Minimisation singulière pour la restauration d'images

Mémoire de License effectué sous la direction d'Antonin Chambolle

Michael Goldman

1 Les fonctions à variations bornées

Définition 1 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in L^1(\Omega)$ on appelle variation totale de f :*

$$\int_\Omega |Df| = \sup_{\substack{\psi \in C_c^1(\Omega, \mathbf{R}^n) \\ ||\psi||_\infty \leq 1}} \int_\Omega f \ div\, \psi$$

si $\int_\Omega |Df| < \infty$ on dit que f est à variations bornées.

Remarque 1 *Pour $f \in C^1$ ou même $f \in W^{1,1}$ on a par intégration par parties, $\int_\Omega |Df| = \int_\Omega |\nabla f|$. Plus généralement, si Df est le gradient de f au sens des distributions, $\int_\Omega |Df|$ est la variation totale de la mesure Df sur Ω.*

Définition 2 *On note BV l'ensemble des fonctions à variations bornées.*

Example : si $\Omega = [0,1]$, les fonctions constantes par morceaux sont à variation bornée, et si $f = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}[}$ alors $\int_\Omega |Df| = \sum_{i=1}^{n-1} |x_{i+1} - x_i|$.

On munit BV de la norme $||f||_{BV} = \int_\Omega |Df| + ||f||_{L^1}$.

Théorème 1 *BV muni de la norme $||\ ||_{BV}$ est un espace de Banach.*

Théorème 2 (semi-continuité) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $(f_j) \in BV$ avec $f_j \overset{L^1_{loc}}{\longrightarrow} f$ alors*

$$\int_\Omega |Df| \leq \underline{\lim} \int_\Omega |Df_j|.$$

Théorème 3 ("densité") *Si $f \in BV$ alors il existe une suite (f_j) dans $C_c^\infty(\Omega)$ telle que*

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega |f_j - f| = 0 \qquad et \qquad \lim_{n \to \infty} \int_\Omega |Df_j| = \int_\Omega |Df|.$$

Remarque 2 *La démonstration du théorème 3 montre que si $f \in L^p$ on peut remplacer la convergence L^1 par une convergence L^p, et si $f \in L^\infty$ alors on peut supposer $||f_j||_\infty \leq ||f||_\infty$.*

Théorème 4 (Compacité) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ pour lequel le théorème de Rellich s'applique (par exemple Ω à bords lipschitz). Alors les ensembles bornés dans BV sont des ensembles relativements compacts de L^1.*

Remarque 3 *Dans la suite, nous utiliserons ce théorème uniquement dans le cas où $\Omega = [0,1]$ ou $\Omega = [0,1]^2$, pour lesquels le Théorème de Rellich s'applique.*

On trouvera dans [10] une étude plus complète des fonctions à variation bornée.

2 Application à la reconstruction d'images, l'approche continue.

2.1 Présentation du problème.

Dans le problème que nous nous posons, on représentera une image par une fonction u, de $[0,1]$ ou $[0,1]^2$ dans $\mathbb{R}$ (on considère uniquement des signaux en une dimension ou des images en noir et blanc). Remarquons tout de suite que ceci constitue une modélisation. En effet, il n'existe pas dans la nature d'images continues. On supposera toutefois que l'échelle à laquelle notre oeil voit l'image réelle est telle que l'on peut la considérer comme continue. Nous reviendrons sur ce problème plus loin.
On notera u^0 l'image originelle et $g = Au^0 + n$ l'image floutée et bruitée. A est ici un opérateur linéaire et n un bruit blanc gaussien i.e. une variable aléatoire de loi gaussienne, d'espérance nulle et de variance σ^2 supposée connue.

Notre but est d'estimer u^0 à partir de la connaissance de g, A et σ^2.

Une méthode couramment utilisée consiste à choisir une fonctionnelle J, un espace de fonctions u admissibles et minimiser J sous les contraintes $\int_\Omega Au = \int_\Omega g$ et $\int_\Omega |Au - g|^2 = \sigma^2$. On prend alors comme estimation de u^0 le minimiseur de J.

Les images réelles possèdent souvent des zones très contrastées, ce qui se traduit par des discontinuités. Une minimisation L^2 ou plus généralement L^p avec $p > 1$, c'est à dire avec J de la forme $\int |\psi(u)|^p$ permettrai d'utiliser la reflexivité de ces espaces. Malheureusement, les fonctions de $W^{1,p}$ sont trop régulières. Les fonctions de H^1 $[0,1]$ sont par exemple continues. C'est pourquoi on est ammenné à considérer des minimisations L^1. Osher et Rudin [11] ont proposé en 1992 de minimiser la variation totale. Le cadre des fonctions BV s'impose alors naturellement. Les fonctions "constantes par blocs", c'est-à-dire constantes par morceaux, mais avec peu de morceaux, ont une faible variation totale. Ceci laisse espérer l'existence de nettes discontinuités dans l'image reconstruite.

Après avoir étudié l'existence de solutions pour ce problème de minimisation, nous verrons sur un exemple simple que l'on peut effectivement espérer reconstituer fidèlement les images "constantes par blocs".

2.2 Étude générale de la minisation de la variation totale.

Dans cette partie, Ω désigne une partie ouverte et bornée de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^2$. Nous considérerons alors le problème de minimisation sous contraintes :

$$\min_{u \in BV \cap L^2(\Omega)} J(u) = \int_\Omega |Du| \qquad \text{avec} \qquad \int_\Omega Au = \int_\Omega g \quad \text{et} \int_\Omega |Au - g|^2 = \sigma^2. \tag{1}$$

Nous donnerons des hypothèses suffisantes pour assurer l'existence d'une solution ainsi que son unicité. Nous montrerons également l'équivalence de (1) avec le problème relaxé :

$$\min_{u \in BV \cap L^2} E(u) = \int_\Omega |Du| + \frac{\lambda}{2}|Au - g|^2 \tag{2}$$

pour un certain $\lambda \geq 0$. On fera les hypothèses :

(H1) A est un opérateur linéaire continu de $L^2(\Omega)$ dans lui-même.

(H2) A appliqué à 1 donne 1, ce qui est équivalent à $\int_\Omega A^*u = \int_\Omega u$ pour $u \in L^2$.

Remarque 4 – *(**H2**) garantit la coercivité de E dans BV. On peut aussi voire que la contrainte $\int_\Omega Au = \int_\Omega g$ est automatiquement vérifiée pour le minimiseur de J sous la seule contrainte $\int_\Omega |Au-g|^2 = \sigma^2$.*

– *$\int_\Omega |g|^2 = \int_\Omega |Au^0+n|^2 = \int_\Omega |Au^0|^2 + |n|^2 + 2\int_\Omega Au^0 \cdot n$. On suppose que le bruit est indépendant de Au et donc que $\int_\Omega Au \cdot n = 0$ d'où $\int_\Omega |g|^2 = \int_\Omega |Au^0|^2 + \sigma^2$ et $||g||^2_{L^2} \geq \sigma^2$. Le même argument montre que $||g-c||_{L^2} \geq \sigma$ pour tout c dans $\mathbb{R}$. On suppose donc de plus :*

(H3) $||g - \int_\Omega g||_{L^2} \geq \sigma$.

Théorème 5 *Si* **(H1)** , **(H2)** *et* **(H3)** *sont vérifiées et si $g \in X$ où X est l'adhérence de $L^2 \cap A(L^2(\Omega) \cap BV(\Omega))$ dans L^2. Alors (1) a une solution $u \in L^2 \cap BV$, et Au est unique. De plus, (1) est équivalent à (2), pour un unique (si $\sigma < ||g - \int_\Omega g||_{L^2}$) λ positif. Si A est injective, la solution u est unique.*

Idée de démonstration :

Existence d'une solution pour (1) et unicité de Au :

On considère une suite (u_n) minimisante et on montre qu'elle doit converger faiblement dans L^2 vers une solution du problème (1). Au cours de la démonstration, on montre que (1) est en fait équivalent au problème

$$\min_{u \in BV \cap L^2} \int_\Omega |Du| \qquad \text{avec} \qquad \int_\Omega |Au-g|^2 \leq \sigma^2. \tag{3}$$

Si u et v sont solutions de (1) on a $J(\frac{u+v}{2}) \leq J(u)$ et $||A\frac{u+v}{2} - g||_{L^2} \leq \sigma$ avec égalité ssi $Au = Av$. Ce qui démontre l'unicité de Au.

Equivalence de (1) et (2) :

Proposition 1 *Soit u une solution de (1) alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que :*

$$-\lambda A^*(Au-g) \in \partial J(u)$$

où ∂ dénote le sous différentiel de J (voire [9], [5] ou [2]).

Pour ce λ, u minimise E, et inversement, si u est solution de (2), en posant $\sigma = ||Au-g||_{L^2}$ alors il est aussi solution de (3).

Unicité du λ : soit u^λ une solution de (2) pour un certain λ. On pose $\sigma(\lambda) = ||Au^\lambda - g||_{L^2}$ qui est bien défini par l'unicité de Au. On montre alors que $\sigma(\lambda)$ est décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $]0, ||g - \int_\Omega g||_{L^2}]$ et qu'il existe un $\underline{\lambda}$ tel que $\sigma(\lambda)$ est strictement décroissante sur $[\underline{\lambda}; +\infty[$ et $\sigma(\lambda) = ||g - \int_\Omega g||_{L^2}$ si $0 \leq \lambda \leq \underline{\lambda}$. $\square$.

Pour une preuve complète, voire [3].

Sous certaines hypothèses, le problème (1) a donc une solution. On aimerait toutefois savoir si il est possible de récupérer ainsi l'image originelle, et sinon, à quel point l'image reconstituée ressemble à celle d'origine.

2.3 Un exemple

Nous allons montrer, sur un exemple simple (voire [7]), que pour des images "constantes par blocs" cette minimisation donne de bons résultats. On prend ici $A = Id$, et on se place dans le cas discret. L'image originelle est alors donnée par un n^2-uplet, correspondant aux valeurs sur les pixels. L'image u^0 est alors représentée par une fonction constante sur les carrés (p, m) de côtés $\frac{1}{n}$ qui pavent le carré $[0, 1]^2$ avec pour valeur $u^0_{p,m}$ sur ces carrés. Le bruit sera lui aussi donné par un tel n^2-uplet.
On suppose de plus que le bruit δu n'a qu'un nombre fini de coefficients de Fourier (pour la transformmée de Fourier discrète) non nuls. Donc

$$\delta u_{p,m} = \frac{1}{n^2} \sum_{(k,l)\in\mathcal{K}} \hat{\delta u_{k,l}} \exp(\frac{-2\pi i(p-1)(k-1)}{n}) \exp(\frac{-2\pi i(m-1)(l-1)}{n})$$

où $\mathcal{K}$ est un ensemble à K éléments.

On note :

$$(D_H u^0)_{p,m} = u^0_{p+1,m} - u^0_{p,m}$$
$$(D_V u^0)_{p,m} = u^0_{p,m+1} - u^0_{p,m}.$$

On a alors

$$\int_\Omega |Du^0| = \sum_{p,m=1}^{n-1} |(D_H u^0)_{p,m}| + |(D_V u^0)_{p,m}|.$$

Soit $S = \{(p, m) : (D_H u^0)_{p,m} \neq 0 \quad \text{ou} \quad (D_V u^0)_{p,m} \neq 0\}$ l'ensemble des arêtes le long desquelles u^0 n'est pas constant. Supposons que S est composé de ν éléments. Il vient :

$$\sum_{(p,m)\in S} |D_H(u^0 + \delta u)_{p,m}| \geq \sum_{(p,m)\in S} |(D_H u^0)_{p,m}| - \frac{K\nu}{n^2} ||\hat{\delta u}||_\infty$$
$$\sum_{(p,m)\notin S} |D_H(u^0 + \delta u)_{p,m}| \geq (1 - \frac{K\nu}{n^2}) ||\hat{\delta u}||_\infty.$$

Avec la même inégalité pour D_V on obtient

$$\int_\Omega |D(u^0 + \delta u)| \geq \int_\Omega |Du^0| + 2(1 - \frac{2K\nu}{n^2}) ||\hat{\delta u}||_\infty.$$

Donc tant que $\frac{2K\nu}{n^2} < 1$ on peut retrouver u^0 en minimisant la variation totale de u sous les conditions $g - u \in Q$ où Q est l'ensemble des n^2-uplets ayants moins de K coefficients de Fourier. $\frac{\nu}{n^2}$ représente la proportion d'arêtes sur lesquelles u^0 n'est pas constante, donc pour K fixé, on voit que les fonctions "constantes par blocs" sont bien reconstituées.

L'hypothèse faite sur le bruit est malheureusement assez contraignante car son spectre n,est que rarement fini. Les auteurs de [7] étendent cette étude à un cadre plus général au prix tout de même de nouvelles hypothèses sur le bruit. Ils montrent ensuite qu'il n'est généralement pas possible de récupérer exactement l'image d'origine par minimisation de la variation totale. Cependant, dans de nombreux cas, on observe que cette méthode donne des résultats corrects.

2.4 Limites de la méthode et variantes

La méthode de la minimisation de la variation totale donne de très bons résultats pour des images ayant une faible variation totale et qui sont presques "constantes par blocs". Toutefois, elle est beaucoup moins efficace si l'image est plus régulière. Les images reconstituées possèdent alors souvent des zones plates. Ce phénomène est lié à la faible variation totale des fonctions "constantes par blocs". Regardons le pire cas. On prend $u(x) = x$ et un bruit qui transforme u en une fonction croissanteet constante par morceaux. La solution obtenue sera alors aussi constante par morceaux.

Remarque 5 *Dans le cas de la dimension 1, on peut faire le calcul quasi-explicite de la solution du problème de minimisation. Celui-ci montre que l'image reconstituée est par morceaux, soit égale à l'image buitée, soit constante et égale à la moyenne de celle-ci sur le morceau considéré.*

Dans [3] l'auteur propose d'améliorer le résultat obtenu en modifiant la fonctionnelle à minimiser, en prenant en compte certaines propriétées connues de l'image à reconstituer.

2.5 Algorithmes

Malgré la difficultée liée à la non différentiabilité de la variation totale, il existe de nombreux algorithmes permettant de programmer cette minimisation. La plupart d'entre eux contournent la non-différentiabilité en modifiant la fonctionnelle J. Pour des raisons algorithmiques, on préfère souvent résoudre (2) plutôt que (1).

Dans [15] Vogel et Oman utilisent une méthode de descente de gradient, tandis que [3] propose une méthode de point fixe. On pourra aussi voire [14] pour une troisième méthode.

3 L'approche discrète

On traitera ici le problème (2). On se place dans $\Omega = [0, 1]^2$, avec $A = Id$ et $\lambda = 2$ de plus on supposera que $||g||_\infty < \infty$.

Les données réelles ne sont jamais continues. C'est pourquoi on est en fait toujours confronté à un problème discret. Il existe dès lors deux solutions pour traiter le problème discret.

La première consiste à prendre les données comme une fonction constante sur les pixels, et à chercher une solution au problème de minimisation de la variation totale parmi les fonctions constantes sur les pixels. C'est-à-dire parmi les fonctions u de la forme $u = \sum_{i,j=1}^{n} u_{i,j}\chi_{i,j}$ où $\chi_{i,j}$ est l'indicatrice de $C_{i,j}$ qui est le carré de côtés $\frac{1}{n}$, tel que les $C_{i,j}$ partitionnent le carré unité. Alors $\int_\Omega |Du| = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n-1} |u_{i+1,j} - u_{i,j}| + |u_{i,j+1} - u_{i,j}|$. Pour des données g discrètes, le problème de minimisation totale s'écrit donc :

$$\min L_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n-1} |u_{i+1,j} - u_{i,j}| + |u_{i,j+1} - u_{i,j}| + \frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n} |u_{i,j} - g_{i,j}|^2. \qquad (4)$$

Cependant, nous allons montrer que si $g_{i,j} = \frac{1}{|C_{i,j}|}\int_\Omega g$ et si g est bornée alors les solutions du problème (4) tendent dans L^1 vers la solution du problème :

$$\min_{u \in BV \cap L^2} L(u) = \int_\Omega |\partial_x u| + |\partial_y u| + |u - g|^2 \qquad (5)$$

qui est différend du problème (2).

La seconde solution consiste à modifier le problème de minimisation afin d'obtenir un résultat plus proche de la solution du problème (2). On montrera que les solutions de :

$$\min E_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{i,j=1}^{n-1}\sqrt{|u_{i+1,j}-u_{i,j}|^2+|u_{i,j+1}-u_{i,j}|^2}+\frac{1}{n^2}\sum_{i,j=1}^{n}|u_{i,j}-g_{i,j}|^2. \tag{6}$$

tendent dans L^1 vers celles du problème (2). On peut voire la différence entre les deux problèmes discret comme une différence dans la discrétisation de l'oprérateur de dérivation.

3.1 Le cas de la dimension 1

Commençons par traiter le cas de la dimension 1. On considère $\Omega = [0,1]$. Les deux approches envisagées sont ici identiques. À partir de maintenant, et dans toute la suite, on considérera uniquement des fonctions dont la norme infinie est inférieure ou égale à celle de g (on dira ainsi souvent pour "$u \in L^1$" au lieu de "pour $u \in L^1$ et $||u||_\infty \leq ||g||_\infty$"). En effet, aussi bien pour les problèmes discrets que continus, on peut voire que les valeurs des fonctionelles appliquées aux fonctions tronquées (à la valeur plus ou moins $||g||_\infty$) sont inférieures à celles pour les fonctions initiales. Dans ce cadre, convergence L^1 et L^2 sont équivalentes. On posera pour $u \in L^1$, $\hat{u}_i = n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} u$.

On va montrer que sous ces hypothèses, les solutions de :

$$\min E_n(u) = \sum_{i=1}^{n-1}|u_{i+1}-u_i| + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|u_i-\hat{g}_i|^2 \tag{7}$$

tendent vers la solution de (2).

Pour tout n, E_n est continu de $\mathbb{R}^{n^2}$ dans $\mathbb{R}$, coercif et strictement convexe, donc il existe une unique solution au problème (6). La variation totale est sci sur L^1 et $u \longrightarrow (u-g)^2$ est continue donc E est sci. De plus, E est strictement convexe, donc s'il existe un minimum, il est unique. Soit $u^{(n)}$ la solution de (6), et v dans L^2. Montrons que

$$E(u^{(n)}) \leq E_n(\hat{v}) + c_n. \tag{8}$$

Où $c_n = \int_0^1 g(g-g_n)$ avec $g_n = \sum_{i=1}^n \hat{g}_i \chi_{[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n}[}$.

$$\begin{aligned}
E(u^{(n)}) &= \sum_{i=1}^{n-1}|u_k-u_{k+1}| + \int_0^1 (u^{(n)}-g)^2 \\
&\leq E_n(\hat{v}) + \int_0^1 (u^{(n)}-g)^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|u_k-\hat{g}_k|^2.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\int_0^1 (u^{(n)} - g)^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |u_k - \hat{g}_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} (u_k - g)^2 \; - \frac{1}{n}(u_k - \hat{g}_k)^2$$
$$= \int_0^1 g^2 - g_n^2 = \int_0^1 g(g - g_n) + g_n(g - g_n)$$
$$= \int_0^1 g(g - g_n) = c_n$$

donc on a bien $E(u^{(n)}) \leq E_n(\hat{v}) + c_n$.

Montrons que c_n tend vers 0. Il suffit de montrer que $g_n \overset{L^2}{\rightharpoonup} g$.
Soit $\psi \in C[0,1]$ alors $\int_0^1 \psi g_n = \int_0^1 \psi_n g$ et ψ est uniformément continue sur $[0,1]$ donc pour $\varepsilon > 0$ soit $\omega(\varepsilon)$ son module de continuité. Pour $n > \frac{1}{\omega(\varepsilon)}$ on a

$$\int_0^1 |\psi_n - \psi|^2 \leq \sum_i \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{1}{n}} (n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{1}{n}} |\psi(s) - \psi(t)|)^2$$
$$\leq \sum_i \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varepsilon^2$$
$$\leq \varepsilon^2.$$

Donc $\psi_n \overset{L^2}{\rightarrow} \psi$ et $\psi_n \overset{L^2}{\rightharpoonup} \psi$ donc $\int_0^1 \psi g_n = \int_0^1 \psi_n g \rightarrow \int_0^1 \psi g$.

Soit $\psi \in L^2$ et $\varepsilon > 0$. Soit alors $\phi \in C([0,1])$ tel que $||\phi - \psi||_{L^2} \leq \frac{\varepsilon}{4||g||_\infty}$. Soit N tel que pour $n \geq N \quad |\int_0^1 \phi(g_n - g)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Pour $n \geq N$ on a alors

$$|\int_0^1 \psi(g_n - g)| \leq |\int_0^1 (\psi - \phi)g_n| + |\int_0^1 (g_n - g)\phi| + |\int_0^1 (\psi - \phi)g|$$
$$\leq 2||g||_\infty \int_0^1 |\psi - \phi| + |\int_0^1 (g_n - g)\phi|$$
$$\leq \varepsilon.$$

Donc $g_n \overset{L^2}{\rightharpoonup} g$.

Remarque 6 *La convergence est en faite forte, car $\int \Omega g_n^2 - g^2 = \int_\Omega g(g_n - g) \rightarrow 0$ donc on a convervence des normes, ce qui ajouté à la convergence faible donne la convergence forte.*

Montrons que

$$E_n(\hat{v}) \leq E(v) \qquad \text{pour} \quad v \in L^1. \tag{9}$$

Soit $v \in BV$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (v-g)^2 &= \frac{1}{n}\sum_i \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} (u-g)^2 \\
&\underset{\text{Jensen}}{\leq} \frac{1}{n}\sum_i (n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} u-g)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_i (\hat{v}_i - \hat{g}_i)
\end{aligned}$$

et pour $v \in C^1$

$$\begin{aligned}
\sum_i |\hat{v}_i - \hat{v}_{i+1}| &= \sum_i n|\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} v - \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} v| \\
&= \sum_i n|\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} v(t) - v(t+\frac{1}{n})| \\
&\leq \sum_i n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} (\int_t^{t+\frac{1}{n}} |v'(s)|ds)dt \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} n(\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |v'(s)|s - \frac{i-1}{n} + \int_{\frac{i}{n}}^{\frac{i+1}{n}} |v'(s)|\frac{i+1}{n}) \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |v'(s)|(s-\frac{i-1}{n}) + \sum_{i=2}^{n} n\int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |v'(s)|(s-\frac{i}{n}) \\
&\leq \int_0^1 |u'|.
\end{aligned}$$

Pour $v \in L^1$, si $E(v) = \infty$ alors l'inégalité est assurée. Sinon, $v \in BV$ et alors soit $(v_j) \in C^1$ telle que $v_j \overset{L^1}{\to} v$ et $\int_0^1 |Dv_j| \to \int_0^1 |Dv|$, dont l'existence est assurée par le théorme (3). Comme $v_j \overset{L^1}{\to} v$, $\hat{(v_j)}_i \to \hat{v}_i$ et donc, en passant à la limite dans $\sum_i |\hat{(v_j)}_i - \hat{(v_j)}_{i+1}| \leq \int_0^1 |u_j'|$ et on a bien (9).

On a donc, pour $v \in L^1$ $\qquad E(u^{(n)}) \leq E_n(\hat{v}) + c_n \leq E(v) + c_n$

$$\text{d'où} \qquad \underline{\lim} E(u^{(n)}) \leq E(v) \quad \forall v \in L^1.$$

Donc $u^{(n)}$ est une suite minimisante pour le problème (2).

Montrons qu'il existe une fonction u vers laquelle $(u^{(n)})$ converge :

Supposons le contraire. $E(u^{(n)})$ est borné et $||u^{(n)}||_\infty < ||g||_\infty$ donc la suite $(u^{(n)})$ est bornée dans BV. D'après le théorème 4 il existe une sous-suite $(u^{(\phi(n))})$ qui converge vers u. E est sci donc u minimise le problème (2). On a supposé que $(u^{(n)})$ ne tend pas vers u, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout N il existe $n \geq N$ tel que $|u^{(n)} - u| > \varepsilon$.

On peut alors poser $\psi(1) = 1$ et pour $n \geq 1, \psi(n+1) = \min_{k>\psi(n)}\{k| \quad |u^{(n)} - u| > \varepsilon\}$ alors $u^{(\psi(n))}$ est aussi une suite minimisante, et il existe une sous suite convergeant vers un certain v. v doit forcément minimiser E, donc on doit avoir $u = v$, impossible. Donc

$u^{(n)} \xrightarrow{L^1} u.$

Remarque 7 *On peut évaluer la vitesse de convergence de* $(u^{(n)})$*. Un calcul rapide montre que* $E(\frac{u+v}{2}) \leq \frac{1}{2}(E(u)+E(v)) - \frac{2}{8}||u-v||^2_{L^2}$ *autrement dit, E est 2-convexe (cf [1]). D'où pour u minimiseur de E et* $v \in L^2$ $\quad ||u-v||^2_{L^2} \leq 2(L(v)-L(u))$*. Or d'après (8) et (9) on a* $L(u) \leq L(u^{(n)}) \leq L(u) + c_n$*. Donc* $0 \leq L(u^{(n)}) - L(u) \leq c_n$ *et*

$$||u-u^{(n)}||_{L^2} \leq \sqrt{2}\sqrt{c_n}$$

Évaluons maintenant c_n *:*

Pour $g \in C^\infty$, $|c_n| \leq ||g||_\infty \int_0^1 |g-g_n|$ *et*

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |g-g_n| &= \sum_i \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |g-\hat{g}_i| \\
&\leq n \sum_i \int\int |\int_x^y |g'(t)|dt|dydx \\
&\leq n \sum_i \int\int \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |g'(t)|dtdydx \\
&= \frac{1}{n}\int_0^1 |g'(t)|dt.
\end{aligned}$$

Donc $c_n \leq \frac{||g||_\infty}{n}\int_{[0,1]}|Dg|$*. En utilisant le théorème 3 on peut voire que cette inégalité est en fait vrai pour* $g \in BV \cap L^\infty$*.*

3.2 La dimension 2

Regardons maintenant ce qui se passe pour la dimension 2. En ce qui concerne la preuve que les solutions du problème (4) tendent dans L^2 vers celle du problème (5), il suffit de reprendre la preuve de la dimension 1. Les arguments et les calculs sont les mêmes, ils sont juste un peu plus lourds à écrire. En effet, pour le problème (5), le découplage de ∂_x et ∂_y permet de se ramener aux calculs faits pour la dimension 1.

Pour l'autre problème, c'est différend. Nous allons montrer la convergence à l'aide d'un outil plus théorique, la Γ-convergence.

Définition 3 *On dit qu'une suite de fonctions* E_k, $\quad\Gamma$*-converge vers E si :*

(i) $\forall u \in L^1 \quad u_k \to u \quad \Rightarrow E(u) \leq \underline{\lim} E_k(u_k)$.

(ii) $\forall u \in L^1 \quad \exists (u_k) \quad u_k \to u \quad \overline{\lim} E_k(u_k) \leq E(u)$.

Si de plus

(iii) $\forall k \quad E_k(u_k) \leq C < \infty \quad \Rightarrow \exists u \in L^1, \quad u_{\phi(k)} \to u$.

alors $\min E_k \to \min E$ et le minimiseur de E_k tend vers celui de E (on pourra voire [6] pour plus de précisions sur la Γ-convergence). On étendra ici le E_k défini au début de cette partie à L^1 en donnant la valeur $E_k(u)$ si $u = \sum_{i,j} u_{i,j}\chi_{i,j}$ et $+\infty$ sinon, afin d'appliquer ce résultat.

Montrons **(i)** :

Remarquons d'abord que

$$\sum_{i,j} \sqrt{(D_H u)_{i,j}^2 + (D_V u)_{i,j}^2} = \sup_{|\xi|_{i,j} \leq 1} \sum_{i,j} \xi_{i,j} \cdot \begin{pmatrix} (D_H u)_{i,j} \\ (D_V u)_{i,j} \end{pmatrix}.$$

Soit $u \in BV$ et $u^n \to u$. On pose $h = \frac{1}{n}$. On peut supposer $u^n = \sum_{i,j} u_{i,j}^n \chi_{i,j}$ car sinon $E_k(u^n) = +\infty$. Soit $\xi \in C^1$ avec $|\xi| \leq 1$ alors

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^2} \xi \cdot Du &= \lim_n \int_\Omega \xi \cdot Du^n \\
&= \lim_n \sum_{i,j} \int_{(j-1)h}^{jh} \xi^x(ih, y)(D_H u^n)_{i,j} dy + \int_{(i-1)h}^{ih} \xi^y(x, jh)(D_V u^n)_{i,j} dx \\
&= \lim_n h \sum_{i,j} \xi_{i,j}^n \cdot \begin{pmatrix} (D_H u)_{i,j} \\ (D_V u)_{i,j} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Où $\xi_{i,j}^n = (\frac{1}{h} \int_{(j-1)h}^{jh} \xi^x(ih, y) dy, \int_{(i-1)h}^{ih} \xi^y(x, jh)(D_V u^n)_{i,j} dx)$.

Si $||\nabla \xi||_\infty \leq L$, alors $|(\xi_{i,j}^n)_x - \xi^x((i - \frac{1}{2})h, (j - \frac{1}{2}h))| \leq \frac{L\sqrt{2}}{2} h$ et de même pour $(\xi_{i,j}^n)_y$. D'où $||\xi_{i,j}^n||^2 \leq 1 + L^2 h^2 + 2Lh$.

Si on pose $\xi^{n\prime} = \frac{\xi^n}{\sqrt{1+L^2h^2+2Lh}}$, on a

$$\begin{aligned}
h\sqrt{1 + L^2h^2 + 2Lh} \sum_{i,j} {\xi^{n\prime}}_{i,j} \cdot \begin{pmatrix} (D_H u)_{i,j} \\ (D_V u)_{i,j} \end{pmatrix} &\leq \sqrt{1 + L^2h^2 + 2Lh} \sup_{|\xi_{i,j}| \leq 1} h \sum_{i,j} \xi_{i,j} \cdot \begin{pmatrix} (D_H u)_{i,j} \\ (D_V u)_{i,j} \end{pmatrix} \\
&\leq \sqrt{1 + L^2h^2 + 2Lh} E_k(u_k).
\end{aligned}$$

Donc $\int_{[0,1]^2} \xi \cdot Du \leq \underline{lim} E_k(u_k)$. D'où en prenant le sup sur tous les ξ on a **(i)**.

Montrons maintenant **(ii)** :

Soit $u \in L^1$ si $E(u) = +\infty$ alors l'inégalité est claire, sinon, $u \in BV$.

Soit $u \in C_c^\infty$. On a montré dans le cadre de la dimension 1 que $u_n = \sum_{i,j} \hat{u}_{i,j} \chi_{i,j}$ tend dans L^2 vers u. Soit $L = \sup_{[0,1]^2} ||D^2 u||$ alors

$$\begin{aligned}
|u(x + h, y) - u(x, y) - h \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)| &\leq Lh^2 \\
|u(x, y + h) - u(x, y) - h \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)| &\leq Lh^2.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
|\hat{u}_{i+1,j} - \hat{u}_{i,j}| &\leq \frac{1}{|C_i, j|} \int_{(h-1)j}^{hj} \int_{(h-1)i}^{hi} |u(x + h, y) - u(x, y)| dx dy \\
&\leq \frac{1}{|C_{i,j}|} \int_{C_{i,j}} h |\frac{\partial u}{\partial x}| + Ch^2
\end{aligned}$$

et de même pour $|\hat{u}_{i,j+1}-\hat{u}_{i,j}|$, si $\psi(x,y) = (h|\frac{\partial u}{\partial x}|+Ch^2, h|\frac{\partial u}{\partial y}|+Ch^2)$ et $f(x,y) = ||(x,y)||_2$ alors l'inégalité de Jensen appliquée à f et ψ donne $f(\frac{1}{|C_{i,j}|}\int_{C_{i,j}}\psi) \leq \frac{1}{|C_{i,j}|}\int_{C_{i,j}} f(\psi)$. D'où,

$$\sqrt{|\hat{u}_{i+1,j}-\hat{u}_{i,j}|^2+|\hat{u}_{i,j+1}-\hat{u}_{i,j}|^2} \leq \frac{h}{|C_{i,j}|}\int_{C_{i,j}}\sqrt{(|\frac{\partial u}{\partial x}|+Ch)^2+(|\frac{\partial u}{\partial y}|+Ch)^2}$$

$$\text{et} \qquad E_k(u_k) \leq \int_{[0,1]^2}(u-g)^2+\int_{[0,1]^2}\sqrt{(|\frac{\partial u}{\partial x}|+Ch)^2+(|\frac{\partial u}{\partial y}|+Ch)^2}.$$

Donc par le Théorème de convergence dominée $\overline{\lim} E_k(u_k) \leq E(u)$ pour $u \in C_c^\infty$.

Pour $u \in BV$, d'après le Théorème 3, il existe une suite $(u^{(n)})$ dans C_c^∞ qui tend vers u dans L^2 et telle que $\int_\Omega |Du^{(n)}|$ tend vers $\int_\Omega |Du|$.

Pour chaque n, $u_k^{(n)}$ tend vers $u^{(n)}$ et $\overline{\lim} E_k(u_k^{(n)}) \leq E(u^{(n)})$.
On construit alors par récurrence deux suites n_i et k_i telles que,

$$\begin{aligned} ||u^{(n_1)}-u||_{L^2} &\leq \frac{1}{2} \\ ||u_{k_1}^{(n_1)}-u^{(n_1)}||_{L^2} &\leq \frac{1}{2} \\ \sup_{k\geq k_1} E_k(u_k^{(n_1)}) &\leq E(u)+1 \end{aligned}$$

et pour $i \geq 2$

$$\begin{aligned} & n_i > n_{i-1} \quad \text{et} \quad k_i > k_{i-1} \\ & ||u^{(n_i)}-u||_{L^2} \leq \frac{1}{2^i} \\ & \forall k \geq k_i \quad ||u_k^{(n_i)}-u^{(n_i)}||_{L^2} \leq \frac{1}{2^i} \\ & \sup_{k\geq k_i} E_k(u_k^{(n_i)}) \leq E(u)+\frac{1}{2^{i-1}}. \end{aligned}$$

On pose alors

$$u_k = u_k^{(n_i)} \qquad \text{si} \quad k_{i+1} > k \geq k_i.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et j tel que $\frac{1}{2^j} < \varepsilon$.

$$\forall k \geq k_j \quad ||u_k-u||_{L^2} \leq 2\varepsilon.$$

Donc $u_k \to u$. D'autre part,

$$\begin{aligned} & \forall l \geq k \quad E_k(u_k) = E_k(u_k^{(n_i)} \qquad \text{avec} \quad n_i \geq n_j \\ & \text{donc} \qquad E_k(u_k^{(n_i)}) \leq \sup_{k\geq k_i} E_k(u_k^{(n_i)}) \leq E(u)+\frac{1}{2^{j-1}} \\ & \text{d'où} \qquad \sup_{l\geq k} E_k(u_k) \leq E(u)+\frac{1}{2^{j-1}} \\ & \text{et finallement} \qquad \overline{\lim}\, E_k(u_k) \leq E(u). \end{aligned}$$

Ce qui nous donne **(ii)**.

Montrons enfin **(iii)** :

Si $E_k(u_k) \leq C \leq +\infty$ alors

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]^2} |Du_k| &= h \sum_{i,j} |u_{i+1,j} - u_{i,j}| + |u_{i,j+1} - u_{i,j}| \\
&\leq \sqrt{2}\, h \sum_{i,j} \sqrt{|u_{i+1,j} - u_{i,j}|^2 + |u_{i,j+1} - u_{i,j}|^2} \\
&\leq \sqrt{2}\, E_k(u_k) \\
&\leq \sqrt{2}\, C.
\end{aligned}$$

Donc (u_k) est bornée dans BV et le théorème 4 nous montre l'existence de $u \in L^1$ et d'une sous-suite de (u_k) qui converge vers u, ce qui prouve **(iii)**.

Références

[1] G. Allaire, *Analyse Numérique et Optimisation*, Cours de l'X.

[2] L.D. Berkovitz, *Convexity and optimization in* $\mathbb{R}^n$, Wiley interscience publication.

[3] A. Chambolle et P.L. Lions, *Image recovery via total variation minimization and related problems*, Research Report No 9509, CEREMADE, Université de Paris-Dauphine (1995).

[4] A. Chambolle, *Total Variation Minimization and a Class of Binary MRF Models*, EMMCVPR (2005).

[5] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, SIAM Classics in Applied Mathematics.

[6] G. Dal Maso, *An introduction to* Γ*-convergence*, Birkhäuser, Boston (1993).

[7] D. Dobson et F. Santosa, *Recovery of blocky images from noisy and blurred data*, Tech. Report No. 94-7, Center for the Mathematics of Waves, University of Delaware (1994).

[8] C. Dossal *Estimation de fonctions géométriques et déconvolution*, Thèse de doctorat (2005).

[9] I.Ekeland et R.Temam, *Convex analysis and variational problems*, NorthHolland, Amsterdam (1976).

[10] E. Giusti, *Minimal Surfaces and functions of bounded variation*, Birkhäuser, Boston (1984).

[11] L.I. Rudin, S. Osher et E. Fatemi, *Nonlinear Total Variation Based Noise Removal Algorithms*, Physica D., vol. 60 (1992), pp 163-191.

[12] C. Villani, *Cours d'Intégration et d'analyse de Fourier.*

[13] C. Villani, *Cours d'Analyse approfondie.*

[14] C.R. Vogel, *Nonsmooth Regularization*, Inverse Problems in Geophysical Applications, pp. 1-11, edited by H.W. Engl, A.K. Louis, and W. Rundell, SIAM, (1997).

[15] C.R. Vogel et M.E. Oman, *Iterative methods for total variation denoising*, SIAM J.Sci.Comp., vol.17 (1996).