SUL PROBLEMA DELLA GITTATA OTTIMALE

LUCA GRANIERI

1. Introduzione

Riuscire nello sport richiede capacità, impegno e soprattutto la ricerca del continuo miglioramente delle proprie prestazioni. Talvolta, la differenza tra un buon atleta e un campione la può fare l'intelligenza e la capacità di risolvere i problemi che si presentano nell'esercizio delle proprie attività. Supponiamo ad esempio di volerci allenare per il salto in lungo. Si tratta allora di saltare più lontano possibile. Ora, la distanza percorsa orizzontalmente dipende naturalmente dalla velocità con cui riusciamo a lasciare il suolo (altrimenti perchè correre tanto?) e dall'angolo formato dalla direzione di salto e il suolo. A parità di velocità con quale angolo ci conviene saltare? Così come è posta la questione non è semplice. In effetti, il nostro corpo ha una geometria complicata, poi potremmo voler cambiare posizione durante il salto, ecc... Come è buona norma, conviene allora semplificare il problema per catturarne qualche aspetto importante. Supponiamo allora di poter trascurare le dimensioni del corpo. Possiamo pensare se vogliamo ad una pistola che spara un proiettile. Dapprima possiamo considerare il caso in cui il colpo venga sparato esattamente dall'altezza del suolo. Qual è allora l'inclinazione di sparo che realizza la massima distanza orizzontale (gittata) percorsa dal proiettile? In tal caso è ben noto che la gittata ottimale si ottiene con una inclinazione di 45^o della direzione di sparo. Il primo a ricavare tale risultato sembra sia stato il matematico italiano Tartaglia nei suoi studi sulla balistica. E' da notare che già allora egli si ponesse lo scrupolo se divulgare o no tale scoperta a causa delle evidenti applicazioni belliche. Lasciando ad altri l'eventualità di tali applicazioni, ci limiteremo ad ambiti più ricreativi come lo sport. In effetti, una formazione scientifica degli allenatori potrebbe pure risultare di qualche importanza.

Una dimostrazione del risultato di Tartaglia oggi è presente su quasi tutti i testi scolastici di fisica e/o matematica per le scuole superiori, anche se spesso viene saltata per mancanza di spazio o degli strumenti matematici adatti. Lo scopo di questo lavoro è di presentare una dimostrazione del tutto elementare. Dunque, un giocatore di golf, o il calciatore che batte la classica *puntata*, dovrebbe colpire lungo una direzione inclinata di 45^o. Tuttavia, gli atleti che si cimentano nel lancio del giavellotto, del martello o nel getto del peso hanno un problema in più dovuto all'altezza dalla quale l'oggetto è lanciato. Anche questa questione, non del tutto ovvia, è trattata con metodi elementari.

2. Moto parabolico e gittata

Il fatto che la traiettoria del proiettile sia una parabola è un fatto ben noto e dipende essenzialmente dalla composizione vettoriale del moto lungo gli assi del sistema di riferimento. Quest'ultimo fatto è tuttavia non sempre ben radicato come spesso dimostrano le risposte degli studenti.

2.1. **calcolo della gittata.** Fissiamo l'origine del sistema di riferimento nel punto in cui il proiettile comincia il suo moto. Sia poi v_0 il modulo della velocità iniziale e (v_x, v_y) le rispettive componenti della velocità iniziale. Il moto lungo l'asse delle ascisse non è soggetto ad alcuna forza e pertanto è un moto rettilineo uniforme con legge oraria data da

$$x(t) = v_x\ t\ . \tag{1}$$

Lungo l'asse delle ordinate invece, il corpo è soggetto alla forza di gravità che produce un moto che possiamo considerare con buona approssimazione uniformemente accelerato con accelerazione

g (accelerazione di gravità pari a circa 9.8 m/s^2). Se y_0 rappresenta la quota da cui viene sparato il proiettile, la relativa legge oraria è la seguente

$$y(t) = y_0 + v_y\ t - \frac{1}{2} g\ t^2\ . \tag{2}$$

La traiettoria percorsa si ottiene ricavando il tempo dalla (1) ($t = \frac{x}{v_x}$) e quindi sostituendo nella (2) ottenendo

$$y = -\frac{g}{2v_x^2}\ x^2 + \frac{v_y}{v_x}\ x + y_0\ . \tag{3}$$

La (3) è l'equazione della parabola

$$y = ax^2 + bx + c \tag{4}$$

dove si è posto

$$a = -\frac{g}{2v_x^2}, \quad b = \frac{v_y}{v_x}, \quad c = y_0\ . \tag{5}$$

Tra le principali proprietà della parabola, che possono essere ricavate quale utile esercizio di geometria analitica, ricordiamo che se $a < 0$ la parabola (23) ha un unico punto di massimo corrispondente al vertice V di coordinate $V(-\frac{b}{2a}, -\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{4a})$. Inoltre, il vertice è caratterizzato dall'essere l'unico punto della parabola in cui la tangente è orizzontale. Poichè la tangente nel punto (x_0, y_0) ha equazione $y = bx + y_0$, se $b = 0$, allora il vertice della parabola (23) coincide con il punto di intersezione con l'asse delle ordinate. Altrimenti il vertice sarà un punto di ascissa strettamente positiva. Inoltre, se $a < 0$ la parabola (23) risulta essere una funzione *concava*, ovvero, data una retta tangente, la parabola si trova interamente al di sotto della tangente o, equivalentemente, data una retta secante, la parte di parabola compresa tra i due punti di intersezione si trova interamente al di sopra della secante. Infine, la parabola (23) risulta essere strettamente crescente nella semiretta $]-\infty, \frac{-b}{2a}[$, strettamente decrescente nella semiretta $]\frac{-b}{2a}, +\infty[$. In altre parole

$$\begin{array}{l} \forall x_1, x_2 \in \left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right[\ :\ x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2, \\ \forall x_1, x_2 \in \left]\frac{-b}{2a}, +\infty\right[\ :\ x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 > y_2, \end{array} \tag{6}$$

dove (x_1, y_1), (x_2, y_2) sono punti della parabola (23). Si osservi che le condizioni (6) sono equivalenti a chiedere che la secante congiungente i punti (x_1, y_1), (x_2, y_2) abbia pendenza strettamente positiva o rispettivamente strettamente negativa.

Con le posizioni (5) fatte, la gittata è la distanza dall'origine degli assi del punto (quello di ascissa positiva) in cui la parabola (23) interseca l'asse delle ascisse. Indicando con d la gittata, d risulta allora essere la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0\ ,$$

ovvero

$$d = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ , \tag{7}$$

essendo $a < 0$, $b \geq 0$, $y_0 \geq 0$. Dalle espressioni (5) si ottiene

$$d = \left(\frac{v_y}{v_x} + \sqrt{\frac{v_y^2}{v_x^2} + \frac{2gy_0}{v_x^2}} \right) \frac{v_x^2}{g} = \frac{v_y v_x}{g} + \frac{v_x}{g} \sqrt{v_y^2 + 2gy_0}\ . \tag{8}$$

I valori di v_x e v_y non possono essere completamente arbitrari essendo le componenti di un dato vettore. Tali valori devono petanto soddisfare la relazione $v_x^2 + v_y^2 = v_0^2$. Indicando con $v = v_x$ e $w = v_y$, il problema della gittata ottimale si può tradurre nel seguente problema do ottimizzazione

$$Massimizzare \left\{ vw + v\sqrt{w^2 + 2gy_0} \quad | \quad v, w \geq 0,\ v^2 + w^2 = v_0^2 \right\}. \tag{9}$$

Si osservi che in (9) non compare il termine costante g che non influisce sul problema. Lo studio del problema (9) non è immediato. In linea di principio, il problema potrebbe senz'altro essere attaccato direttamente con gli usuali metodi dell'analisi matematica. Tuttavia, la presenza dei due termini non-lineari in (9) crea non poche complicazioni tecniche, per cui il compito potrebbe non essere del tutto alla portata dello studente di scuola superiore o dei primi anni di università. Ci proponiamo allora di affrontare il problema (9) con strumenti del tutto elementari.

3. La gittata ottimale

Come è buona norma cominciamo col considerare qualche caso particolare in cui l'espressione del problema da studiare sia più semplice. L'eventuale successo ci darà il coraggio e forse qualche idea per affrontare il caso generale.

3.1. **Il caso $y_0 = 0$.** L'epressione da massimizzare in (9) si semplifica notevolmente nel caso in cui $y_0 = 0$, ovvero quello in cui il proiettile viene sparato dall'altezza del suolo. In tal caso infatti il problema (9) diventa

$$Massimizzare \left\{ vw \quad | \quad v, w \geq 0,\ v^2 + w^2 = v_0^2 \right\}. \tag{10}$$

Tale problema è facile da risolvere con il calcolo differenziale o ricorrendo a un pò di trigonometria. Ma noi volevamo usare metodi elementari. A tal fine, osserviamo che il problema (10) può essere riformulato in quello di cercare il rettangolo che abbia area massima tra quelli con la lunghezza della diagonale di lunghezza pari a v_0. Indicando con a e $a+b$ le dimensioni di tale rettangolo, la funzione da massimizzare diventa

$$f(a, b) := a(a + b) = a^2 + ab. \tag{11}$$

Il vincolo sulla diagonale equivale a chiedere che

$$a^2 + (a + b)^2 = v_0^2 \Rightarrow 2a^2 + b^2 + 2ab = v_0^2 \Rightarrow ab = \frac{v_0^2}{2} - a^2 - \frac{b^2}{2}\ .$$

Sostituendo nella (11) si ottiene

$$f(a, b) = a^2 + \frac{v_0^2}{2} - a^2 - \frac{b^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} - \frac{b^2}{2}\ .$$

Dalla precedente equazione deduciamo che il valore della funzione $f(a, b)$ non dipende da quello di a e che il massimo si ottiene per $b = 0$. Ciò significa che la gittata massima è raggiunta in corrispondenza di $v = w$. Pertanto, la direzione di sparo è la stessa della diaogonale di un quadrato. Pertanto l'angolo che realizza tale gittata massima vale esattamente 45^o. In alternativa, giusto per prendere confidenza con l'utilizzo delle disuguaglianze che si rivelano importanti per affrontare problemi più complessi, proponiamo un approccio diverso che si potrebbe chiamere *isoperimetrico.* La strategia è quella di stabilire una disuguaglianza che coinvolga l'espressione da massimizzare e dalla quale ricavare una condizione di ottimalità. La disuguaglianza che funziona in questo caso è la seguente

$$2vw \leq v^2 + w^2\ . \tag{12}$$

Per dimostrarla è sufficiente ricorrere alla formula del quadrato del binomio

$$0 \leq (v - w)^2 = v^2 + w^2 - 2vw \Rightarrow 2vw \leq v^2 + w^2\ .$$

Osserviamo ora che gli elementi dell'insieme da massimizzare in (10) devono soddisfare il vincolo $v^2 + w^2 = v_0^2$. Pertanto possiamo assumere che v, w soddisfino la disuguaglianza

$$2vw \leq v_0^2 \Rightarrow vw \leq \frac{v_0^2}{2}\ .$$

La disuguaglianza appena scritta ci dice che il prodotto vw vale al più $\frac{v_0^2}{2}$. Anzi, se ci sono valori per cui $vw = \frac{v_0^2}{2}$ allora non si potrà fare di meglio e quindi v, w realizzeranno il valore massimo per il problema (10). Allora il sistema

$$\begin{cases} vw = v_0^2/2 \\ v^2 + w^2 = v_0^2 \end{cases}$$

ci assicura che il problema (10) ammette l'unica soluzione in corrispondenza di $v = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$, e $w = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$. La gittata massima si raggiunge pertanto quando $v = w$. Quindi la direzione di sparo è la stessa della diaogonale di un quadrato. Pertanto l'angolo che realizza tale gittata massima vale esattamente 45^o.

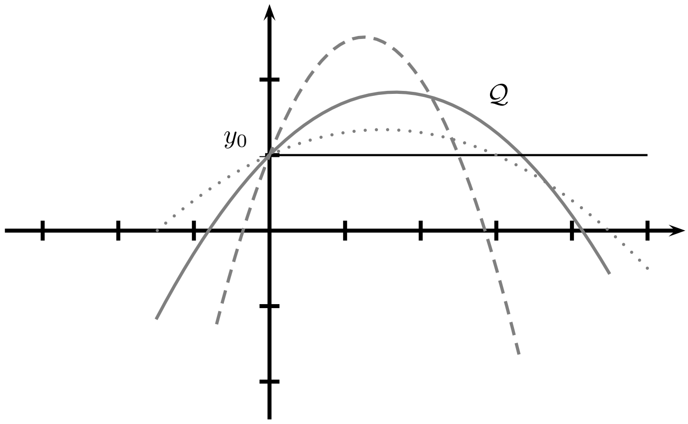

FIGURA 1. La parabola $\mathcal{Q}$ con tratti continui corrisponde ad un angolo di lancio di 45^o.

3.2. **Il caso $y_0 > 0$.** Prima di gettarci nella mischia dei conti cerchiamo di farci un'idea della situazione. Se consideriamo la parabola $\mathcal{Q}$ corrispondente alla direzione di tiro di angolo 45^o, ci chiediamo se sia possibile far di meglio. Con l'aiuto della figura 1 possiamo convincerci che non ci può essere miglioramento per angoli superiori a 45^o. Infatti, noi abbiamo già dimostrato che la nostra parabola $\mathcal{Q}$ intercetta sulla retta $y = y_0$ la distanza massima. Allora, per ragioni di continuità, ogni altra parabola corrispondente ad angoli maggiori deve intersecare la parabola $\mathcal{Q}$ in un punto di ordinata maggiore di y_0. Ma poichè due parabole si intersecano in al massimo due punti, allora questa parabola deve incontrare l'asse delle ascisse prima di $\mathcal{Q}$, e quindi realizzando una gittata inferiore. Se invece l'angolo è inferiore a 45^o, è possibile che la parabola incontri la retta $y = y_0$ un pò prima di $\mathcal{Q}$ e l'asse delle ascisse un pò dopo. Questo è proprio quello che ci resta da indagare.

3.3. ***Apertura* ottimale.** Nel caso generale ci troviamo dunque a studiare il problema (9). Anche qui ci converrà partire semplificando la situazione. Un vantaggio si ha certamente se si riesce a sfruttare la *simmetria* del problema. Tale simmetria si ottiene considerando anche l'altro punto di intersezoine della parabola (23) con l'asse delle ascisse. Se chiamiamo *apertura* della parabola la distanza tra i due punti di intersezione con l'asse delle ascisse, potremo cercare preliminarmente la parabola (23) che abbia *apertura* massima. Se indichiamo con $\mathcal{A}$ l'*apertura* della parabola (23), abbiamo

$$\mathcal{A} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{a} \ . \tag{13}$$

Ricordando le posizioni (5) fatte, si tratta allora di studiare il seguente problema

$$Massimizzare \left\{ v\sqrt{w^2 + 2gy_0} \quad | \quad v, w \geq 0, \ v^2 + w^2 = v_0^2 \right\} . \tag{14}$$

In questo problema compare soltanto un termine della quantità da massimizzare nel problema originale (9). Una ulteriore semplificazione si ottiene dall'osservazione che massimizzare una quantità positiva è la stessa cosa che massimizzarne il quadrato. In altre parole il problema su cui concentrarci diventa

$$Massimizzare \left\{ v^2(w^2 + 2gy_0) \quad | \quad v, w \geq 0, \ v^2 + w^2 = v_0^2 \right\} . \tag{15}$$

Poichè $v^2 + w^2 = v_0^2$, e quindi $w^2 = v_0^2 - v^2$, la quantità da massimizzare diventa

$$v^2(v_0^2 - v^2 + 2gy_0) = -v^4 + v_0^2 v^2 + 2gy_0 v^2 \ .$$

Ponendo $x = v^2$ possiamo considerare la parabola di equazione

$$y = -x^2 + (2gy_0 + v_0^2)x \ . \tag{16}$$

Con le posizioni appena fatte, il nostro problema si riduce a cercare il punto di massimo della parabola (16) nell'intervallo $[0, v_0^2]$. Ora, se il vertice della parabola si trova nell'intervallo $]0, v_0^2[$, allora il massimo è raggiunto proprio nel vertice, ovvero nel punto di ascissa

$$x_{max} = \frac{2gy_0 + v_0^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + gy_0 \ .$$

Tale situazione corrisponde alla condizione

$$y_0 \leq \frac{v_0^2}{2g} \Rightarrow 2gy_0 \leq v_0^2. \tag{17}$$

Pertanto i valori di v e w che realizzano il massimo in (15) corrispondono a

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\tfrac{v_0^2}{2} + gy_0}, \\ w^2 = v_0^2 - v^2 &= \tfrac{v_0^2}{2} - gy_0 \Rightarrow w = \sqrt{\tfrac{v_0^2}{2} - gy_0}. \end{aligned} \tag{18}$$

In altre parole, la pendenza della direzione di lancio che realizza la massima apertura corrisponde a

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{w}{v} = \frac{\sqrt{\frac{v_0^2}{2} - gy_0}}{\sqrt{\frac{v_0^2}{2} + gy_0}} = \frac{\sqrt{v_0^2 - 2gy_0}}{\sqrt{v_0^2 + 2gy_0}} \ .$$

Osserviamo che tale pendenza è minore di uno, il che corrisponde ad un angolo di lancio minore di 45^o. L'angolo di lancio ottimale si può esprimere come

$$\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{v_0^2 - 2gy_0}}{\sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}\right) \ . \tag{19}$$

Nel caso in cui la condizione (17) non sia soddisfatta, ovvero se $2gy_0 > v_0^2$, allora il massimo della parabola (16) è raggiunto nel punto di ascissa pari a v_0^2. In altre parole, in tal caso la soluzione del problema si ottiene per i valori

$$v_x = v_0^2, \quad v_y = 0 \ .$$

Dunque, in tal caso l'apertura ottimale si ottiene in corrispondenza della direzione orizzontale di lancio.

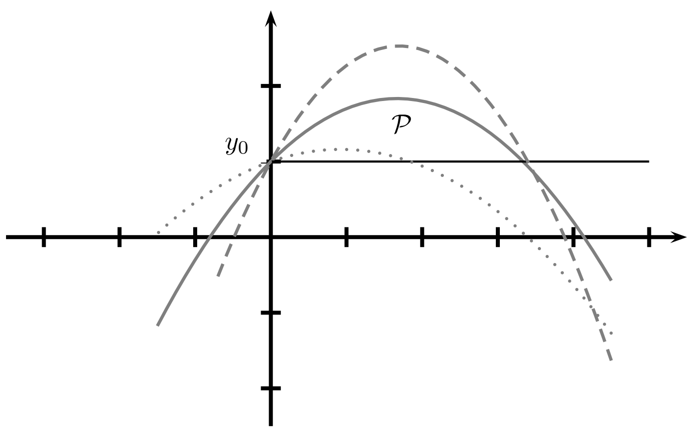

FIGURA 2. Le parabole con i tratti discontinui corrispondono a parabole $\mathcal{P}'$ per diversi valori di b', mentre $\mathcal{P}$ rappresenta la parabola di apertura ottimale.

Il problema dell'apertura ottimale si potrebbe anche risolvere basandosi su quanto detto per il caso $y_0 = 0$. Infatti, ponendo $z = \sqrt{w^2 + 2gy_0}$ allora

$$v^2 + z^2 = v^2 + w^2 + 2gy_0 = v_0^2 + 2gy_0 \ .$$

Pertando il problema dell'apertura ottimale si può affrontare studiando il problema

$$Massimizzare \left\{ vz \quad | \quad v, z \geq 0, \ v^2 + z^2 = v_0^2 + 2gy_0 \right\} . \tag{20}$$

Noi abbiamo già risolto questo problema nella discussione del caso y_0. Dunque, la soluzione del problema (20) è data da

$$v^2 = \frac{v_0^2}{2} + gy_0 \ , \ z^2 = \frac{v_0^2}{2} + gy_0 \ ,$$

da cui, se $2gy_0 \leq v_0^2$, si riottengono i valori

$$v = \sqrt{\frac{v_0^2}{2} + gy_0} \ , \quad w^2 + 2gy_0 = \frac{v_0^2}{2} + gy_0 \Rightarrow w = \sqrt{\frac{v_0^2}{2} - gy_0} \ .$$

3.4. **Gittata ottimale.** A questo punto siamo riusciti a trovare una parabola $\mathcal{P}$ di apertura massima. Ma che dire della gittata? In effetti, per ora ci siamo limitati a studiare separatamente i due termini della funzione da massimizzare nel problema (9) della gittata. Perlomeno, questo ci permette di dare una stima sulla gittata massima. Infatti, utilizzando le soluzioni dei problemi (10) e (14), per $2gy_0 \leq v_0^2$, si ottiene

$$vw + v\sqrt{w^2 + 2gy_0} \leq \frac{v_0^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} + gy_0 = v_0^2 + gy_0,$$

per ogni $v, w \geq 0$ tali che $v^2 + w^2 = v_0^2$. Dunque, indicando con d la gittata massima possibile avremo

$$d \leq v_0^2 + gy_0 \ . \tag{21}$$

Purtroppo la stima ottenuta è un pò troppo grossolana. In effetti, da quanto detto finora emerge che la parabola che realizza la gittata ottimale deve corrispondere a una pendenza della direzione di tiro compresa tra quella della parabola di apertura massima e uno. Tuttavia, facendo qualche esperimento numerico variando i valori di v e w (in rete si trovano dei simulatori numerici già pronti all'uso) ci si mantiene abbastanza lontani dalla stima (21). Occorre pertanto una stima più precisa che utilizzi magari una disuguaglianza più raffinata di quelle già utilizzate. L'osservazione fondamentale è che la quantità da massimizzare nel problema (9) si può riguardare come prodotto scalare tra due vettori del piano, ovvero

$$vw + v\sqrt{w^2 + 2gy_0} = \langle a, b \rangle, \tag{22}$$

dove $a = (a_1, a_2) = (v, \sqrt{w^2 + 2gy_0})$, $b = (b_1, b_2) = (w, v)$ e $\langle a, b \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2$. Ricordiamo le seguenti principali proprietà del prodotto scalare (che si possono verificare quale utile esercizio)

Esercizio 1. *Il prodotto scalare verifica le proprietà*

1. *(Simmetria)* $\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle$.
2. *(Linearità)* $\langle \lambda a + \mu b, c \rangle = \lambda \langle a, c \rangle + \mu \langle b, c \rangle$.
3. *(Positività)* $\langle a, a \rangle \geq 0$.
4. $\langle a, a \rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Denotando con $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ il modulo di un vettore $a = (a_1, a_2)$, o equivalentemente la distanza dall'origine del punto di coordinate (a_1, a_2), si ha che $\|a||^2 = \langle a, a \rangle$. Inoltre, vale la seguente disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Lemma 2 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz)**.**

$$\langle a, b \rangle^2 \leq \|a||^2 \|b\|^2.$$

Dimostrazione. Poniamo $A = \|a\|^2, B = \langle a, b\rangle, C = \|b\|^2$. Possiamo assumere che $B \neq 0$, poichè altrimenti la disuguaglianza è senz'altro vera. Ora, per ogni $r \in \mathbb{R}$, utilizzando le proprietà del prodotto scalare abbiamo

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle a - rb, a - rb\rangle &= \langle a, a\rangle - r\langle b, a\rangle - r\langle a, b\rangle + r^2\langle b, b\rangle = \\ &= \|a\|^2 - 2r\langle a, b\rangle + r^2\|b\|^2 = A - 2rB + Cr^2. \end{aligned}$$

Dunque abbiamo trovato che

$$\forall r \in \mathbb{R}, \quad Cr^2 - 2Br + A \geq 0. \tag{23}$$

Se $C = 0$ allora la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è senz'altro verificata. Se dunque $C > 0$, la parabola individuata da (23) si mantiene sempre nel semipiano superiore. Allora il discriminante associato alla parabola dev'essere strettamente negativo. Pertanto

$$4B^2 - 4AC \leq 0 \Rightarrow B^2 \leq AC \Rightarrow \langle a, b\rangle^2 \leq \|a\|^2\|b\|^2.$$

□

Una maniera geometrica per riguardare la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è l'osservazione che $\langle a, b\rangle = (\||a\|)(\|b\|)\cos\theta$, dove θ è l'angolo formato dai vettori a e b.

Con le posizioni fatte in (22), ricordando che $v^2 + w^2 = v_0^2$ e utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ottiene

$$\left(vw + v\sqrt{w^2 + 2gy_0}\right)^2 = \langle a, b\rangle^2 \leq \|a\|^2\|b\|^2 = (v^2 + w^2 + 2gy_0)(w^2 + v^2) = v_0^2(v_0^2 + 2gy_0). \tag{24}$$

Allora, seguendo l'approccio *isoperimetrico*, una soluzione del problema della gittata ottimale potrà pervenire dalla soluzione del seguente sistema

$$\begin{cases} vw + v\sqrt{w^2 + 2gy_0} = v_0\sqrt{v_0^2 + 2gy_0} \\ v^2 + w^2 = v_0^2. \end{cases}$$

Il lettore può controllare che tale sistema ammette la soluzione

$$v = \frac{v_0\sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}{\sqrt{2v_0^2 + 2gy_0}}, \qquad w = \frac{v_0^2}{\sqrt{2v_0^2 + 2gy_0}}.$$

Allora la pendenza della direzione di sparo che garantisce la gittata massima è data da

$$\frac{w}{v} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gy_0}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{v_0^2 + 2gy_0}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{2gy_0}{v_0^2}}}, \tag{25}$$

che corrisponde ad un angolo

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gy_0}}\right).$$

Vale la pena osservare che contrariamente al caso $y_0 = 0$, questa volta la soluzione dipende dal valore della velocità iniziale v_0. Se dunque ci trovassimo coinvolti in una gara di getto del peso, se riusciamo ad imprimere al peso una velocità iniziale molto grande, in accordo con la (25), ci converrà lanciare con una pendenza di lancio vicina ad uno. Se invece ci accorgiamo di essere troppo deboli riuscendo ad impartire al peso soltanto una piccola velocità iniziale, allora per contenere la brutta figura ci converrà lanciare lungo una direzione vicina a quella orizzontale.

Dipartimento di Matematica Politecnico di Bari, via Orabona 4, 70125 Bari, Italy
E-mail address: granieriluca@libero.it