Università degli Studi di Napoli Federico II

SCUOLA POLITECNICA E DELLE SCIENZE DI BASE
AREA DIDATTICA SCIENZE MM.FF.NN.

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Tesi di Laurea
in Geometria differenziale

Alcune relazioni tra curvatura e topologia per mezzo delle funzioni distanza

Relatore
Chiar.mo
Prof.Carlo Maria Mantegazza

Candidata
Francesca Oronzio
Matr. N98000283

Anno Accademico 2017-2018

Indice

Introduzione

Lo studio delle relazioni tra la curvatura e la topologia di una varietà è sicuramente tra i più affascinanti della geometria, in quanto concerne la possibilità di avere conclusioni geometriche o topologiche di carattere globale a partire da assunzioni soltanto locali sulla curvatura delle varietà.

Il primissimo risultato di questa tematica, studiata estensivamente per tutto il secolo scorso e in continuo sviluppo, è dato dal teorema di Bonnet che nel 1855 mostrò in [**2**] che una superficie con curvatura (gaussiana) uniformemente positiva ha diametro limitato. Come conseguenza, se è completa, deve essere compatta (Hopf–Rinow [**6**]), vedi la Sezione 3.3. Ciò formalizza (in modo quantitativo) l'intuizione che una superficie che curva sempre abbastanza nella stessa direzione ad un certo punto "si deve chiudere".

Un ruolo importante nello stabilire queste relazioni tra informazioni locali e globali è svolto dallo studio delle geodetiche, cioè le curve (localmente) di minima lunghezza, avendo realizzato che una completa conoscenza di esse permette una descrizione esaustiva delle proprietà geometriche di una varietà. L'analisi del flusso geodetico, che ha un aspetto sia locale che globale (e si può euristicamente identificare in ciò il motivo per cui fornisca la connessione di cui sopra) può essere sviluppata in modo "classico", secondo un punto di vista "lagrangiano" (o variazionale) di studio delle soluzioni del sistema di equazioni differenziali ordinarie che esse soddisfano, oppure dal punto di vista "euleriano" delle funzioni distanza tra punti o sottoinsiemi della varietà, che sono ovviamente realizzate dalla lunghezza delle curve geodetiche tra di essi. Il passaggio inverso, dalle funzioni distanza alle geodetiche si ottiene in quanto le geodetiche sono localmente le curve integrali del gradiente delle funzioni distanza.

Questa connessione offre la possibilità dell'utilizzo di strumenti più "analitici" (in alternativa a quelli "geometrici" classici), legati allo studio generale delle funzioni distanza, viste semplicemente come soluzioni delle equazioni di tipo *Hamilton–Jacobi* $\|\nabla u\| = 1$ (si vedano [**8, 9**] per maggiori dettagli). Svilupperemo dunque in dettaglio questo secondo approccio "analitico" (al momento ancora soltanto accennato in letteratura) e seguendo una proposta di Petersen in [**10**], proveremo alcuni teoremi relativi alla connessione tra curvatura e topologia, quali quello dell'esistenza di intorni isometrici tra varietà riemanniane di ugual curvatura sezionale costante 3.1.1, i *teoremi di Cartan–Hadamard* 3.2.3 e *di Bonnet–Myers* 3.3.1, e il cosiddetto *lemma di Synge* 3.3.3 con entrambi gli approcci. Inoltre, mostreremo la dimostrazione del *teorema massimale di Cheng* 3.4.8 col metodo "analitico".

La dimostrazione del teorema massimale di Cheng proviene dal libro di Petersen [**10**], mentre quella del teorema dell'esistenza di intorni isometrici tra varietà riemanniane di ugual curvatura sezionale costante e del lemma di Synge, lì soltanto abbozzate, sono nella tesi sviluppate con tutti i dettagli. Non presenti in letteratura sono invece le dimostrazioni dei teoremi di Cartan–Hadamard e di Bonnet–Myers secondo l'approccio "analitico". Per permettere al lettore di valutare e apprezzare le differenze e i vantaggi e gli svantaggi (in genere di tipo tecnico) di entrambi i metodi, abbiamo deciso di presentare (ad eccezione del teorema massimale di Cheng) in parallelo anche le dimostrazioni "standard", secondo l'approccio "classico" basato sulla *formula di variazione seconda della lunghezza*.

Nel Capitolo 1, dopo aver richiamato i concetti e i risultati di base della geometria riemanniana, introdurremo gli strumenti dell'approccio "classico", inoltre discuteremo le funzioni distanza da un punto e le carte ad esse adattate, che sono quelle che individuano localmente le *coordinate polari* centrate in tale punto. Nel Capitolo 2 sviluppiamo in dettaglio l'apparato dell'approccio "analitico", introducendo le "equazioni fondamentali della geometria riemanniana" che descrivono la curvatura della varietà in termini delle funzioni distanza. Mediante le coordinate polari, studiamo dunque il comportamento della metrica e dell'hessiano della distanza da un punto lungo le geodetiche. Utilizzeremo poi tali informazioni nel Capitolo 3 per dimostrare i teoremi di cui sopra.

Gli sviluppi di questo nostro lavoro di tesi sono legati alla possibilità di semplificare le dimostrazioni di altri teoremi in questo ambito e di ottenere risultati nuovi per mezzo di questo punto di vista "analitico" alternativo.

CAPITOLO 1

Varietà riemanniane

In questo capitolo raccogliamo una serie di concetti e risultati di base della geometria differenziale e riemanniana che utilizzeremo in tutta la tesi, possibili riferimenti per il materiale di questa sezione sono i testi **[1, 3, 5]**.

A meno che diversamente specificato, tutte le varietà che considereremo sono di Hausdorff, a base numerabile, connesse, n–dimensionali e di classe C^∞, tutte le funzioni e campi vettoriali saranno di classe C^∞.

Regolare significherà di classe C^∞. Inoltre, useremo la convenzione di Einstein degli indici ripetuti per i tensori (gli indici ripetuti sono sommati).

1.1. Il tensore metrico e la connessione di Levi–Civita

DEFINIZIONE 1.1.1. *Data una varietà differenziale M, un* tensore metrico *o semplicemente una* metrica *su M è un tensore $g \in \Gamma\left(TM^* \otimes TM^*\right)$*

(1) simmetrico*:*

$$g_p(v, w) = g_p(w, v) \qquad \textit{per ogni } v, w \in T_pM$$

(2) definito positivo*:*

$$g_p(v, v) > 0 \qquad \textit{per ogni } v \in T_pM,\ v \neq 0.$$

La coppia (M, g) si dice varietà riemanniana*.*

La metrica g determina su ogni spazio tangente T_pM un prodotto scalare definito positivo $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$, con norma indotta $\|\cdot\|_p = \sqrt{g_p(\cdot,\cdot)}$. Se $(U, (x^1, \dots, x^n))$ è una carta locale, l'espressione di g in coordinate locali è data da

$$g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

per opportune funzioni $g_{ij} \in C^\infty(U)$ che in ogni punto $p \in U$ definiscono una matrice simmetrica definita positiva.
Se $(x^1, \dots, x^n)$ e $(y^1, \dots, y^n)$ sono due sistemi di coordinate definiti su uno stesso aperto $U \subseteq M$, i coefficienti delle espressioni

$$g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$$

$$g = g_{\alpha\beta}\, dy^\alpha \otimes dy^\beta$$

sono legati dalla relazione

$$g_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} g_{ij}$$

DEFINIZIONE 1.1.2. *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana. La sua* connessione di Levi–Civita ∇ *è l'applicazione*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

tale che,

(1) ∇ *è* $C^\infty(M)$*–lineare in* X
(2) ∇ *è* $\mathbb{R}$*–lineare in* Y
(3) *per ogni* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *e ogni* $f \in C^\infty(M)$ *vale la formula*

$$\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$$

(4) ∇ *è simmetrica:*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \textit{per ogni } X, Y \in \Gamma(TM)$$

(5) ∇ *è compatibile con la metrica* g*:*

$$X\left(g(Y, Z)\right) = g\left(\nabla_X Y, Z\right) + g\left(Y, \nabla_X Z\right) \quad \textit{per ogni } X, Y, Z \in \Gamma(TM)$$

Si dimostra che questa definizione è ben posta, cioè che esiste e è unica un'applicazione soddisfacente le condizioni precedenti.

Sia ∇ la connessione di Levi–Civita su una varietà riemanniana (M, g). Se $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$, $Y_1, Y_2 \in \Gamma(TM)$ e $p \in M$, in ciascuno dei seguenti casi

(1) $X_1(p) = X_2(p)$ e $Y_1 = Y_2$ in un intorno di p
(2) Esiste una curva $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tale che $\sigma(0) = p$, $\sigma'(0) = X(p)$ e $Y_1 \circ \sigma = Y_2 \circ \sigma$,

si ha che

$$\left(\nabla_{X_1} Y_1\right)_p = \left(\nabla_{X_2} Y_2\right)_p .$$

Sia $(U, (x^1, \ldots, x^n))$ una carta locale e $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ i corrispondenti campi coordinati su U. Se

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \qquad \text{e} \qquad Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

sono campi vettoriali su U si ha che

$$\nabla_X Y = \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right).$$

Dunque, se definiamo i coefficienti Γ_{ij}^k mediante la formula

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

si ha che

$$\nabla_X Y = X^i \left(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^j \Gamma_{ij}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

I coefficienti Γ_{ij}^k sono detti *simboli di Christoffel* della connessione ∇.
Per la simmetria di ∇, i suoi simboli di Christoffel soddisfano le relazioni

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

mentre, per la compatibilità con la metrica, le uguaglianze

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \left(\Gamma_{ki}^l \, g_{lj} + \Gamma_{kj}^l \, g_{li} \right)$$

per ogni $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$.
Sfruttando tali relazioni si dimostra che

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right)$$

dove g^{kl} sono i coefficienti dell'inversa della matrice (g_{ij}) dei coefficienti della metrica.

1.2. Derivata covariante e campi paralleli lungo una curva

Siano (M, g) una varietà riemanniana, ∇ la sua connessione di Levi–Civita e $\sigma : I \to M$ una curva regolare, con $I \subseteq \mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 1.2.1. *Un* campo vettoriale lungo σ *è un'applicazione differenziabile $V : I \to TM$ che soddisfa la seguente condizione*

$$V(t) \in T_{\sigma(t)} M$$

per ogni $t \in I$.
Se V è un campo vettoriale lungo σ, diremo che è localmente estendibile *se esistono un aperto U di M e un campo vettoriale X su U tali che*

$$\{\sigma(t)\}_{t \in I} \subseteq U \qquad e \qquad X(\sigma(t)) = V(t)$$

per ogni $t \in I$.

È immediato vedere che l'insieme $\mathcal{T}(\sigma)$ dei campi vettoriali lungo σ ha una naturale struttura di modulo su $C^\infty(I)$.

DEFINIZIONE 1.2.2. *Chiamiamo* derivata covariante lungo σ *l'operatore*

$$D : \mathcal{T}(\sigma) \to \mathcal{T}(\sigma)$$

tale che:

(1) *D è $\mathbb{R}$–lineare*
(2) *per ogni $f \in C^\infty(I)$ vale la formula*

$$\nabla_t(fV) = f'(t)V(t) + f(t)\nabla_t V$$

(3) *se $V(t)$ è un campo localmente estendibile e X è una sua estensione locale, vale la formula*

$$\nabla_t V = \nabla_{\sigma'(t)} X,$$

dove $\nabla_t V = (DV)(t)$.

Come prima, si dimostra che questa definizione è ben posta, cioè che esiste e è unico un operatore soddisfacente le condizioni precedenti.

Dalle proprietà della derivata covariante si deduce in modo immediato che, preso un intervallo $J \subseteq I$, si ha che

$$\nabla_t V = \overline{\nabla}_t(V|_J) \qquad \text{per ogni } t \in J \text{ e per ogni } V \in \mathcal{T}(\sigma),$$

dove $\overline{D}$ indica l'operatore di derivata covariante associato alla curva $\sigma|_J$.
Se $(U, (x^1, \dots, x^n))$ è una carta locale e $V \in \mathcal{T}(\sigma)$, segue allora che

$$\nabla_{t_0} V = \nabla_{t_0} \sum_{i=1}^n V^i(t) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{\sigma(t)} = \sum_{k=1}^n \Big[V'^k(t_0) + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(\sigma(t_0))\, \sigma'^i(t_0)\, V^j(t_0) \Big] \left.\frac{\partial}{\partial x^k}\right|_{\sigma(t_0)}$$

per ogni $t_0 \in J$ e $J = \sigma^{-1}(U)$.

DEFINIZIONE 1.2.3. *Se V è un campo vettoriale lungo una curva σ, diciamo che V è* parallelo lungo σ *se $\nabla_t V = 0$ su I. Se X è un campo vettoriale in un aperto $U \subseteq M$, diciamo che X è* parallelo *se $\nabla_Y X = 0$ per ogni campo Y in U.*

Un fatto fondamentale riguardo i campi paralleli lungo una curva σ è che ogni vettore di T_pM, con p punto di σ, può essere esteso a un campo parallelo lungo tutta σ.

PROPOSIZIONE 1.2.4. *Sia $t_0 \in I$, per ogni $v \in T_{\sigma(t_0)}M$ esiste un unico campo $V \in \mathcal{T}(\sigma)$ parallelo lungo σ tale che $V(t_0) = v$.*

Sfrutteremo costantemente i seguenti fatti che coinvolgono i campi vettoriali e paralleli lungo σ, conseguenze della compatibilità di ∇ rispetto a g.

(1) Per ogni coppia di campi vettoriali V, W lungo σ si ha

$$\frac{d}{dt}g(V,W) = g(\nabla_t V, W) + g(V, \nabla_t W)$$

(2) per ogni coppia di campi paralleli V, W lungo σ la funzione $g(V,W)$ è costante.

1.3. Il tensore di curvatura

Siano (M, g) una varietà riemanniana e ∇ la sua connessione di Levi–Civita.

DEFINIZIONE 1.3.1. *Il* tensore di curvatura *o* di Riemann *di* (M,g) *è il tensore di tipo* $(1,3)$ *definito da*

$$\mathrm{R}(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{1.1}$$

per ogni X, Y, Z *campi vettoriali su* M.

Tale definizione è ben in quanto la mappa definita mediante la formula (1.1), è $C^\infty(M)$–lineare in tutte le sue variabili, dunque è tensoriale.

In una carta locale $(U, (x^1, \dots, x^n))$, se X, Y, Z sono campi vettoriali su U, si ha

$$\mathrm{R}(X,Y)Z = \mathrm{R}\Big(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) Z^k \frac{\partial}{\partial x^k} = X^i Y^j Z^k \, \mathrm{R}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

dunque se definiamo i coefficienti R^l_{ijk} mediante la formula

$$\mathrm{R}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\frac{\partial}{\partial x^k} = \mathrm{R}^l_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l},$$

abbiamo

$$\mathrm{R}(X,Y)Z = \mathrm{R}^l_{ijk} X^i Y^j Z^k \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Si può mostrare che i coefficienti R^l_{ijk} sono legati ai simboli di Christoffel di ∇ rispetto alla carta locale $(U, (x^1, \dots, x^n))$ dalla seguente formula

$$\mathrm{R}^l_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^l_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^l_{ik}}{\partial x^j} + \big[\Gamma^h_{jk}\Gamma^l_{ih} - \Gamma^h_{ik}\Gamma^l_{jh}\big].$$

In certi casi risulta più utile considerare la versione $(0,4)$ del tensore di Riemann che andiamo ora a definire.

DEFINIZIONE 1.3.2. *Il* tensore di curvatura $(0,4)$ *è definito come segue*

$$\mathrm{R}(X,Y,Z,W) = g(\mathrm{R}(X,Y)Z, W)$$

per ogni X, Y, Z, W *campi vettoriali su* M.

In coordinate date dalla carta $(U,(x^1,\dots,x^n))$, per X,Y,Z,W campi vettoriali su U, abbiamo che

$$\mathrm{R}(X,Y,Z,W)=\mathrm{R}\Big(X^i\frac{\partial}{\partial x^i},Y^j\frac{\partial}{\partial x^j},Z^k\frac{\partial}{\partial x^k},W^h\frac{\partial}{\partial x^h}\Big)=\mathrm{R}_{ijkh}X^iY^jZ^kW^h$$

dove

$$\mathrm{R}_{ijkh}=g_{lh}\mathrm{R}_{ijk}^l.$$

Per ogni $X,Y,Z,W\in\Gamma(TM)$, valgono le seguenti proprietà:

(1) antisimmetria nelle prime due entrate,

$$\mathrm{R}(X,Y,Z,W)=-\mathrm{R}(Y,X,Z,W)$$

(2) antisimmetria nelle ultime due entrate,

$$\mathrm{R}(X,Y,Z,W)=-\mathrm{R}(X,Y,W,Z)$$

(3) simmetria per scambio della prima con la seconda coppia di entrate,

$$\mathrm{R}(X,Y,Z,W)=\mathrm{R}(Z,W,X,Y)$$

(4) prima *identità di Bianchi*,

$$\mathrm{R}(X,Y)Z+\mathrm{R}(Y,Z)X+\mathrm{R}(Z,X)Y=0. \tag{1.2}$$

DEFINIZIONE 1.3.3. *Chiamiamo* tensore di curvatura algebrico *nel punto $p\in M$ una qualunque forma quadrilineare $\widetilde{\mathrm{R}}:T_pM\times T_pM\times T_pM\times T_pM\to T_pM$ che verifichi:*

2) $\widetilde{\mathrm{R}}(X,Y,Z,W)=-\widetilde{\mathrm{R}}(Y,X,Z,W)$
3) $\widetilde{\mathrm{R}}(X,Y,Z,W)=-\widetilde{\mathrm{R}}(X,Y,W,Z)$
4) $\widetilde{\mathrm{R}}(X,Y,Z,W)=\widetilde{\mathrm{R}}(Z,W,X,Y)$
1) *l'identità di Bianchi* (1.2).

Ovviamente per ogni punto $p\in M$, R_p è un operatore di curvatura algebrico nel punto $p\in M$.

DEFINIZIONE 1.3.4. *Siano $v,w\in T_pM$ linearmente indipendenti. Definiamo la* curvatura sezionale *del piano $\pi\subseteq T_pM$, generato dai due vettori v,w, come*

$$\mathrm{Sec}_p(\pi)=\mathrm{Sec}_p(v,w)=\frac{\mathrm{R}_p(v,w,w,v)}{\|v\|_p^2\|w\|_p^2-g_p^2(v,w)} \tag{1.3}$$

Questa definizione è ben posta poiché il valore dell'espressione che compare in (1.3) si mostra non dipendere dalla particolare coppia di generatori di π. Il tensore di Riemann definisce dunque la curvatura sezionale, viceversa, la curvatura sezionale determina completamente il tensore di Riemann, infatti vale la seguente proposizione, tenendo conto che puntualmente il tensore di curvatura è un tensore di curvatura algebrico.

PROPOSIZIONE 1.3.5. *Siano* $\widetilde{\mathrm{R}}$, $\widehat{\mathrm{R}}$ *due operatori di curvatura algebrici in* $p \in M$. *Poniamo per ogni* $v, w \in T_pM$

$$\widetilde{\mathrm{Sec}}_p\,(v,w) = \frac{\widetilde{\mathrm{R}}\,(v,w,w,v)}{\|v\|_p^2\|w\|_p^2 - g_p^2(v,w)} \quad e \quad \widehat{\mathrm{Sec}}_p\,(v,w) = \frac{\widehat{\mathrm{R}}\,(v,w,w,v)}{\|v\|_p^2\|w\|_p^2 - g_p^2(v,w)}.$$

Allora $\widetilde{\mathrm{Sec}}_p = \widehat{\mathrm{Sec}}_p$ *se e solo se* $\widetilde{\mathrm{R}} = \widehat{\mathrm{R}}$.

DEFINIZIONE 1.3.6. *Una varietà riemanniana ha* curvatura sezionale costante *(o semplicemente* curvatura costante*)* $k \in \mathbb{R}$ *se* $\mathrm{Sec}_p\,(\pi) = k$ *per ogni* $p \in M$ *e per ogni* 2*–piano* $\pi \subseteq T_pM$.

DEFINIZIONE 1.3.7. *Chiamiamo* tensore di Ricci *il tensore* $(0,2)$ *dato dalla traccia "parziale" dell'operatore di Riemann*

$$\mathrm{Ric}\,(X,Y) = \mathrm{tr}\,(Z \mapsto \mathrm{R}\,(Z,X)\,Y) \tag{1.4}$$

per ogni X, Y *campi vettoriali su* M.

Tale definizione è ben posta poiché si dimostra che $\mathrm{Ric}(\cdot,\cdot)$, definito mediante la formula (1.4), è $C^\infty\,(M)$–lineare nelle sue due variabili.

In coordinate rispetto alla carta $(U,(x^1,\dots,x^n))$, per X, Y campi vettoriali su U, abbiamo

$$\mathrm{Ric}\,(X,Y) = \mathrm{Ric}\Big(X^i\frac{\partial}{\partial x^i}, Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = X^iY^j\mathrm{Ric}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)$$

dunque

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = X^iY^j\mathrm{Ric}_{ij}$$

dove

$$\mathrm{Ric}_{ij} = \mathrm{Ric}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\Big).$$

Dalla definizione segue l'uguaglianza

$$\mathrm{Ric}_{ij} = \mathrm{R}_{kij}^k = g^{kl}\mathrm{R}_{iklj},$$

dunque il tensore Ric è simmetrico.

Definiamo ora anche la versione $(1,1)$ del tensore di Ricci.

DEFINIZIONE 1.3.8. *Il* tensore di Ricci *di tipo* $(1,1)$ *è definito dalla formula*

$$\mathrm{Ric}(X,Y) = g(\mathrm{Ric}(X),Y)$$

per ogni X, Y *campi vettoriali su* M.

In coordinate rispetto alla carta $(U, (x^1, \dots, x^n))$, per X campo vettoriale su U, abbiamo

$$\mathrm{Ric}(X) = \mathrm{Ric}\Big(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = X^i \mathrm{Ric}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big),$$

dunque

$$\mathrm{Ric}(X) = \mathrm{Ric}\Big(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = \mathrm{Ric}_i^j X^i \frac{\partial}{\partial x^j},$$

dove

$$\mathrm{Ric}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = \mathrm{Ric}_i^j \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Ric}_i^j = \mathrm{Ric}_{ik} g^{kj}.$$

Il tensore di curvatura, quello di Ricci e la curvatura sezionale sono legati tra loro, infatti se $v \in T_pM$ è tale che $\|v\|_p = 1$, scelta $\{v, e_2, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di T_pM, si ha

$$\mathrm{Ric}_p\,(v, v) = g(\mathrm{R}_p(v, v)v, v) + \sum_{i=2}^{n} \mathrm{R}_p(e_i, v, v, e_i) = \sum_{i=2}^{n} \mathrm{Sec}_p(e_i, v).$$

DEFINIZIONE 1.3.9. *Definiamo* curvatura scalare *la funzione* $\mathrm{Scal} : M \to \mathbb{R}$ *definita dalla traccia del tensore di Ricci,*

$$\mathrm{Scal}(p) = \mathrm{tr}(\mathrm{Ric}_p)$$

per ogni $p \in M$.

In coordinate locali rispetto alla carta $(U, (x^1, \dots, x^n))$, si ha che

$$\mathrm{Scal} = \mathrm{Ric}_i^i = g^{ij}\mathrm{Ric}_{ij} = g^{ij} g^{kl} \mathrm{R}_{iklj}.$$

1.4. Distanza riemanniana, topologia indotta e completezza

Siano (M, g) una varietà riemanniana e ∇ la sua connessione di Levi–Civita.

DEFINIZIONE 1.4.1. *Una* geodetica *per* ∇ *è una curva* $\sigma : I \to M$ *tale che* $\nabla_t \sigma' = 0$ *su* $I \subseteq \mathbb{R}$, *cioè il vettore* velocità σ' *della curva è parallelo lungo* σ.

In generale, l'essere una geodetica dipende dalla parametrizzazione ma riparametrizzazioni lineari di una geodetica sono ancora geodetiche. Sia (U, x) una carta locale $x : U \to \mathbb{R}^n$ e scriviamo $x \circ \sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^n)$. La curva σ è allora una geodetica se e solo se soddisfa il sistema di equazioni differenziali ordinarie

$$(\sigma^k)'' + \sum_{i,j=1}^{n} (\Gamma_{ij}^k \circ \sigma)(\sigma^i)'(\sigma^j)' = 0 \tag{1.5}$$

per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$.

PROPOSIZIONE 1.4.2. *Per ogni $p \in M$ e $v \in T_pM$ esistono un intervallo aperto $I \subseteq \mathbb{R}$ con $0 \in I$ e una geodetica $\sigma : I \to M$ tale che $\sigma(0) = p$ e $\sigma'(0) = v$. Inoltre se $\widetilde{\sigma} : \widetilde{I} \to M$ è un'altra geodetica soddisfacente le stesse condizioni allora σ e $\widetilde{\sigma}$ coincidono su $I \cap \widetilde{I}$.*

Questa proposizione assicura che la seguente definizione sia ben posta.

DEFINIZIONE 1.4.3. *Per ogni $p \in M$ e per ogni $v \in T_pM$ indicheremo con $\sigma_v : I \to M$ l'unica geodetica massimale tale che $\sigma_v(0) = p$ e $\sigma_v'(0) = v$.*

PROPOSIZIONE 1.4.4. *Siano $p \in M$, $v \in T_pM$ e $c, t \in \mathbb{R}$. Allora si ha $\sigma_{cv}(t) = \sigma_v(ct)$ non appena uno dei due membri è definito.*

DEFINIZIONE 1.4.5. *Definiamo E l'insieme costituito dai $v \in TM$ tale che σ_v è definita in un intervallo aperto contenente $[0, 1]$. La* mappa esponenziale *$exp : E \to M$ di ∇ è allora definita da $exp(v) = \sigma_v(1)$. Inoltre, se $p \in M$ scriveremo $E_p = E \cap T_pM$ e $exp_p = exp|_{E_p}$.*

Esponiamo alcune proprietà importanti della mappa esponenziale nella proposizione seguente.

PROPOSIZIONE 1.4.6. *Si ha che:*

- *l'insieme E è un intorno aperto della sezione nulla di TM e ciascun insieme E_p è un aperto stellato rispetto all'origine O_p di T_pM*
- *per ogni $v \in TM$ la geodetica massimale è data da $\sigma_v(t) = exp(tv)$ per tutti i valori $t \in \mathbb{R}$ per i quali uno dei due membri è definito*
- *la mappa esponenziale è di classe C^∞.*

Vediamo ora nella seguente proposizione che la mappa esponenziale è un diffeomorfismo attorno all'origine O_p di ogni spazio tangente T_pM alla varietà.

PROPOSIZIONE 1.4.7. *Sia $p \in M$. Allora $d(exp_p)_{O_p} = Id$, la mappa identità di T_pM, identificando canonicamente $T_{O_p}(T_pM)$ con T_pM. In particolare, esistono un intorno aperto U di O_p in T_pM e un intorno aperto V di p in M tali che la restrizione $exp_p|_U : U \to V$ sia un diffeomorfismo.*

La seguente definizione è allora ben posta.

DEFINIZIONE 1.4.8. *Sia $p \in M$. Un intorno aperto V di p in M diffeomorfo tramite exp_p a un intorno aperto stellato U di O_p in T_pM è detto intorno* normale *di p.*

DEFINIZIONE 1.4.9. *Dato* $p \in M$*, indichiamo con* $B_\varepsilon(O_p) \subseteq T_pM$ *la palla aperta di centro l'origine e raggio* $\varepsilon > 0$ *in* T_pM*, dotato del prodotto scalare* g_p.
Il raggio d'iniettività $\mathrm{inj}(p) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ *di* M *in* p *è definito come l'estremo superiore degli* $\varepsilon > 0$ *tali che* $exp_p|_{B_\varepsilon(O_p)}$ *è un diffeomorfismo con l'immagine (è facile vedere che tale estremo superiore è in realtà un massimo).*
La palla geodetica $B_\varepsilon(p)$ *di centro* p *e raggio* $0 < \varepsilon \leq \mathrm{inj}(p)$ *in* M *è l'intorno di* p *della forma* $exp_p(B_\varepsilon(O_p))$*, il suo bordo* $\partial B_\varepsilon(p) = exp_p(\partial B_\varepsilon(O_p))$ *è detto* sfera geodetica. *Inoltre, nel seguito indicheremo con* $B^*_\varepsilon(p) = B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$. *Le geodetiche in* $B_\varepsilon(p)$ *uscenti da* p *sono dette geodetiche* radiali.
Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ *è una base ortonormale di* T_pM *e* $\chi : T_pM \to \mathbb{R}^n$ *è l'isomorfismo dato dalle coordinate rispetto a questa base, allora le coordinate* $x = \chi \circ exp_p^{-1} : B_\varepsilon(p) \to \mathbb{R}^n$ *sono dette coordinate normali centrate in* p.

La seguente proprietà del raggio di iniettività segue facilmente dalla sua definizione e dalla regolarità della mappa esponenziale.

LEMMA 1.4.10. *La mappa* $p \mapsto \mathrm{inj}(p)$ *è semicontinua inferiormente.*

OSSERVAZIONE 1.4.11. Se (M, g) è completa la mappa $p \mapsto \mathrm{inj}(p)$ è continua, Proposizione 1.8.4.

Vediamo ora che le palle geodetiche sono effettivamente delle palle rispetto a un'opportuna distanza sulla varietà riemanniana.

DEFINIZIONE 1.4.12. *Una curva continua* $\sigma : [a, b] \to M$ *è detta* C^∞ *a tratti se esiste una suddivisione* $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ *di* $[a, b]$ *tale che* $\sigma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ *sia di classe* C^∞*, per ogni* $j = 1, \dots, k$.
Una curva continua $\sigma : [a, b] \to M$ *è detta regolare a tratti se esiste una suddivisione* $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ *di* $[a, b]$ *tale che* $\sigma|_{[t_{j-1}, t_j]}$ *sia di classe* C^∞ *e o regolare (cioè con* σ' *mai nulla) o costante (cioè con* σ' *identicamente nulla), per ogni* $j = 1, \dots, k$.

DEFINIZIONE 1.4.13. *Sia* $\sigma : [a, b] \to M$ *una curva* C^∞ *a tratti in una varietà riemanniana* (M, g). *Allora la lunghezza* $\ell(\sigma)$ *della curva* σ *è definita da*

$$\ell(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\|_{\sigma(t)}\, dt,$$

dove $\|\cdot\|_p$ *indica la norma indotta su* T_pM *dal prodotto scalare* g_p*, cioè* $\|v\|_p = \sqrt{g_p(v, v)}$*, per ogni* $v \in T_pM$.

La funzione $t \to \|\sigma'(t)\|_{\sigma(t)}$ è ovviamente integrabile nel senso di Riemann (o Lebesgue), pertanto $\ell(\sigma)$ è ben definita e è un numero reale non negativo. Inoltre $\ell(\sigma)$ è invariante per riparametrizzazione.

DEFINIZIONE 1.4.14. *Diremo che la curva C^∞ a tratti $\sigma : [a,b] \to M$ è parametrizzata in lunghezza d'arco se $\|\sigma'(t)\|_{\sigma(t)} = 1$ quando $\sigma'(t)$ è definito. In particolare, σ non ha tratti "costanti" e*

$$s(t) = \int_a^t \|\sigma'(u)\|_{\sigma(u)}\, du = t - a,$$

per ogni $t \in [a,b]$.

DEFINIZIONE 1.4.15. *Sia (M,g) una varietà riemanniana connessa. La funzione $d : M \times M \to \mathbb{R}$, definita ponendo $d(p,q)$ uguale all'estremo inferiore dei valori $\ell(\sigma)$, nell'insieme delle curve C^∞ a tratti σ che congiungono p a q, è detta* distanza riemanniana *su M indotta da g.*

È facile vedere che per ogni $p \in M$ l'insieme dei punti di M congiungibili a p con una curva regolare a tratti è un aperto di M, quindi, poiché M è connessa, per ogni coppia di punti di M esiste una curva regolare a tratti che li collega. La definizione precedente è dunque ben posta.

PROPOSIZIONE 1.4.16. *La funzione d è una metrica che induce su M la stessa topologia di cui M è dotata.*

Vedremo che per ogni $p \in M$ la funzione distanza dal punto p, cioè $d(p,\cdot)$, in ogni palla geodetica $B_\varepsilon(p) \subseteq M$ di centro p e raggio $0 < \varepsilon \leq \mathrm{inj}(p)$ ha una semplice espressione per mezzo della mappa esponenziale e è di classe C^∞ sulla palla geodetica "bucata" $B^*_\varepsilon(p)$. Ciò ci permetterà di mostrare che la palla geodetica $B_\varepsilon(p)$ coincide con la palla "metrica" di centro p e raggio ε di M. Le curve integrali del gradiente della funzione $d(p,\cdot)$ saranno le geodetiche radiali uscenti da p parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco. Sarà fondamentale il cosiddetto *lemma di Gauss* 1.4.22, per la cui dimostrazione avremo bisogno delle nozioni di campo vettoriale e di variazione lungo una curva C^∞ a tratti.

DEFINIZIONE 1.4.17. *Siano $p, q \in M$. Diremo che una curva C^∞ a tratti $\sigma : [a,b] \to M$ che congiunge p a q è un* segmento *se $\ell(\sigma) = d(p,q)$ e σ è parametrizzata rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco, cioè $\|\sigma'\|$ è costante sull'insieme dove σ' è definito.*

DEFINIZIONE 1.4.18. *Sia $\sigma : [a,b] \to M$ una curva C^∞ a tratti. Un campo vettoriale X lungo σ è dato da:*

- *una suddivisione $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_h = b$ di $[a,b]$ tale che $\sigma|_{[t_{j-1},t_j]}$ è di classe C^∞ per $j = 1, \dots, h$*

- *campi vettoriali* $X_j = X|_{[t_{j-1},t_j]}$ *lungo* $\sigma|_{[t_{j-1},t_j]}$ *per* $j = 1, \ldots, h$.

Se i campi vettoriali X_j *si raccordano con continuità nei punti interni* $t_1, \ldots, t_{h-1}$ *della suddivisione diremo che* X *è un campo continuo.*

DEFINIZIONE 1.4.19. *Sia* $\sigma : [a, b] \to M$ *una curva* C^∞ *a tratti. Una* variazione *di* σ *è un'applicazione continua* $\Sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ *tale che,*

- $\Sigma(0, \cdot) = \sigma$
- *esiste una suddivisione* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_h = b$ *di* $[a, b]$ *(detta suddivisione associata a* Σ*) tale che* $\Sigma|_{(-\varepsilon,\varepsilon)\times[t_{j-1},t_j]}$ *è di classe* C^∞ *per ogni* $j = 1, \ldots, h$.

Diciamo che Σ *è* a estremi fissati *se* $\Sigma(s, a) = \sigma(a)$ *e* $\Sigma(s, b) = \sigma(b)$ *per ogni* $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.
Posto $\sigma_s = \Sigma(s, \cdot)$, *le curve* σ_s *sono* C^∞ *a tratti e chiamate curve principali della variazione* Σ.
Posto $\sigma^t = \Sigma(\cdot, t)$, *le curve* σ^t *sono di classe* C^∞ *e chiamate curve trasverse della variazione* Σ.

DEFINIZIONE 1.4.20. *Sia* $\Sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ *una variazione di una curva* C^∞ *a tratti* $\sigma : [a, b] \to M$. *Poniamo*

$$S(s,t) = \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(s,t) = d\Sigma_{(s,t)}\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big) = (\sigma^t)'(s) \qquad \forall (s,t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b]$$

$$T(s,t) = \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(s,t) = d\Sigma_{(s,t)}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) = (\sigma_s)'(t) \qquad \forall (s,t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{j-1}, t_j]$$

dove $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_h = b$ *è una suddivisione associata a* Σ. *In particolare,* $t \to S(s,t)$ *e* $t \to T(s,t)$ *sono campi vettoriali lungo* σ_s *e i campi* $s \to S(s,t)$ *e* $s \to T(s,t)$ *sono campi vettoriali lungo* σ^t.
Chiamiamo generatore infinitesimale *della variazione* Σ *il campo vettoriale lungo* σ *dato da* $V = S(0, \cdot)$.

LEMMA 1.4.21. *Sia* $\Sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ *una variazione di una curva* C^∞ *a tratti* $\sigma : [a, b] \to M$. *Su ogni rettangolo* $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{j-1}, t_j]$ *su cui* Σ *è di classe* C^∞ *si ha* $\nabla_s T = \nabla_t S$, *dove* ∇_s *è la derivata covariante lungo le curve trasverse* σ^t *e* ∇_t *è la derivata covariante lungo le curve principali* σ_s

DIMOSTRAZIONE. In coordinate locali,

$$S(s,t) = d\Sigma_{(s,t)}\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (x^i \circ \Sigma)}{\partial s}(s,t) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\Sigma(s,t)},$$

$$T(s,t) = d\Sigma_{(s,t)}\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (x^i \circ \Sigma)}{\partial t}(s,t) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\Sigma(s,t)},$$

pertanto

$$\nabla_s T = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial^2 (x^k \circ \Sigma)}{\partial s \partial t} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \circ \Sigma \frac{\partial (x^i \circ \Sigma)}{\partial t} \frac{\partial (x^j \circ \Sigma)}{\partial s} \right\} \Bigg|_{(s,t)} \frac{\partial}{\partial x^k} \Bigg|_{\Sigma(s,t)}$$

$$\nabla_t S = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \frac{\partial^2 (x^k \circ \Sigma)}{\partial t \partial s} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \circ \Sigma \frac{\partial (x^j \circ \Sigma)}{\partial t} \frac{\partial (x^i \circ \Sigma)}{\partial s} \right\} \Bigg|_{(s,t)} \frac{\partial}{\partial x^k} \Bigg|_{\Sigma(s,t)}$$

Per teorema di Schwarz e poiché $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$, essendo la connessione di Levi–Civita simmetrica, segue l'asserto. $\square$

LEMMA 1.4.22 (Lemma di Gauss). *Siano $p \in M$ e $v \in E_p$. Allora si ha*

$$g_{exp_p(v)}(d(exp_p)_v(v), d(exp_p)_v(w)) = g_p(v, w)$$

per ogni $w \in T_pM$, dove abbiamo identificato canonicamente $T_v(T_pM)$ con T_pM.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $v, w \neq O_p$, altrimenti l'asserto è ovvio. Poiché per ogni $w \in T_pM$ abbiamo

$$w = av + w^{\perp} \ \text{ con } \ a \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ g_p(v, w^{\perp}) = 0,$$

per la linearità in w della formula che vogliamo provare, ci basta analizzare separatamente i casi $w = v$ e w ortogonale a v. Nel primo caso, definiamo $\tau(t) = v + tv$, curva in T_pM, si ha

$$d(exp_p)_v(v) = (exp_p \circ \tau)'(0) = (\sigma_v(1+t))'(0) = \sigma_v'(1) \tag{1.6}$$

dove σ_v denota la geodetica massimale tale che $\sigma_v(0) = p$ e $\sigma_v'(0) = v$. Allora

$$\begin{aligned} g_{exp_p(v)}(d(exp_p)_v(v), d(exp_p)_v(v)) &= g_{exp_p(v)}(\sigma_v'(1), \sigma_v'(1)) \\ &= g_p(\sigma_v'(0), \sigma_v'(0)) \\ &= g_p(v, v), \end{aligned}$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo sfruttato che la connessione di Levi–Civita è compatibile con la metrica g, dunque per ogni coppia di campi vettoriali V e W paralleli lungo una curva σ, il prodotto $g(V, W)$ è costante. Sia ora w ortogonale a v, dobbiamo dunque provare che

$$g_{exp_p(v)}(d(exp_p)_v(v), d(exp_p)_v(w)) = g_p(v, w) = 0$$

Consideriamo la curva in T_pM

$$\tau(s) = \|v\|_p \left[\cos\left(\frac{\|w\|_p}{\|v\|_p} s \right) \frac{v}{\|v\|_p} + \sin\left(\frac{\|w\|_p}{\|v\|_p} s \right) \frac{w}{\|w\|_p} \right],$$

si ha $\tau(0) = v$, $\tau'(0) = w$ e $\|\tau(s)\|_p = \|v\|_p$ per ogni $s \in \mathbb{R}$.
Poiché $v \in E_p$, per continuità, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\tau(s) \in E_p$ per ogni

$s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, definiamo allora la variazione $\Sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \to M$ di σ_v ponendo $\Sigma(s,t) = exp_p(t\tau(s))$. Le curve principali di Σ sono ovviamente geodetiche e si ha

$$\Sigma(0,1) = exp_p(\tau(0)) = exp_p(v) = \sigma_v(1),$$
$$T(0,1) = \frac{\partial \Sigma}{\partial t}(0,1) = (\sigma_0')(1) = \sigma_v'(1),$$
$$S(0,1) = \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0,1) = d\Sigma_{(0,1)}\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big) = d(exp_p)_v(\tau'(0)) = d(exp_p)_v(w),$$

dove T e S sono le mappe nella Definizione 1.4.20. Allora abbiamo

$$g_{exp_p(v)}(d(exp_p)_v(v), d(exp_p)_v(w)) = g_{exp_p(v)}(T(0,1), S(0,1))$$

per le formule sopra e l'equazione (1.6), da cui

$$\frac{\partial}{\partial t} g(T,S) = g(\nabla_t T, S) + g(T, \nabla_t S) = g(T, \nabla_s T) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s} g(T,T),$$

dove abbiamo sfruttato che $\nabla_t T = 0$, poiché le curve principali di Σ sono geodetiche e che $\nabla_t S = \nabla_s T$, per il lemma precedente. Poiché

$$g_{\Sigma(s,t)}(T(s,t), T(s,t)) = g_{\Sigma(s,t)}(\sigma_s'(t), \sigma_s'(t)) = g_p(\sigma_s'(0), \sigma_s'(0)) = g_p(\tau(s), \tau(s)) = \|v\|_p^2$$

per ogni $(s,t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1]$, segue che

$$\frac{\partial}{\partial t} g(T,S) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s} g(T,T) = 0,$$

quindi $g(T,S)$ è indipendente da t lungo le curve principali, da cui

$$g_{exp_p(v)}(T(0,1), S(0,1)) = g_p(T(0,0), S(0,0)) = g_p(v, O_p) = 0,$$

in quanto $\Sigma(\cdot, 0) = p$ implica $S(0,0) = O_p$. La tesi è dunque dimostrata. $\square$

DEFINIZIONE 1.4.23. *Sia $B_\varepsilon(p) \subseteq M$ una palla geodetica di centro p e raggio $0 < \varepsilon \leq \mathrm{inj}(p)$. Indichiamo con $r : B_\varepsilon(p) \to \mathbb{R}^+$ la funzione definita mediante l'espressione $r(q) = \|exp_p^{-1}(q)\|_p$ per ogni $q \in B_\varepsilon(p)$ che è continua su $B_\varepsilon(p)$ e di classe C^∞ su $B^*_\varepsilon(p)$ (si noti che la funzione r^2 è invece C^∞ in tutta $B_\varepsilon(p)$). Denotiamo con $\frac{\partial}{\partial r}$ il campo radiale dato dal gradiente di r, definito su $B^*_\varepsilon(p)$.*

PROPOSIZIONE 1.4.24. *Sia $B_\varepsilon(p) \subseteq M$ una palla geodetica di centro p e raggio $0 < \varepsilon \leq \mathrm{inj}(p)$. Allora*

(1) per ogni $q = exp_p(v) \in B^*_\varepsilon(p)$ si ha

$$\frac{\partial}{\partial r}\bigg|_q = d(exp_p)_v\Big(\frac{v}{\|v\|_p}\Big) = \frac{\sigma_v'(1)}{\|v\|_p} = \sigma'_{v/\|v\|_p}(\|v\|_p)$$

e in particolare $\left\|\frac{\partial}{\partial r}\right\|_q = 1$

(2) *le geodetiche radiali uscenti da p, parametrizzate in lunghezza d'arco, sono le traiettorie (curve integrali) di $\frac{\partial}{\partial r}$.*

DIMOSTRAZIONE. Osservando che

$$\sigma_{v/\|v\|_p}(t) = \sigma_v\Big(\frac{t}{\|v\|_p}\Big)$$

otteniamo che

$$\sigma'_{v/\|v\|_p}(\|v\|_p) = \frac{\sigma'_v(1)}{\|v\|_p}.$$

Poiché $d(exp_p)_v(v) = \sigma'_v(1)$ e per la linearità di $d(exp_p)_v$ vale la seconda uguaglianza. Ci resta da vedere che

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big|_q = d(exp_p)_v\Big(\frac{v}{\|v\|_p}\Big)$$

cioè che

$$dr_q(\widetilde{w}) = g_q\Big(d(exp_p)_v\Big(\frac{v}{\|v\|_p}\Big), \widetilde{w}\Big)$$

per ogni $\widetilde{w} \in T_qM$.
Essendo $exp_p : B_\varepsilon(O_p) \to B_\varepsilon(p)$ un diffeomorfismo, allora $d(exp_p)_v$ è un isomorfismo lineare tra $T_v(T_pM)$ (che stiamo identificando con T_pM) e T_qM. Perciò esiste un unico $w \in T_pM$ tale che $d(exp_p)_v(w) = \widetilde{w}$. Da ciò segue che

$$dr_q(\widetilde{w}) = dr_q(d(exp_p)_v(w)) = dr_q \circ d(exp_p)_v(w) = d(r \circ exp_p)_v(w)$$

Poiché $r \circ exp_p = \|\cdot\|_p$ allora

$$dr_q(\widetilde{w}) = \frac{g_p(v,w)}{\|v\|_p} = g_p\Big(\frac{v}{\|v\|_p}, w\Big)$$

e dal lemma di Gauss 1.4.22 segue l'uguaglianza cercata, questo conclude la dimostrazione del primo punto della proposizione.

Sia $\sigma : [a,b] \to M$ una geodetica radiale uscente da p, parametrizzata in lunghezza d'arco. A meno di una riparametrizzazione lineare possiamo supporre che $a = 0$. Posto $v = \sigma'(0)$, allora $\sigma_v(t) = \sigma(t)$ per ogni $t \in [0,b]$. Poiché σ è radiale e essendo parametrizzata in lunghezza d'arco, abbiamo che $tv \in B^*_\varepsilon(O_p)$, per ogni $t \in (0,b]$ e la conclusione al secondo punto della proposizione,

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\sigma_v(t)} = \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{exp_p(tv)} = \sigma'_v(t),$$

dove per ottenere la seconda uguaglianza abbiamo sfruttato il primo punto e tenuto conto che $\|v\|_p = 1$. □

Vediamo ora che la funzione r non è altro che la funzione distanza dal punto p.

TEOREMA 1.4.25. *Siano p un punto di M e $0 < \varepsilon \leq \mathrm{inj}(p)$. Allora la funzione r sopra introdotta coincide con la distanza riemanniana dal punto p, cioè $r = d(p, \cdot)$. Segue che ogni palla geodetica $B_\varepsilon(p)$ è la palla di centro p e raggio ε per la distanza riemanniana di M.*
Inoltre, per ogni $v \in B_\varepsilon(O_p)$ la geodetica $\sigma_v : [0,1] \to M$ è l'unico segmento (a meno di riparametrizzazioni) in M da p a $exp_p(v)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $q \in B^*_\varepsilon(p)$. Allora esiste un unico vettore v in $B_\varepsilon(O_p) \setminus \{O_p\}$ tale che $q = exp_p(v)$. La geodetica radiale parametrizzata in lunghezza d'arco uscente da p e passante per q è la mappa γ data da $\gamma(t) = \sigma_{v/\|v\|_p}(t)$, che raggiunge q per $t = \|v\|_p$ e che è ovviamente una riparametrizzazione della geodetica σ_v. Segue che $\ell(\sigma_v) = \ell(\gamma) = \|v\|_p = r(q)$.
Per provare che r coincide con la distanza riemanniana dal punto p dobbiamo mostrare che ogni curva C^∞ a tratti che congiunge p a q ha lunghezza maggiore o uguale a $\ell(\gamma) = r(q)$. Sia $\tau : [a,b] \to M$ una tale curva, distinguiamo due casi: quando il sostegno di τ è tutto contenuto in $B_\varepsilon(p)$ e quando non lo è.
Supponiamo che $\tau([a,b]) \subseteq B_\varepsilon(p)$. Poniamo $a_1 \in [a,b]$ come l'estremo superiore dei valori $t \in [a,b]$ tali che $\tau = p$ su $[a,t]$. Essendo τ continua, risulta che $\tau(a_1) = p$. Poiché $\tau|_{[a_1,b]}$ è una curva C^∞ a tratti, sia $a_1 = t_0 < t_1 < \cdots < t_h = b$ partizione di $[a_1, b]$ tale che $\tau|_{[t_{j-1},t_j]}$ è di classe C^∞ per ogni $j = 1, \ldots, h$.
Abbiamo che $\tau'(t) = \alpha(t)\frac{\partial}{\partial r}\big|_{\tau(t)} + w(t)$ su (t_{j-1}, t_j), per ogni $j = 1, \ldots, h$ (essendo il gradiente di r definito su $B^*_\varepsilon(p)$), dove $\alpha(t)$ è una funzione C^∞ su ciascuno degli intervalli (t_{j-1}, t_j), mentre $w(t)$ è un campo vettoriale lungo $\tau(t)$ puntualmente ortogonale a $\frac{\partial}{\partial r}|_{\tau(t)}$.
Allora $\|\tau'(t)\|^2_{\tau(t)} = |\alpha(t)|^2 + \|w(t)\|^2_{\tau(t)}$ su ogni intervallo (t_{j-1}, t_j). Per la definizione di gradiente segue che

$$dr_{\tau(t)}(\tau'(t)) = g_{\tau(t)}\Big(\frac{\partial}{\partial r}, \tau'(t)\Big) = \alpha(t),$$

di conseguenza

$$\begin{aligned}\ell(\tau) &\geq \ell(\tau|_{[a_1,b]}) \\ &= \sum_{j=1}^{h} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \|\tau'(t)\|_{\tau(t)}\, dt \\ &\geq \sum_{j=1}^{h} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\alpha(t)|\, dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \sum_{j=1}^{h} \int_{t_{j-1}}^{t_j} dr_{\tau(t)}(\tau'(t))\, dt \\
&= \sum_{j=1}^{h} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{d(r \circ \tau)}{dt}(t)\, dt \\
&= r(q) - r(p) \\
&= r(q), \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

dove nella penultima uguaglianza abbiamo sfruttato che r è continua su $B_\varepsilon(p)$.

Supponiamo che $\tau([a,b])$ non sia contenuto $B_\varepsilon(p)$. Poniamo $a_1 \in [a,b]$ come l'estremo superiore dei valori $t \in [a,b]$ tali che $\tau = p$ su $[a,t]$ e $b_1 \in [a,b]$ come l'estremo inferiore dei valori $t \in [a,b]$ tali che $\tau([a,t]) \nsubseteq B_\varepsilon(p)$. Risulta allora che $\tau(a_1) = p$ e $\tau(b_1) \in \partial B_\varepsilon(p)$, perciò $a \leq a_1 < b_1 < b$ e la curva $\tau|_{(a_1,b_1)}$ è contenuta in $B^*_\varepsilon(p)$. Con un ragionamento analogo a quello precedente otteniamo che

$$\ell(\tau) \geq \ell(\tau|_{[a_1,b_1]}) \geq r(\tau(b_1)) - r(\tau(a_1)) = \varepsilon$$

essendo $r(\tau(a_1)) = r(p) = 0$ e $r(z)$ converge a ε per z che tende a $\partial B_\varepsilon(p)$. Abbiamo quindi provato che la geodetica $\sigma_v : [0,1] \to M$ è un segmento da p a q.

Vediamo quindi che $B_\varepsilon(p)$ è la palla di centro p e raggio ε per la distanza riemanniana. Poiché r su $B_\varepsilon(p)$ coincide con la distanza da p, segue che $B_\varepsilon(p)$ è contenuta nella palla di centro p e raggio ε per la distanza riemanniana. Viceversa, se q appartiene alla palla di centro p e raggio ε per la distanza riemanniana, cioè $d(p,q) < \varepsilon$, esiste, per la definizione di distanza, una curva C^∞ a tratti che congiunge p a q di lunghezza minore di ε. Per il ragionamento precedente otteniamo allora che tale curva giace in $B_\varepsilon(p)$, in particolare $q \in B_\varepsilon(p)$.

Mostriamo ora l'ultima affermazione del teorema, cioè per ogni $v \in B_\varepsilon(O_p)$ l'unico segmento in M da p a $exp_p(v)$ è σ_v (a meno di riparametrizzazioni).

Sia $v \in B_\varepsilon(O_p) \setminus \{O_p\}$. Posto $q = exp_p(v)$, abbiamo che $q \in B^*_\varepsilon(p)$ e consideriamo $\tau : [a,b] \to M$ un segmento da p a q in M. Essendo τ un segmento, $\ell(\tau) = d(p,q)$ e la curva τ è parametrizzata rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco, da cui $\tau([a,b]) \subseteq B_\varepsilon(p)$ e $\|\tau'(t)\|_{\tau(t)}$ è una costante positiva. A meno di riparametrizzare τ possiamo supporre che sia $\tau : [0, r(q)] \to M$ e τ parametrizzata in lunghezza d'arco, dunque senza tratti costanti. Sia $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_h = b$ partizione di $[a,b]$ tale che $\tau|_{[t_{j-1},t_j]}$ è di classe

C^∞ per ogni $j = 1, \dots, h$. Ripetendo l'argomento precedente, si deve avere che nella formula (1.7), tutte le disuguaglianze devono essere uguaglianze, in quanto $\ell(\tau) = d(p, q)$. Da ciò segue che la componente di $\tau'(t)$ ortogonale a $\frac{\partial}{\partial r}\big|_{\tau(t)}$ deve essere nulla e essendo τ parametrizzata in lunghezza d'arco, si deve avere $\tau'(t) = \frac{\partial}{\partial r}\big|_{\tau(t)}$ su ciascuno degli intervalli aperti precedentemente detti. Poiché dunque $\tau(t)$ e $\sigma_{v/\|v\|_p}$ sono traiettorie di $\frac{\partial}{\partial r}$ uscenti da p, coincidono sull'intersezione degli intervalli di definizione che è $[0, r(q)]$ e la tesi è dimostrata. $\square$

Immediata conseguenza del teorema precedente è il seguente corollario.

COROLLARIO 1.4.26. *Se* $p \in M$ *e* $0 < \varepsilon < \mathrm{inj}(p)$ *allora*

$$B_\varepsilon(p) = \{q \in M \,:\, d(p, q) < \varepsilon\} \qquad e \qquad \partial B_\varepsilon(p) = \{q \in M \,:\, d(p, q) = \varepsilon\}\,.$$

Introduciamo adesso la nozione di varietà geodeticamente completa.

DEFINIZIONE 1.4.27. *Diremo che la varietà riemanniana* (M, g) *è geodeticamente completa se qualsiasi geodetica* $\sigma\colon [a, b] \to M$ *può essere estesa a una geodetica* $\widetilde{\sigma}\colon \mathbb{R} \to M$.

Il prossimo teorema fornisce delle caratterizzazioni delle varietà geodeticamente complete. In particolare stabilisce l'equivalenza tra la completezza metrica e la completezza geodetica.

TEOREMA 1.4.28 (Teorema di Hopf–Rinow). *Le seguenti affermazioni sono equivalenti per una varietà riemanniana* (M, g)*:*

(1) M *è geodeticamente completa.*
(2) La mappa esponenziale $\exp$ *è definita su tutto* TM.
(3) Esiste un punto $p \in M$ *tale che la mappa* exp_p *sia definita su tutto* T_pM.
(4) (M, d) *è completa come spazio metrico, con la distanza riemanniana* d.
(5) I sottoinsiemi chiusi e limitati di M *sono compatti.*

Nel seguito sfrutteremo spesso la seguente fondamentale proprietà di una varietà riemanniana *completa* (geodeticamente o come spazio metrico).

PROPOSIZIONE 1.4.29. *Se la varietà riemanniana* (M, g) *è completa, per ogni coppia di punti* p, q *esiste almeno una geodetica minimizzante che li congiunge.*

1.5. Caratterizzazione delle geodetiche

Siano (M, g) una varietà riemanniana e ∇ la sua connessione di Levi–Civita.

DEFINIZIONE 1.5.1. *Sia* $\sigma\colon [a,b] \to M$ *una curva di classe* C^∞ *a tratti. Diciamo che* σ *è* minimizzante *se ha lunghezza minore o uguale a quella di qualsiasi altra curva* C^∞ *a tratti con gli stessi estremi, ovvero se* $\ell(\sigma) = d(\sigma(a), \sigma(b))$. *Diciamo che* σ *è* localmente minimizzante *se, per ogni* $t \in [a,b]$, *esiste* $\varepsilon > 0$ *tale che* $\sigma|_{[t-\varepsilon\,,\,t+\varepsilon]}$ *sia minimizzante (con le ovvie convenzioni se* $t = a$ *o* $t = b$*).*

Vedremo fra poco che le geodetiche si caratterizzano, tra le curve di classe C^∞ a tratti, come quelle parametrizzate rispetto a un multiplo della lunghezza d'arco e localmente minimizzanti. Lo strumento per mostrare ciò sarà il concetto di "variazione prima" della lunghezza.

LEMMA 1.5.2. *Per ogni* V *campo vettoriale continuo lungo* $\sigma\colon [a,b] \to M$, *curva* C^∞ *a tratti, esiste una variazione* Σ *di* σ *con* V *come generatore infinitesimale (vedi la Definizione 1.4.20). Inoltre, se* V *è nullo agli estremi, si può trovare una variazione* Σ *a estremi fissati. Se* σ *e* V *sono regolari, si può trovare una* Σ *regolare.*

PROPOSIZIONE 1.5.3 (Variazione prima della lunghezza). *Data una curva di classe* C^∞ *a tratti* $\sigma\colon [a,b] \to M$ *parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, sia* $\Sigma\colon (-\varepsilon,\varepsilon) \times [a,b] \to M$ *una sua variazione con suddivisione associata* $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$. *Indichiamo con* V *il generatore infinitesimale di* Σ *e definiamo la funzione* $L : (-\varepsilon,\varepsilon) \to (0,+\infty)$, *ponendo* $L(s) = \ell(\sigma_s)$. *Allora si ha*

$$\frac{dL}{ds}(0) = -\int_a^b g(V(t), \nabla_t \sigma')dt - \sum_{i=0}^{k} g(V(t_i), \Delta_i \sigma') \tag{1.8}$$

dove $\Delta_0\sigma' = \sigma'(a)$, $\Delta_k\sigma' = \sigma'(b)$ *e*

$$\Delta_i\sigma' = \lim_{t\to t_i^+} \sigma'(t) - \lim_{t\to t_i^-} \sigma'(t).$$

In particolare, se σ *è una geodetica e* Σ *è a estremi fissati, allora* $\frac{dL}{ds}(0) = 0$.

TEOREMA 1.5.4. *Una curva* $\sigma\colon [a,b] \to M$, *di classe* C^∞ *a tratti, è una geodetica se e solo se è localmente minimizzante e è parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che σ sia una geodetica. Poiché σ' è un campo parallelo lungo σ, la geodetica è parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco. Vediamo che è localmente minimizzante. Sia $t_0 \in [a,b]$ e scegliamo $\varepsilon \in \mathbb{R}$ in modo tale che $0 < \varepsilon/\|\sigma'(t_0)\| < \inf_{p\in\sigma([a,b])} \mathrm{inj}(p)$, dove questo $\inf$ è positivo per il Lemma 1.4.10 e il fatto che $\sigma([a,b])$ è compatto. Poiché $\sigma(t_0 + \varepsilon/4)$ appartiene alla palla geodetica–metrica $B_{\varepsilon\|\sigma'(t_0)\|}(\sigma(t_0 -$

$\varepsilon/4)$) e la geodetica σ è l'unico segmento (a meno di riparametrizzazioni) che congiunge $\sigma(t_0-\varepsilon/4)$ e $\sigma(t_0+\varepsilon/4)$, per il Teorema 1.4.25, segue l'uguaglianza

$$d(\sigma(t_0-\varepsilon/4),\sigma(t_0+\varepsilon/4)) = \ell(\sigma|_{[t_0-\varepsilon/4,t_0+\varepsilon/4]})$$

che è quanto volevamo mostrare.

Viceversa, supponiamo ora che σ sia una curva parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco e localmente minimizzante, vogliamo dimostrare che è una geodetica. Sia $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ una suddivisione di $[a, b]$ tale che σ sia di classe C^∞ in ciascuno degli intervalli $[t_{i-1}, t_i]$. A meno di una riparametrizzazione lineare possiamo supporre che σ sia parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Eventualmente considerando per ogni punto di $[a, b]$ un piccolo sottointervallo chiuso e la restrizione di σ a tale sottointervallo, possiamo supporre che σ sia minimizzante, quindi $\frac{dL}{ds}(0) = 0$ per ogni Σ variazione a estremi fissati di σ. Per il Lemma 1.5.2 il membro a sinistra dell'uguaglianza (1.8) è nullo per ogni V campo vettoriale continuo lungo σ nullo agli estremi. Mediante opportuni campi vettoriali lungo σ, mostreremo che σ è una geodetica su ciascun intervallo aperto (t_{i-1}, t_i) e che σ' è continua nei punti $t_1, \ldots, t_{k-1}$. Dunque l'espressione in coordinate di σ soddisfa l'equazione differenziale (1.5) in ogni intorno di t_i, la cui immagine mediante σ è contenuta in una singola carta di M, per ogni $i \in \{1, \ldots, k-1\}$. Per il teorema di regolarità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie, σ è allora regolare e quindi una geodetica. Per ogni $i \in \{1, \ldots, k\}$, definiamo le funzioni di classe C^∞

$$\chi_i(t) = \begin{cases} e^{-\,1/[(t-t_{i-1})(t_i-t)]} & \text{se } t \in (t_{i-1}, t_i) \\ 0 & \text{se } t \in \mathbb{R} \setminus (t_{i-1}, t_i) \end{cases}$$

Posto $V(t) = \chi_i(t)\nabla_t\sigma'$ per ogni $t \in [a, b]$, per costruzione, V è un campo vettoriale continuo lungo σ, nullo su $[a, b] \setminus (t_{i-1}, t_i)$. Allora si ha

$$0 = \int_a^b g(V(t), \nabla_t\sigma')\, dt + \sum_{i=0}^{k} g(V(t_i), \Delta_i\sigma') = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \chi_i \|\nabla_t\sigma'\|^2\, dt$$

e poichè l'integrando è non negativo, segue che è nullo quasi ovunque in (t_{i-1}, t_i), ma essendo continuo, è nullo su tutto (t_{i-1}, t_i). Per la positività di χ_i su (t_{i-1}, t_i), abbiamo che $\nabla_t\sigma'$ è nullo sullo stesso intervallo e quindi σ è ivi una geodetica.

Ci resta da provare che σ' è continua nei punti $t_1, \ldots, t_{k-1}$.

Sia $i \in \{1, \ldots, k-1\}$, definiamo

$$\widetilde{\chi}_i(t) = \begin{cases} e^{-\,1/[(t-t_i+1/2)(t_i+1/2-t)]} & \text{se } t \in (t_i - 1/2, t_i + 1/2) \\ 0 & \text{se } t \in \mathbb{R} \setminus (t_i - 1/2, t_i + 1/2) \end{cases}$$

e denotiamo con E_i il campo vettoriale lungo σ tale che E_i è continuo, E_i è un campo parallelo lungo σ su ciascun $[t_{i-1}, t_i]$ e $E(t_i) = \Delta_i \sigma'$. Posto $\widetilde{V}(t) = \widetilde{\chi}_i(t) E_i(t)$ per ogni $t \in [a, b]$, per costruzione, $\widetilde{V}$ è un campo vettoriale continuo lungo σ, nullo in t_j per ogni $j \neq i$. Allora, sfruttando che $\nabla_t \sigma'$ è nullo quasi ovunque in $[a, b]$, abbiamo

$$0 = \int_a^b g(\widetilde{V}(t), \nabla_t \sigma')\, dt + \sum_{i=0}^{k} g(\widetilde{V}(t_i), \Delta_i \sigma') = \|\Delta_i \sigma'\|^2$$

Segue che σ' è continua in t_i. □

1.6. Campi di Jacobi

Siano (M, g) una varietà riemanniana completa, ∇ la sua connessione di Levi–Civita e $\sigma \colon [a, b] \to M$ una geodetica.

DEFINIZIONE 1.6.1. *Diciamo che un un campo vettoriale Y lungo σ è un campo di Jacobi se soddisfa l'equazione*

$$\nabla_t^2 Y + \mathrm{R}(Y(t), \sigma'(t))\sigma'(t) = 0 \tag{1.9}$$

per ogni $t \in [a, b]$.

Nel teorema che segue, ci occuperemo dell'esistenza e unicità dei campi di Jacobi lungo una geodetica.

PROPOSIZIONE 1.6.2. *L'insieme $\mathcal{J}$ dei campi di Jacobi lungo σ è uno spazio vettoriale reale di dimensione $2n$.*
Scelti $\xi, \eta \in T_{\sigma(t_0)}M$ per qualche $t_0 \in [a, b]$, esiste un unico $Y \in \mathcal{J}$ tale che

$$Y(t_0) = \xi \qquad \nabla_{t_0} Y = \eta.$$

Quindi, se $Y \in \mathcal{J}$, $Y(t_0) \neq 0$, per un qualche $t_0 \in [a, b]$, allora

$$\|Y(t)\|^2 + \|\nabla_t Y\|^2 > 0,$$

per ogni $t \in [a, b]$.
Inoltre, se $Y \in \mathcal{J}$, $Y \neq 0$ e $Y(t_0) = 0$ con $t_0 \in [a, b]$, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$Y(t) \neq 0 \qquad \textit{per ogni } t \in [a, b] \textit{ tale che } 0 < |t - t_0| < \varepsilon$$

Vediamo altre proprietà elementari dei campi di Jacobi. La tesi della seguente proposizione segue immediatamente derivando in t e poi applicando l'equazione (1.9).

PROPOSIZIONE 1.6.3. *Se $X, Y \in \mathcal{J}$, abbiamo che la quantità*

$$g(\nabla_t X, Y) - g(X, \nabla_t Y)$$

è costante.
Quindi, per ogni $Y \in \mathcal{J}$, esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$g(Y(t), \sigma'(t)) = c_1 t + c_2$$

per ogni $t \in [a, b]$. In particolare il sottospazio dei campi di Jacobi perpendicolari a σ

$$\mathcal{J}^\perp = \{Y \in \mathcal{J} \ : \ g(Y(t), \sigma'(t)) = 0 \ \textit{per ogni } t \in [a, b]\},$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{J}$ dimensione $2(n-1)$.

Vedremo che i campi di Jacobi sono caratterizzati dall'essere i generatori infinitesimali di particolari variazioni, dette *variazioni geodetiche*. Da ciò otterremo il loro importante legame con la mappa esponenziale.

DEFINIZIONE 1.6.4. *Sia $H : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [c, d] \to M$ una variazione di una curva $\widetilde{\sigma} : [c, d] \to M$ di classe C^∞ a tratti. Un* campo vettoriale X lungo H *è dato da una suddivisione $c = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = d$ associata a H e da applicazioni $X_j : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{j-1}, t_j] \to TM$ di classe C^∞ tali che $X_j(s, t) \in T_{H(s,t)}M$ per ogni $(s, t) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{j-1}, t_j]$ e per ogni $j = 1, \ldots, k$. Se i vari campi vettoriali si raccordano con continuità nei punti interni $t_1, \ldots, t_{k-1}$ della suddivisione diremo che X è continuo.*

LEMMA 1.6.5. *Sia $H : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [c, d] \to M$ una variazione di una curva C^∞ a tratti $\widetilde{\sigma} : [c, d] \to M$. Allora per ogni campo vettoriale X lungo H abbiamo che*

$$\nabla_s \nabla_t X - \nabla_t \nabla_s X = \mathrm{R}(S, T)X$$

su ogni rettangolo $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{j-1}, t_j]$ su cui H è di classe C^∞, dove ∇_t è la derivata covariante lungo le curve principali e ∇_s quella lungo le curve trasverse.

DEFINIZIONE 1.6.6. *Una* variazione geodetica *di σ è una variazione regolare $\Sigma \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$, per la quale le curve principali sono geodetiche.*

PROPOSIZIONE 1.6.7. *Se $\Sigma \colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ è una variazione geodetica di σ, allora il generatore infinitesimale di Σ, cioè*

$$Y(t) = S(0, t) = \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, t) = d\Sigma_{(0,t)}\Big(\frac{\partial}{\partial s}\Big)$$

è un campo di Jacobi lungo σ.
Viceversa, se Y è un campo di Jacobi lungo la geodetica σ, allora esiste una variazione geodetica Σ di σ avente Y come generatore infinitesimale.

DIMOSTRAZIONE. Notiamo che i campi S, T nella Definizione 1.4.20 sono campi vettoriali lungo Σ. Si ha

$$\begin{aligned} \nabla^2_{t_0} Y &= \nabla_{t_0} \nabla_t S(0, \cdot) \\ &= \nabla_{t_0} \nabla_0 T(\cdot, t) \\ &= \nabla_0 \nabla_{t_0} T(s, \cdot) - \mathrm{R}(S(0, t_0), T(0, t_0)) T(0, t_0) \\ &= -\mathrm{R}(Y(t_0), \sigma'((t_0)) \sigma'((t_0)) \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato nella prima uguaglianza il Lemma 1.4.21, nella seconda il Lemma 1.6.5 e nella terza il fatto che $\nabla_t T = 0$, essendo le curve principali delle geodetiche.
Viceversa, consideriamo ora un campo di Jacobi Y lungo σ e costruiamo una variazione geodetica Σ avente Y come generatore infinitesimale. Sia $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ la geodetica con $\gamma(0) = \sigma(a)$ e $\gamma'(0) = Y(a)$. Siano inoltre X_0 e X_1 i due campi paralleli lungo γ tali che $X_0(0) = \sigma'(a)$ e $X_1(0) = \nabla_a Y$, e poniamo $X(s) = X_0(s) + sX_1(s)$. Consideriamo

$$\Sigma(s, t) = exp_{\gamma(s)}\big((t-a)\, X(s)\big).$$

per ogni $s \in \mathbb{R}$ e per ogni $t \in [a, b]$.
Chiaramente si tratta di una variazione geodetica, poiché è regolare e σ_s non è altro che la geodetica uscente da $\gamma(s)$ con velocità iniziale $X(s)$. In particolare, osserviamo che, essendo σ_0 la geodetica uscente da $\gamma(0) = \sigma(a)$ con velocità iniziale $X(0) = \sigma'(a)$, coincide con σ. Di conseguenza, il generatore infinitesimale $\widetilde{Y}$ di Σ è un campo di Jacobi lungo σ. Per dimostrare che $\widetilde{Y}$ coincide con Y, è pertanto sufficiente verificare che si abbia $\widetilde{Y}(a) = Y(a)$ e $\nabla_a \widetilde{Y} = \nabla_a Y$. Infatti, abbiamo

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}(a) &= \frac{\partial \Sigma}{\partial s}(0, a) = \gamma'(0) = Y(a) \\ \nabla_a \widetilde{Y} &= \nabla_a S(0, \cdot) = \nabla_0 T(\cdot, a) = \nabla_0 X(s) \\ &= \big(\nabla_0 X_0 + X_1(0) + 0\; \nabla_0 X_1\big) = X_1(0) = \nabla_a Y \end{aligned}$$

quindi la variazione Σ ha le proprietà desiderate. □

Quest'ultimo risultato ci permette di legare i campi di Jacobi lungo una geodetica alla mappa esponenziale.

COROLLARIO 1.6.8. *Siano $u \in T_{\sigma(a)}M$ e Y un campo di Jacobi lungo σ con $Y(a) = 0$ e $\nabla_a Y = u$. Allora, identificando canonicamente $T_{(t-a)\sigma'(a)}T_{\sigma(a)}M$ con $T_{\sigma(a)}M$, si ha che*

$$Y(t) = d(exp_{\sigma(a)})_{(t-a)\sigma'(a)}((t-a)u)$$

per ogni $t \in [a, b]$.

DIMOSTRAZIONE. Nella dimostrazione della Proposizione 1.6.7 abbiamo visto che Y è il generatore infinitesimale della variazione geodetica

$$\Sigma(s,t) = exp_{\gamma(s)}\big((t-a)\,X(s)\big).$$

dove $\gamma\colon \mathbb{R} \to M$ è la geodetica con $\gamma(0) = \sigma(a)$ e $\gamma'(0) = Y(a)$, X_0 e X_1 sono i campi paralleli lungo γ tali che $X_0(0) = \sigma'(a)$ e $X_1(0) = \nabla_a Y = u$, e $X(s) = X_0(s) + sX_1(s)$. Poiché $Y(a) = 0$, per ipotesi, segue che γ è la geodetica costante in p. Di conseguenza $X_0(s) = \sigma'(a)$ e $X_1(s) = u$ per ogni $s \in \mathbb{R}$. Quindi

$$\Sigma(s,t) = exp_{\sigma(a)}\big((t-a)\,[\sigma'(a) + su]\big).$$

Allora

$$Y(t) = d\Sigma_{(0,t)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = d(exp_{\sigma(a)})_{(t-a)\sigma'(a)}((t-a)u)$$

per ogni $t \in [a, b]$. □

DEFINIZIONE 1.6.9. *Diremo che $\sigma(t_0)$ per $t_0 \in (a, b]$ è coniugato a $\sigma(a)$ lungo σ se $d(exp_{\sigma(a)})$ è singolare in $(t_0 - a)\sigma'(a)$.*

PROPOSIZIONE 1.6.10. *Il punto $\sigma(t_0)$, con $t_0 \in (a, b]$, è coniugato a $\sigma(a)$ lungo σ se e solo se esiste Y campo di Jacobi lungo σ, non identicamente nullo, che si annulla in a e t_0.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che esista Y campo di Jacobi come nell'enunciato, allora, per il Corollario 1.6.8 segue che

$$Y(t) = d(exp_{\sigma(a)})_{(t_0-a)\sigma'(a)}((t_0-a)\nabla_a Y).$$

Per ipotesi $Y(t_0) = 0$ mentre $(t_0 - a)\nabla_a Y$ non è nullo, dato che t_0 è diverso da a e Y non è identicamente nullo. Di conseguenza $d(exp_{\sigma(a)})$ è singolare in $(t_0 - a)\sigma'(a)$, cioè $\sigma(t_0)$ è coniugato a $\sigma(a)$ lungo σ.

Viceversa, supponiamo che $\sigma(t_0)$ sia coniugato a $\sigma(a)$ lungo σ. Per definizione, $d(exp_{\sigma(a)})$ è singolare in $(t_0 - a)\sigma'(a)$. Allora esiste u in $T_{\sigma(a)}M$ tale che $d(exp_{\sigma(a)})_{(t-a)\sigma'(a)}(u) = 0$, continuando a identificare canonicamente

$T_{(t_0-a)\sigma'(a)}T_{\sigma(a)}M$ con $T_{\sigma(a)}M$. Denotato con Y il campo di Jacobi lungo σ tale che $Y(a) = 0$ e $\nabla_a Y = u$, per il Corollario 1.6.8 segue che

$$Y(t) = d(exp_{\sigma(a)})_{(t-a)\sigma'(a)}((t-a)u).$$

Allora

$$Y(t_0) = d(exp_{\sigma(a)})_{(t_0-a)\sigma'(a)}((t_0-a)u) = (t_0-a)d(exp_{\sigma(a)})_{(t_0-a)\sigma'(a)}(u) = 0$$

da cui la tesi. □

1.7. La forma indice

Siano (M, g) una varietà riemanniana completa, ∇ la sua connessione di Levi–Civita e $\sigma\colon [a, b] \to M$ una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco. Denotiamo con $D^\infty(\sigma)$ l'insieme dei campi vettoriali C^∞ a tratti e continui lungo σ, cioè $X \in D^\infty(\sigma)$ se e solo se esiste una suddivisione $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ di $[a, b]$ tale che $X|_{[t_{i-1},t_i]}$ è un campo vettoriale lungo $\sigma|_{[t_{i-1},t_i]}$ e i campi vettoriali si raccordano con continuità nei punti interni $t_1, \ldots, t_{k-1}$.

DEFINIZIONE 1.7.1. *La* forma indice *(rispetto alla lunghezza d'arco) su $D^\infty(\sigma)$ è definita da*

$$I(X, Y) = I(X^\perp, Y^\perp) = \int_a^b g(\nabla_t X^\perp, \nabla_t Y^\perp) - \mathrm{R}(X^\perp(t), \sigma'(t), \sigma'(t), Y^\perp(t))\,dt$$

dove con $X^\perp = X - g(X, \sigma')\sigma'$ indichiamo la componente di X ortogonale a σ' e analogamente per Y.

Vale la seguente proposizione, per calcolo diretto.

PROPOSIZIONE 1.7.2 (Variazione seconda della lunghezza d'arco). *Sia $\Sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \to M$ una variazione di σ, avente come suddivisione associata $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$. Indicato con V il generatore infinitesimale di Σ e definita la funzione $L : (-\varepsilon, \varepsilon) \to [0, +\infty)$ ponendo $L(s) = \ell(\sigma_s)$, si ha*

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) = g_{\sigma(t)}(\nabla_0 S(\cdot, t), \sigma'(t))\Big|_a^b + I(V, V).$$

In particolare se Σ è a estremi fissati, si ha che $\frac{d^2L}{ds^2}(0) = I(V, V)$.

COROLLARIO 1.7.3. *Se σ è una geodetica minimizzante, allora*

$$I(X, X) = \int_a^b \|\nabla_t X\|^2 - \mathrm{R}(X(t), \sigma'(t), \sigma'(t), X(t))\,dt \geq 0,$$

per ogni $X \in D^\infty(\sigma)$ nullo in a, b e puntualmente ortogonale a σ'.

DIMOSTRAZIONE. Sia $X \in D^\infty(\sigma)$ nullo in a, b e puntualmente ortogonale a σ'. Per il Lemma 1.5.2 esiste $\Sigma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a,b] \to M$ una variazione a estremi fissati avente X come generatore infinitesimale. Essendo σ minimizzante, L ha un punto di minimo in 0. Di conseguenza, oltre a essere $\frac{dL}{ds}(0) = 0$ si ha $\frac{d^2L}{ds^2}(0) \geq 0$ e poiché Σ è a estremi fissati,

$$I(X,X) = \frac{d^2L}{ds^2}(0) \geq 0.$$

Si noti che essendo X puntualmente ortogonale a σ', la forma indice $I(X,X)$ assume la forma nell'enunciato. □

PROPOSIZIONE 1.7.4. *Se esiste $t_0 \in (a,b)$ tale che $\sigma(t_0)$ è un punto coniugato a $p = \sigma(a)$ lungo σ, esiste un campo $X \in D^\infty(\sigma)$ nullo in a, b e puntualmente ortogonale a σ' tale che*

$$I(X,X) = \int_a^b \|\nabla_t X\|^2 - \mathrm{R}(X(t), \sigma'(t), \sigma'(t), X(t))\, dt < 0.$$

In particolare, dal corollario precedente segue che una geodetica non è mai minimizzante oltre il primo punto coniugato.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per semplicità $a = 0$ e $b = 1$. Poniamo $q = \sigma(1)$. Essendo $\sigma(t_0)$ coniugato a p lungo σ, per la Proposizione 1.6.10, esiste un campo di Jacobi non identicamente nullo lungo σ tale che $Y(0) = 0$ e $Y(t_0) = 0$. Vogliamo costruire, a partire da Y, dei campi $X_\alpha \in D^\infty(\sigma)$ nulli in $0, 1$, puntualmente ortogonali a σ' e tali che $I(X_\alpha, X_\alpha) < 0$. Un qualsiasi campo X_α con queste proprietà è il generatore infinitesimale di una variazione Σ_α a estremi fissati tale che

$$\frac{dL}{ds}(0) = 0$$

$$\frac{d^2L}{ds^2}(0) < 0.$$

Perciò esiste $s \neq 0$ sufficientemente piccolo tale che

$$\ell(\sigma_s) < \ell(\sigma)$$

dove σ_s è una curva C^∞ a tratti di M, definita su $[0,1]$, congiungente gli stessi punti di σ, cioè p con q. Ne consegue che σ non è minimizzante.
Per le Proposizioni 1.6.2 e 1.6.3 abbiamo che $\nabla_{t_0} Y$ è non nullo e che Y e$\nabla_t Y$ sono puntualmente ortogonali a σ'. Denotando con Z_1 il campo parallelo lungo σ tale che $Z_1(t_0) = -\nabla_{t_0} Y$, si ha allora che Z_1 è puntualmente ortogonale a σ'. La funzione $\theta\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, definita da $\theta(t) = [t(t-1)]/[t_0(t_0-1)]$, è

una funzione regolare tale che $\theta(0) = \theta(1) = 0$ e $\theta(t_0) = 1$, definiamo allora

$$Z(t) = \theta(t) Z_1(t)$$

e

$$X_\alpha(t) = \begin{cases} Y(t) + \alpha\, Z(t) & \text{se } t \in [0, t_0] \\ \alpha\, Z(t) & \text{se } t \in [t_0, 1] \end{cases}$$

per ogni $t \in [0,1]$ e $\alpha > 0$.
Poiché Z è un campo vettoriale lungo σ e puntualmente ortogonale a σ', segue che X_α appartiene a $D^\infty(\sigma)$ e è puntualmente ortogonale a σ', inoltre $X_\alpha(0)$ e $X_\alpha(1)$ sono nulli. Verifichiamo che si ha $I(X_\alpha, X_\alpha) < 0$ per α sufficientemente piccolo,

$$\begin{aligned} I(X_\alpha, X_\alpha) &= \int_0^1 \big(\|\nabla_t X_\alpha\|^2 - \mathrm{R}(X_\alpha, \sigma', \sigma', X_\alpha)\big)\, dt \\ &= \int_0^1 \big(\alpha^2 \|\nabla_t Z\|^2 - \mathrm{R}(\alpha Z, \sigma', \sigma', \alpha Z)\big)\, dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} \big(\|\nabla_t Y\|^2 - \mathrm{R}(Y, \sigma', \sigma', Y,)\big)\, dt \\ &\quad +2 \int_0^{t_0} \big(g(\nabla_t Y, \alpha \nabla_t Z) - \mathrm{R}(Y, \sigma', \sigma', \alpha Z)\big)\, dt. \end{aligned}$$

Esaminiamo separatamente ciascuno dei tre integrali. Il primo di essi è uguale a

$$\alpha^2 \int_0^1 \big(\|\nabla_t Z\|^2 - \mathrm{R}(Z, \sigma', \sigma', Z)\big)\, dt \;= \alpha^2 I(Z, Z).$$

Il secondo, integrando per parti e utilizzando l'equazione dei campi di Jacobi per Y, si riscrive come

$$\int_0^{t_0} \left(\frac{d}{dt} g(Y, \nabla_t Y) \underbrace{- g(\nabla_t^2 Y, Y) - \mathrm{R}(Y, \sigma', \sigma', Y)}_{0} \right) dt \;=\; g(Y, \nabla_t Y)\big|_{t=0}^{t=t_0} = 0.$$

Il maniera del tutto analoga, il terzo integrale diventa

$$\begin{aligned} 2\alpha \int_0^{t_0} \left(\frac{d}{dt} g(\nabla_t Y, Z) \underbrace{- g(\nabla_t^2 Y, Z) - \mathrm{R}(Y, \sigma', \sigma', Z)}_{0} \right) dt \; &= 2\alpha\, g(\nabla_t Y, Z)\big|_0^{t_0} \\ &= 2\alpha\, g\big(Z_1(t_0), \nabla_{t_0} Y)\big) \\ &= -\, 2\alpha\, g\big(\nabla_{t_0} Y, \nabla_{t_0} Y\big) \\ &= -\, 2\alpha \|\nabla_{t_0} Y\|^2. \end{aligned}$$

Sommando, otteniamo infine

$$I(X_\alpha, X_\alpha) = \alpha^2 I(Z, Z) - 2\alpha\, \|\nabla_{t_0} Y\|^2 = \alpha\big[\alpha I(Z, Z) - 2\, \|\nabla_{t_0} Y\|^2\big]$$

e essendo $\|\nabla_{t_0} Y\| > 0$, segue che

- se $I(Z, Z) \leq 0$ allora $I(X_\alpha, X_\alpha) < 0$ per ogni $\alpha > 0$
- se $I(Z, Z) > 0$, si ha $I(X_\alpha, X_\alpha) < 0$ per ogni $0 < \alpha < 2\,\|\nabla_{t_0} Y\|^2 / I(Z, Z)$.

Abbiamo così ottenuto l'esistenza di una campo $X_\alpha \in D^\infty(\sigma)$ nullo in $0, 1$, puntualmente ortogonale a σ' e tale che

$$I(X_\alpha, X_\alpha) = \int_0^1 \big(\|\nabla_t X_\alpha\|^2 - \mathrm{R}(X_\alpha, \sigma', \sigma', X_\alpha)\big) dt < 0$$

per α opportunamente scelto, quindi σ non è minimizzante. $\square$

1.8. Il cut–locus

Siano (M, g) una varietà riemanniana completa, ∇ la sua connessione di Levi–Civita e $p \in M$.

DEFINIZIONE 1.8.1. *Per ogni $\xi \in \mathbb{S}_p^{n-1}$, la sfera unitaria di T_pM con il prodotto scalare g_p, posto*

$$c(\xi) = \sup\{t > 0 : d(p, \sigma_\xi(t)) = t\} \ \in (0, +\infty],$$

se $c(\xi) < +\infty$, diciamo che $\sigma_\xi(c(\xi)) \in M$ è il cut–point *di p lungo σ_ξ.*

Sia $\xi \in \mathbb{S}_p^{n-1}$, allora valgono i seguenti fatti:

(1) *L'insieme $\{t > 0 : d(p, \sigma_\xi(t)) = t\}$ è dato dall'intervallo $(0, c(\xi)]$ se $c(\xi) < +\infty$ e dall'intervallo $(0, +\infty)$, se $c(\xi) = +\infty$.*
Infatti, tale insieme è non vuoto per il Teorema 1.5.4 e se $c(\xi) < +\infty$, il valore $c(\xi)$ vi appartiene, per la continuità della funzione distanza da p. Segue che σ_ξ minimizza la distanza tra p e $\sigma_\xi(c(\xi))$, da cui $c(\xi)$ è la distanza di p dal suo cut–point lungo σ_ξ. Inoltre, è un intervallo in quanto se esistesse $t_0 < c(\xi)$ tale che $d(p, \sigma_\xi(t_0)) < t_0$, si vedrebbe facilmente che $d(p, \sigma_\xi(t)) < t$ per ogni $t \in (t_0, c(\xi))$, che sarebbe un assurdo.

(2) *Se $t_0 < c(\xi)$, allora σ_ξ è l'unica geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco minimizzante da p a $\sigma_\xi(t_0)$ e $\sigma_\xi(t_0)$ non è coniugato a p lungo σ_ξ.*
Se σ_ξ non fosse l'unica geodetica minimizzante parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco da p a $\sigma_\xi(t_0)$, esisterebbe $\eta \in \mathbb{S}_p^{n-1} \setminus \{\xi\}$ tale che σ_η minimizza la distanza tra p e $\sigma_\xi(t_0)$. Consideriamo la curva $\sigma \colon [0, c(\xi)] \to M$, così definita

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_\eta(t) & \text{per } t \in [0, t_0], \\ \sigma_\xi(t) & \text{per } t \in [t_0, c(\xi)]. \end{cases}$$

Per costruzione, anche σ è minimizzante su $[0, c(\xi)]$ e è parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, quindi è una geodetica, per il Teorema 1.5.4. Allora $\sigma(t) = \sigma_\xi(t)$ per ogni $t \in [0, c(\xi)]$. In particolare si avrebbe $\eta = \sigma'_\eta(0) = \sigma'(0) = \sigma'_\xi(0) = \xi$ e questo è un assurdo.
Se $\sigma_\xi(t_0)$ fosse coniugato a p lungo σ_ξ, allora, per la Proposizione 1.7.4, la geodetica σ_ξ non sarebbe più minimale tra p e $\sigma_\xi(t)$ per ogni $t > t_0$, in contraddizione con il fatto che $t_0 < c(\xi)$.

(3) *Se $c(\xi) < +\infty$, posto $q = \sigma_\xi(c(\xi))$, allora o q è coniugato a p lungo σ_ξ o esiste $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}_p \setminus \{\xi\}$ tale che σ_η minimizza la distanza tra p e q.*
Sia $q_m = \sigma_\xi(c(\xi)+1/m)$, per $m \in \mathbb{N}$. Per la continuità di σ_ξ, segue che $q_m \to q$ in M, quindi, per la continuità della distanza, abbiamo che $d(p, q_m) \to d(p, q) = c(\xi)$ in $\mathbb{R}$. Per la definizione di $c(\xi)$, la geodetica σ_ξ non è minimizzante tra p e q_m, cioè $d(p, q_m) < c(\xi) + 1/m$. Per la completezza di M, per ogni $m \in \mathbb{N}$, esiste $\eta_m \in \mathbb{S}^{n-1}_p \setminus \{\xi\}$ tale che σ_{η_m} è minimizzante tra p e q_m, inoltre per la compattezza della sfera $\mathbb{S}^{n-1}_p$, possiamo supporre che $\eta_m \to \eta$ in T_pM, per un qualche vettore $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}_p$. Distinguiamo allora i seguenti due casi

$$\eta = \xi \quad \text{e} \quad \eta \neq \xi.$$

Nel caso in cui $\eta = \xi$, la successione $d(p, q_m)\eta_m$ converge a $c(\xi)\xi$ in T_pM, quindi in ogni intorno aperto di $c(\xi)\xi$ esistono $(c(\xi) + 1/m)\xi$ e $d(p, q_m)\eta_m$, con $m \in \mathbb{N}$, tali che

$$\begin{aligned} exp_p([c(\xi) + 1/m]\xi) &= \sigma_\xi(c(\xi) + 1/m) = q_m \\ &= \sigma_{\eta_m}(d(p, q_m)) = exp_p(d(p, q_m)\eta_m) \end{aligned}$$

con

$$(c(\xi) + 1/m)\xi \neq d(p, q_m)\eta_m.$$

Di conseguenza $d(exp_p)$ è singolare in $c(\xi)\xi$, cioè q è coniugato a p lungo σ_ξ.
Se invece $\eta \neq \xi$, sfruttando la continuità della funzione distanza da p e della mappa exp_p si ha $q = \sigma_\eta(c(\xi))$ e $d(p, q) = c(\xi) = \ell(\sigma_\eta|_{[0,c(\xi)]})$, quindi σ_η è minimizzante tra p e q.

PROPOSIZIONE 1.8.2. *La funzione $c\colon \mathbb{S}^{n-1}_p \to (0, +\infty]$ è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}_p$, distinguiamo i due casi $c(\xi) < +\infty$ e $c(\xi) = +\infty$. Se $c(\xi) < +\infty$, sia $\xi_k \in \mathbb{S}^{n-1}_p$ una successione convergente a ξ in T_pM. Se la successione $c(\xi_k)$ non convergesse a $c(\xi)$ in $\mathbb{R}$, esisterebbe $\epsilon > 0$

tale che, a meno di passare a una sottosuccessione, $|c(\xi_k)-c(\xi)| \geq \epsilon$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dunque, a meno di passare ulteriormente a una sottosuccessione, si avrebbe $c(\xi_k) > c(\xi)+\epsilon$ oppure $c(\xi_k) < c(\xi)-\epsilon$, per ogni $k \in \mathbb{N}$.
Nel primo caso, sia $q = \sigma_\xi(c(\xi))$. Poniamo $t = c(\xi)+\epsilon$. Essendo ciascuna geodetica $\sigma_{\xi_k}|_{[0,t]}$ minimizzante, segue che

$$d(p, \sigma_{\xi_k}(t)) = \ell(\sigma_{\xi_k}|_{[0,t]}) = t,$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Dunque, per la continuità della mappa exp_p, abbiamo $\sigma_{\xi_k}(t) \to \sigma_\xi(t)$ e per la continuità della distanza, $d(p,\sigma_{\xi_k}(t)) \to d(p,\sigma_\xi(t))$, da cui $d(p,\sigma_\xi(t)) = t$, quindi $c(\xi) \geq t = c(\xi)+\epsilon$ che è un assurdo.
Nel secondo caso, si ha che nessuna geodetica $\sigma_{\xi_k}|_{[0,c(\xi)-\epsilon]}$ è minimizzante e posto $\tau = c(\xi)-\epsilon$, $q = \sigma_\xi(\tau)$ e $q_k = \sigma_{\xi_k}(\tau)$, per ogni $k \in \mathbb{N}$, per la continuità della mappa exp_p abbiamo $q_k \to \sigma_\xi(\tau)$. Se $\tau_k = d(p,q_k)$, per la continuità della distanza, si ha

$$\tau_k = d(p,q_k) \to d(p,\sigma_\xi(\tau)) = \tau,$$

dove abbiamo tenuto conto che, essendo $c(\xi) > \tau$, la geodetica $\sigma_\xi|_{[0,\tau]}$ è minimizzante. Per la completezza di M, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $\eta_k \in \mathbb{S}^{n-1}_p \setminus \{\xi_k\}$ tale che σ_{η_k} è minimizzante tra p e q_k. A meno di passare a una sottosuccessione, possiamo assumere che η_k converga a un vettore $\eta \in \mathbb{S}^{n-1}_p$ in T_pM, dunque $\tau_k\,\eta_k \to \tau\eta$ in T_pM. Per la continuità della mappa exp_p, segue allora che

$$q_k = \sigma_{\eta_k}(\tau_k) \to \sigma_\eta(\tau),$$

dunque $\sigma_\eta(\tau) = \sigma_\xi(\tau)$ e σ_η è minimizzante da p a q. Poiché $\tau < c(\xi)$ e per punto (2) della discussione sopra, abbiamo $\eta = \xi$. Dunque le successioni $\tau\xi_k$ e $\tau_k\eta_k$ convergono entrambe a $\tau\xi$ in T_pM, di conseguenza in ogni intorno aperto di $\tau\xi$ in T_pM esistono $\tau\xi_k$ e $\tau_k\eta_k$, con $k \in \mathbb{N}$, tali che

$$exp_p(\tau\xi_k) = q_k = exp_p(\tau_k\eta_k)$$

dove

$$\tau\xi_k \neq \tau_k\eta_k.$$

Allora $dexp_p$ è singolare in $\tau\xi$, cioè q è coniugato a p lungo σ_ξ. Questo è assurdo per il suddetto punto (2) dato che $\tau < c(\xi)$.
Avendo trovato una contraddizione in entrambi i casi, la successione ξ_k converge allora a $c(\xi)$.
Il caso in cui $c(\xi) = +\infty$ si prova in modo analogo. □

Come conseguenza del risultato appena ottenuto, essendo la sfera $\mathbb{S}_p^{n-1}$ compatta, la funzione c ha un minimo $c_{\min}(p)$. Per la discussione iniziale, $c_{\min}(p)$ è allora il raggio della più grande palla entro la quale le geodetiche uscenti da p sono minimizzanti.

PROPOSIZIONE 1.8.3. *Il valore $c_{\min}(p)$ coincide con il raggio di iniettività $\mathrm{inj}(p)$ di p.*

Essendo definita per ogni $p \in M$ da un minimo su $\mathbb{S}_p^{n-1}$, lavorando in coordinate locali è allora facile concludere che la funzione

$$p \mapsto c_{\min}(p) = \mathrm{inj}(p)$$

è semicontinua superiormente. Questo fatto, insieme alla semicontinuità inferiore della funzione $p \mapsto \mathrm{inj}(p)$ nel Lemma 1.4.10, ne implica la continuità.

PROPOSIZIONE 1.8.4. *Se (M, g) è completa la funzione $p \mapsto \mathrm{inj}(p)$ è continua.*

Introduciamo ora il cut locus di un punto $p \in M$, in una varietà riemanniana completa (M, g).

DEFINIZIONE 1.8.5. *Siano*

$$C(p) = \{c(\xi)\xi \ : \ \xi \in \mathbb{S}_p^{n-1} \ \ tale \ \ che \ \ c(\xi) < +\infty\} \subseteq T_pM$$

$$C_p = exp_p(C(p)) \subseteq M$$

$$D(p) = \{t\xi \ : \ 0 \leq t < c(\xi) \ \ e \ \ \xi \in \mathbb{S}_p^{n-1}\} \subseteq T_pM$$

$$D_p = exp_p(D(p)) \subseteq M$$

L'insieme $C(p)$ è chiamato cut–locus differenziale *di p, mentre C_p è detto* cut–locus *di p.*

PROPOSIZIONE 1.8.6. *Si ha $C_p \cup D_p = M$ e $C_p \cap D_p = \emptyset$.*

DIMOSTRAZIONE. Preso un qualsiasi punto q di M, per la completezza di M, esiste $\xi \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ tale che σ_ξ è minimizzante da p a q. Se σ_ξ rimane minimizzante anche oltre q, allora q appartiene a D_p, altrimenti q appartiene a C_p. Quindi $C_p \cup D_p = M$.
Supponiamo che esista $q \in C_p \cap D_p$, allora

$$q = exp_p(c(\xi)\xi) = exp_p(t\eta)$$

con $\xi, \eta \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ e $0 \leq t < c(\eta)$. Poiché σ_ξ è una geodetica parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, minimizzante da p a q e poiché σ_η è l'unica geodetica minimizzante da p a q, per il punto (2) della discussione iniziale, essendo $t < c(\eta)$, abbiamo un assurdo. Quindi $C_p \cap D_p = \emptyset$. $\square$

PROPOSIZIONE 1.8.7. *L'insieme $D(p)$ è un aperto stellato rispetto all'origine O_p di T_pM, mentre D_p è un aperto di M e $exp_p : D(p) \to D_p$ è un diffeomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $v = t_0\xi_0$, dove $\xi_0 \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ e $0 \leq t_0 < c(\xi_0)$, cioè v appartiene a $D(p)$. Sia $\epsilon > 0$ tale che $c(\xi_0) > t_0 + \epsilon$. Per la continuità della funzione c, vista nella Proposizione 1.8.2, esiste un intorno aperto U di ξ_0 in $\mathbb{S}_p^{n-1}$ tale che $c(\eta) > t_0 + \epsilon$ per ogni $\eta \in U$. Consideriamo $(0, t_0 + \epsilon) \times U$ e definiamo la mappa

$$j : (t, \xi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{S}_p^{n-1} \to t\xi \in T_pM \setminus \{O_p\}.$$

Poiché j è un diffeomorfismo, l'immagine V mediante j di $(0, t_0 + \epsilon) \times U$ è un aperto di $T_pM \setminus \{O_p\}$ e dunque di T_pM e per costruzione, abbiamo $v \in V \subseteq D(p)$. Per l'arbitrarietà di $v \in D(p)$ segue che $D(p)$ è un aperto di T_pM.
Infine, per il punto (2) della discussione iniziale, la mappa $exp_p|_{D(p)}$ è iniettiva e un diffeomorfismo locale, quindi è un diffeomorfismo. □

Per concludere, enunciamo alcune importanti proprietà della funzione distanza da p, in conseguenza di quanto visto in questa sezione e argomentando in maniera analoga alla dimostrazione della Proposizione 1.4.24 (per i dettagli, si vedano [**8, 9**]).

PROPOSIZIONE 1.8.8. *Posta $r = d(p, \cdot)\colon M \to \mathbb{R}$ la funzione distanza dal punto p, si ha che $r(q) = \|exp_p^{-1}(q)\|_p$ per ogni $q \in D_p$. Quindi r è regolare su $D_p \setminus \{p\}$ e soddisfa $\|\nabla r\| = 1$. Inoltre, l'insieme $D_p \setminus \{p\}$ è il più grande aperto di M sul quale la funzione distanza r è regolare.*

1.9. Coordinate normali e polari

Siano (M, g) una varietà riemanniana completa, ∇ la sua connessione di Levi–Civita e $p \in M$.

Sia $\phi = exp_p \circ j$ l'applicazione definita dalla composizione,

$$(r, \xi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{S}_p^{n-1} \xrightarrow{\ j\ } r\xi \in T_pM \setminus \{O_p\} \xrightarrow{exp_p} exp_p(r\xi) \in M$$

dove $\mathbb{S}_p^{n-1}$ è la sfera unitaria di T_pM con il prodotto scalare g_p. Abbiamo allora che j è un diffeomorfismo e

$$j^{-1} : v \in T_pM \setminus \{O_p\} \to \left(\|v\|_p, \frac{v}{\|v\|_p}\right) \in (0, +\infty) \times \mathbb{S}_p^{n-1}.$$

Supponiamo che esistano un aperto V di T_pM e un aperto W di M tali che $exp_p : V \to W$ sia un diffeomorfismo. Scelta $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormale di T_pM dotato del prodotto scalare g_p e posto $\chi : T_pM \to \mathbb{R}^n$ l'isomorfismo lineare delle coordinate rispetto a questa base, allora $x = \chi \circ exp_p^{-1}$ è un diffeomorfismo con l'immagine, che è un aperto di $\mathbb{R}^n$. Segue che è dunque una carta di M, le cui coordinate sono chiamate *coordinate normali* centrate in p. Si ha che in tali coordinate la metrica assume nel punto p una forma particolarmente semplice.

PROPOSIZIONE 1.9.1. *Per ogni* $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$, *valgono le seguenti uguaglianze*

(1) $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$
(2) $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$
(3) $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p) = 0$

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo con la verifica della prima relazione, si ha

$$g_{ij}(p) = g_p\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big|_p\Big) = g_p\big((dexp_p)_{O_p}(e_i), (dexp_p)_{O_p}(e_j)\big) = g_p(e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Riguardo la seconda relazione, osserviamo che la geodetica σ_v, uscente da p con velocità iniziale $v = \sum_{j=1}^n v^j e_j \in T_pM$, si scrive in coordinate normali come

$$\sigma_v^j(t) = t\, v^j$$

per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$. Sostituendo questa scrittura nell'equazione delle geodetiche (1.5) e valutandola per $t = 0$, si trova

$$\sum_{i,j=1}^n \Gamma^k_{ij}(p)\, v^i v^j = 0$$

per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$. Poiché ciò vale per qualsiasi $v \in T_pM$, si deduce facilmente che $\Gamma^k_{ij}(p) = 0$, per ogni $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$.
La terza relazione, infine, si ottiene dalla seconda utilizzando la formula

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \sum_{l=1}^n \big(\Gamma^l_{ki}\, g_{lj} + \Gamma^l_{kj}\, g_{il}\big)$$

per ogni $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$. □

OSSERVAZIONE 1.9.2. Una conseguenza di questo risultato è che, *al prim'ordine*, non è possibile distinguere, in un punto, g dalla metrica piatta, a meno di un cambio di coordinate. Invece, non sempre esistono delle coordinate in cui le derivate seconde della metrica si annullano, dal momento che queste sono legate alla curvatura della varietà, come vedremo.

Supponendo che V sia un aperto di $T_pM \setminus \{O_p\}$ e W di M con $exp_p : V \to W$ un diffeomorfismo, poiché $j^{-1}(V)$ è un aperto di $(0,+\infty) \times \mathbb{S}_p^{n-1}$, allora $j^{-1}(V)$ è un'unione di aperti del tipo $(a,b) \times \widetilde{U}$ dove $\widetilde{U}$ è un dominio coordinato di $\mathbb{S}_p^{n-1}$. Siano (a,b) un intervallo aperto contenuto in $(0,+\infty)$ e $\widetilde{U}$ il dominio di una carta di $\mathbb{S}_p^{n-1}$, con parametrizzazione locale $\xi : U \to \widetilde{U}$, con $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$, tali che $(a,b) \times \widetilde{U} \subseteq j^{-1}(V)$. Possiamo dunque considerare il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
(r,\xi) \in (a,b) \times \widetilde{U} \subseteq j^{-1}(V) \arrow[rr, "\phi"] & & exp_p(r\xi) \in W \arrow[d, "x"] \\
(r,\theta^1,\dots,\theta^{n-1}) \in (a,b) \times U \subseteq \mathbb{R}^n \arrow[u, "(\mathrm{Id},\xi)"] \arrow[urr, "\varphi"] & & (r\xi^1,\dots,r\xi^n) \in \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

La mappa composta $\varphi = \phi \circ (\mathrm{Id},\xi)$ è allora un diffeomorfismo tra l'aperto $(a,b) \times U$ di $\mathbb{R}^n$ con la sua immagine, che è un aperto di M. Dunque, φ^{-1} è una carta di M le cui coordinate sono chiamate *coordinate polari* centrate in p.

Sia $\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \theta^{n-1}}\right\}$ la base indotta su T_qM per ogni $q \in \varphi((a,b) \times U)$ da φ^{-1}.

Vogliamo mostrare che

(1) $g = dr \otimes dr + g_{\alpha\beta}\, d\theta^\alpha \otimes d\theta^\beta$ in queste coordinate su $\varphi((a,b) \times U) \subseteq W$.
(2) r è una funzione distanza su $\varphi((a,b) \times U) \subseteq W$ tale che $\nabla r = \partial_r$ e quindi le curve integrali del suo gradiente ∇r sono tratti di geodetiche parametrizzate in lunghezza d'arco, uscenti da p.

Dal lemma di Gauss 1.4.22, sappiamo che, per ogni $v, w \in T_pM$, vale l'uguaglianza

$$g_{exp_p(v)}(d(exp_p)_v(v), d(exp_p)_v(w)) = g_p(v,w),$$

dove abbiamo identificato canonicamente $T_v(T_pM)$ con T_pM. Vediamo allora che

$$\nabla r(q) = d(exp_p)_{r\xi}(\xi) = \sigma'_\xi(r) = \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\sigma_\xi(r)}$$

per ogni $q = exp_p(r\xi)$ con $(r,\xi) \in (a,b) \times \widetilde{U}$ e in particolare $\|\nabla r\| = 1$. Per vedere che

$$\nabla r(q) = d(exp_p)_{r\xi}(\xi)$$

dobbiamo mostrare che

$$dr_q(\widetilde{w}) = g_q(d(exp_p)_{r\xi}(\xi), \widetilde{w})$$

per ogni $\widetilde{w} \in T_qM$.
Essendo $exp_p|_{j((a,b)\times\widetilde{U})}$ un diffeomorfismo con l'immagine, che è un aperto di M, $d(exp_p)_{r\xi}$ è un isomorfismo lineare tra $T_{r\xi}T_pM$ (che stiamo identificando con T_pM) e T_qM. Perciò per ogni $\widetilde{w} \in T_qM$ esiste un unico $w \in T_pM$ tale che $d(exp_p)_{r\xi}(w) = \widetilde{w}$. Da ciò segue che

$$dr_q(\widetilde{w}) = dr_q(d(exp_p)_{r\xi}(w)) = dr_q \circ d(exp_p)_{r\xi}(w) = d(r \circ exp_p)_{r\xi}(w)$$

Consideriamo la curva di T_pM, $\gamma(\tau) = r\xi + \tau w$, che risulta essere contenuta in $j((a,b)\times\widetilde{U})$ per $\tau > 0$ opportunamente piccolo, poiché $r \circ exp_p|_{j((a,b)\times\widetilde{U})}(\cdot)$ è uguale a $\|\cdot\|_p$, abbiamo

$$dr_q(\widetilde{w}) = d(r \circ exp_p)_{r\xi}(w) = (r \circ exp_p|_{j((a,b)\times\widetilde{U})} \circ \gamma)'(0) = g_p(\xi, w)$$

Per il Lemma 1.4.22 segue allora l'uguaglianza cercata.
Considerando la curva $\gamma(\tau) = r\xi + \tau\xi$ di T_pM, che risulta essere contenuta in $j((a,b)\times\widetilde{U})$ per τ opportunamente piccolo, si ha che

$$d(exp_p)_{r\xi}(\xi) = (exp_p \circ \gamma)'(0) = (\sigma_\xi(\tau + r))'(0) = \sigma'_\xi(r)$$

Valgono le seguenti uguaglianze

$$\frac{\partial}{\partial r}\Big|_q = d(\varphi)_{\varphi^{-1}(q)}\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big|_{(r,\theta)}\Big) = d(exp_p)_{r\xi(\theta)}(\xi(\theta))$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\Big|_q = d(\varphi)_{\varphi^{-1}(q)}\Big(\frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\Big|_{(r,\theta)}\Big) = d(exp_p)_{r\xi(\theta)}\Big(\sum_{i=1}^n r\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)e_i\Big)$$

dove, di nuovo, stiamo identificando canonicamente $T_{r\xi}T_pM$ con T_pM. Per il Lemma 1.4.22, segue che

$$g_q\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big|_q, \frac{\partial}{\partial r}\Big|_q\Big) = g_p(\xi(\theta), \xi(\theta)) = 1$$

$$g_q\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Big|_q, \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha}\Big|_q\Big) = g_p\Big(\sum_{i=1}^n \xi^i(\theta)e_i, \sum_{i=1}^n r\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)e_i\Big) = \frac{r}{2}\frac{\partial\,[\sum_i(\xi^i)^2]}{\partial\theta^\alpha}(\theta) = 0$$

essendo $\xi(\theta) \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ e $\mathcal{B}$ la base ortonormale di T_pM precedentemente considerata.

Nel seguito utilizzeremo le coordinate normali e polari centrate in $p \in M$ in sottoinsiemi aperti di D_p (si veda la Definizione 1.8.5 e la Proposizione 1.8.8), che è il più grande aperto sul quale la funzione distanza $d(p,\cdot)$ è regolare. Ricordiamo inoltre l'insieme $D(p)$ nella Definizione 1.8.5 e la funzione continua $c : \mathbb{S}_p^{n-1} \to (0, +\infty]$ nella Definizione 1.8.1. Nella Proposizione 1.8.7 abbiamo visto che la mappa

$$exp_p : D(p) \subseteq T_pM \to D_p \subseteq M$$

è un diffeomorfismo tra aperti. Scelta come sopra una base ortonormale $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ di T_pM, con il prodotto scalare g_p, e posto $\chi : T_pM \to \mathbb{R}^n$ l'isomorfismo lineare delle coordinate rispetto a tale base, allora $x = \chi \circ exp_p^{-1}$, che è una carta di M, fornisce delle coordinate normali centrate nel punto p in D_p. Inoltre, considerando il diagramma

$$\begin{tikzcd}
(r,\xi) \in (0,\varepsilon) \times \widetilde{U} \subseteq j^{-1}(D(p) \setminus \{O_p\}) \arrow[r, "\phi"] & exp_p(r\xi) \in D_p \setminus \{p\} \subseteq M \arrow[d, "x"] \\
(r, \theta^1, \ldots, \theta^{n-1}) \in (0,\varepsilon) \times U \arrow[u, "{(\mathrm{Id},\xi)}"] \arrow[ur, "\varphi"] & (r\xi^1, \ldots, r\xi^n) \in \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

dove $0 < \varepsilon \leq \inf_{\xi \in \widetilde{U}} c(\xi)$ e la mappa $\xi : U \to \widetilde{U}$ è una parametrizzazione locale di $\mathbb{S}_p^{n-1}$. La mappa composta $\varphi = \phi \circ (\mathrm{Id}, \xi)$ è allora un diffeomorfismo tra l'aperto $(0,\varepsilon) \times U$ di $\mathbb{R}^n$ con la sua immagine, che è un aperto di M. Dunque, φ^{-1} è una carta di M e individua delle coordinate polari centrate in p su $\varphi((0,\varepsilon) \times U) \subseteq D_p \setminus \{p\}$. Per quanto precedentemente provato, vale la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 1.9.3. *In queste coordinate polari $(r, \theta^1, \ldots, \theta^{n-1})$ centrate in $p \in M$, per ogni $q \in \varphi((0,\varepsilon) \times U)$, valgono le seguenti uguaglianze:*

(1) $g_{rr}(q) = 1$
(2) $g_{r\alpha}(q) = 0$ *per* $\alpha = 1, \ldots, n-1$

La metrica si può dunque scrivere localmente come

$$g = dr \otimes dr + g_{\alpha\beta}\, d\theta^\alpha \otimes d\theta^\beta$$

Inoltre si ha $r = d(p, \cdot)$ e $\nabla r = \partial_r$ in ogni punto di $\varphi((0,\varepsilon) \times U)$.

1.10. Integrazione

Fissiamo un atlante numerabile $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ della varietà riemanniana completa (M, g). Diremo che $E \subseteq M$ è misurabile se $\varphi_\alpha(E \cap U_\alpha)$ è misurabile secondo Lebesgue per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$ e denoteremo con $\mathcal{M}$ la famiglia dei sottoinsiemi misurabili di M.
Sfruttando che ciascuna φ_α, essendo biettiva, conserva le operazioni insiemistiche quali il complemento, l'intersezione e l'unione rispetto a una qualunque famiglia di sottoinsiemi di U_α, segue che la famiglia dei sottoinsiemi misurabili di M è una sigma–algebra. È poi facile mostrare che se $E \subseteq M$ è misurabile, allora $\psi(E \cap V)$ è misurabile secondo Lebesgue per ogni (V, ψ) carta di M.

Fissiamo $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ una partizione dell'unità subordinata all'atlante che stiamo considerando. Definiamo la *misura canonica* $\mu : \mathcal{M} \to [0,+\infty]$ sulla varietà riemanniana (M,g) come

$$\mu(E) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \int_{\varphi_\alpha(E\cap U_\alpha)} \left(\rho_\alpha \sqrt{\det g_{ij}^{\varphi_\alpha}}\,\right) \circ \varphi_\alpha^{-1}\, d\mathscr{L}^n$$

per ogni $E \in \mathcal{M}$, dove denotiamo con $\mathscr{L}^n$ la misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$.
Osserviamo che per la definizione di insiemi misurabili di M, il sottoinsieme $\varphi_\alpha(E\cap U_\alpha)$ di $\mathbb{R}^n$ è misurabile secondo Lebesgue rispetto a ciascuna $\alpha \in \mathcal{A}$, la funzione $\left(\rho_\alpha \sqrt{\det g_{ij}^{\varphi_\alpha}}\,\right) \circ \varphi_\alpha^{-1}$ è continua e non negativa, per ogni $\alpha \in \mathcal{A}$, pertanto tale integrale è ben definito e così la misura μ.
Si può facilmente dimostrare che la misura μ è allora indipendente dall'atlante scelto e dalla partizione dell'unità associata. Inoltre se M è orientabile, e se consideriamo un atlante che è compatibile con l'orientazione di M, allora la misura precedentemente definita coincide con quella individuata dalla forma di volume di (M,g) che in una carta coordinata si scrive come

$$d\,\mathrm{Vol} = G\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

dove $G = \sqrt{\det g_{ij}}$.

Banalmente, i punti e le curve regolari (come le geodetiche) sono insiemi misurabili di μ–misura nulla, inoltre anche il cut–locus di C_p di ogni punto $p \in M$ ha misura nulla. Ciò segue dal fatto che la mappa $c : \mathbb{S}_p^{n-1} \to (0,+\infty]$ (Definizione 1.8.1) è continua e il suo grafico in coordinate polari è il cut–locus differenziale in T_pM che viene mandato dalla mappa esponenziale exp_p (che è regolare) nel cut–locus di p in M. Il fatto che allora quest'ultimo abbia μ–misura nulla segue dal teorema di Fubini applicato al cut–locus differenziale.

Per la Proposizione 1.8.6, questo implica che nell'integrare su M, possiamo trascurare il cut–locus e considerare gli integrali solo sull'insieme D_p. Denotando con ψ la proiezione stereografica di $\mathbb{S}^{n-1}$ rispetto ad un suo punto N e con $\widetilde{c}$ l'applicazione continua $\widetilde{c} = c \circ \chi^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}} \circ \psi^{-1}$, dove χ una isometria lineare di T_pM con $\mathbb{R}^n$, poniamo

$$W = \big\{(t,\theta) \in \mathbb{R}^n \;:\; \theta \in \mathbb{R}^{n-1} \;\text{ e }\; 0 < t < \widetilde{c}(\theta)\big\}$$

e consideriamo delle coordinate polari centrate in p come nella sezione precedente. Se $\phi = exp_p \circ j$ è l'applicazione definita dalla composizione,

$$(r,\xi) \in (0,+\infty) \times \mathbb{S}_p^{n-1} \xrightarrow{\;j\;} r\xi \in T_pM \setminus \{O_p\} \xrightarrow{\;exp_p\;} exp_p(r\xi) \in M,$$

essendo $\varphi = \phi \circ (\mathrm{Id}, \chi^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}} \circ \psi^{-1})$ un diffeomorfismo tra l'aperto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ e l'aperto $D_p \setminus \{\sigma_{\xi_0}(t)\}_{t\in[0,c(\xi_0))} \subseteq M$, con $\xi_0 = \chi^{-1}(N)$, allora tale mappa è una parametrizzazione locale di M e dunque φ^{-1} è una carta di M.
Sappiamo da quanto detto sopra che

$$\mu(M) = \mu\big(D_p \setminus \{\sigma_{\xi_0}(t)\}_{t\in[0,c(\xi_0))}\big),$$

quindi, ponendo $G(t,\theta) = \sqrt{\det g_{ij}^{\varphi^{-1}}} \circ \varphi$, si ha

$$\begin{aligned}
\mu\big(D_p \setminus \{\sigma_{\xi_0}(t)\}_{t\in[0,c(\xi_0))}\big) &= \int_{\varphi^{-1}\left(D_p\setminus\{\sigma_{\xi_0}(t)\}_{t\in[0,c(\xi_0))}\right)} \sqrt{\det g_{ij}^{\varphi^{-1}}} \circ \varphi \, d\mathscr{L}^n \\
&= \int_W \sqrt{\det g_{ij}^{\varphi^{-1}}} \circ \varphi \, d\mathscr{L}^n \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\theta^1 \dots d\theta^{n-1} \int_0^{\widetilde{c}(\theta)} G(t,\theta)\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} dt \int_{\{\theta\in\mathbb{R}^{n-1}:\widetilde{c}(\theta)>t\}} G(t,\theta)\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}
\end{aligned}$$

dove nelle ultime due uguaglianze abbiamo applicato il teorema di Fubini.
Abbiamo dunque ottenuto che

$$\begin{aligned}
\mu(M) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\theta^1 \dots d\theta^{n-1} \int_0^{\widetilde{c}(\theta)} G(t,\theta)\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} dt \int_{\{\theta\in\mathbb{R}^{n-1}:\widetilde{c}(\theta)>t\}} G(t,\theta)\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1} \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

CAPITOLO 2

Le equazioni fondamentali

Nel capitolo precedente abbiamo definito la forma indice che è lo strumento "classico" per esplicitare le relazioni tra la curvatura e la topologia, in un approccio di tipo variazionale. In questo capitolo introduciamo e studiamo altri strumenti che ci permetteranno di sviluppare un approccio alternativo.

Mediante la connessione di Levi–Civita estenderemo alle varietà la nozione di hessiano e di laplaciano di una funzione regolare, poi proveremo delle formule che legano la metrica e il tensore di curvatura con l'hessiano delle funzioni distanza da un punto, lungo le geodetiche uscenti da tale punto. Tali formule ci forniranno un insieme di informazioni che sostituisce quanto può essere dedotto sul comportamento delle geodetiche usando la forma indice nell'approccio "classico".

Gran parte dei risultati che seguono sono una rielaborazione e espansione di varie idee e tecniche contenute nel libro di Petersen [**10**].

D'ora in poi considereremo soltanto varietà riemanniane n–dimensionali complete e ∇ sarà la relativa connessione di Levi–Civita. Inoltre, useremo la convenzione di Einstein degli indici ripetuti per i tensori (gli indici ripetuti sono sommati).

A meno che diversamente specificato, nel seguito quando parleremo di "punto coniugato a qualche altro punto della varietà lungo una geodetica da esso uscente " staremo tacitamente facendo riferimento al primo *punto coniugato lungo la geodetica considerata (talvolta detto anche* punto focale*).*

2.1. L'hessiano e il laplaciano

Sia M una varietà e $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione C^∞.

Il *gradiente* di f, denotato con ∇f, è il campo vettoriale soddisfacente $g(v, \nabla f) = df(v)$ per ogni $v \in TM$. In coordinate locali,

$$\nabla f = g^{ij}\partial_i f \partial_j,$$

dove g^{ij} è la matrice inversa della matrice g_{ij}.

L'*hessiano* di f, denotato con $\operatorname{Hess} f$, è la 2–forma bilineare simmetrica (tensore di tipo $(0,2)$) $\operatorname{Hess} f = \nabla^2 f = \nabla\nabla f$, cioè più esplicitamente definito da

$$\operatorname{Hess} f(X,Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y)$$

per ogni coppia X, Y di campi vettoriali su M. In coordinate locali,

$$\operatorname{Hess} f(\partial_i, \partial_j) = \partial_i \partial_j f - \Gamma_{ij}^k \partial_k f,$$

per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Essendo $\operatorname{Hess} f$ simmetrico, possiamo associargli un endomorfismo lineare $L : TM \to TM$ (tensore di tipo $(1,1)$) definito da $L(X) = \nabla_X \nabla f$ per ogni X campo vettoriale su M, che soddisfa $\operatorname{Hess} f(X,Y) = g(L(X), Y)$.
Il *laplaciano* di f, denotato con Δf, è la *traccia* di L, cioè in coordinare locali,

$$\Delta f = \operatorname{tr}(L) = L_i^i = L_i^k g_{kj} g^{ij} = g(L(\partial_i), \partial_j) g^{ij} = g^{ij} \operatorname{Hess}_{ij} f = g^{ij} \Big(\partial_i \partial_j f - \Gamma_{ij}^k \partial_k f \Big).$$

DEFINIZIONE 2.1.1. *Diremo che $r : U \to \mathbb{R}$, con U aperto di M, è una* funzione distanza *se è C^∞ e soddisfa l'equazione di* Hamilton–Jacobi $\|\nabla r\| = 1$ *(equazione* eikonale*).*

Segue dalla Proposizione 1.8.8 del capitolo precedente che la funzione distanza riemanniana da un punto $p \in M$ è una funzione distanza nell'aperto $D_p \setminus \{p\}$ di M, secondo questa definizione. Abbiamo inoltre la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 2.1.2. *Sia $r : M \to \mathbb{R}$ la distanza riemanniana da p, cioè $r = d(p, \cdot)$. Allora r^2 è di classe C^∞ su D_p e $\operatorname{Hess} r^2$ è definito positivo in un intorno di p.*

DIMOSTRAZIONE. La mappa exp_p^{-1} è ben definita su D_p e si ha

$$r^2(q) = \left\| exp_p^{-1}(q) \right\|_p^2,$$

segue che r^2 è ivi di classe C^∞. Sia ε tale che $0 < \varepsilon \leq \operatorname{inj}(p)$. Consideriamo un vettore non nullo $v \in T_p M$ e sia

$$\sigma_v : \Big(-\frac{\varepsilon}{\|v\|_p}, \frac{\varepsilon}{\|v\|_p} \Big) \to M$$

la geodetica radiale uscente da p con $\sigma_v'(0) = v$. Essendo $\nabla_{\sigma_v'(t)}\sigma_v'(t) = 0$, abbiamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess} r^2(\sigma_v'(t), \sigma_v'(t)) &= \nabla_{\sigma_v'(t)}\nabla_{\sigma_v'(t)} r^2 \\
&= g_{\sigma_v(t)}\big(\nabla_{\sigma_v'(t)}\nabla r^2, \sigma_v'(t)\big) \\
&= g_{\sigma_v(t)}\big(\nabla_t\nabla r^2, \sigma_v'(t)\big) \\
&= \frac{d}{dt} g_{\sigma_v(t)}(\nabla r^2, \sigma_v') \\
&= \frac{d}{dt} dr^2(\sigma_v'(t)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big(\frac{d(r^2\circ\sigma_v)}{dt}\Big)(t) \\
&= \frac{d^2(r^2\circ\sigma_v)}{dt^2}(t),
\end{aligned}$$

da cui segue

$$\operatorname{Hess} r^2(p)(v,v) = \frac{d^2(r^2\circ\sigma_v)}{dt^2}(0) = \frac{d^2(t^2\,\|v\|_p^2)}{dt^2}(0) = 2\,\|v\|_p^2 > 0.$$

La tesi segue dunque dalla regolarità C^∞ della funzione r^2 nell'intorno di $p \in M$ (da cui la continuità del suo hessiano) e il teorema della permanenza del segno. □

2.2. Le equazioni della geometria riemanniana

Data $r : U \to \mathbb{R}$ una funzione distanza sulla varietà (M, g), denoteremo con ∂_r il gradiente ∇r, con $U_r = \{p \in U : r(p) = r\}$ gli insieme di livello di r. Ciascun U_r non vuoto, essendo la controimmagine di un valore regolare ($\|\nabla r\| = 1$ in U), è una ipersuperficie regolare in M. Inoltre, per $p \in U_r$, è possibile identificare T_pU_r con il kernel del differenziale di r in p, che è un sottospazio vettoriale di T_pM, da cui lo spazio tangente di U_r in p è dato dai vettori $v \in T_pM$ tali che $0 = dr_p(v) = g_p(v, \partial_r)$, cioè i vettori $v \in T_pM$ ortogonali a ∂_r (si veda [**1**, Sezione 2.4], per esempio).

Per ogni U_r non vuoto, indicheremo con g_r, ∇^r e R^r rispettivamente la metrica indotta su U_r dalla metrica g di M, la connessione di Levi–Civita e il tensore di curvatura della varietà riemanniana (U_r, g_r).

Come detto nella sezione precedente, essendo l'hessiano di una funzione una forma bilineare simmetrica, possiamo associare a $\operatorname{Hess} r$ l'endomorfismo lineare $S : TU \to TU$ (cioè un tensore di tipo $(1,1)$) definito da

$$S(X) = \nabla_X \partial_r$$

per ogni X campo vettoriale su U, che dunque è un operatore autoaggiunto (rispetto alla metrica g) che soddisfa

$$\operatorname{Hess} r(X,Y) = g(S(X),Y) = g(X,S(Y)) = g(\nabla_X \partial_r, Y) = g(X, \nabla_Y \partial_r).$$

Chiamiamo S *operatore shape*. Tale tensore è la "versione" $(1,1)$ dell'hessiano di r.
Con S^2 indicheremo la composizione di S con se stesso e $\operatorname{Hess}^2 r$ come la forma bilineare simmetrica definita da

$$\operatorname{Hess}^2 r(X,Y) = g(S^2(X),Y) = g(S(X),S(Y)) = \operatorname{Hess} r(S(X),Y),$$

si vede allora facilmente che tale forma è semidefinita positiva,

$$\operatorname{Hess}^2 r(X,X) = g(S^2(X),X) = g(S(X),S(X)) \geq 0.$$

Notiamo infine che

$$\operatorname{tr}(S) = \Delta r = g(S(\partial_i),\partial_j)g^{ij} = g^{ij}\operatorname{Hess}_{ij} r = g^{ij}\nabla^2_{ij} r = g^{ij}\nabla_i\nabla_j r$$

$$\operatorname{tr}(S^2) = g(S^2(\partial_i),\partial_j)g^{ij} = g(S(\partial_i),S(\partial_j))g^{ij} = S^k_i S^\ell_j g^{ij} g_{k\ell} = \|S\|^2 = \|\operatorname{Hess} r\|^2.$$

La *derivata di Lie* di un tensore sarà indicata con L, in particolare, se X, Y sono due campi vettoriali, si ha $L_X Y = [X,Y]$, che in coordinate locali si scrive come

$$L_X Y = \Big(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \Big) \partial_j$$

da cui segue ovviamente $L_X Y = -L_Y X$ e $L_X X = 0$.
Notiamo la relazione

$$\nabla_{\partial_r} X = \nabla_X \partial_r + [\partial_r, X] = S(X) + L_{\partial_r} X$$

cioè

$$\nabla_{\partial_r} X - L_{\partial_r} X = S(X) \tag{2.1}$$

che dice che la differenza tra la derivata covariante e di Lie rispetto a ∂_r di un campo X su U è data dall'operatore shape su X.

LEMMA 2.2.1. *Sia $r : U \to \mathbb{R}$ una funzione distanza. Allora si ha*

$$\nabla_{\partial_r} \partial_r = 0$$

in ogni punto di U. Segue che $S(\partial_r) = 0$, dunque $\operatorname{Hess} r(\partial_r, \cdot) = 0$, cioè ∂_r è sempre un autovettore nullo di S.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni campo vettoriale X su U abbiamo

$$g(\nabla_{\partial_r}\partial_r, X) = \operatorname{Hess} r(\partial_r, X) = \operatorname{Hess} r(X, \partial_r) = g(\nabla_X \partial_r, \partial_r) = \frac{X(g(\partial_r, \partial_r))}{2} = 0$$

dove abbiamo sfruttato la simmetria dell'hessiano e il fatto che ∂_r è un campo di norma unitaria. $\square$

OSSERVAZIONE 2.2.2. Per la definizione di derivata di Lie abbiamo anche

$$L_{\partial_r}\partial_r = 0.$$

PROPOSIZIONE 2.2.3 (Equazioni di curvatura). *Data una funzione distanza $r : U \to \mathbb{R}$, valgono le seguenti uguaglianze,*

(1) $\nabla_{\partial_r} S + S^2 = -\mathrm{R}(\cdot, \partial_r)\partial_r$
(2) $g(\mathrm{R}(X,Y)Z, W) = g_r(\mathrm{R}^r(X,Y)Z, W) - \Pi(Y,Z)\Pi(X,W) + \Pi(X,Z)\Pi(Y,W)$
(3) $g(\mathrm{R}(X,Y)Z, \partial_r) = -(\nabla_X \Pi)(Y,Z) + (\nabla_Y \Pi)(X,Z)$

dove X, Y, Z, W sono tangenti a U_r e $\Pi(V,T) = \operatorname{Hess} r(V,T) = g(S(V),T)$.
La forma bilineare simmetrica $\Pi : TU_r \times TU_r \to \mathbb{R}$ è detta seconda forma fondamentale *della sottovarietà U_r.*

OSSERVAZIONE 2.2.4. La prima equazione è detta *della curvatura radiale*, mentre la seconda e terza rispettivamente sono dette *equazioni di Gauss* e *di Codazzi–Mainardi*.

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo la prima uguaglianza. Sia X un campo vettoriale su U. Allora

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\partial_r} S)(X) + S^2(X) &= \nabla_{\partial_r}(S(X)) - S(\nabla_{\partial_r} X) + S(S(X)) \\
&= \nabla_{\partial_r}\nabla_X \partial_r - \nabla_{\nabla_{\partial_r} X}\partial_r + \nabla_{\nabla_X \partial_r}\partial_r \\
&= \nabla_{\partial_r}\nabla_X \partial_r - \nabla_{\nabla_{\partial_r} X - \nabla_X \partial_r}\partial_r \\
&= \nabla_{\partial_r}\nabla_X \partial_r - \nabla_{[\partial_r, X]}\partial_r \\
&= \nabla_{\partial_r}\nabla_X \partial_r - \nabla_X \nabla_{\partial_r}\partial_r + \nabla_{[X,\partial_r]}\partial_r \\
&= -\mathrm{R}(X, \partial_r)\partial_r,
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il Lemma 2.2.1.
Proviamo le altre due uguaglianze contemporaneamente. Siano X, Y due campi vettoriali tangenti a U_r. Poiché ovviamente si ha $g(Y, \partial_r) = 0$, segue che

$$0 = X(g(Y, \partial_r)) = g(\nabla_X Y, \partial_r) + g(Y, \nabla_X \partial_r) = g(\nabla_X Y, \partial_r) + g(Y, S(X))$$

Di conseguenza, usando il simbolo $^\top$ per indicare la proiezione di un campo sullo spazio tangente a U_r, e sapendo che la connessione di Levi–Civita di una sottovarietà riemanniana è data dalla "proiezione" di quella dello spazio ambiente (si veda [**5**, Proposition 2.56], per maggiori dettagli), abbiamo che

$$\begin{aligned}\nabla^r_X Y &= (\nabla_X Y)^\top \\ &= \nabla_X Y - g(\nabla_X Y, \partial_r)\partial_r \\ &= \nabla_X Y + g(S(X), Y)\partial_r \\ &= \nabla_X Y + \Pi(X, Y)\partial_r\end{aligned}$$

quindi,

$$\nabla_X Y = \nabla^r_X Y - \Pi(X, Y)\partial_r.$$

Per ogni X, Y, Z campi vettoriali tangenti a U_r risulta allora che

$$\begin{aligned}\mathrm{R}(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= \nabla_X(\nabla^r_Y Z - g(S(Y), Z)\partial_r) - \nabla_Y(\nabla^r_X Z - g(S(X), Z)\partial_r) \\ &\quad -\nabla^r_{[X,Y]}Z + g(S([X,Y]), Z)\partial_r \\ &= \nabla_X\nabla^r_Y Z - \nabla_Y\nabla^r_X Z - \nabla^r_{[X,Y]}Z \\ &\quad -\nabla_X(g(S(Y), Z)\partial_r) + \nabla_Y(g(S(X), Z)\partial_r) + g(S([X,Y]), Z)\partial_r \\ &= \nabla^r_X\nabla^r_Y Z - \nabla^r_Y\nabla^r_X Z - \nabla^r_{[X,Y]}Z \\ &\quad -g(S(X), \nabla^r_Y Z)\partial_r + g(S(Y), \nabla^r_X Z)\partial_r \\ &\quad -X(g(S(Y), Z))\partial_r - g(S(Y), Z)\nabla_X\partial_r \\ &\quad +Y(g(S(X), Z))\partial_r + g(S(X), Z)\nabla_Y\partial_r + g(S([X,Y]), Z)\partial_r \\ &= \mathrm{R}^r(X,Y)Z - g(S(X), \nabla_Y Z)\partial_r - g(S(X), \Pi(Y,Z)\partial_r)\partial_r \\ &\quad +g(S(Y), \nabla_X Z)\partial_r + g(S(Y), \Pi(X,Z)\partial_r)\partial_r + g(S([X,Y]), Z)\partial_r \\ &\quad -g(\nabla_X S(Y), Z)\partial_r - g(S(Y), \nabla_X Z)\partial_r - g(S(Y), Z)\nabla_X\partial_r \\ &\quad +g(\nabla_Y S(X), Z)\partial_r + g(S(X), \nabla_Y Z)\partial_r + g(S(X), Z)\nabla_Y\partial_r \\ &= \mathrm{R}^r(X,Y)Z + g(S([X,Y]), Z)\partial_r \\ &\quad -g(\nabla_X S(Y), Z)\partial_r - g(S(Y), Z)\nabla_X\partial_r \\ &\quad +g(\nabla_Y S(X), Z)\partial_r + g(S(X), Z)\nabla_Y\partial_r\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato quanto precedentemente ottenuto, le proprietà di simmetria e compatibilità con la metrica delle connessioni e il Lemma 2.2.1.

Di conseguenza, per ogni X, Y, Z, W campi vettoriali tangenti a U_r otteniamo che

$$\begin{aligned} g(\mathrm{R}(X,Y)Z,W) &= g_r(\mathrm{R}^r(X,Y)Z,W) - g(S(Y),Z)g(\nabla_X\partial_r,W) \\ &\quad + g(S(X),Z)g(\nabla_Y\partial_r,W) \\ &= g_r(\mathrm{R}^r(X,Y)Z,W) - g(S(Y),Z)g(S(X),W) \\ &\quad + g(S(X),Z)g(S(Y),W) \\ &= g_r(\mathrm{R}^r(X,Y)Z,W) - \Pi(Y,Z)\Pi(X,W) + \Pi(X,Z)\Pi(Y,W) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(\mathrm{R}(X,Y)Z,\partial_r) &= -g(\nabla_X S(Y),Z) + g(\nabla_Y S(X),Z) + g(S([X,Y]),Z) \\ &= g(S(\nabla_X Y),Z) - g(\nabla_X S(Y),Z) \\ &\quad + g(\nabla_Y S(X),Z) - g(S(\nabla_Y X),Z) \\ &= g(S(\nabla_X Y),Z) - X(g(S(Y),Z)) + g(S(Y),\nabla_X Z) \\ &\quad + Y(g(S(X),Z)) - g(S(X),\nabla_Y Z) - g(S(\nabla_Y X),Z) \\ &= -X(\Pi(Y,Z)) + \Pi(\nabla_X Y,Z) + \Pi(Y,\nabla_X Z) \\ &\quad + Y(\Pi(X,Z)) - \Pi(\nabla_Y X,Z) - \Pi(X,\nabla_Y Z) \\ &= -(\nabla_X\Pi)(Y,Z) + (\nabla_Y\Pi)(X,Z) \end{aligned}$$

dove abbiamo tenuto conto che $\mathrm{R}^r(X,Y)Z$ è un campo vettoriale tangente a U_r e dove abbiamo sfruttato $\|\partial_r\|^2 = 1$ e il Lemma 2.2.1. □

PROPOSIZIONE 2.2.5 (Equazioni della geometria riemanniana). *Data una funzione distanza $r : U \to \mathbb{R}$, valgono le seguenti uguaglianze,*

(1) $\nabla_{\partial_r} g = 0$
(2) $L_{\partial_r} g = 2\mathrm{Hess}\, r$
(3) $L_{\partial_r} S = \nabla_{\partial_r} S = -S^2 - \mathrm{R}(\cdot,\partial_r)\partial_r$
(4) $(\nabla_{\partial_r}\mathrm{Hess}\, r)(X,Y) + \mathrm{Hess}^2 r(X,Y) = \mathrm{R}(X,\partial_r,Y,\partial_r)$
(5) $(L_{\partial_r}\mathrm{Hess}\, r)(X,Y) - \mathrm{Hess}^2 r(X,Y) = \mathrm{R}(X,\partial_r,Y,\partial_r)$

per ogni coppia X, Y di campi vettoriali su U.

DIMOSTRAZIONE. La prima uguaglianza è ovvia conseguenza della compatibilità della connessione di Levi–Civita con la metrica, riguardo la seconda, abbiamo

$$\begin{aligned}
(L_{\partial_r}g)(X,Y) &= \partial_r g(X,Y) - g([\partial_r, X], Y) - g(X, ([\partial_r, Y]) \\
&= g(\nabla_{\partial_r}X, Y) + g(X, \nabla_{\partial_r}Y) \\
&\quad -g(\nabla_{\partial_r}X - \nabla_X\partial_r, Y) - g(X, \nabla_{\partial_r}Y - \nabla_Y\partial_r) \\
&= g(\nabla_X\partial_r, Y) + g(X, \nabla_Y\partial_r) \\
&= 2\mathrm{Hess}\, r(X,Y).
\end{aligned}$$

Dimostriamo la terza uguaglianza. Per ogni coppia X, Y di campi vettoriali su U, si ha

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\partial_r}S)(X) - (L_{\partial_r}S)(X) &= (\nabla_{\partial_r} - L_{\partial_r})S(X) - S(\nabla_{\partial_r}X - L_{\partial_r}X) \\
&= S(S(X)) - S(S(X)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Per la relazione (2.1), la seconda parte della terza uguaglianza segue allora dalla prima equazione nella Proposizione 2.2.3.
Vediamo infine le ultime due uguaglianze:

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\partial_r}\mathrm{Hess}\, r)(X,Y) &= \partial_r \mathrm{Hess}\, r(X,Y) - \mathrm{Hess}\, r(\nabla_{\partial_r}X, Y) - \mathrm{Hess}\, r(X, \nabla_{\partial_r}Y) \\
&= \partial_r g(S(X), Y) - g(S(\nabla_{\partial_r}X), Y) - g(S(X), \nabla_{\partial_r}Y) \\
&= \partial_r g(\nabla_X\partial_r, Y) - g(\nabla_{\nabla_{\partial_r}X}\partial_r, Y) - g(\nabla_X\partial_r, \nabla_{\partial_r}Y) \\
&= g(\nabla_{\partial_r}\nabla_X\partial_r, Y) - g(\nabla_{\nabla_{\partial_r}X}\partial_r, Y) \\
&\quad +g(\nabla_X\partial_r, \nabla_{\partial_r}Y) - g(\nabla_X\partial_r, \nabla_{\partial_r}Y) \\
&= g(\mathrm{R}(\partial_r, X)\partial_r, Y) - g(\nabla_{\nabla_X\partial_r}\partial_r, Y) \\
&= -\mathrm{R}(X, \partial_r, \partial_r, Y) - g(S(\nabla_X\partial_r), Y) \\
&= -\mathrm{R}(X, \partial_r, \partial_r, Y) - g(S^2(X), Y) \\
&= -\mathrm{R}(X, \partial_r, \partial_r, Y) - \mathrm{Hess}^2 r(X,Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(L_{\partial_r}\mathrm{Hess}\, r)(X,Y) &= \partial_r \mathrm{Hess}\, r(X,Y) - \mathrm{Hess}\, r([\partial_r, X], Y) - \mathrm{Hess}\, r(X, [\partial_r, Y]) \\
&= \partial_r g(\nabla_X \partial_r, Y) - g(\nabla_{[\partial_r, X]}\partial_r, Y) - g(\nabla_X \partial_r, [\partial_r, Y]) \\
&= g(\nabla_{\partial_r}\nabla_X \partial_r, Y) - g(\nabla_{[\partial_r, X]}\partial_r, Y) \\
&\quad + g(\nabla_X \partial_r, \nabla_{\partial_r} Y) - g(\nabla_X \partial_r, \nabla_{\partial_r} Y - \nabla_Y \partial_r) \\
&= g(\mathrm{R}(\partial_r, X)\partial_r, Y) + g(\nabla_X \partial_r, \nabla_Y \partial_r) \\
&= -\mathrm{R}(X, \partial_r, \partial_r, Y) + g(S(X), S(Y)) \\
&= -\mathrm{R}(X, \partial_r, \partial_r, Y) + \mathrm{Hess}^2, r(X,Y),
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la simmetria e compatibilità con la metrica della connessione di Levi–Civita, la simmetria dell'hessiano di r, il Lemma 2.2.1 (nel terzultimo passaggio) e le proprietà del tensore di curvatura di Riemann R. □

La seconda equazione mostra come l'hessiano della funzione distanza r controlli la metrica. La quarta e la quinta equazione ci dicono come la curvatura influenza tale hessiano. Vediamo ora come opportune scelte di campi vettoriali permettano di sfruttare queste equazioni fondamentali. Le uguaglianze del seguente corollario seguono per semplice calcolo.

COROLLARIO 2.2.6. *Data una funzione distanza $r : U \to \mathbb{R}$, valgono le seguenti uguaglianze,*

$$\begin{aligned}
\partial_r g(X,Y) &= g(\nabla_{\partial_r} X, Y) + g(X, \nabla_{\partial_r} Y) \\
&= 2\mathrm{Hess}\, r(X,Y) + g(L_{\partial_r} X, Y) + g(X, L_{\partial_r} Y) \\
\partial_r \mathrm{Hess}\, r(X,Y) &= -\mathrm{Hess}^2 r(X,Y) + \mathrm{R}(X, \partial_r, Y, \partial_r) \\
&\quad + \mathrm{Hess}\, r(\nabla_{\partial_r} X, Y) + \mathrm{Hess}\, r(X, \nabla_{\partial_r} Y) \\
&= \mathrm{Hess}^2 r(X,Y) + \mathrm{R}(X, \partial_r, Y, \partial_r) \\
&\quad + \mathrm{Hess}\, r(L_{\partial_r} X, Y) + \mathrm{Hess}\, r(X, L_{\partial_r} Y)
\end{aligned}$$

per ogni coppia X, Y di campi vettoriali su U.

DEFINIZIONE 2.2.7. *Sia $r : U \to \mathbb{R}$ una funzione distanza. Chiamiamo* campo di Jacobi per la funzione distanza r *ogni campo vettoriale J sull'aperto U che soddisfi* l'equazione di Jacobi

$$L_{\partial_r} J = 0$$

in ogni punto di U.

L'equazione di Jacobi è un sistema lineare di equazioni alle derivate parziali del prim'ordine che può essere "ridotto" con il *metodo delle caratteristiche* (si veda **[4]**, per esempio). Sia localmente un sistema di coordinate $(r, x^2, \ldots, x^n)$ dove r è la prima coordinata (ciò è possibile poiché $\|\nabla r\| = 1$ in U). Allora ponendo $J = a^r \partial_r + \sum_{i=2}^n a^i \partial_i$, l'equazione di Jacobi diventa

$$0 = L_{\partial_r} J = [\partial_r, J] = \partial_r a^r \partial_r + \sum_{i=2}^n \partial_r a^i \partial_i.$$

Quindi J è un campo di Jacobi per r se e solo se le funzioni a^r, a^i sono indipendenti da r. Da ciò segue facilmente che possiamo costruire un (unico) campo di Jacobi per r in U, a partire da un campo vettoriale C^∞ su una qualunque ipersuperficie regolare $N \subseteq M$, dove $(x^2, \ldots, x^n)|_N$ sia un sistema di coordinate.
Notiamo inoltre che i campi coordinati sono ovviamente loro stessi dei campi di Jacobi per r e che per ogni campo di Jacobi per r vale

$$\nabla_{\partial_r} X = S(X) = \nabla_X \partial_r$$

in U, per la relazione (2.1).

I campi di Jacobi per r sono campi di Jacobi lungo ogni curva integrale di ∇r in U (nel senso "standard" della Definizione 1.6.1), che soddisfano il sistema di equazioni differenziali ordinarie *del second'ordine*

$$\nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_r} J = -\mathrm{R}(J, \partial_r)\partial_r \tag{2.2}$$

(chiamata anch'essa equazione di Jacobi), infatti si ha

$$\begin{aligned} -\mathrm{R}(J, \partial_r)\partial_r &= \mathrm{R}(\partial_r, J)\partial_r \\ &= \nabla_{\partial_r} \nabla_J \partial_r - \nabla_J \nabla_{\partial_r} \partial_r - \nabla_{[\partial_r, J]} \partial_r \\ &= \nabla_{\partial_r} \nabla_J \partial_r \\ &= \nabla_{\partial_r} \nabla_{\partial_r} J. \end{aligned}$$

Essendo l'equazione (2.2) del second'ordine ha comunque più soluzioni dell'equazione del prim'ordine $L_{\partial_r} J$, cioè esistono campi di Jacobi lungo una curva integrale di ∇r che non sono campi Jacobi per r ristretti a tale curva.

ESEMPIO 2.2.8. Consideriamo $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea. Fissiamo un sistema di coordinate polari $(r, \theta^1, \ldots, \theta^{n-1})$ centrate nell'origine. La funzione $r = \|\cdot\|$ è allora una funzione distanza su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
Un qualunque campo vettoriale

$$Y = (a + rb)\partial_r$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ con b non nullo, soddisfa l'equazione (2.2) in tutto $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ma non è un campo di Jacobi per la funzione r in nessun aperto di $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Assumendo che i campi nel Corollario 2.2.6 siano due campi di Jacobi J_1, J_2 per la funzione distanza $r : U \to \mathbb{R}$, otteniamo (nelle "seconde righe" delle due uguaglianze)

$$\begin{aligned} \partial_r g(J_1, J_2) &= 2\mathrm{Hess}\, r(J_1, J_2) \\ \partial_r \mathrm{Hess}\, r(J_1, J_2) &= \mathrm{Hess}^2 r(J_1, J_2) + \mathrm{R}(J_1, \partial_r, J_2, \partial_r). \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ridotto le equazioni fondamentali a un insieme di equazioni differenziali ordinarie dove r è la variabile indipendente lungo le curve integrali di ∂_r.
Ponendo $J_1 = \partial_r$ e $J_2 = J$, per il Lemma 2.2.1, si ha allora

$$\partial_r g(\partial_r, J) = 2\mathrm{Hess}\, r(\partial_r, J) = 0,$$

in particolare, se un campo di Jacobi J per r è ortogonale a ∂_r in un punto di una curva integrale di ∇r, lo è su tutta la curva.
Se J è un campo di Jacobi per r, segue

$$\partial_r g(J, J) = 2\mathrm{Hess}\, r(J, J), \tag{2.3}$$

e se J non è proporzionale a ∂_r,

$$\begin{aligned} \partial_r \mathrm{Hess}\, r(J, J) &= \mathrm{Hess}^2 r(J, J) \\ &\quad - \mathrm{Sec}(J, \partial_r) g(J - g(J, \partial_r)\partial_r, J - g(J, \partial_r)\partial_r) \\ &\geq [\mathrm{Hess}\, r(J, J)]^2 / g(J, J) \\ &\quad - \mathrm{Sec}(J, \partial_r) g(J - g(J, \partial_r)\partial_r, J - g(J, \partial_r)\partial_r) \\ &\geq - \mathrm{Sec}(J, \partial_r) g(J - g(J, \partial_r)\partial_r, J - g(J, \partial_r)\partial_r), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza

$$\begin{aligned} [\mathrm{Hess}\, r(X, X)]^2 &= [g(S(X), X)]^2 \\ &\leq g(S(X), S(X)) g(X, X) \\ &= \mathrm{Hess}^2 r(X, X) g(X, X) \end{aligned} \tag{2.4}$$

che vale per ogni campo X.
Se dunque J è ortogonale a ∂_r, abbiamo

$$\begin{aligned}
\partial_r \mathrm{Hess}\, r(J,J) &= \mathrm{Hess}^2 r(J,J) - \mathrm{Sec}(J,\partial_r) g(J,J) \\
&\geq [\mathrm{Hess}\, r(J,J)]^2 / g(J,J) - \mathrm{Sec}(J,\partial_r) g(J,J) \\
&\geq -\mathrm{Sec}(J,\partial_r) g(J,J).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Infine, notiamo che se J non è proporzionale a ∂_r, essendo

$$\partial_r^2 g(J,J)/2 = \partial_r \mathrm{Hess}\, r(J,J),$$

per l'equazione (2.3), dalle formule precedenti concludiamo che

$$\begin{aligned}
\partial_r^2 g(J,J)/2 &= \mathrm{Hess}^2 r(J,J) - \mathrm{Sec}(J,\partial_r) g(J - g(J,\partial_r)\partial_r, J - g(J,\partial_r)\partial_r) \\
&\geq [\mathrm{Hess}\, r(J,J)]^2 / g(J,J) \\
&\quad - \mathrm{Sec}(J,\partial_r) g(J - g(J,\partial_r)\partial_r, J - g(J,\partial_r)\partial_r) \\
&\geq -\mathrm{Sec}(J,\partial_r) g(J - g(J,\partial_r)\partial_r, J - g(J,\partial_r)\partial_r),
\end{aligned}$$

e se J è ortogonale a ∂_r,

$$\begin{aligned}
\partial_r^2 g(J,J)/2 &= \mathrm{Hess}^2 r(J,J) - \mathrm{Sec}(J,\partial_r) g(J,J) \\
&\geq [\mathrm{Hess}\, r(J,J)]^2 / g(J,J) - \mathrm{Sec}(J,\partial_r) g(J,J) \\
&\geq -\mathrm{Sec}(J,\partial_r) g(J,J).
\end{aligned}$$

DEFINIZIONE 2.2.9. *Sia $r : U \to \mathbb{R}$ una funzione distanza. Chiamiamo* campo parallelo per la funzione distanza r *ogni campo vettoriale E sull'aperto U che soddisfi l'equazione*

$$\nabla_{\partial_r} E = 0$$

in ogni punto di U.

Come l'equazione di Jacobi, si tratta di un sistema lineare di equazioni alle derivate parziali del prim'ordine che può anch'esso essere studiato con il *metodo delle caratteristiche*. Consideriamo dunque delle coordinate locali $(r, x^2, \dots, x^n)$, dove r è la prima coordinata, allora se $E = b^r \partial_r + \sum_{i=2}^n b^i \partial_i$, l'equazione dei campi paralleli per r si scrive

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_{\partial_r} E \\
&= \nabla_{\partial_r}\Big(b^r\partial_r + \sum_{i=2}^n b^i\partial_i\Big) \\
&= \partial_r b^r\partial_r + \sum_{i=2}^n \partial_r b^i\partial_i + \sum_{i=2}^n b^i\nabla_{\partial_r}\partial_i \\
&= \partial_r b^r\partial_r + \sum_{i=2}^n \partial_r b^i\partial_i + \sum_{i=2}^n b^i\Gamma^r_{ri}\partial_r + \sum_{i,k=2}^n b^i\Gamma^k_{ri}\partial_k \\
&= \Big[\partial_r b^r + \sum_{i=2}^n b^i\Gamma^r_{ri}\Big]\partial_r + \sum_{k=2}^n\Big[\partial_r b^k + \sum_{i=2}^n b^i\Gamma^k_{ri}\Big]\partial_k
\end{aligned}$$

Da ciò otteniamo un sistema di equazioni differenziali ordinarie del prim'ordine per le funzioni b^r e b^i lungo le curve integrali di ∇r. Possiamo dunque, come per i campi Jacobi per r, costruire un (unico) campo parallelo per r in U, a partire da ogni campo vettoriale C^∞ su una qualunque ipersuperficie regolare $N \subseteq M$, dove $(x^2,\dots,x^n)|_N$ sia un sistema di coordinate (la regolarità dei tali campi ottenuti segue dal teorema di dipendenza C^∞ dai dati iniziali delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie, si veda [**11**, Capitolo 1]).

Notiamo che $\partial_r = \nabla r$ è un campo parallelo (e di Jacobi) per r, per il Lemma 2.2.1 e che per ogni campo parallelo per r vale

$$L_{\partial_r}E = -S(E) = -\nabla_E\partial_r$$

in U, per la relazione (2.1).
In generale, i campi paralleli e i campi di Jacobi per r sono differenti, in quanto se E è sia parallelo che di Jacobi per r, si deve avere $S(E) = 0$ in U (sempre per la relazione (2.1)), da cui in tal caso l'hessiano di r ha E come autovettore nullo (oltre a ∂_r, se E non è proporzionale a ∂_r).

I campi paralleli (standard) in U (cioè che soddisfano $\nabla_X E = 0$ per ogni campo X in U) sono ovviamente campi paralleli per r, che invece coincidono con i campi *paralleli lungo* ogni curva integrale di ∇r in U. È comunque facile esibire campi paralleli per r che non sono paralleli. Infatti, per esempio, il campo $E(x,y) = y\frac{\partial}{\partial x}\big|_{(x,y)}$ è un campo in $\mathbb{R}^2$ *non* parallelo ma parallelo per la funzione distanza $r(x,y) = x$. Assumendo che i campi X, Y nel Corollario 2.2.6 siano due campi paralleli E_1, E_2 per la funzione distanza

$r : U \to \mathbb{R}$, otteniamo (nelle "prime righe" delle due uguaglianze)

$$\begin{aligned}\partial_r g(E_1, E_2) &= 0\\ \partial_r \mathrm{Hess}\, r(E_1, E_2) &= -\,\mathrm{Hess}^2 r(E_1, E_2) + \mathrm{R}(E_1, \partial_r, E_2, \partial_r).\end{aligned}$$

Di nuovo abbiamo un sistema di equazioni differenziali ordinarie dove r è la variabile indipendente lungo le curve integrali di ∂_r.
Ponendo $E_1 = \partial_r$ e $E_2 = E$, per il Lemma 2.2.1, dalla prima equazione segue che se un campo parallelo E per r è ortogonale a ∂_r in un punto di una curva integrale di ∇r, allora lo è su tutta la curva, mentre l'equazione $\partial_r g(E, E) = 0$ implica che la norma di E è costante lungo le curve integrali di ∇r.
Se E parallelo per r non è proporzionale a ∂_r, si ha

$$\begin{aligned}\partial_r \mathrm{Hess}\, r(E, E) &= -\,\mathrm{Hess}^2 r(E, E) - \mathrm{Sec}(E, \partial_r) g(E - g(E, \partial_r)\partial_r, E - g(E, \partial_r)\partial_r)\\ &\leq -\,[\mathrm{Hess}\, r(E, E)]^2 / g(E, E)\\ &\quad - \mathrm{Sec}(E, \partial_r) g(E - g(E, \partial_r)\partial_r, E - g(E, \partial_r)\partial_r)\\ &\leq -\,\mathrm{Sec}(E, \partial_r) g(E - g(E, \partial_r)\partial_r, E - g(E, \partial_r)\partial_r),\end{aligned}$$

dove abbiamo usato di nuovo la disuguaglianza (2.4).
Se dunque E è ortogonale a ∂_r, abbiamo

$$\begin{aligned}\partial_r \mathrm{Hess}\, r(E, E) &= -\,\mathrm{Hess}^2 r(E, E) - \mathrm{Sec}(E, \partial_r) g(E, E)\\ &\leq -\,[\mathrm{Hess}\, r(E, E)]^2 / g(E, E) - \mathrm{Sec}(E, \partial_r) g(E, E)\\ &\leq -\,\mathrm{Sec}(E, \partial_r) g(E, E).\end{aligned}$$

Sapendo che E ha norma costante lungo ogni curva integrale, se $g(E, E) = 1$ concludiamo

$$\begin{aligned}\partial_r \mathrm{Hess}\, r(E, E) &= -\,\mathrm{Hess}^2 r(E, E) - \mathrm{Sec}(E, \partial_r)\\ &\leq -\,[\mathrm{Hess}\, r(E, E)]^2 - \mathrm{Sec}(E, \partial_r)\\ &\leq -\,\mathrm{Sec}(E, \partial_r) \qquad (2.6)\end{aligned}$$

notando come in questa formula la metrica non appare più e abbiamo solo la curvatura che influenza l'hessiano di r.

Supponendo allora di avere assunzioni sul segno della curvatura sezionale della varietà, utilizzando allora campi di Jacobi o paralleli per r, le formule precedenti forniscono allora informazioni (differenziali) sia direttamente sul comportamento lungo le curve integrali di ∇r della metrica g, oppure sull'hessiano di r, che poi porteranno di nuovo a informazioni sulla metrica mediante la prima equazione del Corollario 2.2.6. Più precisamente, usando campi paralleli per r e la formula sopra, vediamo come la curvatura influenza l'hessiano della distanza, usando campi di Jacobi per r, trasferiamo l'informazione sull'hessiano alla metrica, mediante la prima equazione del Corollario 2.2.6.

ESEMPIO 2.2.10. Consideriamo una metrica rotazionalmente simmetrica della forma

$$dr^2 + \varphi^2(r)\, ds^2_{n-1}$$

su $(a,b)\times\mathbb{S}^{n-1}$, dove ds^2_{n-1} è la metrica canonica su $\mathbb{S}^{n-1}$ (che non dipende da r) e $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^+$ è regolare (la varietà così ottenuta si dice *prodotto warped* di $\mathbb{S}^{n-1}$ sull'intervallo (a,b), si veda **[10]** per approfondire). Si vede allora facilmente che la funzione r è una funzione distanza su tutto $(a,b)\times\mathbb{S}^{n-1}$.

Poiché

$$\begin{aligned}
2\mathrm{Hess}\, r &= L_{\partial_r} g_r \\
&= L_{\partial_r}(\varphi^2 ds^2_{n-1}) \\
&= \partial_r(\varphi^2)\, ds^2_{n-1} + \varphi^2 L_{\partial_r}(ds^2_{n-1}) \\
&= 2\varphi\, \partial_r\varphi\, ds^2_{n-1} \\
&= 2\frac{\partial_r\varphi}{\varphi} g_r
\end{aligned}$$

si ha

$$\nabla_X \partial_r = \begin{cases} \frac{\partial_r\varphi}{\varphi} X & \text{se } X \text{ è tangente a } \mathbb{S}^{n-1}, \\ 0 & \text{se } X = \partial_r. \end{cases}$$

Quindi

$$\Delta r = \mathrm{tr}(S) = (n-1)\frac{\partial_r\varphi}{\varphi}$$

Calcoliamo ora la derivata di Lie e la derivata covariante dell'hessiano,

$$\begin{aligned}
L_{\partial_r}\mathrm{Hess}\, r &= L_{\partial_r}\Big(\frac{\partial_r\varphi}{\varphi} g_r\Big) \\
&= \partial_r\Big(\frac{\partial_r\varphi}{\varphi}\Big) g_r + \frac{\partial_r\varphi}{\varphi} L_{\partial_r}(g_r) \\
&= \frac{\varphi\partial_r^2\varphi - (\partial_r\varphi)^2}{\varphi^2} g_r + 2\Big(\frac{\partial_r\varphi}{\varphi}\Big)^2 g_r \\
&= \frac{\partial_r^2\varphi}{\varphi} g_r + \Big(\frac{\partial_r\varphi}{\varphi}\Big)^2 g_r \\
&= \frac{\partial_r^2\varphi}{\varphi} g_r + \mathrm{Hess}^2\, r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_r} \mathrm{Hess}\, r &= \nabla_{\partial_r}\Big(\frac{\partial_r \varphi}{\varphi} g_r\Big) \\
&= \partial_r\Big(\frac{\partial_r \varphi}{\varphi}\Big) g_r + \frac{\partial_r \varphi}{\varphi} \nabla_{\partial_r}(g_r) \\
&= \frac{\varphi \partial_r^2 \varphi - (\partial_r \varphi)^2}{\varphi^2} g_r \\
&= \frac{\partial_r^2 \varphi}{\varphi} g_r - \Big(\frac{\partial_r \varphi}{\varphi}\Big)^2 g_r \\
&= \frac{\partial_r^2 \varphi}{\varphi} g_r - \mathrm{Hess}^2\, r
\end{aligned}$$

Confrontando queste formule con le equazioni fondamentali nella Proposizione 2.2.5, otteniamo che

$$\mathrm{R}(\cdot, \partial_r, \partial_r, \cdot) = -\frac{\partial_r^2 \varphi}{\varphi} g_r,$$

di conseguenza

$$\mathrm{R}(X, \partial_r)\partial_r = \begin{cases} -\frac{\partial_r^2 \varphi}{\varphi} X & \text{se } X \text{ è tangente a } \mathbb{S}^{n-1}, \\ 0 & \text{se } X = \partial_r. \end{cases}$$

Se dunque X è un qualunque campo (locale) unitario e tangente a $\mathbb{S}^{n-1}$, si ha

$$-\frac{\partial_r^2 \varphi}{\varphi} = \mathrm{Sec}(X, \partial_r)$$

cioè

$$\partial_r^2 \varphi = -\mathrm{Sec}(X, \partial_r)\varphi.$$

Nel caso speciale di una superficie, cioè $n = 2$, si ha che esiste un solo (a meno di segno) campo unitario globale X tangente a $\mathbb{S}^1$, quindi in ogni punto un'unica curvatura sezionale $\mathrm{Sec} = \mathrm{Sec}(X, \partial_r)$ che dipende solo da r, dunque

$$\partial_r^2 \varphi = -\varphi\, \mathrm{Sec}.$$

È allora chiaro che informazioni sulla curvatura, cioè su Sec, implicano conclusioni sul comportamento della funzione φ che descrive la metrica, quindi anche su quest'ultima e da esse sulla topologia della varietà.

Nelle prossime sezioni svilupperemo gli strumenti necessari per generalizzare quest'idea alla situazione generale (di metriche non necessariamente rotazionalmente simmetriche) e in ogni dimensione, poi li applicheremo nel prossimo capitolo per ottenere delle dimostrazioni alternative di alcuni teoremi classici sulle relazioni tra curvatura e topologia delle varietà.

2.3. Le equazioni in coordinate polari

Sia (M, g) completa e $p \in M$. Facendo riferimento alla parte finale della Sezione 1.9, consideriamo le coordinate polari $(r, \theta^1, \ldots, \theta^{n-1})$ centrate in p su $\varphi((0, \varepsilon) \times U) \subseteq D_p \setminus \{p\}$, come nel seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd}
(r,\xi) \in (0,\varepsilon) \times \widetilde{U} \subseteq j^{-1}(D(p) \setminus \{O_p\}) \arrow[r, "\phi"] & exp_p(r\xi) \in D_p \setminus \{p\} \subseteq M \arrow[d, "x"] \\
(r, \theta^1, \ldots, \theta^{n-1}) \in (0,\varepsilon) \times U \arrow[u, "(\mathrm{Id},\xi)"] \arrow[ur, "\varphi"] & (r\xi^1, \ldots, r\xi^n) \in \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

dove $0 < \varepsilon \leq \inf_{\xi \in \widetilde{U}} c(\xi)$. Denoteremo con $\partial_r, \partial_{\theta^1}, \ldots, \partial_{\theta^{n-1}}$ i campi coordinati associati alle coordinate polari $(r, \theta^1, \ldots, \theta^{n-1})$. Nella Proposizione 1.9.3 abbiamo allora visto che la metrica si può scrivere localmente come

$$g = dr \otimes dr + g_{\alpha\beta}\, d\theta^\alpha \otimes d\theta^\beta.$$

Essendo $r = d(p, \cdot)$ una funzione distanza in $D_p \setminus \{p\}$, vogliamo dunque applicare i risultati della sezione precedente. Ricordiamo che i campi coordinati $\partial_r, \partial_{\theta^1}, \ldots, \partial_{\theta^{n-1}}$ sono campi di Jacobi per la funzione distanza r mentre in generale solo ∂_r è un campo parallelo per r.

Abbiamo che la matrice delle componenti della metrica in queste coordinate ha la seguente forma

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n-11} & \ldots & g_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

per la Proposizione 1.9.3 e si vede facilmente che

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n-11} & \ldots & g_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \widetilde{g}_{11} & \ldots & \widetilde{g}_{1n-1} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \widetilde{g}_{n-11} & \ldots & \widetilde{g}_{n-1n-1} & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove

$$\begin{pmatrix} \widetilde{g}_{11} & \ldots & \widetilde{g}_{1n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \widetilde{g}_{n-11} & \ldots & \widetilde{g}_{n-1n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n-11} & \ldots & g_{n-1n-1} \end{pmatrix}^{-1}$$

Ricordiamo inoltre che g e g^{-1} sono matrici simmetriche.
Denoteremo con h l'hessiano di r, cioè $\operatorname{Hess} r(\partial_{\theta^i}, \partial_{\theta^j}) = h_{ij}$. Ricordando che

$\operatorname{Hess} r(\partial_r, \cdot) = 0$, si ha allora

$$h_{ij} = h_{ji} \qquad \text{e} \qquad h_{ir} = h_{ri} = 0$$

per ogni $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$. Di conseguenza,

$$S_i^j = \sum_{k=1}^{n-1} h_{ik} g^{kj} \qquad \text{e} \qquad S_i^r = S_r^i = S_r^r = 0 \tag{2.7}$$

per ogni $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$. Dunque, la matrice delle componenti dell'operatore shape S è simmetrica e ha la seguente struttura

$$S = \begin{pmatrix} S_1^1 & \dots & S_{n-1}^1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_1^{n-1} & \dots & S_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Definiamo inoltre la forma bilineare $R(X, Y) = \mathrm{R}(X, \partial_r, Y, \partial_r)$, che essendo simmetrica (per le proprietà del tensore di Riemann) ha un operatore autoaggiunto associato R definito da $R(X, Y) = g(R(X), Y)$. La matrice delle componenti dell'operatore R è dunque anch'essa simmetrica e ha la seguente struttura, in quanto $R(\partial_r, \cdot) = \mathrm{R}(\partial_r, \partial_r, \cdot, \partial_r) = 0$,

$$R = \begin{pmatrix} R_1^1 & \dots & R_{n-1}^1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_1^{n-1} & \dots & R_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dove

$$R_i^j = \sum_{k=1}^{n-1} R_{ik} g^{kj} \qquad \text{e} \qquad R_i^r = R_r^i = R_r^r = 0$$

per ogni $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$. Si noti infine che $\operatorname{tr}(R) = -\operatorname{Ric}(\partial_r, \partial_r)$.

PROPOSIZIONE 2.3.1. *Valgono le seguenti identità, lungo una curva integrale per ∇r,*

(1) $\partial_r g_{ij} = 2h_{ij} = 2\sum_{k=1}^{n-1} S_i^k g_{kj}$
(2) $\partial_r g^{ij} = -2h^{ij} = -2\sum_{k,\ell=1}^{n-1} g^{ik} h_{k\ell} g^{\ell j} = -2\sum_{k=1}^{n-1} S_k^j g^{ki}$
(3) $\nabla_{\partial r} h_{ij} = -\sum_{k,\ell=1}^{n-1} h_{ik} g^{k\ell} h_{\ell j} + \mathrm{R}_{irjr}$
(4) $L_{\partial r} h_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{n-1} h_{ik} g^{k\ell} h_{\ell j} + \mathrm{R}_{irjr}$
(5) $\partial_r h_{ij} = \sum_{k,\ell=1}^{n-1} h_{ik} g^{k\ell} h_{\ell j} + \mathrm{R}_{irjr}$
(6) $\partial_r S_i^j = -\sum_{k=1}^{n-1} S_i^k S_k^j + R_i^j$

per ogni $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$.

DIMOSTRAZIONE. Essendo i campi coordinati dei campi di Jacobi per r, la prima, terza e quarta identità seguono immediatamente dalla Proposizione 2.2.5, la quinta dal Corollario 2.2.6, una volta mostrato che

$$\mathrm{Hess}^2 r(\partial_{\theta^i}, \partial_{\theta^j}) = \sum_{k,\ell=1}^{n-1} h_{ik} g^{k\ell} h_{\ell j}.$$

Abbiamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}^2 r(\partial_{\theta^i}, \partial_{\theta^j}) &= g(\nabla_{\partial_{\theta^j}} \partial_r, \nabla_{\partial_{\theta^i}} \partial_r) \\
&= g\Big(\Gamma^r_{jr}\partial_r + \sum_{\ell=1}^{n-1} \Gamma^\ell_{jr} \partial_{\theta^\ell}, \Gamma^r_{ir}\partial_r + \sum_{k=1}^{n-1} \Gamma^k_{ir}\partial_{\theta^k}\Big) \\
&= \Gamma^r_{jr}\Gamma^r_{ir} + \sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1} \Gamma^\ell_{jr}\Gamma^k_{ir} g_{\ell k}.
\end{aligned}$$

Poiché, usando la definizione dei simboli di Christoffel, risulta

$$\begin{aligned}
\Gamma^r_{jr} &= \frac{g^{rr}}{2}\big(\partial_{\theta^j} g_{rr} + \partial_r g_{jr} - \partial_r g_{jr}\big) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{g^{rm}}{2}\big(\partial_{\theta^j} g_{mr} + \partial_r g_{jm} - \partial_{\theta^m} g_{jr}\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma^\ell_{jr} &= \frac{g^{\ell r}}{2}\big(\partial_{\theta^j} g_{rr} + \partial_r g_{jr} - \partial_r g_{jr}\big) + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{g^{\ell m}}{2}\big(\partial_{\theta^j} g_{mr} + \partial_r g_{jm} - \partial_{\theta^m} g_{jr}\big) \\
&= \sum_{m=1}^{n-1} \frac{g^{\ell m}}{2} \partial_r g_{jm} \\
&= \sum_{m=1}^{n-1} g^{\ell m} h_{jm}
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la prima identità di questa proposizione, otteniamo l'uguaglianza cercata

$$\begin{aligned}
\sum_{k,\ell=1}^{n-1} \Gamma^k_{ir}\Gamma^\ell_{jr} g_{\ell k} &= \sum_{k,\ell,m_1,m_2=1}^{n-1} g^{km_1} h_{im_1} g^{\ell m_2} h_{jm_2} g_{\ell k} \\
&= \sum_{k,\ell,m_1,m_2=1}^{n-1} g^{km_1} h_{im_1} g^{\ell m_2} h_{jm_2} g_{k\ell} \\
&= \sum_{m_1,m_2=1}^{n-1} h_{im_1} g^{m_1 m_2} h_{jm_2}.
\end{aligned}$$

Riguardo la seconda identità, vale $\delta^i_q = \sum_{p=1}^{n-1} g^{ip} g_{pq}$, dunque si ha

$$0 = \partial_r \Big(\sum_{p=1}^{n-1} g^{ip} g_{pq} \Big) = \sum_{p=1}^{n-1} \Big(\partial_r g^{ip} g_{pq} + g^{ip} \partial_r g_{pq} \Big) = \sum_{p=1}^{n-1} \Big(\partial_r g^{ip} g_{pq} + 2 g^{ip} h_{pq} \Big)$$

quindi

$$\sum_{p,q=1}^{n-1} \partial_r g^{ip} g_{pq} g^{qj} = -2 \sum_{p,q=1}^{n-1} g^{ip} h_{pq} g^{qj},$$

da cui concludiamo

$$\partial_r g^{ij} = -2 \sum_{p,q=1}^{n-1} g^{ip} h_{pq} g^{qj} = -2 h^{ij}.$$

La sesta identità segue dalla formula (2.7) e dalla seconda e quinta. □

PROPOSIZIONE 2.3.2. *Valgono le identità,*

(1) $\partial_r \log \sqrt{\det g_{ij}} = \mathrm{tr}(S)$
(2) $\partial_r \mathrm{tr}(S) = -\mathrm{tr}(S^2) - \mathrm{Ric}(\partial_r, \partial_r)$.

DIMOSTRAZIONE. Per la formula di derivazione del determinante di una matrice, la simmetria della metrica e dell'hessiano, e la prima identità della Proposizione 2.3.1, abbiamo

$$\partial_r (\log \sqrt{\det g_{ij}}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n-1} g^{ij} \partial_r g_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n-1} g^{ij} h_{ij} = \sum_{j=1}^{n-1} S^j_j = \mathrm{tr}(S)$$

da cui la prima identità.

Abbiamo poi, per la sesta identità della Proposizione 2.3.1,

$$\partial_r \mathrm{tr}(S) = \partial_r \sum_{i=1}^{n-1} S^i_i = \sum_{i=1}^{n-1} \Big[-\sum_{k=1}^{n-1} S^k_i S^i_k + R^i_i \Big] = -\mathrm{tr}(S^2) - \mathrm{Ric}(\partial_r, \partial_r).$$

□

Utilizzeremo il seguente classico lemma.

LEMMA 2.3.3. *Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono numeri reali, con $n \in \mathbb{N}$, allora*

$$\frac{\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i \Big)^2}{n} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$$

e l'uguaglianza vale e e solo se i valori λ_i sono tutti uguali.
In particolare, se A è una matrice quadrata simmetrica reale di ordine n, risulta che

$$\mathrm{tr}(A^2) \geq \frac{[\mathrm{tr}(A)]^2}{n}$$

e vale l'uguaglianza se e solo se gli autovalori di A sono tutti uguali tra loro.

COROLLARIO 2.3.4. *Sia*

$$d\,\mathrm{Vol} = G\, dr \wedge d\theta^1 \wedge \cdots \wedge d\theta^{n-1}$$

la forma di volume di (M, g) *dove* $G = \sqrt{\det g_{ij}}$. *Allora si ha*

(1) $\partial_r G = G \operatorname{tr}(S)$

(2) $\partial_r \operatorname{tr}(S) \leq -\dfrac{[\operatorname{tr}(S)]^2}{n-1} - \operatorname{Ric}(\partial_r, \partial_r)$.

DIMOSTRAZIONE. La prima uguaglianza è immediata conseguenza della prima identità della Proposizione 2.3.2.
Per quanto riguarda la seconda uguaglianza, segue dalla seconda identità nella Proposizione 2.3.2 e del Lemma 2.3.3. □

OSSERVAZIONE 2.3.5. Tutte le precedenti equazioni e risultati valgono anche se $r : U \to \mathbb{R}$ è una generica funzione distanza nell'aperto U, non necessariamente la distanza da un punto $p \in M$. Infatti, essendo ∇r mai nullo, localmente attorno a una curva integrale di ∇r possiamo trovare un sistema di coordinate $(r, x^2, \dots, x^n)$ (dove r è la prima coordinata). Si noti che allora i campi ∂_i sono tangenti agli insiemi di di livello U^r di r. Tali coordinate sono chiamate *coordinate adattate rispetto a* r.

Consideriamo ora il sistema di equazioni differenziali ordinarie per le matrici simmetriche $(g_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n-1\}}$ e $(S_i^j)_{i,j\in\{1,\dots,n-1\}}$ dato dalla prima e dall'ultima equazione della Proposizione 2.2.5,

$$\begin{cases} \partial_r g_{ij} &= 2\sum_{k=1}^{n-1} S_i^k g_{kj} \\ \partial_r S_i^j &= -\sum_{k=1}^{n-1} S_i^k S_k^j + R_i^j \end{cases}$$

notando che è parzialmente disaccoppiato, cioè g_{ij} non appare nella seconda equazione, che è di *tipo Riccati* (quadratica nell'incognita), inoltre che la prima equazione è lineare.
In tale equazione possiamo euristicamente pensare alle curvature R_i^j come delle fissate forze *esterne*, che possono essere costanti oppure soddisfare qualche disuguaglianza o stima, mentre al termine $-S_i^k S_k^j$ come una *reazione interna* di segno non positivo.
In termini di autovalori, se $\mu_{\min} = \mu_{\min}(r)$ e $\mu_{\max} = \mu_{\max}(r)$ sono gli autovalori minimo/massimo della matrice $(S_i^j)_{i,j\in\{1,\dots,n-1\}}$, relativi agli autovettori unitari $v = v(r)$ e $w = w(r)$ rispettivamente, si può dimostrare che sono

funzioni assolutamente continue e che soddisfano le equazioni differenziali

$$
\begin{aligned}
\partial_r \mu_{\min} &= -\mu_{\min}^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} R_i^j v^i v^j \\
\partial_r \mu_{\max} &= -\mu_{\max}^2 + \sum_{i,j=1}^{n-1} R_i^j w^i w^j \leq -\mu_{\max}^2 - \mathrm{MinSec} \leq -\mathrm{MinSec},
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

per *quasi ogni* r nell'intervallo che stiamo considerando (si veda [**7**, Sezione 2.1], per esempio), dove MinSec è la minima curvatura sezionale lungo la curva integrale di ∇r, che coincide con una geodetica σ, in questo caso passante all'istante 0 in p, parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco sull'intervallo $(0, c(\sigma'(0)))$. Se dunque la curvatura di M è limitata (o semplicemente limitata dal basso), integrando la seconda disequazione differenziale (lo si può fare, come se $\mu_{\max}$ fosse una funzione C^1, per l'assoluta continuità), vediamo che $\mu_{\max}$ è limitato dall'alto in ogni intervallo finito e può eventualmente andare solo a $-\infty$ (quindi anche $\mu_{\min}$, a maggior ragione), ma non può divergere a $+\infty$.
Ragionando analogamente abbiamo

$$
\begin{aligned}
\partial_r \lambda_{\min} &= 2\lambda_{\min} \sum_{i,k=1}^{n-1} S_i^k y^i y^k \geq 2\lambda_{\min}\mu_{\min} \\
\partial_r \lambda_{\max} &= 2\lambda_{\max} \sum_{i,k=1}^{n-1} S_i^k z^i z^k \leq 2\lambda_{\max}\mu_{\max},
\end{aligned}
$$

per *quasi ogni* r, dove $\lambda_{\min} = \lambda_{\min}(r)$ e $\lambda_{\max} = \lambda_{\max}(r)$ sono gli autovalori minimo/massimo della matrice $(g_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n-1\}}$, relativi agli autovettori unitari $y = y(r)$ e $z = z(r)$ rispettivamente, e, come funzioni, sono assolutamente continue e positive, essendo la matrice $(g_{ij})_{i,j\in\{1,\dots,n-1\}}$ definita positiva. Se la curvatura è limitata, essendo allora $\mu_{\max}$ e $\mu_{\min}$ limitati dall'alto in ogni intervallo finito, per la linearità dell'equazione, lo sono anche $\lambda_{\min}$ e $\lambda_{\max}$, che sono sempre limitati strettamente dal basso da 0. L'unica possibile "degenerazione" è che $\lambda_{\min}$ vada a zero in tempo finito, per $r \to r_0$, dunque la matrice $(g_{ij}(r))_{i,j\in\{1,\dots,n-1\}}$ "degeneri" in r_0, cioè abbia un autovalore nullo (sottolineiamo che la metrica g su M è sempre regolare e definita positiva, è solo la sua espressione matriciale in queste coordinate che diventa "singolare"). Si noti che questo è equivalente al fatto che la densità di volume data da $\sqrt{\det g_{ij}}$ va a zero, per $r \to r_0$ (un'analisi analoga a questa può essere fatta considerando le equazioni e disequazioni differenziali soddisfatte dalla coppia di funzioni G e $\mathrm{tr}(S)$, nella Proposizione 2.3.2 e nel Corollario 2.3.4).

Se dunque $\lambda_{\min} \to 0$ per $r \to r_0$, esiste allora un vettore $(v^1, \dots, v^{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tale che

$$\sum_{i=1}^{n-1} (v^i)^2 = 1$$

e

$$\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n-11} & \dots & g_{n-1n-1} \end{pmatrix} (r) \begin{pmatrix} v^1 \\ \dots \\ v^{n-1} \end{pmatrix} \to 0, \quad \text{per} \quad r \to r_0.$$

Di conseguenza,

$$g_{\sigma(r)}\Big(\sum_{i=1}^{n-1} v^i \partial_{\theta^i}|_{\sigma(r)}, \sum_{j=1}^{n-1} v^j \partial_{\theta^j}|_{\sigma(r)}\Big) = \sum_{i,j=1}^{n-1} v^i v^j g_{ij}(r) \to 0,$$

per $r \to r_0$. Poiché nella Sezione 1.9 abbiamo visto che

$$\partial_{\theta^i}|_{\sigma(r)} = d(exp_p)_{r\sigma'(0)}(r\eta_i),$$

per ogni $i \in \{1, \dots, n-1\}$, dove $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ sono vettori linearmente indipendenti in T_pM, segue che

$$d(exp_p)_{r_0\sigma'(0)}\Big(\sum_{i=1}^{n-1} v^i \eta_i\Big) = 0,$$

per la continuità di $d(exp_p)$ e della metrica g. Poiché le v^i non sono tutte nulle e $\eta_1, \dots, \eta_{n-1}$ sono linearmente indipendenti in T_pM, concludiamo che $d(exp_{p)}$ è singolare in $r_0\sigma'(0)$ e dunque $\sigma(r_0)$ è un punto coniugato a p lungo σ.

Ritornando alle equazioni

$$\begin{aligned} \partial_r \mu_{\min} &= -\mu_{\min}^2 + R_i^j v^i v^j \\ \partial_r \mu_{\max} &= -\mu_{\max}^2 + R_i^j w^i w^j \leq -\mu_{\max}^2 - \mathrm{MinSec}, \end{aligned}$$

il termine quadratico "spinge" per far divergere negativamente gli autovalori massimo e minimo in un tempo finito, per esempio, ciò succederà effettivamente se MinSec è positiva e $\mu_{\max} < 0$, per qualche r. Sfruttando l'Osservazione 2.3.5, se invece la curvatura è non positiva, mediante opportune carte adattate a funzioni distanza, che coincidono a due a due sull'intersezione degli aperti di definizione e tali che per la prima $\mu_{\min} > 0$ per qualche r, si vede facilmente che quest'ultimo non può mai annullarsi per le diverse carte e quindi ricaveremo che non ci sono punti coniugati lungo la geodetica considerata parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco uscente da p.

OSSERVAZIONE 2.3.6. Queste due ultime considerazioni sono euristicamente alla base rispettivamente del *lemma di Synge* 3.3.3 e del *teorema di Cartan–Hadamard* 3.2.3 che vedremo nel prossimo capitolo. Analoghe considerazioni sulle funzioni G e $\mathrm{tr}(S)$, utilizzando le formule del Corollario 2.3.4, nell'ipotesi che il minimo autovalore del tensore di Ricci sia uniformemente positivo, conducono al *teorema di Bonnet–Myers* 3.3.1.

2.3.1. Limiti della metrica e dell'hessiano per $r \to 0$. Per studiare nella prossima sezione le proprietà dell'hessiano della funzione distanza r, usando le equazioni differenziali che abbiamo visto sopra, analizziamo il suo comportamento e quello della metrica per $r \to 0$. Dimostriamo quindi che per ogni $\theta \in U$ valgono i seguenti limiti lungo la curva geodetica $r \mapsto exp_p(r\xi(\theta))$ (che è una curva integrale per r), in coordinate polari.

(1)
$$\lim_{r\to 0^+} g_{\alpha\beta} = \lim_{r\to 0^+} g(\partial_{\theta^\alpha}, \partial_{\theta^\beta}) = 0$$
per ogni $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n-1\}$. Di conseguenza
$$\lim_{r\to 0^+} g(J_1, J_2) = 0$$
per ogni coppia J_1, J_2 di campi di Jacobi per la funzione distanza r, puntualmente ortogonali a ∂_r, essendo J_1, J_2 puntualmente combinazioni lineari dei campi coordinati ∂_{θ^i}, con coefficienti indipendenti da r, dalla discussione nella Sezione 2.2.

(2)
$$\lim_{r\to 0^+} \Big(\mathrm{Hess}\, r(\partial_{\theta^\alpha}, \partial_{\theta^\beta}) - \frac{g_{\alpha\beta}}{r}\Big) = 0.$$
per ogni $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n-1\}$. Di conseguenza
$$\lim_{r\to 0^+} \Big(\mathrm{Hess}\, r(J_1, J_2) - \frac{g(J_1, J_2)}{r}\Big) = 0$$
per ogni coppia J_1, J_2 campi di Jacobi per la funzione distanza r, puntualmente ortogonali a ∂_r.

(3) Se J è una combinazione lineare di $\partial_{\theta^1}, \dots, \partial_{\theta^{n-1}}$ a coefficienti reali non tutti nulli allora
$$\lim_{r\to 0^+} \Big(\frac{\mathrm{Hess}\, r(J, J)}{g(J, J)} - \frac{1}{r}\Big) = 0,$$
in particolare, tale limite continua a valere per ogni campo di Jacobi J per la funzione distanza r, puntualmente ortogonale a ∂_r e che non si annulla mai sulla curva.

(4)
$$\lim_{r\to 0^+}\Big(\frac{\mathrm{tr}(S)}{n-1}-\frac{1}{r}\Big)=0.$$

(5) Se E è un campo parallelo per la funzione distanza r, di norma unitaria e puntualmente ortogonale a ∂_r, si ha
$$\lim_{r\to 0^+}\Big(\mathrm{Hess}\, r(E,E)-\frac{1}{r}\Big)=0.$$

Facendo riferimento al diagramma all'inizio della Sezione 2.3, denoteremo con $\{\partial_1,\dots,\partial_n\}$ la base indotta su T_qM, per ogni q in $\varphi((0,\varepsilon)\times U)\subseteq D_p\setminus\{p\}$, con $\varepsilon=\inf_{\xi\in\widetilde{U}}c(\xi)$, dalle coordinate normali $x:\varphi((0,\varepsilon)\times U)\to\mathbb{R}^n$, mentre ricordiamo che $\{\partial_r,\partial_{\theta^1},\dots,\partial_{\theta^{n-1}}\}$ è la base indotta su T_qM dalle coordinate polari date da φ^{-1}.

Fissiamo $\theta\in U$, allora per ogni $r\in(0,\varepsilon)$ sappiamo che
$$exp_p(r\xi(\theta))=\sigma_{\xi(\theta)}(r).$$

Dalle uguaglianze
$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) &= g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\frac{\partial(x^i\circ\varphi)}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial(x^j\circ\varphi)}{\partial\theta^\beta}(\theta)\\ &= r^2 g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta) \end{aligned}\tag{2.9}$$
per ogni $\alpha,\beta\in\{1,\dots,n-1\}$, segue che
$$g_{\alpha\beta}\big(exp_p(r\xi(\theta))\big)=O(r^2)$$
da cui segue la tesi al primo punto.

Poiché l'hessiano di r in coordinate normali è dato da
$$\mathrm{Hess}_{ij}\, r=\mathrm{Hess}\, r(\partial_i,\partial_j)=\partial_i(\partial_j r)-\Gamma^k_{ij}\partial_k r$$
e si ha
$$\partial_i r=\frac{\partial(r\circ x^{-1})}{\partial x^i}=\frac{\partial\big[r\big(exp_p\big(\sum_{j=1}^n x^j e_j\big)\big)\big]}{\partial x^i}=\frac{\partial\Big[\sqrt{\sum_{j=1}^n (x^j)^2}\Big]}{\partial x^i}=\frac{x^i}{r},$$
otteniamo
$$\mathrm{Hess}\, r(\partial_i,\partial_j)=\frac{\delta_{ij}}{r}-\frac{x^ix^j}{r^3}-\Gamma^k_{ij}\frac{x^k}{r},\tag{2.10}$$
osservando inoltre che
$$\frac{x^i(exp_p(r\xi(\theta))}{r(exp_p(r\xi(\theta))}=\frac{r\xi^i(\theta)}{r}=\xi^i(\theta).$$

Essendo
$$\begin{aligned} \partial r|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)} &= \frac{\partial(x^i\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta)\partial_i|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)}=\xi^i(\theta)\partial_i|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)}\\ \partial_{\theta^\alpha}|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)} &= \frac{\partial(x^i\circ\varphi)}{\partial\theta^\alpha}(r,\theta)\partial_i|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)}=r\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\partial_i|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\xi^i(\theta)\frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) &= \frac{1}{2}\frac{\partial[\sum_{i=1}^n(\xi^i)^2]}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial[g(\sum_{i=1}^n\xi^i e_i,\sum_{i=1}^n\xi^i e_i)]}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial[g(\xi,\xi)]}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\\
&= 0,
\end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hess}\, r\big(\partial_{\theta^\alpha}|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)},\partial_{\theta^\beta}|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)}\big)\\
&\quad= \mathrm{Hess}\, r\Big(r\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\partial_i|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)}, r\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\partial_j|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)}\Big)\\
&\quad= r^2\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\mathrm{Hess}\, r(\partial_i|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)},\partial_j|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)})\\
&\quad= \Big[r\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\Big(\delta_{ij}-\xi^i(\theta)\xi^j(\theta)\Big)\Big]\\
&\qquad - r^2\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\Gamma^k_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\xi^k(\theta)\\
&\quad= \Big[r\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\Big(\delta_{ij}-r\Gamma^k_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\xi^k(\theta)\Big)\Big].
\end{aligned}$$

Quindi, per l'uguaglianza (2.9),

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}\, r(\partial_{\theta^\alpha}|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)},\partial_{\theta^\beta}|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)}) &- \frac{1}{r}g_{\alpha\beta}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\\
&= r\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\delta_{ij}\\
&\quad - r^2\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\Gamma^k_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\xi^k(\theta)\\
&\quad - r\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\\
&= r\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\big[\delta_{ij}-g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\big]\\
&\quad - r^2\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\Gamma^k_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\xi^k(\theta)
\end{aligned}$$

e sfruttando la Proposizione 1.9.1, abbiamo il secondo limite

$$\lim_{r\to 0^+}\Big(\mathrm{Hess}\, r(\partial_{\theta^\alpha},\partial_{\theta^\beta})-\frac{g_{\alpha\beta}}{r}\Big)\Big|_{exp_p(r\xi(\theta))}=0.$$

Consideriamo una combinazione lineare di $\partial_{\theta^1}, \dots, \partial_{\theta^{n-1}}$ a coefficienti reali non tutti nulli, $J = \sum_{\alpha=1}^{n-1} a^\alpha \partial_{\theta^\alpha}$. Allora

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\operatorname{Hess} r(J,J)}{g(J,J)}\Big)\Big|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)} &= \Big(\frac{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} a^\alpha a^\beta \operatorname{Hess} r(\partial_{\theta^\alpha}, \partial_{\theta^\beta})}{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} a^\alpha a^\beta g_{\alpha\beta}}\Big)\Big|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)} \\
&= \frac{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{n} r a^\alpha a^\beta \frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\delta_{ij}}{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{n} r^2 a^\alpha a^\beta \frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta) g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))} \\
&\quad - \frac{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\sum_{i,j,k=1}^{n} r^2 a^\alpha a^\beta \frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\Gamma_{ij}^k(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\xi^k(\theta)}{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{n} r^2 a^\alpha a^\beta \frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta) g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{n} a^\alpha a^\beta \frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\delta_{ij}}{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{n} a^\alpha a^\beta \frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta) g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))} \\
&\quad - \frac{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\sum_{i,j,k=1}^{n} a^\alpha a^\beta \frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\Gamma_{ij}^k(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\xi^k(\theta)}{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{n} a^\alpha a^\beta \frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta) g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))}.
\end{aligned}$$

Osserviamo che, per la Proposizione 1.9.1, vale

$$\lim_{r\to 0^+}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{n} a^\alpha a^\beta \frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta) g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a^\alpha a^\beta \frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\beta}(\theta),$$

dunque

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n} a^\alpha a^\beta \frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\beta}(\theta) = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n-1} a^\alpha \frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\Big)^2 \geq 0.$$

Supponiamo per assurdo che

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{\alpha=1}^{n-1} a^\alpha \frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\Big)^2 = 0,$$

allora

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} a^\alpha \frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta) = 0$$

per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Di conseguenza avremmo

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^1}(\theta) & \frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^2}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^{n-1}}(\theta) \\ \frac{\partial\xi^2}{\partial\theta^1}(\theta) & \frac{\partial\xi^2}{\partial\theta^2}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^2}{\partial\theta^{n-1}}(\theta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial\xi^n}{\partial\theta^1}(\theta) & \frac{\partial\xi^n}{\partial\theta^2}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^n}{\partial\theta^{n-1}}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \dots \\ a^{n-1} \end{pmatrix} = 0$$

Poiché nel seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \xi \in \mathbb{S}_p^{n-1} \arrow[rr, "i"] & & \xi \in T_pM \arrow[d, "\chi"] \\ (\theta^1, \dots, \theta^{n-1}) \in U \arrow[u, "\xi"] & & (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

i è una immersione, la matrice

$$\Big(\frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta)\Big)_{i\in\{1,\dots,n\},\, \alpha\in\{1,\dots,n-1\}}$$

ha rango massimo $n-1$, quindi esiste un minore non nullo di ordine $n-1$ della matrice precedente. Per semplicità supponiamo sia

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi^1}{\partial \theta^1}(\theta) & \frac{\partial \xi^1}{\partial \theta^2}(\theta) & \dots & \frac{\partial \xi^1}{\partial \theta^{n-1}}(\theta) \\ \frac{\partial \xi^2}{\partial \theta^1}(\theta) & \frac{\partial \xi^2}{\partial \theta^2}(\theta) & \dots & \frac{\partial \xi^2}{\partial \theta^{n-1}}(\theta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi^{n-1}}{\partial \theta^1}(\theta) & \frac{\partial \xi^{n-1}}{\partial \theta^2}(\theta) & \dots & \frac{\partial \xi^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}}(\theta) \end{vmatrix} \neq 0,$$

allora

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi^1}{\partial \theta^1}(\theta) & \frac{\partial \xi^1}{\partial \theta^2}(\theta) & \dots & \frac{\partial \xi^1}{\partial \theta^{n-1}}(\theta) \\ \frac{\partial \xi^2}{\partial \theta^1}(\theta) & \frac{\partial \xi^2}{\partial \theta^2}(\theta) & \dots & \frac{\partial \xi^2}{\partial \theta^{n-1}}(\theta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi^{n-1}}{\partial \theta^1}(\theta) & \frac{\partial \xi^{n-1}}{\partial \theta^2}(\theta) & \dots & \frac{\partial \xi^{n-1}}{\partial \theta^{n-1}}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \dots \\ a^{n-1} \end{pmatrix} = 0.$$

Di conseguenza, i coefficienti $a^1, \dots, a^{n-1}$ sarebbero tutti nulli, il che è assurdo per ipotesi. Essendo l'assurdo derivato dall'aver supposto che

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{\alpha=1}^{n-1} a^\alpha \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \Big)^2 = 0,$$

concludiamo che

$$\lim_{r\to 0^+} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} a^\alpha a^\beta \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \neq 0.$$

Per la Proposizione 1.9.1 e applicando il teorema di de l'Hôpital, risulta allora

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{r} \frac{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} a^\alpha a^\beta \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) \delta_{ij}}{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} a^\alpha a^\beta \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))} - \frac{1}{r} \\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} a^\alpha a^\beta \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) [\delta_{ij} - g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))]}{r \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} a^\alpha a^\beta \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))} \\ &= \lim_{r\to 0^+} \frac{- \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j,k=1}^{n} a^\alpha a^\beta \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) \xi^k(\theta) \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))}{\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} a^\alpha a^\beta \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) \Big[g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) + r \sum_{k=1}^{n} \xi^k(\theta) \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \Big]} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Segue dunque il terzo limite

$$\lim_{r\to 0^+}\Big(\frac{\operatorname{Hess} r(J,J)}{g(J,J)}-\frac{1}{r}\Big)\Big|_{exp_p(r\xi(\theta))}=0.$$

Per i calcoli precedenti, abbiamo

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(S)(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) &= \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} g^{\alpha\beta}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\operatorname{Hess} r(\partial_{\theta^\alpha}|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)},\partial_{\theta^\beta}|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)})\\
&= \frac{1}{r}\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} g^{\alpha\beta}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))g_{\alpha\beta}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\\
&\quad + r\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{n} g^{\alpha\beta}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\Big[\delta_{ij}-g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\Big]\\
&\quad - r^2\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\sum_{i,j,k=1}^{n} g^{\alpha\beta}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\Gamma^k_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\xi^k(\theta)\\
&= \frac{n-1}{r}\\
&\quad + r\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\sum_{i,j=1}^{n} g^{\alpha\beta}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\Big[\delta_{ij}-g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\Big]\\
&\quad - r^2\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1}\sum_{i,j,k=1}^{n} g^{\alpha\beta}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\Gamma^k_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\xi^k(\theta).
\end{aligned}$$

Abbiamo visto sopra che

$$(g_{\alpha\beta}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)))_{\alpha,\beta}=r^2\Big[\Big(\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\Big)_{i,\alpha}\Big]^\top(g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)))_{i,j}\Big(\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\Big)_{j,\beta}$$

e per la Proposizione 1.9.1 risulta

$$\lim_{r\to 0^+}\Big[\Big(\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\Big)_{i,\alpha}\Big]^T(g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)))_{i,j}\Big(\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\Big)_{j,\beta}=\Big[\Big(\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\Big)_{i,\alpha}\Big]^T\Big(\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\Big)_{j,\beta}.$$

Dimostriamo ora che la matrice

$$\Big[\Big(\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\Big)_{i,\alpha}\Big]^T\Big(\frac{\partial\xi^j}{\partial\theta^\beta}(\theta)\Big)_{j,\beta}$$

è invertibile. Se per assurdo non lo fosse avrebbe determinante nullo, dunque esisterebbero $a^1,\dots,a^{n-1}$ numeri reali non tutti nulli tali che

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^n}{\partial\theta^1}(\theta)\\ \frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^2}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^n}{\partial\theta^2}(\theta)\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^{n-1}}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^n}{\partial\theta^{n-1}}(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^{n-1}}(\theta)\\ \frac{\partial\xi^2}{\partial\theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^2}{\partial\theta^{n-1}}(\theta)\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\xi^n}{\partial\theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^n}{\partial\theta^{n-1}}(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^1\\ \dots\\ a^{n-1}\end{pmatrix}=0,$$

da cui seguirebbe che il prodotto

$$\begin{pmatrix} a^1 & \dots & a^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi^1}{\partial \theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial \xi^n}{\partial \theta^1}(\theta) \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial \theta^2}(\theta) & \dots & \frac{\partial \xi^n}{\partial \theta^2}(\theta) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi^1}{\partial \theta^{n-1}}(\theta) & \dots & \frac{\partial \xi^n}{\partial \theta^{n-1}}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi^1}{\partial \theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial \xi^1}{\partial \theta^{n-1}}(\theta) \\ \frac{\partial \xi^2}{\partial \theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial \xi^2}{\partial \theta^{n-1}}(\theta) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi^n}{\partial \theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial \xi^n}{\partial \theta^{n-1}}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ \dots \\ a^{n-1} \end{pmatrix}$$

è nullo, cioè

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a^\alpha a^\beta \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta) = 0$$

e abbiamo invece già mostrato che tale somma è diversa da zero.
Allora, dal ragionamento precedente e dalla costruzione della matrice inversa, segue che gli elementi della matrice

$$A(r,\theta) = \left(\left[\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \right)_{i,\alpha} \right]^T (g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)))_{i,j} \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) \right)_{j,\beta} \right)^{-1}$$

convergono per $r \to 0^+$. Denotiamo con $a_{\alpha\beta}(r,\theta)$ l'elemento della matrice $A(r,\theta)$ di posto (α,β), risulta

$$(g^{\alpha\beta}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)))_{\alpha,\beta} = \frac{1}{r^2} \left(\left[\left(\frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \right)_{i,\alpha} \right]^T (g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)))_{i,j} \left(\frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) \right)_{j,\beta} \right)^{-1}$$

$$g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) = \delta_{ij} + \frac{r^2}{2} f_{ij}(r,\theta)$$

dove nella seconda uguaglianza (che segue facilmente dalla Proposizione 1.9.1, sviluppando per Taylor g_{ij}), valida in un opportuno intorno destro di 0 (dipendente dal θ considerato), la funzione f_{ij} converge per $r \to 0^+$.
Concludiamo dunque

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(S)(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) &= \frac{n-1}{r} \\ &\quad + r \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} g^{\alpha\beta}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) \Big[\delta_{ij} - g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \Big] \\ &\quad - r^2 \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j,k=1}^{n} g^{\alpha\beta}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) \Gamma^k_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \xi^k(\theta) \\ &= \frac{n-1}{r} \\ &\quad + \frac{r}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} a_{\alpha\beta}(r,\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) f_{ij}(r,\theta) \\ &\quad - \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j,k=1}^{n} a_{\alpha\beta}(r,\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) \Gamma^k_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \xi^k(\theta) \end{aligned}$$

che implica il quarto limite

$$\lim_{r\to 0^+}\left(\frac{\mathrm{tr}(S)}{n-1}-\frac{1}{r}\right)\bigg|_{exp_p(r\xi(\theta))}=0.$$

Riguardo infine all'ultimo limite, sia E un campo parallelo per la funzione distanza r, di norma unitaria e puntualmente ortogonale a ∂_r, allora

$$E=\sum_{\alpha=1}^{n-1} b^\alpha \partial_{\theta^\alpha}=\sum_{i=1}^{n} c^i\partial_i$$

dove

$$\begin{pmatrix} c^1\\ c^2\\ \dots\\ c^n\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^{n-1}}(\theta)\\ \frac{\partial\xi^2}{\partial\theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^2}{\partial\theta^{n-1}}(\theta)\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\xi^n}{\partial\theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^n}{\partial\theta^{n-1}}(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^1\\ b^2\\ \dots\\ b^{n-1}\end{pmatrix}$$

Come visto sopra, la matrice

$$\left(\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\right)_{i\in\{1,\dots,n\},\,\alpha\in\{1,\dots,n-1\}}$$

ha rango massimo $n-1$, perciò ha un minore non nullo di ordine $n-1$. Per semplicità, supponiamo che

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^1}(\theta) & \frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^2}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^{n-1}}(\theta)\\ \frac{\partial\xi^2}{\partial\theta^1}(\theta) & \frac{\partial\xi^2}{\partial\theta^2}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^2}{\partial\theta^{n-1}}(\theta)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\xi^{n-1}}{\partial\theta^1}(\theta) & \frac{\partial\xi^{n-1}}{\partial\theta^2}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^{n-1}}{\partial\theta^{n-1}}(\theta)\end{vmatrix}\neq 0,$$

di conseguenza

$$\begin{pmatrix} c^1\\ c^2\\ \dots\\ c^{n-1}\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^{n-1}}(\theta)\\ \frac{\partial\xi^2}{\partial\theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^2}{\partial\theta^{n-1}}(\theta)\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\xi^{n-1}}{\partial\theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^{n-1}}{\partial\theta^{n-1}}(\theta)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b^1\\ b^2\\ \dots\\ b^{n-1}\end{pmatrix}$$

quindi

$$\begin{pmatrix} b^1\\ b^2\\ \dots\\ b^{n-1}\end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} \frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^1}{\partial\theta^{n-1}}(\theta)\\ \frac{\partial\xi^2}{\partial\theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^2}{\partial\theta^{n-1}}(\theta)\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\xi^{n-1}}{\partial\theta^1}(\theta) & \dots & \frac{\partial\xi^{n-1}}{\partial\theta^{n-1}}(\theta)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} c^1\\ c^2\\ \dots\\ c^{n-1}\end{pmatrix}.$$

Poiché E è un campo parallelo lungo $\sigma_\xi|_{(0,\varepsilon)}$, i coefficienti $c^i(\sigma_{\xi(\theta)}(r))$ convergono per $r\to 0^+$, dunque dai calcoli precedenti segue che

$$b^\alpha(\sigma_{\xi(\theta)}(r))=\frac{1}{r}f^\alpha(r,\theta)$$

dove la funzione f^α converge per $r \to 0^+$, per ogni $\alpha \in \{1, \dots, n-1\}$. Allora

$$\begin{aligned}
&\left(\operatorname{Hess} r\,(E,E) - \frac{1}{r}\right)\Big|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)} \\
&\quad = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} b^\alpha(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) b^\beta(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \operatorname{Hess} r(\partial_{\theta^\alpha}|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)}, \partial_{\theta^\beta}|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)}) \\
&\qquad - \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} b^\alpha(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) b^\beta(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \frac{1}{r} g_{\alpha\beta}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \\
&\quad = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} r b^\alpha(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) b^\beta(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) \Big[\delta_{ij} - g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\Big] \\
&\qquad - \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j,k=1}^{n} r^2 b^\alpha(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) b^\beta(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) \Gamma^k_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \xi^k(\theta) \\
&\quad = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{r^3}{2} b^\alpha(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) b^\beta(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) f_{ij}(r,\theta) \\
&\qquad - \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j,k=1}^{n} r^2 b^\alpha(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) b^\beta(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) \Gamma^k_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \xi^k(\theta) \\
&\quad = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{r}{2} f^\alpha(r,\theta) f^\beta(r,\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) f_{ij}(r,\theta) \\
&\qquad - \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-1} \sum_{i,j,k=1}^{n} f^\alpha(r,\theta) f^\beta(r,\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) \Gamma^k_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \xi^k(\theta)
\end{aligned}$$

e, per la Proposizione 1.9.1, concludiamo

$$\lim_{r \to 0^+} \left(\operatorname{Hess} r(E,E) - \frac{1}{r}\right)\Big|_{exp_p(r\xi(\theta))} = 0.$$

2.4. Il principio di confronto di Riccati

Vediamo il seguente risultato generale per le disuguaglianze differenziali, che poi applicheremo allo studio dell'hessiano e dell'operatore shape lungo una geodetica, sfruttando le conclusioni delle precedenti sezioni.

PROPOSIZIONE 2.4.1 (Principio di confronto di Riccati). *Date due funzioni regolari $\rho_1, \rho_2 : (0,b) \to \mathbb{R}$ tali che*

(1) $\rho_1' + \rho_1^2 \le \rho_2' + \rho_2^2$
(2) $\lim_{t \to 0^+} \left(\rho_i(t) - \frac{1}{t}\right) = 0$

per $i \in \{1,2\}$, si ha

$$\rho_2(t) \ge \rho_1(t),$$

per ogni $t \in (0, b)$.

DIMOSTRAZIONE. Scegliamo $t_0 \in (0, b)$ e poniamo

$$F(t) = \int_{t_0}^{t} \big(\rho_2(\tau) + \rho_1(\tau)\big)\, d\tau$$

per ogni $t \in (0, b)$. Poiché, per la prima ipotesi,

$$\frac{d}{dt}\big((\rho_2 - \rho_1)e^F\big) = (\rho_2' - \rho_1' + \rho_2^2 - \rho_1^2)e^F \geq 0$$

segue che la funzione $(\rho_2 - \rho_1)e^F$ è crescente in $(0, b)$.
Per ogni $0 < t_1 < t < b$, abbiamo dunque che

$$(\rho_2(t) - \rho_1(t))e^{F(t)} \geq (\rho_2(t_1) - \rho_1(t_1))e^{F(t_1)}$$

da cui

$$\rho_2(t) - \rho_1(t) \geq \big(\rho_2(t_1) - \rho_1(t_1)\big)e^{F(t_1)-F(t)}. \tag{2.11}$$

Per la seconda ipotesi,

$$\lim_{t_1\to 0^+} \big(\rho_2(t_1) - \rho_1(t_1)\big) = \lim_{t_1\to 0^+} \Big(\rho_2(t_1) - \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_1} - \rho_1(t_1)\Big) = 0 \tag{2.12}$$

e per $\varepsilon > 0$ fissato, esiste $\delta \in (0, t)$ tale che per ogni $t_1 \in (0, \delta)$,

$$\rho_i(t_1) > \frac{1}{t_1} - \varepsilon$$

per $i \in \{1, 2\}$. Allora per ogni $t_1 \in (0, \min\{\delta/2, t\})$ risulta

$$\begin{aligned}
e^{F(t_1)-F(t)} &= e^{-\int_{t_1}^{t}((\rho_2(\tau)+\rho_1(\tau))\, d\tau} \\
&= e^{-\int_{t_1}^{\delta/2}((\rho_2(\tau)+\rho_1(\tau))\, d\tau}\, e^{-\int_{\delta/2}^{t}((\rho_2(\tau)+\rho_1(\tau))\, d\tau} \\
&\leq e^{-\int_{t_1}^{\delta/2} 2(1/\tau-\varepsilon)\, d\tau}\, e^{-\int_{\delta/2}^{t}((\rho_2(\tau)+\rho_1(\tau))\, d\tau} \\
&= (2t_1/\delta)^2 e^{2\varepsilon(\delta/2-t_1)} e^{\int_t^{\delta/2}((\rho_2(\tau)+\rho_1(\tau))\, d\tau}
\end{aligned}$$

da cui segue

$$\lim_{t_1\to 0^+} e^{F(t_1)-F(t)} = 0.$$

Allora, per le formule (2.11) e (2.12), concludiamo

$$\rho_2(t) - \rho_1(t) \geq \lim_{t_1\to 0^+} \big(\rho_2(t_1) - \rho_1(t_1)\big)e^{F(t_1)-F(t)} = 0.$$

per ogni $t \in (0, b)$. □

OSSERVAZIONE 2.4.2. Con un analogo procedimento si ottiene che date due funzioni regolari $\rho_1, \rho_2 : (0, b) \to \mathbb{R}$ tali che

(1) $\rho_1' + \rho_1^2 = \rho_2' + \rho_2^2$ (equazione *di tipo Riccati*)
(2) $\lim_{t\to 0^+}\big(\rho_i(t) - \frac{1}{t}\big) = 0$

per $i \in \{1,2\}$, allora $\rho_1(t) = \rho_2(t)$ per ogni $t \in (0,b)$.

DEFINIZIONE 2.4.3. *Data una costante reale k, denotiamo con sn_k la soluzione dell'equazione differenziale ordinaria*

$$\chi'' + k\chi = 0$$

tale che

$$\chi(0) = 0 \quad \chi'(0) = 1.$$

Si può vedere facilmente che

$$sn_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\sqrt{k}t\right) & k > 0 \\ t & k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-k}} \sinh\left(\sqrt{-k}t\right) & k < 0 \end{cases}$$

$$sn_k'(t) = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{k}t\right) & k > 0 \\ 1 & k = 0 \\ \cosh\left(\sqrt{-k}t\right) & k < 0 \end{cases}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 2.4.4. Adottando la convenzione che $\pi/\sqrt{k} = +\infty$ quando $k \leq 0$, da una verifica diretta abbiamo che la funzione $sn_k'(t)/sn_k(t)$ sull'intervallo aperto $(0, \pi/\sqrt{k})$ soddisfa l'equazione differenziale ordinaria

$$\chi' + \chi^2 = -k$$

e

$$\lim_{t \to 0^+} \left(\frac{sn_k'(t)}{sn_k(t)} - \frac{1}{t} \right) = 0.$$

Consideriamo ora di nuovo delle coordinate polari $(r, \theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ centrate in $p \in M$ (facendo sempre riferimento al diagramma all'inizio della Sezione 2.3) su $\varphi((0,\varepsilon) \times U) \subseteq D_p \setminus \{p\}$, con $\varepsilon = \inf_{\xi \in \widetilde{U}} c(\xi)$.

Applicando il principio di confronto di Riccati, otteniamo le seguenti disuguaglianze lungo le geodetiche $\sigma_{\xi(\theta)} : (0,\varepsilon) \to M$, per ogni $\theta \in U$.

(1) Se (M,g) ha curvatura sezionale $\mathrm{Sec} \leq K$, allora dalla formula (2.5) si ha

$$\partial_r \left(\frac{\operatorname{Hess} r(J,J)}{g(J,J)} \right) + \left(\frac{\operatorname{Hess} r(J,J)}{g(J,J)} \right)^2 \geq -K = \left(\frac{sn_K'}{sn_K} \right)' + \left(\frac{sn_K'}{sn_K} \right)^2$$

per ogni J campo di Jacobi per la funzione distanza r, che sia in ogni punto combinazione lineare a coefficienti reali non tutti nulli di $\partial_{\theta^1}, \dots, \partial_{\theta^{n-1}}$ (quindi in ogni punto ortogonale a ∂_r). Ricordando il terzo limite della Sezione 2.3.1, possiamo allora applicare la Proposizione 2.4.1 e concludere che

$$\frac{\operatorname{Hess} r(J,J)}{g(J,J)}(r) \geq \frac{sn'_K(r)}{sn_K(r)} \tag{2.13}$$

per ogni $r \in (0, \varepsilon)$ nel dominio della funzione sn'_K/sn_K.

(2) Se (M, g) ha curvatura sezionale $\operatorname{Sec} \geq k$, allora dalla formula (2.6) si ha

$$\partial_r \operatorname{Hess} r(E,E) + [\operatorname{Hess} r(E,E)]^2 \leq -k$$

per ogni E campo parallelo per la funzione distanza r, unitario e puntualmente ortogonale a ∂_r. Allora, per il quinto limite della Sezione 2.3.1, la Proposizione 2.4.1 implica

$$\operatorname{Hess} r(E,E)(r) \leq \frac{sn'_k(r)}{sn_k(r)} \tag{2.14}$$

per ogni $r \in (0, \varepsilon)$ nel dominio della funzione sn'_k/sn_k.

(3) Se (M, g) soddisfa $\operatorname{Ric} \geq k(n-1)$ per un valore reale $k > 0$, dal secondo punto del Corollario 2.3.4 otteniamo

$$\partial_r \Big(\frac{\operatorname{tr}(S)}{n-1}\Big) + \Big(\frac{\operatorname{tr}(S)}{n-1}\Big)^2 \leq -k.$$

Allora, per il quarto limite della Sezione 2.3.1, la Proposizione 2.4.1 implica

$$\operatorname{tr}(S)(r) \leq (n-1)\frac{sn'_k(r)}{sn_k(r)} \tag{2.15}$$

per ogni $r \in (0, \varepsilon)$ nel dominio della funzione sn'_k/sn_k.

OSSERVAZIONE 2.4.5. Potendo ricoprire tutto $D_p \setminus \{p\}$ mediante sistemi di coordinate polari come sopra, scegliendo degli insiemi U appropriati, abbiamo che queste disuguaglianze valgono lungo tutte le geodetiche σ_ξ, per ogni $\xi \in \mathbb{S}^{n-1}_p$ e per ogni $r \in (0, c(\xi))$ nel dominio delle corrispondenti funzioni, sn'_K/sn_K o sn'_k/sn_k.

CAPITOLO 3

Alcune relazioni tra curvatura e topologia

Nel capitolo precedente abbiamo sviluppato l'apparato dell'approccio "analitico" alle relazioni tra curvatura e topologia, costituito dalle equazioni e disuguaglianze differenziali che abbiamo visto nelle Sezioni 2.2, 2.3 e 2.4. In questo capitolo presenteremo con entrambi i metodi le dimostrazioni dell'esistenza di intorni aperti isometrici tra varietà riemanniane di ugual curvatura sezionale costante, dei teoremi di Cartan–Hadamard e di Bonnet–Myers, infine con il metodo "analitico" proveremo il teorema massimale di Cheng.

In tali dimostrazioni "analitiche", studieremo il comportamento della funzione distanza r da un punto secondo le seguenti linee:

(1) Se la curvatura sezionale Sec della varietà è limitata superiormente da una costante K, allora il minimo degli autovalori dello shape operator S di r è puntualmente maggiore o uguale di una quantità dipendente solo dalla costante K e dal valore di r nel punto in esame (utilizzando di campi di Jacobi per r e la disuguaglianza (2.13)). Nel caso in cui K sia non positiva, questa quantità è allora sempre positiva (applicheremo questo fatto nella dimostrazione del teorema di Cartan–Hadamard 3.2.3).

(2) Se la curvatura sezionale Sec della varietà è limitata inferiormente da una costante k, allora il massimo degli autovalori dello shape operator di r è puntualmente minore o uguale di una quantità, dipendente solo dalla costante k e dal valore di r nel punto in esame (utilizzando campi paralleli per r e la disuguaglianza (2.14)). Nel caso in cui k sia positiva, questa quantità diverge negativamente per $r \to r_0$, dunque la matrice delle espressioni coordinate della metrica diventa degenere e quindi tutte le geodetiche cessano di essere minimizzanti in uno stesso intervallo di tempo di ampiezza r_0. Di conseguenza il diametro della varietà è finito (applicheremo questo fatto nella dimostrazione del lemma di Synge 3.3.3).

(3) Se la curvatura sezionale è costante, allora gli autovalori dello shape operator sono tutti uguali a una stessa quantità, dipendente solo

dalla costante di curvatura e dal valore di r nel punto in esame. Dunque, in varietà di egual curvatura sezionale costante, in palle geodetiche, diffeomorfe mediante l'utilizzo di coordinate polari, le espressioni coordinate della metrica di entrambe le varietà soddisfano lo stesso sistema lineare di equazioni lineare del prim'ordine lungo le curve integrali della rispettive funzione distanza, con stesse condizioni limite (utilizzeremo ciò nel Teorema 3.1.1).

(4) Quando gli autovalori del tensore di Ricci Ric sono limitati inferiormente da una costante positiva, non possiamo in generale ottenere informazioni sui singoli autovalori dello shape operator S di r ma solo sulla loro somma, cioè su $\mathrm{tr}(S)$ che è limitata superiormente da una quantità dipendente solo da tale costante e dal valore di r nel punto in esame. Poiché tale quantità diverge negativamente per $r \to r_0$, con un ragionamento analogo a quello del punto (2), la varietà avrà diametro finito (si veda il teorema di Bonnet–Myers 3.3.1).

Come vedremo, la complessità dei due metodi è all'incirca equivalente nella dimostrazione del Teorema 3.1.1 e di quello di Bonnet–Myers 3.3.1. L'approccio "classico" è più immediato nel teorema di Cartan–Hadamard 3.2.3, mentre il teorema di Cheng 3.4.8 fornisce un esempio della forza dell'approccio "analitico".

3.1. Varietà riemanniane a curvatura costante

TEOREMA 3.1.1. *Se la varietà riemanniana n–dimensionale (M, g) ha curvatura (sezionale) costante k, allora per ogni $p \in M$ esiste un intorno aperto di p in M isometrico a un sottoinsieme aperto dello* spazio modello M^n_k *a curvatura costante k dove M^n_k è:*

- *la sfera di $\mathbb{R}^{n+1}$ di centro l'origine e raggio $1/\sqrt{k}$ con la metrica indotta da $\mathbb{R}^{n+1}$, se $k > 0$,*
- *lo spazio $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea, se $k = 0$,*
- *lo* spazio iperbolico $\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n \mid x^n > 0\}$ *con la metrica*
$$(g_{\mathbb{H}^n})_{(x^1,\dots,x^n)} = \frac{1}{-k[x^n]^2}\,(g_{\mathrm{eucl}})_{(x^1,\dots,x^n)},$$
se $k < 0$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $p \in M$. Adottando la convenzione che $\pi/\sqrt{k}$ è $+\infty$ quando $k \leq 0$, sia $0 < \varepsilon \leq \min\left\{\mathrm{inj}(p), \pi/\sqrt{k}\right\}$ e consideriamo il seguente diagramma

$$
\begin{array}{ccc}
\xi \in \mathbb{S}^{n-1}_p & \xrightarrow{\quad i \quad} & \xi \in T_pM \\
\chi^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}} \big\uparrow & & \big\downarrow \chi \\
\widetilde{\xi} = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{S}^{n-1} & \xrightarrow{i} & \widetilde{\xi} = (\xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n \\
\widetilde{\xi} \big\uparrow & & \\
(\theta^1, \dots, \theta^{n-1}) \in U & &
\end{array}
$$

dove $\widetilde{\xi}$ è una parametrizzazione di $\mathbb{S}^{n-1}$ e χ è una isometria lineare di T_pM in $\mathbb{R}^n$. Allora $\chi|_{\mathbb{S}^{n-1}_p}$ è un diffeomorfismo tra $\mathbb{S}^{n-1}_p$ e $\mathbb{S}^{n-1}$, da cui segue che $\chi^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}} \circ \widetilde{\xi}$ è un diffeomorfismo tra U e la sua immagine, cioè una parametrizzazione locale di $\mathbb{S}^{n-1}_p$. Dunque, per ogni $\theta \in U$, si ha

$$
\begin{aligned}
g_{\mathbb{S}^{n-1}}(\partial_{\theta^\alpha}|_{\widetilde{\xi}(\theta)}, \partial_{\theta^\beta}|_{\widetilde{\xi}(\theta)}) &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta) g_{\text{eucl}}(\partial_{x^i}, \partial_{x^j}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta).
\end{aligned}
$$

Consideriamo lo spazio prodotto $(0, \varepsilon) \times \mathbb{S}^{n-1}$ con la metrica

$$
g_{(0,\varepsilon)\times\mathbb{S}^{n-1}}(r, \theta) = dr^2 + sn_k^2(r) ds_{n-1}^2
$$

e osserviamo il seguente diagramma

$$
\begin{array}{ccc}
(r, \xi) \in (0, \varepsilon) \times \mathbb{S}^{n-1}_p & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & exp_p(r\xi) \in B^*_\varepsilon(p) \\
(\mathrm{Id}, \chi^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}}) \big\uparrow & & \\
(r, \xi^1, \dots, \xi^n) \in (0, \varepsilon) \times \mathbb{S}^{n-1} & &
\end{array}
$$

La mappa composizione $\Phi = \phi \circ (\mathrm{Id}, \chi^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}})$ è un diffeomorfismo, vogliamo mostrare che "conserva la metrica", cioè è un isometria riemanniana. Siano $(r, \xi^1, \dots, \xi^n)$ un punto di $(0, \varepsilon) \times \mathbb{S}^{n-1}$ e $\widetilde{\xi}$ una parametrizzazione locale di $\mathbb{S}^{n-1}$ rispetto $(\xi^1, \dots, \xi^n)$. Per quanto precedentemente osservato, $\xi = \chi^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}} \circ \widetilde{\xi}$ è una parametrizzazione locale di $\mathbb{S}^{n-1}_p$, quindi $\phi \circ (\mathrm{Id}, \xi)$ è una parametrizzazione locale di M le cui componenti forniscono delle coordinate polari centrate in p. Per costruzione, il differenziale di Φ nel punto $(r, \xi^1, \dots, \xi^n)$ manda i campi vettoriali $\partial_r|_{(r,\xi^1,\dots,\xi^n)}$, $\partial_{\theta^\alpha}|_{(r,\xi^1,\dots,\xi^n)}$ in $\partial_r|_{exp_p(r\xi)}$, $\partial_{\theta^\alpha}|_{exp_p(r\xi)}$ rispettivamente, per ogni $\alpha \in \{1, \dots, n-1\}$. Per il lemma di Gauss 1.4.22 sappiamo che

$$
g_{(0,\varepsilon)\times\mathbb{S}^{n-1}}(\partial_r|_{(r,\xi^1,\dots,\xi^n)}, \partial_r|_{(r,\xi^1,\dots,\xi^n)}) = 1 = g(\partial_r|_{exp_p(r\xi)}, \partial_r|_{exp_p(r\xi)})
$$

$$g_{(0,\varepsilon)\times\mathbb{S}^{n-1}}(\partial_r|_{(r,\xi^1,\dots,\xi^n)}, \partial_{\theta^\alpha}|_{(r,\xi^1,\dots,\xi^n)}) = 0 = g(\partial_r|_{exp_p(r\xi)}, \partial_{\theta^\alpha}|_{exp_p(r\xi)}),$$

dobbiamo dunque mostrare che

$$\begin{aligned} g_{(0,\varepsilon)\times\mathbb{S}^{n-1}}(\partial_{\theta^\alpha}|_{(r,\xi^1,\dots,\xi^n)}, \partial_{\theta^\beta}|_{(r,\xi^1,\dots,\xi^n)}) &= sn_k^2(r) g_{\mathbb{S}^{n-1}}(\partial_{\theta^\alpha}|_{(\xi^1,\dots,\xi^n)}, \partial_{\theta^\beta}|_{(\xi^1,\dots,\xi^n)}) \\ &= sn_k^2(r)\sum_{i=1}^n \frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial\xi^i}{\partial\theta^\beta}(\theta) \\ &= g(\partial_{\theta^\alpha}|_{exp_p(r\xi)}, \partial_{\theta^\beta}|_{exp_p(r\xi)}) \end{aligned}$$

dove θ è tale che $\widetilde{\xi}(\theta) = (\xi^1, \dots, \xi^n)$.

Vediamo dunque due dimostrazioni di questo fatto, una "classica" basata sui campi di Jacobi lungo le geodetiche, l'altra applicando i risultati del precedente capitolo sulle funzioni distanza.

DIMOSTRAZIONE CON I CAMPI DI JACOBI.
La dimostrazione consta di diversi passi.

• $\mathrm{R}(X,Y)Z = k[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]$ *per ogni* X, Y, Z *campi vettoriali su* M.

Definiamo il tensore R' di tipo $(1,3)$ come segue

$$\mathrm{R}'(X,Y)Z = k[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]$$

per ogni X, Y, Z campi vettoriali su M.
Per ogni $q \in M$ risulta che R'_q è un tensore di curvatura algebrico con curvatura sezionale associata $\mathrm{Sec}'_q = k$. Per la Proposizione 1.3.5 segue allora che $\mathrm{R}_q = \mathrm{R}'_q$.

• *Se* $\sigma : [0,r] \to M$ *è una geodetica parametrizzata in lunghezza d'arco, allora i campi di Jacobi lungo* σ*, puntualmente ortogonali a* σ' *e che si annullano in* 0 *sono tutti e soli i campi della forma* $J(t) = sn_k(t)E(t)$*, dove* E *è un campo parallelo lungo* σ*, puntualmente ortogonale a* σ'.

Per il passo precedente ogni campo J della forma $J(t) = sn_k(t)E(t)$, dove E è un campo parallelo lungo σ, puntualmente ortogonale a σ', è un campo di Jacobi che si annulla in 0. Viceversa, sia J un campo di Jacobi puntualmente ortogonale a σ' e che si annulla in 0, poiché $g(J(t), \sigma'(t)) = 0$ per ogni t, abbiamo $g(\nabla_0 J, \sigma'(0)) = 0$. Sia allora E il campo parallelo lungo σ tale che $E(0) = \nabla_0 J$, che dunque è puntualmente ortogonale a σ', essendo parallelo e $g(E(0), \sigma'(0)) = 0$. Poiché si vede facilmente che J e $sn_k E$ sono entrambi i campi di Jacobi tali che si annullano in 0 e hanno la stessa derivata covariante lungo σ in 0, coincidono per la Proposizione 1.6.2.

• *Indicheremo con* $\widetilde{\varphi} : B_\varepsilon(p) \to \mathbb{R}^n$ *la carta sulla palla geodetica* $B_\varepsilon(p)$ *che fornisce le coordinate normali centrate in* p *rispetto alla base ortonormale* $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ *di* T_pM*, la cui immagine mediante* χ *è la base canonica di* $\mathbb{R}^n$*. Denoteremo con*

$\| \cdot \|_0$ la norma euclidea in queste coordinate cioè se $v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i$ allora $\|v\|_0$ è $\sqrt{\sum_{i=1}^n (v^i)^2}$. Se $q \in B_\varepsilon^*(p)$ e $v = a\partial_r|_q + v^\perp$, dove $v^\perp \in T_qM$ è la componente di v ortogonale a $\partial_r|_q$, abbiamo

$$g_q(v, v) = a^2 + \frac{1}{r^2} sn_k^2(r) \|v^\perp\|_0^2$$

dove $r = d(p, q)$.

Trattandosi di una decomposizione ortogonale e essendo ∂_r di lunghezza unitaria, dobbiamo solo calcolare $\|v^\perp\|_q^2$. Sia $q = exp_p(r\xi)$ dove $\xi \in \mathbb{S}_p^{n-1}$. Poiché $d(exp_p)_{r\xi}$ è un isomorfismo lineare, allora esiste un unico $w \in T_pM$ tale che $d(exp_p)_{r\xi}(rw) = v^\perp$, dove stiamo identificando canonicamente $T_{r\xi}T_pM$ con T_pM. Il campo di Jacobi J lungo σ_ξ soddisfacente le condizioni

$$J(0) = 0 \quad \nabla_0 J = w$$

è dato dalla seguente uguaglianza

$$J(t) = td(exp_p)_{t\xi}(w)$$

per il Corollario 1.6.8, dunque $J(r) = v^\perp$. Poiché per la Proposizione 1.6.3

$$g(J(t), \sigma_\xi'(t)) = at + b$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ e poiché

$$J(0) = 0$$

$$g(J(r), \sigma_\xi'(r)) = g(v^\perp, \partial_r|_q) = 0$$

segue che $a = b = 0$. Quindi J è un campo di Jacobi puntualmente ortogonale a σ_ξ' e è nullo in 0. Per il passo precedente $J = sn_k E$ dove E è un campo parallelo lungo σ, puntualmente ortogonali a σ' con

$$E(0) = \nabla_0 J = w$$

dunque

$$\|v^\perp\|_q^2 = \|J(r)\|_q^2 = \|sn_k(r)E(r)\|_q^2 = sn_k^2(r)\|E(0)\|_p^2 = sn_k^2(r)\|w\|_p^2.$$

Di conseguenza, ci resta solo da calcolare la norma di w. Per definizione le coordinate normali sono date da $\widetilde{\varphi}^{-1}(x) = exp_p(\sum_{i=1}^n x^i e_i)$, da cui

$$\partial_i|_q = d\widetilde{\varphi}^{-1}_{\widetilde{\varphi}(q)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = d(exp_p)_{t\xi}(e_i),$$

in particolare, se scriviamo $v^\perp = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i|_q$ otteniamo $rw = \sum_{i=1}^n v^i e_i$ quindi

$$\|w\|_p^2 = \frac{1}{r^2}\|v^\perp\|_0^2$$

che è ciò che volevamo mostrare.

• *Denoteremo con* g_0 *la metrica euclidea in queste coordinate, cioè se* $v = \sum_{i=1}^n v^i \partial_i$ *e* $w = \sum_{i=1}^n w^i \partial_i$ *allora* $g_0(v, w) = \sum_{i=1}^n v^i w^i$*. Se* $q \in B_\varepsilon^*(p)$ *e i due campi* $v = a\partial_r|_q + v^\perp$ *e* $w = b\partial_r|_q + w^\perp$*, dove* $v^\perp, w^\perp \in T_qM$ *sono ortogonali a* $\partial_r|_q$*, allora*

$$g_q(v, w) = ab + \frac{1}{r^2} sn_k^2(r) g_0(v^\perp, w^\perp)$$

dove $r = d(p, q)$*.*

Questa identità segue dal passo precedente e l'identità di polarizzazione.

• *Per ogni* $(r, \theta) \in (0, \varepsilon) \times U$*, dove* U *è l'aperto di* $\mathbb{R}^n$ *sul quale è definita la mappa* $\widetilde{\xi}$*, posto*

$$g_{\alpha\beta}(r, \theta) = g_{exp_p(r\xi(\theta))}(\partial_{\theta^\alpha}, \partial_{\theta^\beta})$$

vale

$$g_{\alpha\beta}(r, \theta) = sn_k^2(r) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta).$$

Sia $(r, \theta) \in (0, \varepsilon) \times U$. Poiché

$$\partial_{\theta^\alpha}|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)} = r \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \partial_i|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)},$$

per il passo precedente segue che

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(r, \theta) &= \frac{1}{r^2} sn_k^2(r) g_0(\partial_{\theta^\alpha}|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)}, \partial_{\theta^\beta}|_{\sigma_{\xi(\theta)}(r)}) \\ &= \frac{1}{r^2} sn_k^2(r) \sum_{i=1}^n r^2 \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta) \\ &= sn_k^2(r) \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta), \end{aligned}$$

che è quanto volevamo dimostrare. □

DIMOSTRAZIONE CON LE EQUAZIONI FONDAMENTALI.

Anche questa dimostrazione consta di diversi passi.

Ricordiamo che stiamo lavorando con φ parametrizzazione locale di M le cui componenti forniscono delle coordinate polari centrate in p, definita inizialmente e con $\widetilde{\varphi}$ la carta sulla palla geodetica $B_\varepsilon(p)$ che fornisce le coordinate normali centrate in p rispetto alla base ortonormale $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$.

• *Proviamo che*

$$\lim_{r \to 0^+} \frac{g_{exp_p(r\xi(\theta))}(\partial_{\theta^\alpha}, \partial_{\theta^\beta})}{sn_k^2(r)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta) \tag{3.1}$$

per ogni $\alpha, \beta \in \{1, \ldots, n-1\}$.
Nella Sezione 2.3.1 abbiamo visto che

$$g_{\alpha\beta}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) = r^2 g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta)$$

Il limite che vogliamo calcolare è una forma indeterminata di tipo $0/0$, applicando il teorema di de l'Hôpital due volte otteniamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0^+} \frac{g_{exp_p(r\xi(\theta))}(\partial_{\theta^\alpha}, \partial_{\theta^\beta})}{sn_k^2(r)} \\
&= \lim_{r\to 0^+} \frac{\frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta)\Big(2r g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) + r^2 \xi^k(\theta)\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\Big)}{2 sn_k(r) sn_k'(r)} \\
&= \lim_{r\to 0^+} \Bigg[\frac{\frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta)\Big(2 g_{ij}(\sigma_{\xi(\theta)}(r)) + 2r \xi^k(\theta)\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\Big)}{2[(sn_k'(r))^2 + sn_k(r) sn_k''(r)]} \\
&\quad + \frac{\frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial \xi^j}{\partial \theta^\beta}(\theta)\Big(2r \xi^k(\theta)\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(\sigma_{\xi(\theta)}(r) + r^2 \xi^k(\theta)\xi^l(\theta)\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^l \partial x^k}(\sigma_{\xi(\theta)}(r))\Big)}{2[(sn_k'(r))^2 + sn_k(r) sn_k''(r)]} \Bigg] \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta)
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttando il fatto che $sn_k'(0) = 1$.
• *Mostriamo che*

$$\operatorname{Hess} r(X, X) = \frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)} g(X, X)$$

per ogni X *campo vettoriale su* $\varphi((0,\varepsilon) \times U)$ *puntualmente ortogonale a* ∂_r.
Per ogni q in $\varphi((0,\varepsilon) \times U)$, consideriamo i vettori $\partial_r|_q, v_{1q}, \ldots, v_{n-1q} \in T_qM$ base ortonormale di autovettori dell'operatore shape S_q (tale base esiste essendo S_q autoaggiunto), di autovalori $0, \lambda_{1q}, \ldots, \lambda_{n-1q}$ rispettivamente associati. Allora, per ogni $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, possiamo scrivere

$$v_{iq} = \sum_{j=1}^{n-1} a^{jq} \partial_{\theta^j}|_q,$$

dove $a^{1q}, \ldots, a^{n-1q}$ sono numeri reali non tutti nulli e poniamo

$$J_i = \sum_{j=1}^{n-1} a^{jq} \partial_{\theta^j}$$

che è dunque un campo di Jacobi mai nullo per la funzione distanza r su $\varphi((0,\varepsilon) \times U)$ tale che $J_i(q) = v_{iq}$. Per la disuguaglianza (2.13) abbiamo quindi

$$\operatorname{Hess} r\Big(\frac{J_i}{\|J_i\|}, \frac{J_i}{\|J_i\|}\Big) \geq \frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)},$$

di conseguenza per ogni $i \in \{1, \dots, n-1\}$, si ha

$$\begin{aligned}\lambda_q = \frac{sn_k'(r(q))}{sn_k(r(q))} &\leq \mathrm{Hess}_q r\Big(\frac{J_i(q)}{\|J_i\|}, \frac{J_i(q)}{\|J_i|}\Big) \\ &= \frac{\mathrm{Hess}_q r(v_{iq}, v_{iq})}{g(v_{iq}, v_{iq})} \\ &= g(S_q(v_{iq}), v_{iq}) \\ &= g(\lambda_{iq} v_{iq}, v_{iq}) \\ &= \lambda_{iq},\end{aligned}$$

che implica $\lambda_{iq} \geq \lambda_q$ per ogni $i \in \{1, \dots, n-1\}$.
Sia ora E_i un campo parallelo per la funzione distanza r su $\varphi((0, \varepsilon) \times U)$, unitario, puntualmente ortogonale a ∂_r e tale che $E_i(q) = v_{iq}$, per ogni $i \in \{1, \dots, n-1\}$ (possiamo costruire tali campi col metodo delle caratteristiche, come discusso nella Sezione 2.2). Per la disuguaglianza (2.14) abbiamo allora

$$\mathrm{Hess}\, r(E_i, E_i) \leq \frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)},$$

di conseguenza per ogni $i \in \{1, \dots, n-1\}$ si ha

$$\begin{aligned}\lambda_q = \frac{sn_k'(r(q))}{sn_k(r(q))} &\geq \mathrm{Hess}_q r(E_i(q), E_i(q)) \\ &= \mathrm{Hess}_q r(v_{iq}, v_{iq}) \\ &= g(S(v_{iq}), v_{iq}) \\ &= g(\lambda_{iq} v_{iq}, v_{iq}) \\ &= \lambda_{iq}.\end{aligned}$$

Possiamo dunque concludere che

$$\lambda_{iq} = \lambda_q = \frac{sn_k'(r(q))}{sn_k(r(q))}$$

per ogni $i \in \{1, \dots, n-1\}$.
Per l'arbitrarietà di q in $\varphi((0, \varepsilon) \times U)$, segue allora immediatamente che per ogni campo vettoriale X sull'aperto $\varphi((0, \varepsilon) \times U)$, puntualmente ortogonale a ∂_r, si ha

$$\mathrm{Hess}\, r(X, X) = \frac{sn_k'}{sn_k} g(X, X),$$

che è ciò che volevamo provare.
• *Per ogni X_1, X_2 campi vettoriali su $\varphi((0, \varepsilon) \times U)$ puntualmente ortogonali a ∂_r si ha*

$$\mathrm{Hess}\, r(X_1, X_2) = \frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)} g(X_1, X_2).$$

Come prima, questa identità segue dal passo precedente e l'identità di polarizzazione.

• *Per ogni* $(r, \theta) \in (0, \varepsilon) \times U$ *risulta che*

$$g_{\alpha\beta}(r, \theta) = sn_k^2(r) \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta).$$

Abbiamo visto che per ogni $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n-1\}$, vale

$$\operatorname{Hess} r(\partial_{\theta^\alpha}, \partial_{\theta^\beta}) = \frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)} g(\partial_{\theta^\alpha}, \partial_{\partial^\beta}),$$

segue allora dalla prima equazione della Proposizione 2.3.1,

$$\partial_r g(\partial_{\theta^\alpha}, \partial_{\theta^\beta}) = 2\operatorname{Hess} r(\partial_{\theta^\alpha}, \partial_{\theta^\beta}) = 2\frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)} g(\partial_{\theta^\alpha}, \partial_{\theta^\beta})$$

dunque,

$$\begin{cases} \partial_r g_{\alpha\beta}(r, \theta) = 2\frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)} g_{\alpha\beta}(r, \theta) \\ \lim_{r \to 0^+} \frac{g_{\alpha\beta}(r,\theta)}{sn_k^2(r)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta) \end{cases}$$

Fissiamo $\theta \in U$, se $g_{\alpha\beta}(r, \theta)$ è sempre diversa da zero, per $r \in (0, \varepsilon)$, possiamo scrivere

$$\partial_r \left[\frac{sn_k^2(r)}{g_{\alpha\beta}(r, \theta)} \right] = \frac{2 sn_k(r) sn_k'(r)}{g_{\alpha\beta}(r, \theta)} - \frac{sn_k^2(r) \partial_r g_{\alpha\beta}(r, \theta)}{g_{\alpha\beta}^2(r, \theta)} = 0,$$

da cui segue che la funzione $\frac{sn_k^2(r)}{g_{\alpha\beta}(r,\theta)}$ è costante e uguale a $\left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta) \right)^{-1}$ per ogni $r \in (0, \varepsilon)$. Di conseguenza, in questo caso abbiamo la tesi

$$g_{\alpha\beta}(r, \theta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta) sn_k^2(r).$$

Se invece $g_{\alpha\beta}(r, \theta)$ è nulla in un punto, allora $\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta) = 0$ e di nuovo la tesi segue in quanto per il teorema di unicità per le equazioni differenziali ordinarie, $g_{\alpha\beta}(r, \theta)$ è allora identicamente nulla per ogni r in $(0, \varepsilon)$. □

Ritornando alla dimostrazione della proposizione, per la bilinearità delle metriche, segue che la mappa $\Phi = \phi \circ (\mathrm{Id}, \chi^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}})$ "conserva la metrica", dunque è un'isometria riemanniana e la stessa conclusione vale ovviamente anche per la varietà M_k^n rispetto a un qualsiasi suo punto $\widehat{p}$, per l'analoga isometria $\widehat{\Phi} = \widehat{\phi} \circ (\mathrm{Id}, \widehat{\chi}^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}})$. Consideriamo la seguente catena di applicazioni

$$B_\varepsilon(\widehat{p}) \subseteq M_k^n \xrightarrow{exp_{\widehat{p}}^{-1}} B_\varepsilon(O_{\widehat{p}}) \subseteq T_{\widehat{p}} M_k^n \xrightarrow{\chi^{-1} \circ \widehat{\chi}} B_\varepsilon(O_p) \subseteq T_p M \xrightarrow{exp_p} B_\varepsilon(p) \subseteq M$$

L'applicazione composta è un diffeomorfismo, mostriamo che è un'isometria. Osserviamo il seguente diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} B^*_\varepsilon(\widehat{p}) \subseteq M^n_k \arrow[r, "exp^{-1}_{\widehat{p}}"] & B^*_\varepsilon(O_{\widehat{p}}) \arrow[r, "(\mathrm{Id}, \widehat{\chi}|_{\mathbb{S}^{n-1}_{\widehat{p}}}) \circ \widehat{j}^{-1}"] \arrow[d, "\chi^{-1} \circ \widehat{\chi}"] & (0,\varepsilon) \times \mathbb{S}^{n-1} \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ B^*_\varepsilon(p) \subseteq M & B^*_\varepsilon(O_p) \arrow[l, "exp_p"'] & (0,\varepsilon) \times \mathbb{S}^{n-1} \arrow[l, "j \circ (\mathrm{Id}, \chi^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}})"'] \end{tikzcd}$$

dove $j : (0, \varepsilon) \times \mathbb{S}^{n-1}_p \to T_pM$ è definita da $j(r, \xi) = r\xi$ e analogamente $\widehat{j} : (0, \varepsilon) \times \mathbb{S}^{n-1}_{\widehat{p}} \to T_{\widehat{p}}M^n_k$.

Poiché la composizione delle applicazioni della riga superiore è l'inversa dell'isometria $\widehat{\Phi}$ e la composizione delle applicazioni della riga inferiore è l'isometria Φ, la composizione

$$exp_p \circ \chi^{-1} \circ \widehat{\chi} \circ exp^{-1}_{\widehat{p}} = \Phi \circ \widehat{\Phi}^{-1}$$

è anch'essa un'isometria. Per la continuità del differenziale e delle metriche, segue che tale applicazione "conserva la metrica" anche in $\widehat{p}$, quindi è l'isometria riemanniana cercata tra $B_\varepsilon(\widehat{p})$ e $B_\varepsilon(p)$. □

Questa proposizione ci dice che ogni punto di una varietà riemanniana a curvatura costante ammette un intorno aperto isometrico a un opportuno intorno aperto di un qualunque punto dello spazio modello. Vale in realtà il seguente risultato più forte (si veda **[5]**, per esempio).

TEOREMA 3.1.2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa di dimensione n, con curvatura sezionale costante uguale a k, allora il suo rivestimento universale riemanniano è M^n_k. Segue che se (M, g) è semplicemente connessa, è isometrica a M^n_k.*

3.2. Il teorema di Cartan–Hadamard

In questa sezione vediamo il teorema di Cartan–Hadamard, che dice che sotto l'ipotesi di curvatura sezionale non positiva, il rivestimento universale di una varietà riemanniana è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Premettiamo i seguenti due lemmi al teorema.

LEMMA 3.2.1. *Siano (M, g) e (N, h) varietà riemanniane connesse della stessa dimensione. Se $\pi \colon M \to N$ è un'isometria locale e M è completa, allora N è completa e π è un rivestimento riemanniano. Se π è un rivestimento riemanniano, M è completa se e solo se N è completa.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $q \in \pi(M)$ e $p \in \pi^{-1}(q)$. Allora per ogni geodetica $\sigma : I \to N$ uscente da q esiste un'unica geodetica $\widetilde{\sigma} : \widetilde{I} \to M$ uscente da p tale che $\sigma = \pi \circ \widetilde{\sigma}$ su $I \cap \widetilde{I}$. Ciò segue in modo immediato tenendo conto che, essendo π un'isometria locale, esistono un intorno aperto U di p in M ed un intorno aperto V di q in N tali che $\pi : U \to V$ è una isometria, e che ogni geodetica viene mappata in una geodetica da una isometria locale. Se π è un rivestimento riemanniano, $\widetilde{\sigma}$ può essere trovata con $\widetilde{I} = I$, per le proprietà dei rivestimenti. Anche se M è completa, $\widetilde{\sigma}$ può essere trovata con $\widetilde{I} = I$. Nel caso in cui π è solo una isometria locale, se $I \subseteq \widetilde{I}$, allora la geodetica $\pi \circ \widetilde{\sigma}$ estende σ e dunque se σ è una geodetica massimale, allora $\widetilde{I} \subseteq I$ (con la possibilità che ogni geodetica $\widetilde{\sigma}$ sia definita in $\widetilde{I} \subseteq I$).

Se N è completa e π è un rivestimento riemanniano, fissato $p \in M$ e posto $q = \pi(p) \in N$, se $\widetilde{\sigma}$ è una geodetica uscente da p, la geodetica "immagine" $\sigma = \pi \circ \widetilde{\sigma}$ uscente da $q \in N$, essendo N completa, è definita su tutto $\mathbb{R}$. Ma allora, "sollevando" σ a M, abbiamo una geodetica che estende $\widetilde{\sigma}$, definita su tutto $\mathbb{R}$. Dunque, di nuovo per il teorema di Hopf–Rinow 1.4.28 segue che M è completa.

Supponiamo che $\pi\colon M \to N$ è un'isometria locale e M è completa. Dimostriamo ora che anche N è completa. Sia $q \in \pi(M)$ e $p \in \pi^{-1}(q)$. Se σ è una geodetica uscente da q, essendo M completa, la geodetica $\widetilde{\sigma}$, uscente da p tale che $\sigma = \pi \circ \widetilde{\sigma}$, è definita su tutto $\mathbb{R}$, ma allora la sua immagine mediante π è una geodetica che estende σ, definita su tutto $\mathbb{R}$. Per il teorema di Hopf–Rinow 1.4.28 segue che N è completa.

Vediamo che la mappa π è surgettiva. Siano $q_0 = \pi(p_0) \in \pi(M)$ e $q \in N$. Allora, essendo N completa, esiste una geodetica minimizzante $\sigma : [a, b] \to N$ da q_0 a q. Se ora $\widetilde{\sigma} : [a, b] \to M$ è la geodetica "sollevata" uscente da $p_0 \in M$ tale che $\sigma = \pi \circ \widetilde{\sigma}$, si ha $q = \sigma(b) = \pi(\widetilde{\sigma}(b))$, quindi $q = \sigma(b) \in \pi(M)$.

Infine dimostriamo che π è un rivestimento riemanniano. Sia q un punto di N e sia $\pi^{-1}(q) = \{p_i \mid i \in I\}$. Se $r > 0$ è un numero reale minore del raggio di iniettività di N in q, abbiamo che

$$exp_q|_{B_r(O_q)}\colon B_r(O_q) \to B_r(q)$$

è un diffeomorfismo. Siano $U = B_r(q)$ e $U_i = B_r(p_i)$ per $i \in I$, essendo π un'isometria locale, le geodetiche di M vengono mandate in geodetiche di N della stessa lunghezza, di conseguenza,

$$\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq \pi^{-1}(U).$$

Fissato ora un qualsiasi indice $i \in I$, consideriamo un vettore $v \in T_{p_i}M$ e la corrispondente geodetica $\widetilde{\sigma}$ su M uscente da p_i con velocità iniziale v. Siano inoltre $w = d\pi_{p_i}(v)$ e σ la geodetica su N uscente da q con velocità iniziale w. Dal momento che π è un'isometria locale, manda $\widetilde{\sigma}$ in σ (in altre parole, $\pi \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$), quindi

$$exp_q\big(d\pi_{p_i}(tv)\big) = exp_q(tw) = \sigma(t) = \pi(\widetilde{\sigma}(t)) = \pi\big(exp_{p_i}(tv)\big),$$

di conseguenza, il seguente diagramma è commutativo

$$\begin{tikzcd} B_r(O_{p_i}) \arrow[r, "d\pi_{p_i}"] \arrow[d, "exp_{p_i}"'] & B_r(O_q) \arrow[d, "exp_q"] \\ U_i \arrow[r, "\pi"] & U. \end{tikzcd}$$

Poiché $d\pi_{p_i}$ è un'isometria lineare di $T_{p_i}M$ in T_qN, allora la mappa superiore del diagramma è un diffeomorfismo e lo stesso vale per la mappa verticale a destra, quindi la composizione $exp_q \circ d\pi_{p_i}$ è anch'essa un diffeomorfismo. Segue dunque che $\pi \circ exp_{p_i}$ è un diffeomorfismo, da cui la mappa $exp_{p_i} : B_r(O_{p_i}) \to U_i = B_r(p_i)$ è una immersione biettiva, quindi è un diffeomorfismo. Possiamo allora concludere che $\pi|_{U_i} \colon U_i \to U$ è un diffeomorfismo e un'isometria, essendo $d\pi_{p_i}$ un'isometria lineare.
Dimostriamo ora che gli aperti U_i sono a due a due disgiunti. Fissati due indici distinti $i, j \in I$, sia σ una geodetica minimizzante da p_i a p_j. La composizione $\pi \circ \sigma$ è una geodetica (chiusa) da q a q della stessa lunghezza, che deve quindi necessariamente uscire dalla palla geodetica $B_r(q)$. Segue che

$$\ell(\sigma) = \ell(\pi \circ \sigma) \geq 2r,$$

dunque $d(p_i, p_j) \geq 2r$, che implica che U_i e U_j sono disgiunti.
Infine vediamo che $\pi^{-1}(U)$ è uguale all'unione degli U_i. Sia $p \in \pi^{-1}(U)$ e $\overline{q} = \pi(p) \in U$. Chiamiamo L la distanza tra $\overline{q}$ e q e consideriamo la geodetica minimizzante $\sigma \colon [0, L] \to N$ da $\overline{q}$ a q parametrizzata in lunghezza d'arco. Essendo π una isometria locale, posto $\widetilde{\sigma}$ la geodetica uscente da p con velocità iniziale $d\pi_p^{-1}(\sigma'(0))$, segue che $\pi \circ \widetilde{\sigma} = \sigma$ ed inoltre che la lunghezza di $\widetilde{\sigma}$ è L. Di conseguenza, al tempo L, $\widetilde{\sigma}$ deve passare per uno dei p_i ed essendo $L < r$, ciò implica che p appartiene ad U_i. $\square$

LEMMA 3.2.2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa di dimensione n, con $\mathrm{Sec}(\pi) \leq 0$ per ogni 2–piano $\pi \subseteq T_pM$ e per ogni $p \in M$. Allora ogni $p \in M$ non ha punti coniugati.*

DIMOSTRAZIONE CON I CAMPI DI JACOBI.
Sia $p \in M$. Per assurdo, supponiamo che esista $q \in M$ tale che p è coniugato a q. Allora esiste una geodetica parametrizzata in lunghezza d'arco, uscente dal punto p e passante per il punto q, sulla quale esiste un campo di Jacobi non nullo, che si annulla negli istanti corrispondenti al passaggio della curva nei punti p, q. Siano σ_ξ, con $\xi \in \mathbb{S}_p^{n-1}$, la geodetica e J il campo di Jacobi lungo σ_ξ, precedentemente detti. Indichiamo con t_0 il numero reale positivo tale che $\sigma_\xi(t_0) = q$ e definiamo

$$h(t) = g(J, J)$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. La funzione h soddisfa allora le seguenti due relazioni

$h(0) = h(t_0) = 0,$

$h''(t) \geq 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$

infatti, per quanto riguarda la seconda condizione, abbiamo

$$\begin{aligned} h''(t) &= 2g(\nabla_t J, \nabla_t J) + 2g(\nabla_t^2 J, J) \\ &= 2g(\nabla_t J, \nabla_t J) - 2\mathrm{R}(J, \sigma'_\xi, \sigma'_\xi, J) \\ &\geq -2\mathrm{Sec}(J, \sigma'_\xi) g(J - g(J, \sigma'_\xi)\sigma'_\xi, J - g(J, \sigma'_\xi)\partial_r) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$.
Segue dunque che la funzione h è nulla sull'intervallo $[0, t_0]$ e quindi anche J è nullo sullo stesso intervallo, il che è una contraddizione. □

DIMOSTRAZIONE CON LE EQUAZIONI FONDAMENTALI.
Sia $p \in M$. Consideriamo $B_R(O_p)$ la più grande palla contenuta in T_pM, dotato del prodotto scalare g_p, sulla quale exp_p è non singolare. Nel seguito proveremo che $R = +\infty$. Supponiamo per assurdo che $R < +\infty$, allora esiste $\xi_0 \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ tale che $R\xi_0$ è un punto singolare (per la scelta di R, il primo lungo la geodetica σ_{ξ_0}) per la mappa exp_p. Consideriamo delle coordinate polari $(r, \theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ centrate in $p \in M$ (facendo riferimento al diagramma all'inizio della Sezione 2.3) su $\varphi((0, \varepsilon) \times U) \subseteq D_p \setminus \{p\}$, con $\varepsilon = \inf_{\xi \in \widetilde{U}} c(\xi)$ e $\widetilde{U}$ è il dominio di una carta di $\mathbb{S}_p^{n-1}$, rispetto al punto ξ_0, con parametrizzazione locale $\xi : U \to \widetilde{U}$. Segue che la mappa

$$(r, \xi) \in (0, +\infty) \times \widetilde{U} \xrightarrow{\ \phi\ } exp_p(r\xi) \in M$$

ristretta all'insieme $(0,R)\times\widetilde{U}$ è un'immersione. Denotiamo dunque con $\partial_r|_{(r,\xi)}, \partial_{\theta^1}|_{(r,\xi)}, \dots, \partial_{\theta^{n-1}}|_{(r,\xi)}$ le immagini mediante ϕ_* dei campi vettoriali coordinati su $(0,+\infty)\times\widetilde{U}$, allora valgono le seguenti affermazioni:

(1) Per ogni $r\in(0,R)$ e per ogni $\xi\in\widetilde{U}$, i vettori $\partial_r|_{(r,\xi)}, \partial_{\theta^1}|_{(r,\xi)}, \dots, \partial_{\theta^{n-1}}|_{(r,\xi)}$ sono linearmente indipendenti in $T_{exp_p(r\xi)}M$.

(2) I vettori $\partial_r|_{(R,\xi_0)}, \partial_{\theta^1}|_{(R,\xi_0)}, \dots, \partial_{\theta^{n-1}}|_{(R,\xi_0)}$ sono linearmente dipendenti in $T_{exp_p(R\xi_0)}M$, quindi esistono $a^r, a^1, \dots, a^{n-1}$ numeri reali non tutti nulli tali che

$$a^r\partial_r|_{(R,\xi_0)} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} a^\alpha \partial_{\theta^\alpha}|_{(R,\xi_0)} = 0.$$

Essendo tutti i vettori $\partial_{\theta^1}|_{(R,\xi_0)}, \dots \partial_{\theta^{n-1}}|_{(R,\xi_0)}$ ortogonali a $\partial_r|_{(R,\xi_0)}$ (per il lemma di Gauss 1.4.22) deve dunque essere

$$\sum_{i=1}^{n-1} a^i \partial_{\theta^i}|_{(R,\xi_0)} = 0.$$

Poniamo

$$J(r,\xi) = \sum_{i=1}^{n-1} a^i \partial_{\theta^i}|_{(r,\xi)}$$

per ogni (r,ξ) in $(0,+\infty)\times\widetilde{U}$, che è ortogonale a ∂_r (di nuovo per il lemma di Gauss 1.4.22) e tale che $J(R,\xi_0)=0$ e $J(r,\xi)\neq 0$ per ogni (r,ξ) in $(0,R)\times\widetilde{U}$. Siano $\underline{r}, \overline{r}\in(0,R)$ con $\underline{r}<\mathrm{inj}(p)$, allora a meno di restringere l'aperto $\widetilde{U}\subseteq\mathbb{S}^{n-1}_p$, esiste una suddivisione, $\underline{r}=r_0<r_1<\dots<r_k=\overline{r}$ tale che, per ogni $i\in\{1,\dots,k\}$, la mappa $\phi|_{[r_{i-1},r_i]\times\widetilde{U}}$ è un diffeomorfismo con l'immagine, dunque $\varphi_i=\phi|_{[r_{i-1},r_i]\times\widetilde{U}}\circ(\mathrm{Id},\xi)$ fornisce delle coordinate polari centrate in p su $\phi([r_{i-1},r_i]\times\widetilde{U})$, dove $\partial_r|_{(r,\xi)}$ è il gradiente della funzione distanza

$$d_i = \pi_1\circ\phi|^{-1}_{[r_{i-1},r_i]\times\widetilde{U}}$$

dove $\pi_1:(r,\xi)\in(0,+\infty)\times\widetilde{U}\to r\in(0,+\infty)$ è la proiezione sulla prima coordinata. Per ogni $i\in\{1,\dots,n-1\}$, essendo $\partial_r|_{(r,\xi)}, \partial_{\theta^1}|_{(r,\xi)}, \dots, \partial_{\theta^{n-1}}|_{(r,\xi)}$ campi vettoriali coordinati su $\phi([r_{i-1},r_i]\times\widetilde{U})$, sono campi di Jacobi per la funzione distanza d_i e di conseguenza lo è anche $J(r,\xi)$. Tali campi li denoteremo rispettivamente per semplicità con i simboli $\partial_r, \partial_{\theta^1}, \dots, \partial_{\theta^{n-1}}, J$. Allora, se $i=1$, per la formula 2.5, essendo $\mathrm{Sec}\leq 0$, abbiamo

$$\partial_r g(\nabla_{\partial_r}J, J) = \partial_r \mathrm{Hess}\, d_1(J,J) \geq -\mathrm{Sec}(J,\partial_r)g(J,J)\geq 0.$$

Poiché $\underline{r}<\mathrm{inj}(p)$ e $\varphi^{-1}=(\phi|_{(0,\mathrm{inj}(p))\times\widetilde{U}}\circ(\mathrm{Id},\xi))^{-1}$ è una carta di M che fornisce delle coordinate polari centrate in p, con campi vettoriali coordinati

$\partial_r|_{(r,\xi)}, \partial_{\theta^1}|_{(r,\xi)}, \dots, \partial_{\theta^{n-1}}|_{(r,\xi)}$, dalla disuguaglianza (2.13) segue

$$g_{exp_p(\underline{r}\xi_0)}(\nabla_{\partial_r} J, J) > 0,$$

dunque

$$g_{exp_p(r\xi_0)}(\nabla_{\partial_r} J, J) = \text{Hess}\, d_1(J,J)_{exp_p(r\xi_0)} > 0.$$

per ogni $r \in [r_0, r_1]$.
Ora, per la formula 2.3,

$$\partial_r g(J,J) = 2\text{Hess}\, d_1(J,J) > 0$$

e il fatto che

$$g_{exp_p(\underline{r}\xi_0)}(J,J) = \delta > 0,$$

essendo J non nullo per quanto detto sopra, concludiamo

$$g_{exp_p(r\xi_0)}(J,J) \geq g_{exp_p(\underline{r}\xi_0)}(J,J) = \delta > 0,$$

per ogni $r \in [r_0, r_1]$, in particolare,

$$\begin{aligned} g_{exp_p(r_1\xi_0)}(\nabla_{\partial_r} J, J) &> 0, \\ g_{exp_p(r_1\xi_0)}(J,J) &\geq \delta > 0. \end{aligned}$$

Iterando questo argomento su tutti gli intervalli $[r_{i-1}, r_i]$, otteniamo allora

$$g_{exp_p(\overline{r}\xi_0)}(J,J) \geq \delta > 0.$$

Per l'arbitrarietà di $\overline{r}$ in $(\underline{r}, R)$ segue che quest'ultima disuguaglianza vale per ogni $\overline{r} \in (\underline{r}, R)$, passando al limite per $\overline{r} \to R$ si ha allora

$$g_{exp_p(R\xi_0)}(J,J) \geq \delta > 0,$$

che è in contraddizione con $J(R, \xi_0) = 0$, dunque $R = +\infty$.

□

TEOREMA 3.2.3 (Teorema di Cartan–Hadamard). *Sia (M,g) una varietà riemanniana completa di dimensione n, con $\mathrm{Sec}(\pi) \leq 0$ per ogni 2–piano $\pi \subseteq T_pM$ e per ogni $p \in M$. Allora il rivestimento universale di M è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $p \in M$. Essendo M completa, ricordiamo che

$$exp_p : T_pM \to M$$

Per il Lemma 3.2.2 segue che exp_p è una immersione. Pertanto su T_pM possiamo considerare la metrica indotta da g tramite exp_p, che denoteremo semplicemente con g_p^*. In questo modo, exp_p risulta essere una isometria locale.

Mostrato che T_pM è completa, l'asserto seguirà per il Lemma 3.2.1. Vediamo che per ogni $v \in T_pM$

$$\gamma_v : t \in \mathbb{R} \to tv \in T_pM$$

è una geodetica di T_pM. Preso $a > 0$, esistono $k \in \mathbb{N}$, una suddivisione $-a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = a$ dell'intervallo $[-a, a]$ e $A_1, \ldots, A_k$ aperti di T_pM tali che

$\gamma_v|_{[t_{i-1},t_i]} \subseteq A_i$ per ogni $i = 1, \ldots, k$

$exp_p|_{A_i}$ è una isometria con l'immagine, aperto di M, per ogni $i = 1, \ldots, k$

Poiché

$$exp_p(\gamma_v(t)) = exp_p(tv) = \sigma_{tv}(1) = \sigma_v(t)$$

segue che $\gamma_v|_{[t_{i-1},t_i]}$ è una geodetica di T_pM per ogni $i = 1, \ldots, k$. Allora $\gamma_v|_{[-a,a]}$ è una geodetica di T_pM. Per l'arbitrarietà di $a > 0$, segue che γ_v è una geodetica di T_pM. Di conseguenza, sfruttando la canonica identificazione di $T_{O_p}T_pM$ con T_pM, la mappa esponenziale di (T_pM, g_p^*) nel punto O_p di T_pM è definita su tutto $T_{O_p}T_pM$, da ciò segue, per il teorema di Hopf–Rinow 1.4.28, che (T_pM, g_p^*) è completa. □

Il seguente corollario è un'immediata conseguenza del teorema.

COROLLARIO 3.2.4. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa, semplicemente connessa di dimensione n, con $\mathrm{Sec}(\pi) \leq 0$ per ogni 2–piano $\pi \subseteq T_pM$ e per ogni $p \in M$. Allora $exp_p : T_pM \to M$ è un diffeomorfismo per ogni $p \in M$.*

NOTA STORICA. Il Teorema 3.2.3 è stato provato da Mangoldt nel 1881 per le superfici, poi Hadamard ne ha dato una nuova dimostrazione nel 1889. Cartan nel 1925 lo ha esteso alle varietà di ogni dimensione, sotto l'assunzione della completezza metrica.

3.3. Il teorema di Bonnet–Myers

In questa sezione vedremo che assumendo che la curvatura di Ricci sia positivamente limitata dal basso, possiamo dedurre che la varietà è compatta e che il suo gruppo fondamentale è finito. Ciò è conseguenza del seguente teorema anche detto "stima del diametro" di Bonnet–Myers.

Con la notazione $\mathrm{Ric} \geq k(n-1)$ si intende che per ogni $p \in M$, il minimo autovalore dell'operatore Ric_p è maggiore o uguale a $k(n-1)$, equivalentemente, per ogni $p \in M$ e $v \in T_pM$ si ha $\mathrm{Ric}_p(v, v) \geq k(n-1)g_p(v, v)$.

TEOREMA 3.3.1 (Teorema di Bonnet–Myers). *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana completa di dimensione* n*, con* $\mathrm{Ric} \geq k(n-1)$ *per un qualche numero reale* $k > 0$*. Allora il diametro di* M *è minore o uguale a* $\pi/\sqrt{k}$*.*

DIMOSTRAZIONE CON I CAMPI DI JACOBI.
Siano p e q due punti di M e sia $\sigma\colon [0, \ell] \to M$ una geodetica minimizzante da p a q parametrizzata per lunghezza d'arco, che esiste per la Proposizione 1.4.29, quindi $\ell = d(p, q)$. Allora, per il Corollario 1.7.3 (vedi la Sezione 1.7), si ha $I(Y, Y) \geq 0$ per ogni campo vettoriale Y lungo σ che sia puntualmente ortogonale a σ' e nullo agli estremi. Sia $e_1 = \sigma'(0)$ e siano $e_2, \dots, e_n \in T_pM$ dei vettori che completino e_1 ad una base ortonormale di T_pM. Denotiamo con E_i il campo parallelo lungo σ soddisfacente la condizione $E_i(0) = e_i$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ e osserviamo che $E_1(t) = \sigma'(t)$, poiché σ è una geodetica. Per ogni $i \in \{2, \dots, n\}$, definiamo il campo vettoriale Y_i lungo σ nel seguente modo

$$Y_i(t) = \sin\left(\frac{\pi t}{\ell}\right) E_i(t)$$

per ogni $t \in [0, \ell]$.
Per costruzione, ciascun Y_i è un campo vettoriale lungo σ, puntualmente ortogonale a σ' e nullo agli estremi, quindi $I(Y_i, Y_i) \geq 0$, inoltre

$$\begin{aligned} \nabla_t Y_i &= \frac{\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\pi t}{\ell}\right) E_i(t) \\ \nabla_t^2 Y_i &= -\frac{\pi^2}{\ell^2} \sin\left(\frac{\pi t}{\ell}\right) E_i(t) \end{aligned}$$

sfruttando che ciascun E_i è un campo parallelo lungo σ, segue

$$\begin{aligned} I(Y_i, Y_i) &= \int_0^\ell \left(\|\nabla_t Y_i\|^2_{g(\sigma(t))} - \mathrm{R}(Y_i, \sigma', \sigma', Y_i) \right) dt \\ &= -\int_0^\ell g\left(Y_i, \nabla_t^2 Y_i + \mathrm{R}(Y_i, \sigma')\sigma'\right) dt \\ &= -\int_0^\ell \left(-\frac{\pi^2}{\ell^2} \sin^2\left(\frac{\pi t}{\ell}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi t}{\ell}\right) \mathrm{R}(E_i, \sigma', \sigma', E_i) \right) dt. \end{aligned}$$

Essendo i campi $E_i(t)$ una base ortonormale di $T_{\sigma(t)}M$ con $E_1(t) = \sigma'(t)$ per ogni $t \in [0, \ell]$, abbiamo

$$\sum_{i=2}^n \mathrm{R}(E_i, \sigma', \sigma', E_i) = \sum_{i=1}^n \mathrm{R}(E_i, \sigma', \sigma', E_i) = \mathrm{Ric}(\sigma', \sigma') \geq k(n-1)\, g(\sigma', \sigma') = k(n-1).$$

Concludiamo allora

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{i=2}^{n} I(Y_i, Y_i) \\
&= \int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi t}{\ell}\right)\left(\frac{\pi^2(n-1)}{\ell^2} - \sum_{i=2}^{n} \mathrm{R}(E_i, \sigma', \sigma', E_i)\right) dt \\
&\leq \int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi t}{\ell}\right)\left(\frac{\pi^2(n-1)}{\ell^2} - k(n-1)\right) dt \\
&= (n-1)\left(\frac{\pi^2}{\ell^2} - k\right)\int_0^\ell \sin^2\left(\frac{\pi t}{\ell}\right) dt,
\end{aligned}$$

di conseguenza si deve avere $\pi^2/\ell^2 - k \geq 0$, da cui $d(p,q) = \ell \leq \pi/\sqrt{k}$. Avendo dunque provato che la distanza tra due qualsiasi punti di M è al più $\pi/\sqrt{k}$, segue che il diametro di M è minore o uguale a $\pi/\sqrt{k}$. $\square$

DIMOSTRAZIONE CON LE EQUAZIONI FONDAMENTALI.
Sia $p \in M$ e supponiamo per assurdo che esista $q \in M$ tale che $d(p,q) > \pi/\sqrt{k}$. Essendo (M,g) completa, esiste allora una geodetica minimizzante che congiunge p e q, quindi esistono $\xi_0 \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ e $t_0 \in \big(\pi/\sqrt{k}, c(\xi_0)\big]$ tali che $q = exp_p(t_0\xi_0)$. Considerando la funzione distanza da p e l'operatore shape S associato, per l'Osservazione 2.4.5 e la disuguaglianza (2.15), abbiamo che lungo la geodetica σ_{ξ_0}, vale

$$\mathrm{tr}(S)(r) \leq (n-1)\frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)}$$

per ogni $r \in \big(0, \min\big\{c(\xi_0), \pi/\sqrt{k}\,\big\}\big)$, notando che $\min\big\{c(\xi_0), \pi/\sqrt{k}\,\big\} = \pi/\sqrt{k}$, essendo $c(\xi_0) \geq t_0 > \pi/\sqrt{k}$. Poiché

$$\lim_{r \to \pi/\sqrt{k}} \frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)} = -\infty,$$

si ha

$$\lim_{r \to \pi/\sqrt{k}} \mathrm{tr}(S)(r) = -\infty.$$

Essendo $\sigma_{\xi_0}\big(\pi/\sqrt{k}\,\big)$ un punto dell'aperto $D_p \setminus \{p\}$ (si veda la Definizione 1.8.5 e la Proposizione 1.8.8), la funzione distanza da p è localmente regolare, dunque lo stesso vale anche per l'operatore shape S e per la sua traccia $\mathrm{tr}(S)(r)$ lungo la geodetica $r \mapsto \sigma_{\xi_0}(r)$ nell'intorno di $r = \pi/\sqrt{k}$, il che è in contraddizione con il precedente limite. Segue che per ogni coppia di punti p e q in M si ha

$$d(p,q) \leq \pi/\sqrt{k}$$

da cui la tesi, come sopra. $\square$

COROLLARIO 3.3.2. *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana completa di dimensione* n*, con* $\mathrm{Ric} \geq k(n-1)$ *per un qualche numero reale* $k > 0$*. Allora* M *è compatta e il suo gruppo fondamentale è finito.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di Bonnet–Myers 3.3.1 la varietà (M, g) ha diametro limitato (e è chiusa), quindi per il teorema di Hopf–Rinow 1.4.28 è compatta. Sia $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \to (M, g)$ il rivestimento universale riemanniano di M. Essendo M completa, per il Lemma 3.2.1, anche $\widetilde{M}$ è completa. Poiché il tensore di curvatura è invariante per isometrie locali, la curvatura di Ricci di $\widetilde{M}$ è limitata inferiormente allo stesso modo di M. Applicando nuovamente il teorema di Bonnet–Myers 3.3.1 otteniamo allora che anche $\widetilde{M}$ è compatta. Di conseguenza il numero dei fogli del rivestimento è finito e da questo segue che il gruppo fondamentale di M è finito. □

LEMMA 3.3.3 (Lemma di Synge). *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana completa con curvatura sezionale* $\mathrm{Sec}(\pi) \geq k > 0$*, per ogni* 2*–piano* $\pi \subseteq T_pM$ *e ogni* $p \in M$*. Allora* M *è compatta con diametro minore o uguale a* $\pi/\sqrt{k}$ *e il suo gruppo fondamentale è finito.*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo che $\mathrm{Ric} \geq k(n-1)$. Sia $p \in M$, allora per ogni $v \in T_pM$ non nullo si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}(v, v) &= \sum_{i=2}^{n} \mathrm{R}(e_i, v, v, e_i) \\
&= g(v, v) \sum_{i=2}^{n} \mathrm{R}\left(e_i, \frac{v}{\|v\|}, \frac{v}{\|v\|}, e_i\right) \\
&= g(v, v) \sum_{i=2}^{n} \mathrm{Sec}\left(\frac{v}{\|v\|}, e_i\right) \\
&\geq k(n-1) g(v, v)
\end{aligned}$$

dove $v/\|v\|, e_2, \dots, e_{n-1}$ formano una base ortonormale di T_pM.
L'asserto segue allora dal teorema di Bonnet–Myers 3.3.1 e dal Corollario 3.3.2.
□

DIMOSTRAZIONE CON LE EQUAZIONI FONDAMENTALI.
Seguiamo la stessa linea dimostrativa del teorema di Bonnet–Myers con le equazioni fondamentali, ragionando sull'autovalore massimo della matrice $(S_i^j)_{i,j \in \{1,\dots,n-1\}}$ (si veda la Sezione 2.3) invece che sulla traccia $\mathrm{tr}(S)$ dell'operatore shape.
Sia $p \in M$ e supponiamo per assurdo che esista $q \in M$ tale che $d(p, q) >$

$\pi/\sqrt{k}$. Essendo (M, g) completa, esiste allora una geodetica minimizzante che congiunge p e q, quindi esistono $\xi_0 \in \mathbb{S}^{n-1}_p$ e $t_0 \in \big(\pi/\sqrt{k}, c(\xi_0)\big]$ tali che $q = exp_p(t_0\xi_0)$. Considerando la funzione distanza da p e la matrice $(S^j_i)_{i,j\in\{1,\dots,n-1\}}$ dell'operatore shape S associato, abbiamo visto nella Sezione 2.3 che vale la disuguaglianza differenziale (2.8), per l'autovalore massimo $\mu_{\max}$ della matrice $(S^j_i)_{i,j\in\{1,\dots,n-1\}}$, che è l'autovalore massimo dell'Hessiano della funzione distanza $d(p, \cdot)$,

$$\partial_r\mu_{\max}(r) \leq -\mu^2_{\max}(r) - \mathrm{MinSec},$$

per quasi ogni $r \in (0, t_0]$ (la funzione $\mu_{\max}$ è assolutamente continua) quindi, nelle nostre ipotesi

$$\partial_r\mu_{\max}(r) + \mu^2_{\max}(r) \leq -k.$$

In coordinate normali, abbiamo che l'hessiano della funzione distanza da p, per l'equazione (2.10), è dato da

$$\mathrm{Hess}\, r(\partial_i, \partial_j) = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x^i x^j}{r^3} - \Gamma^k_{ij}\frac{x^k}{r}.$$

Di conseguenza, sapendo che $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$, possiamo scrivere

$$\mathrm{Hess}\, r(\partial_i, \partial_j) = \frac{\delta_{ij}}{r} - \frac{x^i x^j}{r^3} + o(1)_{ij},$$

per $x \to 0$, quindi segue che applicando l'hessiano della funzione distanza a un campo $v = v^i$ perpendicolare a ∂_r, cioè ortogonale a x in queste coordinate, concludiamo che

$$\mathrm{Hess}\, r(v, v) = \frac{g(v, v)}{r} + o(1)g(v, v),$$

per $r \to 0^+$. In particolare, se $v = v(r)$ è il campo unitario lungo la geodetica $r \mapsto \sigma_{\xi_0}(r)$ che per ogni r è l'autovettore della matrice $(S^j_i)_{i,j\in\{1,\dots,n-1\}}$ relativo all'autovalore $\mu_{\max}$ si ha

$$\mu_{\max}(r) - \frac{1}{r} = \mathrm{Hess}\, r(v(r), v(r)) - \frac{1}{r} = o(1)$$

per $r \to 0^+$.

Applicando allora il principio di confronto di Riccati, Proposizione 2.4.1 (che si dimostra facilmente valere anche se le funzioni sono assolutamente continue e la disuguaglianza nelle ipotesi dell'enunciato vale soltanto quasi ovunque), concludiamo che

$$\mu_{\max}(r) \leq \frac{sn'_k(r)}{sn_k(r)}$$

per ogni $0 < r < \pi/\sqrt{k}$, essendo $\pi/\sqrt{k} < t_0$.
Di conseguenza,

$$\lim_{r \to \pi/\sqrt{k}} \mu_{\max}(r) = -\infty,$$

ma ciò è in contraddizione col fatto che il punto $\sigma_{\xi_0}(\pi/\sqrt{k})$ appartiene all'aperto $D_p \setminus \{p\}$ (si veda la Definizione 1.8.5 e la Proposizione 1.8.8), dunque la funzione distanza da p è localmente regolare in un suo intorno e lo stesso deve allora valere anche per l'operatore shape S e per la matrice $(S_i^j)_{i,j \in \{1,\dots,n-1\}}$, dunque per la funzione $\mu_{\max}$.
Avendo ottenuto una contraddizione, segue che per ogni coppia di punti p e q in M si ha

$$d(p,q) \leq \pi/\sqrt{k}.$$

La parte finale dell'enunciato si ottiene come nel Corollario 3.3.2. □

NOTA STORICA. Nel 1855 Bonnet dimostra la stima sul diametro per le superfici (2–dimensionali) nel lemma di Synge, più precisamente dimostra che ogni curva di lunghezza maggiore di $\pi/\sqrt{k}$, dove k è la curvatura gaussiana della superficie, non può essere minimizzante. Tale stima viene estesa da Synge a ogni dimensione nel 1926, come applicazione della formula di variazione seconda. Nel 1931 Hopf e Rinow, per le superfici e Myers nel 1932, in ogni dimensione, osservano che assumendo la completezza nel lemma di Synge si ha la compattezza della varietà e dunque la conclusione di finitezza del gruppo fondamentale. Infine, Myers nel 1941 dimostra il Teorema 3.3.1 e il Corollario 3.3.2, assumendo la positività soltanto del tensore di Ricci invece che della curvatura sezionale.

3.4. Il teorema massimale di Cheng

Sia (M,g) una varietà riemanniana completa di dimensione n e supponiamo che $\mathrm{Ric} \geq k(n-1)$, per un qualche numero reale $k > 0$. Allora per il teorema di Bonnet–Myers 3.3.1 sappiamo che M è compatta, con diametro minore o uguale a $\pi/\sqrt{k}$. Il teorema di Cheng 3.4.8 ci dice che se il diametro di M è uguale al valore massimale $\pi/\sqrt{k}$ allora la varietà è *isometrica* alla sfera di raggio $1/\sqrt{k}$.

Come nella Sezione 1.10 (a cui faremo riferimento) denotiamo con ψ la proiezione stereografica di $\mathbb{S}^{n-1}$ rispetto ad un suo punto N e con $\widetilde{c}$ l'applicazione continua $\widetilde{c} = c \circ \chi^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}} \circ \psi^{-1}$, dove χ una isometria lineare di T_pM con $\mathbb{R}^n$ e la mappa $c : \mathbb{S}_p^{n-1} \to (0, +\infty]$ è data dalla Definizione 1.8.1.

Poniamo

$$W = \big\{(t, \theta) \in \mathbb{R}^n \ : \ \theta \in \mathbb{R}^{n-1} \ \text{ e } \ 0 < t < \widetilde{c}(\theta)\big\}$$

e consideriamo delle coordinate polari centrate in p come nella Sezione 1.9. Se $\phi = exp_p \circ j$ è l'applicazione definita dalla composizione,

$$(r, \xi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}_p \xrightarrow{\ j\ } r\xi \in T_pM \setminus \{O_p\} \xrightarrow{\ exp_p\ } exp_p(r\xi) \in M,$$

essendo $\varphi = \phi \circ (\mathrm{Id}, \chi^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}} \circ \psi^{-1})$ un diffeomorfismo tra l'aperto $W \subseteq \mathbb{R}^n$ e l'aperto $D_p \setminus \{\sigma_{\xi_0}(t)\}_{t \in [0, c(\xi_0))} \subseteq M$, con $\xi_0 = \chi^{-1}(N)$, allora tale mappa è una parametrizzazione locale di M.

Per il teorema di Bonnet–Myers 3.3.1, abbiamo

$$W \subseteq W_k = \Big\{(t, \theta) \in \mathbb{R}^n \ : \ \theta \in \mathbb{R}^{n-1} \ \text{ e } \ 0 < t < \pi/\sqrt{k}\Big\}$$

e analoghe applicazioni relative alla sfera di raggio $1/\sqrt{k}$, cioè la varietà a curvatura sezionale costante M^n_k, rispetto a un qualsiasi suo punto $\widehat{p}$. In particolare, un analogo diffeomorfismo $\widehat{\varphi} = \widehat{\phi} \circ (\mathrm{Id}, \widehat{\chi}^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}} \circ \psi^{-1})$ tra l'aperto $W_k \subseteq \mathbb{R}^n$ e l'aperto di M^n_k dato dalla sfera senza $\widehat{p}$ e il suo punto antipodale.

PROPOSIZIONE 3.4.1. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa di dimensione n, con $\mathrm{Ric} \geq k(n-1)$ per un qualche numero reale $k > 0$. Allora*

$$\frac{\partial_r G}{G}(r, \theta) \leq (n-1)\frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)},$$

per ogni $(r, \theta) \in W$, dove $G = \sqrt{\det g^{\varphi^{-1}}_{ij}} \circ \varphi$ è la densità di volume canonica (nelle coordinate date da φ) associata alla metrica g.
In particolare,

$$G(r, \theta) \leq G_k(r, \theta)$$

per ogni $(r, \theta) \in W$, dove G_k è l'analoga densità di volume associata alla metrica g_k dello spazio modello M^n_k.

DIMOSTRAZIONE. Sia $(r_0, \theta_0) \in W$. Allora, per la definizione di W, abbiamo che $\theta_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$ e $r_0 \in (0, \widetilde{c}(\theta))$. Poiché $\widetilde{c}$ è continua allora esiste un intorno aperto U di θ_0 in $\mathbb{R}^{n-1}$ tale che per ogni $\eta \in U$ risulta che $\widetilde{c}(\eta) > r_0$. Sia V un intorno aperto a chiusura compatta di θ_0, contenuto in U. Poiché $\widetilde{c}$ è continua sul compatto $\overline{V}$, assume minimo m che è maggiore di r_0. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $r_0 < \varepsilon < m$. Allora $(r_0, \theta_0) \in (0, \varepsilon) \times V$ e $\phi \circ (\mathrm{Id}, \chi^{-1} \circ \psi^{-1})|_{(0,\varepsilon) \times V}$ è una parametrizzazione locale di M che fornisce delle coordinate polari centrate in p. Proviamo ora sia con i campi di Jacobi che mediante le equazioni fondamentali che

$$\frac{\partial_r G}{G}(r,\theta) \le (n-1)\frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)}, \tag{3.2}$$

poi mostreremo che $G(r,\theta) \le G_k(r,\theta)$ per ogni $r \in (0,\varepsilon)$ e per ogni $\theta \in V$. Per l'arbitrarietà di (r_0,θ_0) in W, avremo dunque la tesi del teorema.

DIMOSTRAZIONE CON I CAMPI DI JACOBI.
Fissiamo $\theta \in V$ e poniamo $\xi = \chi^{-1}|_{\mathbb{S}^{n-1}} \circ \psi^{-1}(\theta) \in \mathbb{S}_p^{n-1}$. Sia $\mathcal{B} = \{\xi, e_2, \dots, e_n\}$, per ogni $i \in \{2,\dots,n\}$, una base ortonormale di T_pM e denotiamo con E_i il campo parallelo lungo σ_ξ soddisfacente la condizione $E_i(0) = e_i$. Fissato $r \in (0,\varepsilon)$, per ogni $i \in \{2,\dots,n\}$ sia J_i^r il campo di Jacobi lungo σ_ξ, puntualmente ortogonale a σ_ξ' tale che $J_i^r(0) = 0$ e $J_i^r(r) = E_i(r)$. Tale campo di Jacobi è dato da

$$J_i^r(t) = d(exp_p)_{t\xi}(tv),$$

dove v è l'unico elemento di T_pM (identificando canonicamente $T_{r\xi}T_pM$ con T_pM) tale che

$$d(exp_p)_{r\xi}(rv) = E_i(r).$$

Poniamo

$$f(t) = \frac{\sqrt{\det g(J_i^r(t), J_j^r(t))}}{\sqrt{\det g(\nabla_0 J_i^r, \nabla_0 J_j^r)}}.$$

(1) *Vale*

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = \sum_{i=2}^n I(J_i^r, J_i^r),$$

per ogni $r \in (0,\varepsilon)$.
Abbiamo infatti

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\mathrm{tr}\left[\Big(g(J_i^r(t), J_j^r(t)\Big)^{-1}\Big(g(\nabla_t J_i^r, J_j^r(t)) + g(J_i^r, \nabla_t J_j^r)\Big)\right]}{2\det g(J_i^r(t), J_j^r(t))}.$$

In particolare, essendo la matrice $g(J_i^r(r), J_j^r(r))$ uguale all'identità, segue

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = \sum_{i=2}^n g(\nabla_r J_i^r, J_i^r(r)).$$

Notiamo ora che se Y è un campo di Jacobi lungo σ_ξ, si ha

$$I(Y,Y) = \int_0^r \big(\|\nabla_t Y\|^2 - \mathrm{R}(Y(t), \sigma_\xi'(t), \sigma_\xi'(t), Y(t)\big)\, dt = g(Y(t), \nabla_t Y)\big|_{t=0}^{t=r},$$

dunque, ponendo $Y(t) = J_i^r(t)$, che è nullo per $t = 0$, otteniamo

$$I(J_i^r, J_i^r) = g(\nabla_r J_i^r, J_i^r(r)),$$

da cui segue la formula che volevamo mostrare.

(2) *Se $\sigma : [a,b] \to M$ è una geodetica minimizzante, Y è un campo di Jacobi lungo σ e X è un campo vettoriale lungo σ, tali che X, Y sono puntualmente ortogonali a σ' e $X(a) = Y(a)$, $X(b) = Y(b)$, allora*

$$I(X,X) \geq I(Y,Y).$$

Poiché $(X - Y)$ è un campo vettoriale lungo σ, puntualmente ortogonale a σ' e nullo agli estremi, si ha

$$I(X-Y, X-Y) \geq 0.$$

Allora, la disuguaglianza sopra segue da

$$\begin{aligned}
I(X-Y,X-Y) &= \int_0^r \|\nabla_t(X-Y)\|^2 - \mathrm{R}(X-Y,\sigma',\sigma',X-Y)\,dt \\
&= \int_a^b \|\nabla_t(X)\|^2 - \mathrm{R}(X,\sigma',\sigma',X)\,dt \\
&\quad -2\int_a^b g(\nabla_t(X),\nabla_t(Y)) - \mathrm{R}(Y,\sigma',\sigma',X) \\
&\quad +\int_a^b \|\nabla_t(Y)\|^2 - \mathrm{R}(Y,\sigma',\sigma',Y)\,dt \\
&= I(X,X) - 2g(X,\nabla_t(Y))\big|_{t=a}^{t=b} + g(Y,\nabla_t(Y))\big|_{t=a}^{t=b} \\
&= I(X,X) - g(Y,\nabla_t(Y))\big|_{t=a}^{t=b} \\
&= I(X,X) - I(Y,Y),
\end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che Y è un campo di Jacobi e l'ipotesi che $Y(a) = X(a)$, $Y(b) = X(b)$.

(3) *Per ogni $r \in (0,\varepsilon)$ si ha*

$$\frac{f'(r)}{f(r)} \leq (n-1)\frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)},$$

per ogni $r \in (0,\varepsilon)$.

Per ogni $i \in \{2,\dots,n\}$ denotiamo con X_i^r, il campo vettoriale lungo σ_ξ, puntualmente ortogonale a σ', dato da

$$X_i^r(t) = \frac{sn_k(t)}{sn_k(r)}E_i(t).$$

Per i punti precedenti abbiamo

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = \sum_{i=2}^n I(J_i^r, J_i^r) \leq \sum_{i=2}^n I(X_i^r, X_i^r),$$

valendo poi,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{n} I(X_i^r, X_i^r) &= \sum_{i=2}^{n} \int_0^r \big(\|\nabla_t X_i^r\|^2 - \mathrm{R}(X_i^r(t), \sigma_\xi'(t), \sigma_\xi'(t), X_i^r(t)\big)\, dt \\
&= \int_0^r (n-1)\Big(\frac{sn_k'(t)}{sn_k(r)}\Big)^2 - \sum_{i=2}^{n} \mathrm{R}(X_i^r(t), \sigma_\xi'(t), \sigma_\xi'(t), X_i^r(t))\, dt \\
&= \int_0^r (n-1)\Big(\frac{sn_k'(t)}{sn_k(r)}\Big)^2 - \Big(\frac{sn_k(t)}{sn_k(r)}\Big)^2 \mathrm{Ric}(\sigma_\xi'(t), \sigma_\xi'(t))\, dt \\
&\leq \int_0^r (n-1)\Big(\frac{\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}t)}{\sin(\sqrt{k}r)}\Big)^2 - k(n-1)\Big(\frac{\sin(\sqrt{k}t)}{\sin(\sqrt{k}r)}\Big)^2 dt \\
&= \int_0^r k(n-1)\Big[\frac{\cos^2(\sqrt{k}t) - \sin^2(\sqrt{k}t)}{\sin^2(\sqrt{k}r)}\Big]\, dt \\
&= k(n-1)\frac{\big[\sin(2\sqrt{k}t\big]\big|_{t=0}^{t=r}}{2\sqrt{k}\sin^2(\sqrt{k}r)} \\
&= (n-1)\sqrt{k}\cot(\sqrt{k}r) \\
&= (n-1)\frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)},
\end{aligned}$$

concludiamo

$$\frac{f'(r)}{f(r)} \leq (n-1)\frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)},$$

per ogni $r \in (0, \varepsilon)$.

Per ogni $\alpha \in \{1, \ldots, n-1\}$ definiamo

$$Y_\alpha(r) = \partial_{\theta^\alpha}|_{exp_p(r\xi)},$$

si ha allora

$$Y_\alpha(r) = d(exp_p)_{r\xi}\Big(\sum_{i=1}^{n} r\frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta)e_i\Big),$$

per quanto mostrato nella Sezione 1.9.

Ciascun Y_α è un campo di Jacobi lungo σ_ξ, puntualmente ortogonale a σ_ξ', tale che

$$Y_\alpha(0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \nabla_0 Y_\alpha = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta)e_i.$$

Poiché $f(r)$ è indipendente dalla particolare scelta dei campi di Jacobi $J_2^r, \ldots, J_n^r$ lungo σ_ξ, segue che

$$f(r) = \frac{\sqrt{\det g(Y_\alpha(r), Y_\beta(r))}}{\sqrt{\det g(\nabla_0 Y_\alpha, \nabla_0 Y_\beta)}} = \frac{G(r)}{\sqrt{\det g(\nabla_0 Y_\alpha, \nabla_0 Y_\beta)}},$$

dunque

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = \frac{\partial_r G}{G}(r, \theta),$$

per ogni $r \in (0, \varepsilon)$.
Concludiamo quindi che, per ogni θ fissato, si ha

$$\frac{\partial_r G}{G}(r, \theta) \leq (n-1)\frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)},$$

per ogni $r \in (0, \varepsilon)$. $\square$

DIMOSTRAZIONE CON LE EQUAZIONI FONDAMENTALI.
Nelle ipotesi della proposizione, abbiamo ottenuto la disuguaglianza (2.15)

$$\mathrm{tr}(S)(r) \leq (n-1)\frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)},$$

mentre nella Proposizione 2.3.2 abbiamo provato che

$$\partial_r \log G(r) = \mathrm{tr}(S)(r),$$

segue dunque

$$\frac{\partial_r G}{G}(r, \theta) \leq (n-1)\frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)},$$

per ogni $r \in (0, \varepsilon)$ e per ogni $\theta \in V$. $\square$

Per completare la dimostrazione rimane da mostrare che

$$G(r, \theta) \leq G_k(r, \theta)$$

per ogni $r \in (0, \varepsilon)$ e per ogni $\theta \in V$.
Fissiamo $\theta \in V$. Per la definizione di G abbiamo

$$\frac{G(t, \theta)}{sn_k^{n-1}(t)} = \sqrt{\det\left[\frac{g_{\alpha\beta}(t, \theta)}{sn_k^2(t)}\right]_{\alpha\beta}},$$

dunque per il limite (3.1),

$$\lim_{t \to 0^+} \sqrt{\det\left[\frac{g_{\alpha\beta}(t, \theta)}{sn_k^2(t)}\right]_{\alpha\beta}} = \sqrt{\det\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta)\right]_{\alpha\beta}}.$$

Integrando la disuguaglianza (3.2) sull'intervallo $(r_0, r) \subseteq (0, \varepsilon)$, otteniamo allora la tesi,

$$G(r, \theta) \leq sn_k^{n-1}(r)\sqrt{\det\left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta)\frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta)\right]_{\alpha\beta}} = G_k(r, \theta).$$

$\square$

Per comodità di notazione, nel seguito indichiamo con $B(p, r)$ la palla geodetica $B_r(p)$ di raggio r e centro p in una varietà.

PROPOSIZIONE 3.4.2. *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana completa di dimensione* n*, con* $\mathrm{Ric} \geq k(n-1)$ *per un qualche numero reale* $k > 0$*. Allora per ogni* $p \in M$ *e per ogni* $r \in (0, \pi/\sqrt{k}\,]$*, vale la seguente disuguaglianza*

$$\mu(B(p,r)) \leq \mu_{M_k^n}(B(\widehat{p}, r)).$$

In particolare, il volume di (M, g) *è minore o uguale del volume della sfera di raggio* $1/\sqrt{k}$*.*

DIMOSTRAZIONE. Ragionando come nella Sezione 1.10 nell'ottenere la formula (1.10) e per la Proposizione 3.4.1, abbiamo

$$\begin{aligned} \mu(B(p,r)) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\theta^1 \dots d\theta^{n-1} \int_0^{\min\{r, \widetilde{c}(\theta)\}} G(t, \theta)\, dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\theta^1 \dots d\theta^{n-1} \int_0^{\min\{r, \widetilde{c}(\theta)\}} G_k(t, \theta)\, dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^{n-1}} d\theta^1 \dots d\theta^{n-1} \int_0^{r} G_k(t, \theta)\, dt \\ &= \mu_{M_k^n}(B(\widehat{p}, r)) \end{aligned}$$

Poiché $M = B(p, \pi/\sqrt{k})$, da ciò segue l'ultima parte dell'asserto. $\square$

PROPOSIZIONE 3.4.3. *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana completa di dimensione* n*, con* $\mathrm{Ric} \geq k(n-1)$ *per un qualche numero reale* $k > 0$*. Allora si ha che per ogni* $\theta \in \mathbb{R}^{n-1}$*, la funzione*

$$\frac{G(r, \theta)}{sn_k^{n-1}(r)}$$

è non crescente in r *nell'intervallo* $(0, \widetilde{c}(\theta))$*.*

DIMOSTRAZIONE. Derivando la funzione, otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{G}{sn_k^{n-1}}\Big) &= \frac{sn_k^{n-1}\partial_r(G) - (n-1)\, G\ \ sn_k^{n-2}\ sn_k'}{sn_k^{2(n-1)}} \\ &= \frac{\partial_r(G)}{sn_k^{n-1}} - \frac{(n-1)G}{sn_k^{n-1}}\ \frac{sn_k'}{sn_k} \\ &= \frac{G}{sn_k^{n-1}}\Big(\frac{\partial_r(G)}{G} - (n-1)\frac{sn_k'}{sn_k}\Big) \\ &\leq 0., \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dalla Proposizione 3.4.1, da cui la tesi. $\square$

PROPOSIZIONE 3.4.4. *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana completa di dimensione* n*, con* $\mathrm{Ric} \geq k(n-1)$ *per un qualche numero reale* $k > 0$*. Allora per ogni* $p \in M$ *e per ogni* $r \in (0, \pi/\sqrt{k})$*, posto*

$$A(p,r) = \int_{\{\theta \in \mathbb{R}^{n-1} \,:\, r < \widetilde{c}(\theta)\}} G(r,\theta)\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}$$

e $A_k(r)$ *l'analoga funzione per la varietà* M_k^n*, si ha che il rapporto*

$$\frac{A(p,r)}{A_k(r)}$$

è non crescente in r *nell'intervallo* $(0, \pi/\sqrt{k})$*.*

DIMOSTRAZIONE. Siano r, R tali che $0 < r < R < \pi/\sqrt{k}$. Abbiamo,

$$\begin{aligned}
\frac{A(p,r)}{A_k(r)} &= \frac{\int_{\{\theta \in \mathbb{R}^{n-1} \,:\, r < \widetilde{c}(\theta)\}} G(r,\theta)\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_k(r,\theta)\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}} \\
&= \frac{\int_{\{\theta \in \mathbb{R}^{n-1} \,:\, r < \widetilde{c}(\theta)\}} G(r,\theta)\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}}{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} sn_k^{n-1}(r) \sqrt{\det \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta) \right]_{\alpha\beta}}\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}} \\
&= \frac{\int_{\{\theta \in \mathbb{R}^{n-1} \,:\, r < \widetilde{c}(\theta)\}} G(r,\theta)\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}}{sn_k^{n-1}(r) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sqrt{\det \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta) \right]_{\alpha\beta}}\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Posto

$$c_{n-1} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sqrt{\det \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\alpha}(\theta) \frac{\partial \xi^i}{\partial \theta^\beta}(\theta) \right]_{\alpha\beta}}\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1},$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{A(p,r)}{A_k(r)} &= \frac{\int_{\{\theta \in \mathbb{R}^{n-1} \,:\, r < \widetilde{c}(\theta)\}} G(r,\theta)\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}}{c_{n-1} sn_k^{n-1}(r)} \\
&= c_{n-1}^{-1} \int_{\{\theta \in \mathbb{R}^{n-1} \,:\, r < \widetilde{c}(\theta)\}} \frac{G(r,\theta)}{sn_k^{n-1}(r)}\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1}.
\end{aligned}$$

Poiché

$$\left\{\theta \in \mathbb{R}^{n-1} \,:\, R < \widetilde{c}(\theta)\right\} \subseteq \left\{\theta \in \mathbb{R}^{n-1} \,:\, r < \widetilde{c}(\theta)\right\},$$

per la Proposizione 3.4.3, segue che

$$\begin{aligned}
\frac{A(p,r)}{A_k(r)} &= c_{n-1}^{-1}\int_{\{\theta\in\mathbb{R}^{n-1}\,:\,r<\widetilde{c}(\theta)\}}\frac{G(r,\theta)}{sn_k^{n-1}(r)}\,d\theta^1\dots d\theta^{n-1}\\
&\geq c_{n-1}^{-1}\int_{\{\theta\in\mathbb{R}^{n-1}\,:\,R<\widetilde{c}(\theta)\}}\frac{G(r,\theta)}{sn_k^{n-1}(r)}\,d\theta^1\dots d\theta^{n-1}\\
&\geq c_{n-1}^{-1}\int_{\{\theta\in\mathbb{R}^{n-1}\,:\,R<\widetilde{c}(\theta)\}}\frac{G(R,\theta)}{sn_k^{n-1}(R)}\,d\theta^1\dots d\theta^{n-1}\\
&= \frac{A(p,R)}{A_k(R)},
\end{aligned}$$

da cui la tesi. □

LEMMA 3.4.5. *Siano* $f,g:(0,a)\to\mathbb{R}$, *con* $f\geq 0$ *e* $g>0$, *due funzioni integrabili, tali che il loro rapporto* f/g *sia una funzione non crescente. Allora la funzione*

$$r\longrightarrow\frac{\int_0^r f(t)\,dt}{\int_0^r g(t)\,dt}$$

è non crescente nell'intervallo $(0,a)$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo $r<R$, si ha

$$\int_0^r f\,dt\int_0^R g\,dt=\int_0^r f\,dt\int_0^r g\,dt+\int_0^r f\,dt\int_r^R g\,dt$$

e

$$\int_0^R f\,dt\int_0^r g\,dt=\int_0^r f\,dt\int_0^r g\,dt+\int_r^R f\,dt\int_0^r g\,dt,$$

la tesi segue allora dalla disuguaglianza

$$\int_0^R f\,dt\int_0^r g\,dt\leq\int_0^r f\,dt\int_0^R g\,dt.$$

Per ottenerla, basta mostrare che

$$\int_r^R f\,dt\int_0^r g\,dt\leq\int_0^r f\,dt\int_r^R g\,dt.$$

Posto $f=gh$, per ipotesi h è non crescente, quindi

$$\begin{aligned}
\int_r^R f\,dt\int_0^r g\,dt &= \int_r^R gh\,dt\int_0^r g\,dt\\
&\leq h(r)\int_r^R g\,dt\int_0^r g\,dt\\
&\leq \int_r^R g\,dt\int_0^r hg\,dt\\
&= \int_r^R g\,dt\int_0^r f\,dt,
\end{aligned}$$

da cui la tesi. □

PROPOSIZIONE 3.4.6. *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana completa di dimensione* n*, con* $\mathrm{Ric} \geq k(n-1)$ *per un qualche numero reale* $k > 0$*. Allora il rapporto*

$$\frac{\mu(B(p,r))}{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},r))}$$

è non crescente in r *nell'intervallo* $(0, \pi/\sqrt{k}]$*.*

DIMOSTRAZIONE. Ragionando come nella Sezione 1.10 nell'ottenere la formula (1.10), si ha

$$\begin{aligned}
\mu(B(p,r)) &= \int_0^r dt \int_{\{\theta\in\mathbb{R}^{n-1}:\widetilde{c}(\theta)>t\}} G(t,\theta)\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1} = \int_0^r A(p,t)\, dt \\
\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},r)) &= \int_0^r dt \int_{\mathbb{R}^{n-1}} G_k(t,\theta)\, d\theta^1 \dots d\theta^{n-1} = \int_0^r A_k(t)\, dt.
\end{aligned}$$

Segue la non crescenza in $(0, \pi/\sqrt{k})$ applicando il Lemma 3.4.5 alle funzioni $f(r) = A(p,r)$ e $g(r) = A_k(r)$, per la Proposizione 3.4.4.
Se $r, R \in (0, \pi/\sqrt{k})$ sono tali che $r < R$ allora

$$\frac{\mu(B(p,r))}{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},r))} \geq \frac{\mu(B(p,R))}{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},R))}.$$

Passando al limite per $R \to \pi/\sqrt{k}$ abbiamo anche che

$$\frac{\mu(B(p,r))}{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},r))} \geq \frac{\mu(B(p,\pi/\sqrt{k}))}{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},\pi/\sqrt{k}))}.$$

□

LEMMA 3.4.7. *Siano* r_1, r_2 *dei numeri reali positivi tali che* $r_1 + r_2 = \pi$*. Allora si ha*

$$\int_0^{r_1} \sin^{n-1} t\, dt + \int_0^{r_2} \sin^{n-1} t\, dt = \int_0^{\pi} \sin^{n-1} t\, dt,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$*.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo $\sin(\pi - s) = \sin s$, per ogni $s \in \mathbb{R}$, col cambio di variabile $s = \pi - t$ si ha

$$\int_0^{r_2} \sin^{n-1} t\, dt = -\int_{\pi}^{\pi-r_2} \sin^{n-1}(\pi - s)\, ds = \int_{\pi-r_2}^{\pi} \sin^{n-1} s\, ds = \int_{r_1}^{\pi} \sin^{n-1} t\, dt.$$

La tesi segue quindi dall'additività dell'integrale. □

TEOREMA 3.4.8 (Teorema massimale di Cheng). *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana completa di dimensione* n*, con* $\mathrm{Ric} \geq k(n-1)$ *per un qualche numero reale* $k > 0$*. Se il diametro di* M *è uguale a* $\pi/\sqrt{k}$*, allora* M *è isometrica alla sfera* M_k^n *di raggio* $1/\sqrt{k}$*.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 3.3.1, la varietà M è compatta e quindi esistono due punti $p, q \in M$ tali che $d(p, q) = \pi/\sqrt{k}$, cioè il diametro è realizzato. Definiamo le due funzioni distanza $r(x) = d(x, p)$ e $\widetilde{r}(x) = d(x, q)$ per ogni $x \in M$. Proviamo che:

(1) Si ha $r(x) + \widetilde{r}(x) = \pi/\sqrt{k}$ per ogni $x \in M$.
(2) Le due funzioni $r, \widetilde{r}$ sono regolari su $M \setminus \{p, q\}$.
(3) Vale $\mathrm{Hess}\, r = \frac{sn_k'}{sn_k} g$ per i campi vettoriali definiti su $M \setminus \{p, q\}$ puntualmente ortogonali a ∂_r.
(4) La varietà (M, g) è isometrica a M_k^n.

Dimostrazione del punto (1).
L'uguaglianza è ovvia per $x = p, q$, supponiamo dunque che $x \in M \setminus \{p, q\}$. Per la disuguaglianza triangolare vale

$$\pi/\sqrt{k} = d(p, q) \leq d(x, p) + d(x, q)$$

Se per assurdo $d(x, p) + d(x, q) > \pi/\sqrt{k}$, allora esiste $\widetilde{\varepsilon} > 0$ tale che

$$d(x, p) + d(x, q) = 2\widetilde{\varepsilon} + \pi/\sqrt{k}$$

Se $d(x, p) = d(x, q) = \widetilde{\varepsilon} + \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$, poniamo $r_1 = r_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ e scegliamo ε in modo tale che $0 < \varepsilon < \min\{\widetilde{\varepsilon}, \pi/\sqrt{k}\}$.
Sia invece $d(x, p) \neq d(x, q)$, possiamo assumere che sia $d(x, q) > d(x, p)$, allora

$$2d(x, q) > d(x, q) + d(x, p) = 2\widetilde{\varepsilon} + \pi/\sqrt{k},$$

quindi

$$d(x, q) > \widetilde{\varepsilon} + \frac{\pi}{2\sqrt{k}} > \frac{\pi}{2\sqrt{k}}.$$

Si possono presentare soltanto i seguenti due casi:

$$d(x, q) > d(x, p) > \frac{\pi}{2\sqrt{k}} \quad \text{oppure} \quad d(x, q) > \frac{\pi}{2\sqrt{k}} \geq d(x, p)$$

Nel caso in cui $d(x, q) > d(x, p) > \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ esistono $\delta_2 > \delta_1 > 0$ tali che

$$d(x, p) = \frac{\pi}{2\sqrt{k}} + \delta_1 \quad \text{e} \quad d(x, q) = \frac{\pi}{2\sqrt{k}} + \delta_2,$$

poniamo allora in questo caso $r_1 = r_2 = \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ e scegliamo $0 < \varepsilon < \min\{\delta_1, \pi/\sqrt{k}\}$.
Nel caso in cui $d(x,q) > \frac{\pi}{2\sqrt{k}} \geq d(x,p)$ esistono $\delta_2 > 0$ e $\delta_1 \geq 0$ tali che

$$d(x,p) = \frac{\pi}{2\sqrt{k}} - \delta_1 \quad \text{e} \quad d(x,q) = \frac{\pi}{2\sqrt{k}} + \delta_2,$$

poniamo allora in questo caso $r_1 = \varepsilon = \frac{d(x,p)}{2}$ e $r_2 = \frac{d(x,p)}{2} + \delta_1$. Osserviamo inoltre che

$$r_2 \leq r_2 + \varepsilon = d(x,p) + \delta_1 = \frac{\pi}{2\sqrt{k}} \leq d(x,q).$$

In tutti questi casi valgono le seguenti condizioni:

$$r_1 + r_2 = \pi/\sqrt{k},$$
$$r_1 \leq d(x,p) \quad \text{e} \quad r_2 \leq d(x,q),$$
$$\varepsilon, r_1, r_2 < \pi/\sqrt{k}.$$

Dunque le palle metriche $B(p,r_1), B(q,r_2)$ e $B(x,\varepsilon)$ sono a due a due disgiunte, altrimenti si verificherebbe almeno una delle seguenti disuguaglianze

$$d(p,q) < r_1 + r_2,$$
$$d(p,x) < r_1 + \varepsilon,$$
$$d(q,x) < r_2 + \varepsilon,$$

che non sono ammesse per come abbiamo scelto r_1, r_2 e ε.
Per la Proposizione 3.4.6 abbiamo allora

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{\mu(B(p,r_1)) + \mu(B(q,r_2)) + \mu(B(x,\varepsilon))}{\mu(M)} \\ &\geq \frac{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},r_1))}{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},\pi/\sqrt{k}))} + \frac{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},r_2))}{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},\pi/\sqrt{k}))} + \frac{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},\varepsilon))}{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},\pi/\sqrt{k}))}. \end{aligned}$$

Poiché $G_k(r,\theta)$ si può esprimere come prodotto di una funzione f dipendente solo da θ con sn_k^{n-1} che dipende solo r, la misura di una qualunque palla metrica $B(\widehat{p},r)$ si riduce a meno di un fattore moltiplicativo al prodotto dei due integrali $\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(\theta)\,d\theta$ e $\int_0^r \sin^{n-1} t\,dt$. Per il Lemma 3.4.7 abbiamo allora

$$\begin{aligned} 1 &\geq \frac{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},r_1))}{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},\pi/\sqrt{k}))} + \frac{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},r_2))}{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},\pi/\sqrt{k}))} + \frac{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},\varepsilon))}{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},\pi/\sqrt{k}))} \\ &\geq 1 + \frac{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},\varepsilon))}{\mu_{M_k^n}(B(\widehat{p},\pi/\sqrt{k}))} \end{aligned}$$

che è una contraddizione, derivata dall'aver supposto che valesse la disuguaglianza $d(x,p) + d(x,q) > \pi/\sqrt{k}$. Quindi $d(x,p) + d(x,q) = \pi/\sqrt{k}$ per ogni $x \in M \setminus \{p,q\}$.

Dimostrazione del punto (2).
Se $x \in M \setminus \{p, q\}$, essendo M completa, esistono σ_1, σ_2 geodetiche minimizzanti che congiungono rispettivamente p con x e x con q. A meno di riparametrizzare σ_1, σ_2 possiamo definire la curva $\sigma : [0, d(x, p) + d(x, q)] \to M$ in modo tale che siano soddisfatte le seguenti condizioni:

$\sigma|_{[0,d(x,p)]} = \sigma_1$

$\sigma|_{[d(x,p),d(x,p)+d(x,q)]} = \sigma_2$

σ è parametrizzata in lunghezza d'arco.

Nel punto precedente abbiamo visto che

$$d(x, p) + d(x, q) = \pi/\sqrt{k} = d(p, q),$$

quindi σ è una curva regolare a tratti, parametrizzata in lunghezza d'arco e minimizzante tra p e q. Di conseguenza σ è una geodetica minimizzante, da cui $x \in D_p \setminus \{p\}$, quindi la funzioni distanza r è regolare in un suo intorno. Analogamente, $x \in D_q \setminus \{q\}$ dunque anche la funzione distanza $\widetilde{r}$ è regolare in un suo intorno, da cui la tesi.

Dimostrazione del punto (3).
Denoteremo con S l'operatore shape (rispettivamente $\widetilde{S}$) della funzione r (rispettivamente di $\widetilde{r}$). Poiché $r(x) + \widetilde{r}(x) = \pi/\sqrt{k}$, segue che

$$\partial_r = -\partial_{\widetilde{r}} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tr}(S) = -\operatorname{tr}(\widetilde{S})$$

in $M \setminus \{p, q\}$. Per la disuguaglianza (2.15) abbiamo allora

$$\begin{aligned}
(n-1)\frac{sn_k'(r(x))}{sn_k(r(x))} &\geq \operatorname{tr}(S)(x) \\
&= -\operatorname{tr}(\widetilde{S})(x) \\
&\geq -(n-1)\frac{sn_k'(\widetilde{r}(x))}{sn_k(\widetilde{r}(x))} \\
&= -(n-1)\frac{\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}\widetilde{r}(x))}{\sin(\sqrt{k}\widetilde{r}(x))} \\
&= -(n-1)\frac{\sqrt{k}\cos[\sqrt{k}(\pi/\sqrt{k}) - r(x))]}{\sin[\sqrt{k}(\pi/\sqrt{k}) - r(x))]} \\
&= (n-1)\frac{\sqrt{k}\cos(\sqrt{k}r(x))}{\sin(\sqrt{k}r(x))} \\
&= (n-1)\frac{sn_k'(r(x))}{sn_k(r(x))}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza, abbiamo

$$\operatorname{tr}(S)(x) = (n-1)\frac{sn_k'(r(x))}{sn_k(r(x))},$$

per ogni $x \in M \setminus \{p, q\}$, inoltre

$$\begin{aligned} -k(n-1) &= \partial_r \operatorname{tr}(S) + \frac{[\operatorname{tr}(S)]^2}{n-1} \\ &\leq \partial_r \operatorname{tr}(S) + \operatorname{tr}(S^2) \\ &= -\operatorname{Ric}(\partial_r, \partial_r) \\ &\leq -k(n-1), \end{aligned}$$

quindi tutte queste disuguaglianze sono uguaglianze e in particolare

$$\operatorname{tr}(S^2) = \frac{[\operatorname{tr}(S)]^2}{n-1}.$$

Per il Lemma 2.3.3, segue allora che, restringendoci allo spazio $(n-1)$–dimensionale ortogonale a ∂_r, tutti gli autovalori non nulli di S coincidono e sono uguali a $\frac{\operatorname{tr}(S)}{n-1}$. Dunque,

$$\operatorname{Hess} r(X, Y) = \frac{\operatorname{tr}(S)}{n-1} g(X, Y) = \frac{sn_k'(r)}{sn_k(r)} g(X, Y)$$

per ogni coppia X, Y di campi vettoriali su $M \setminus \{p, q\}$, puntualmente ortogonali a ∂_r.

Dimostrazione del punto (4).
Essendo $r, \widetilde{r}$ regolari su $M \setminus \{p, q\}$, osserviamo che

$$\operatorname{inj}(p) = \pi/\sqrt{k} = \operatorname{inj}(q).$$

Argomentando allora come nella parte finale della dimostrazione del Teorema 3.1.1 per mezzo delle equazioni fondamentali, concludiamo che le due palle $B_{\pi/\sqrt{k}}(p)$ e $B_{\pi/\sqrt{k}}(q)$ sono entrambe isometriche allo spazio modello privato di un punto $M_k^n - \{\widehat{p}\}$. Essendo tale spazio modello la sfera di raggio $1/\sqrt{k}$, rimane semplicemente connessa togliendole un solo punto, quindi la varietà (M, g) ha curvatura sezionale costante k e le palle $B_{\pi/\sqrt{k}}(p)$ e $B_{\pi/\sqrt{k}}(q)$ sono semplicemente connesse.
Per il teorema di Seifert–Van Kampen, allora la varietà M è semplicemente connessa e per il Teorema 3.1.2, segue dunque la tesi. □

Bibliografia

[1] M. Abate & F. Tovena, *Geometria differenziale*, Springer–Verlag, 2011.

[2] O. Bonnet, *Sur quelques propriétés des lignes géodésiques*, C. R. Acad. Paris **40**, 1855, 1311–1313.

[3] I. Chavel, *Riemannian geometry – a modern introduction*, Cambridge University Press, 2006.

[4] L. C. Evans, *Partial differential equations*, Graduate Studies in Mathematics **3**, AMS, 1998.

[5] S. Gallot, D. Hulin & J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Springer–Verlag, 1987.

[6] H. Hopf & W. Rinow, *Über den begriff der vollständigen differential–geometrischen Flächen*, Comment. Math. Helv. **3**, 1931, 209–225.

[7] C. Mantegazza, *Lecture notes on mean curvature flow*, Progress in Mathematics **290**, Birkhäuser/Springer Basel AG, 2011.

[8] C. Mantegazza, *Notes on the distance function from a submanifold – V3*, CvGmt Preprint Server – http://cvgmt.sns.it, 2010.

[9] C. Mantegazza & A. C. Mennucci, *Hamilton–Jacobi equations and distance functions on Riemannian manifolds*, Appl. Math. Opt. **47**, 2003, 1–25.

[10] P. Petersen, *Riemannian geometry*, Springer–Verlag, 1998.

[11] L. C. Piccinini, G. Stampacchia & G. Vidossich, *Equazioni differenziali ordinarie in* $\mathbf{R}^n$, Serie di Matematica e Fisica, vol. 5, Liguori Editore, Napoli, 1979.