2 on a en particulier $\Phi_0 = \frac{1}{2\pi} \ln(|x|)$.

Le schéma numérique utilisé est celui proposé par Appleton et Talbot dans [7] et ressemble beaucoup au schéma explicité pour le modèle de Rudin-Osher-Fatemi. Les seules modifications sont :

$$v^{n+1}(i, j) = \max\left(\sqrt{(|\xi_x^{n+1}(i, j)|')^2 + (|\xi_y^{n+1}(i, j)|')^2}, g_{i,j}\right)$$

et

$$|\xi_x^{n+1}(i, j)| = |\xi_x^{n+1}(i, j)|' \frac{g_{i,j}}{v^{n+1}(i, j)} \quad |\xi_y^{n+1}(i, j)| = |\xi_y^{n+1}(i, j)|' \frac{g_{i,j}}{v^{n+1}(i, j)}$$

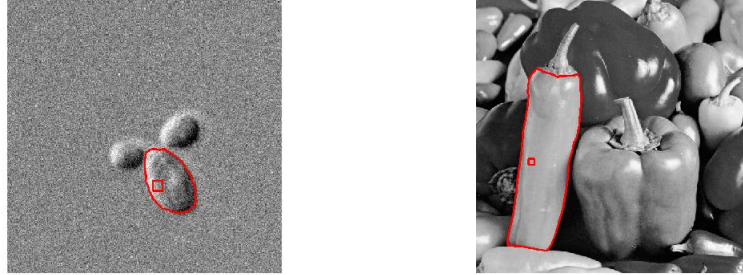


FIG. 4 – Deux expériences de segmentation

En faisant les expériences numériques, on voit que sans le changement de métrique proposé par Appleton et Talbot, l'initialisation doit être très proche du résultat final. Par contre, comme le montre la figure 4, avec ces modifications, on peut segmenter des images comprenant un fort bruit ou des objets allongés. Le petit carré rouge représente à chaque fois l'initialisation.

A Les espaces fonctionnels utiles

Dans cette annexe, nous rappelons les définitions des espaces fonctionnels qui nous sont utiles pour ce travail.

Définition A.1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , on appelle $\mathcal{C}^k(\Omega)$ l'ensemble des fonctions k fois continuellement dérivables. On note $\mathcal{C}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions continues sur Ω . On indique par $\mathcal{C}_0(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω nulles au bord et par $\mathcal{C}_c(\Omega)$ celui des fonctions continues à support compact dans Ω . De même \mathcal{C}_c^k est l'espace des fonctions k fois continuellement dérivables à support compact dans Ω .

Définition A.2. On note $\mathcal{M}(\Omega)$ (respectivement $\mathcal{M}_1(\Omega)$) l'ensemble des mesures de Radon (respectivement des mesures de Radon bornées) sur Ω .

Rappelons maintenant la définition de l'espace de Sobolev H^1 . Ses propriétés principales pourront être trouvées dans le livre de Brézis [11].

Définition A.3. L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est constitué des fonctions de $L^2(\Omega)$ ayant une dérivée distributionnelle dans $L^2(\Omega)$. En d'autres mots ce sont les fonctions de L^2 telles qu'il existe $g \in (L^2)^n$ vérifiant

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$$

Dans l'étude du modèle de Tychonov nous avons eu besoin d'introduire l'ensemble H_D^1 .

Définition A.4. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et soit φ une fonction de $\partial\Omega$. Pour S et T des parties de $\partial\Omega$, on note $\partial\Omega_D$ l'ensemble $S \cup T \subset \partial\Omega$. On pose alors

$$H_D^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) / u|_{\partial\Omega_D} = \varphi \right\}$$

L'espace $H^1(\text{div})$ joue également un rôle particulier pour nous. Cet espace a par exemple été étudié dans le livre de Dautray et Lions [21].

Définition A.5. On note $H^1(\text{div})$ l'espace des fonctions de $(L^2)^n$ ayant une divergence dans L^2 . On note $H_0^1(\text{div})$ l'espace des fonctions de $H^1(\text{div})$ nulles au bord. Enfin si $\partial\Omega_N = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_D$, on note $H_N^1(\text{div})$ l'espace des fonctions de $H^1(\text{div})$ nulles sur $\partial\Omega_N$.

Pour l'étude du modèle de Rudin-Osher-Fatemi on voit que l'espace $H_0^1(\text{div}) \cap (L^\infty)^n$ joue un rôle important.

Définition A.6. On note $X_0^2 = H_0^1(\text{div}) \cap (L^\infty)^n$.

Passons maintenant à la définition de l'espace des fonctions à variations bornées. Pour plus de détails à son sujet, on peut par exemple consulter le livre d'Ambrosio, Fusco et Pallara [4]

Définition A.7. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n . On note $BV(\Omega)$ l'ensemble des fonctions de $L^1(\Omega)$ dont la dérivée est une mesure de Radon bornée. C'est aussi l'ensemble des fonctions de L^1 telles que

$$\int_{\Omega} |Du| = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \text{div}(\xi) / \xi \in (\mathcal{C}_c^1(\Omega))^n \text{ et } |\xi|_{\infty} \leq 1 \right\}$$

est fini.

On introduit alors plusieurs ensembles inclus dans $BV(\Omega)$.

Définition A.8. Soit Ω' un ouvert de \mathbb{R}^n et soit \mathbb{S} et \mathbb{T} deux fermés de Ω' de mesures de Lebesgue positives et d'intersection vide. Soit φ une fonction définie sur $\mathbb{S} \cup \mathbb{T}$, on appelle alors

$$BV_D(\Omega) = \left\{ u \in BV(\Omega') / u|_{\mathbb{S} \cup \mathbb{T}} = \varphi \right\}$$

On désignera par $BV^2(\Omega)$ (respectivement BV_D^2) l'ensemble $BV \cap L^2$ (respectivement $BV_D \cap L^2$).

Références

- [1] R. Ahuja, T. L. Magnanti et J. B. Orlin, *Network flows*, Prentice Hall, United States ed edition, 1993.
- [2] G. Allaire, *Analyse numérique et optimisation*, Les Editions de l'École Polytechnique, 2007.
- [3] L. Ambrosio, *Corso introduttivo alla Teoria Geometrica della Misura ed alle Superficie Minime*, Appunti della Scuola Normale Superiore, Pisa 1997.
- [4] L. Ambrosio, N. Fusco et D. Pallara, *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Science Publications, 2000.
- [5] F. Andreu-Vaillo, V. Caselles et J.M. Mazòn, *Parabolic Quasilinear Equations Minimizing Linear Growth Functionals*, Birkhäuser, collection "Progress in Mathematics", no. 223, 2004.
- [6] G. Anzellotti, *Pairings between measures and bounded functions and compensated compactness*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 135, No. 1, p. 293-318, 1983.
- [7] B. Appleton, H. Talbot, *Globally Minimal Surfaces by Continuous Maximal Flows*, IEEE Trans. on Pattern Anal. and Mach. Intelligence, vol. 28, no. 1, p. 106-118.
- [8] K. J. Arrow, L. Hurwicz et H. Uzawa (editors), *Studies in Linear and Nonlinear Programming*, Stanford Univ. Press, Stanford, 1958.
- [9] G. Bouchitté et M. Valadier, *Integral Representation of Convex Functionals on a space of Measures*, J. of Funct. Analysis, vol. 80, 1988.
- [10] Y. Boykov, V. Kolmogorov, *Computing Geodesics and Minimal Surfaces via Graph Cuts*, Proc. Int. J. Conf. Computer Vision, p. 26-33, 2003.
- [11] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, collection "Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise", 1983.
- [12] H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert*, Amsterdam-London : North Holland. 1973.
- [13] H. Brézis, *Les opérateurs monotones*, Séminaire Choquet, initiation à l'analyse, tome 5, no. 2 exposé no. 10., p. 1-33, 1965-1966.
- [14] G. Buttazzo, *Semicontinuity relaxation and integral representation in the calculus of variations*, Pitman Res. Notes Math. Ser., vol. 207, Longman, Harlow, 1989.

- [15] G. Buttazzo, G. Dal Maso, *Integral representation on $W^{1,1}(\Omega)$ and $BV(\Omega)$ of limits of variational integrals*, Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Math. Natur., vol. 66, p. 338-343, 1979.
- [16] V. Caselles, R. Kimmel, et G. Shapiro, *Geodesic Active Contours*, Int. J. Computer Vision, vol. 22, no. 1, p. 61-79, 1997.
- [17] A. Chambolle, *An Algorithm for Total Variation Minimization and Applications*, J. of Math. Imaging and Vision, vol. 20, p. 89-97, 2004.
- [18] A. Chambolle, D. Cremers et T. Pock, *A convex approach for computing minimal partitions*, preprint CMAP, Novembre 2008.
- [19] A. Chambolle, P.L. Lions *Image Recovery Via Total Variation Minimization And Related Problems*, Numerische Mathematik, Vol. 76, no. 2, p. 167-188, 1997.
- [20] E. Giusti, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhäuser, collection "Monographs in Mathematics", vol. 80, 1984.
- [21] R. Dautray et J.L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, vol. 3, Spectral Theory and Applications, Springer, 1990.
- [22] I. Ekeland et R. Temam, *analyse convexe et problèmes variationnels*, Dunod Gauthiers-Villars, collection "Études mathématiques, 1974.
- [23] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, collection "Graduate Studies in Mathematics", vol.19, 1998.
- [24] L. C. Evans et G. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, CRC Press, collection "Studies in Advanced Mathematics", 1992.
- [25] M. Giaquinta, G. Modica, J. Souček, *Functionals with linear growth in the calculus of variations*, Com. Math. Uni. Carolinae, 20, p. 143-171, 1979.
- [26] N. Houhou, X. Bressan, A. Szlam, T. Chan, J. Thirian, *Semi-supervised Segmentation Based on Non-Local Continuous Min-Cut*, Proceedings SSVM, p.112-123, 2009.
- [27] M. Kass, A. Witkins, et D. Terzopoulos, *Snakes : Active Contour Models*, Int. J. Computer Vision, p 259-268, 1987.
- [28] K. Jalalzai, *Étude des propriétés d'une variante de la variation totale*, mémoire de M2, accessible sur demande auprès de l'auteur, jalalzai@cmap.polytechnique.fr .

- [29] J.M. Morel, L. Moisan et A. Desolneux, *From Gestalt Theory to Image Analysis : A Probabilistic Approach*, Springer-Verlag, collection “Interdisciplinary Applied Mathematics”, vol.34, 2008.
- [30] J.M. Morel, S. Solimini, *Variational Methods in Image Segmentation*, Birkhäuser, collection “Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications”, vol. 14, 1995.
- [31] S. Osher et J. A. Sethian, *Fronts propagating with curvature-dependent speed : Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations*, J. Comput. Phys. 79, p. 12-49, 1988.
- [32] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [33] R. T. Rockafellar, *Monotone Operators Associated with Saddle-Functions and Minimax Problems*, Nonlinear Functional Analysis, F.E. Browder ed., Proc. of Symp. in Pure Math. of the Am. Math. Society, vol. XVIII, part. 1, p.241-250, 1968.
- [34] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill International Student Editions, 1970.
- [35] G. Strang, *Maximal Flow through a Domain*, Math. Programming, vol. 26, p. 123-143, 1983.
- [36] R. Temam, *Méthodes mathématiques en plasticité*, Gautier-Villars, collection “Méthodes Mathématiques de l’Informatique”, vol. 12, 1983.
- [37] C. Villani *Topics in Optimal Transportation*, American Mathematical Society, collection “Graduate Studies in Mathematics”, vol. 58, 2003.
- [38] M. Zhu et T. Chan, *An Efficient Primal-Dual Hybrid Gradient Algorithm for Total Variation Image Restoration*, cam report (08-34), Mai 2008.