Università degli Studi di Pisa

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

Tesi di Laurea in Matematica

Rilassamento di alcuni problemi variazionali con mancanza di compattezza

Candidata: Ilaria Fragalà

Relatore: Prof. Giuseppe Buttazzo

Co-relatore: Dott. Giovanni Alberti

Anno Accademico 1994/1995

CVGMT Preprint Server - http://cvgmt.sns.it/papers/fra95/

Indice

Indice **1**

Notazioni **2**

1. Introduzione **4**

2. Un approccio alla teoria del rilassamento **9**

2.1. Il metodo diretto come strumento base del calcolo delle variazioni . . 9

2.2. Casi in cui il metodo diretto non è applicabile 12

2.3. Generalità sul rilassamento 18

3. Spazi di Sobolev con peso **23**

3.1. Principali definizioni 23

3.2. Teoremi generali di immersione per spazi di Sobolev con peso . . . 24

3.3. Teoremi di immersione per spazi di Sobolev con peso, caso $p \leq q$. 27

3.4. Teoremi di immersione per spazi di Sobolev con peso, caso $p > q$. 34

4. Problemi unidimensionali **36**

4.1. Alcuni risultati di semicontinuità nel caso unidimensionale 36

4.2. Un risultato di rilassamento nel caso unidimensionale 48

5. Risultati di rilassamento per problemi variazionali *N*-dimensionali con mancanza di compattezza **52**

5.1. Rilassamento dei problemi di Dirichlet e di Neumann con non-linearità critica e supercritica 53

5.2. Inserimento di un peso nei problemi di Dirichlet e di Neumann con non-linearità critica e supercritica 70

6. Generalizzazioni dei risultati ottenuti **88**

6.1. Rilassamento dei problemi di Dirichlet e di Neumann con non-linearità critica e supercritica per una classe più ampia di funzionali 88

6.2. Rilassamento di problemi di tipo integrale con non-linearità critica e supercritica 94

7. Problemi aperti **96**

Bibliografia **100**

Notazioni

$\mathbf{N}$	l'insieme dei numeri naturali
$\mathbf{R}$	l'insieme dei numeri reali
(a, b)	un intervallo aperto in $\mathbf{R}$
$[a, b]$	un intervallo chiuso in $\mathbf{R}$
I	l'intervallo aperto $(0, 1)$
$\mathbf{R}^N$	lo spazio euclideo N-dimensionale
Ω	un insieme aperto (dominio) in $\mathbf{R}^N$
$\partial\Omega$	la frontiera di Ω
$\overline{\Omega}$	la chiusura di Ω
$B^N(x^0, r)$	la sfera aperta di centro x^0 e raggio r in $\mathbf{R}^N$
$\lvert A\rvert$	la misura di Lebesgue dell'insieme A
q.o.	quasi ovunque
$x = (x_1, \ldots, x_N)$ $x = (x_i', x_i)$	un punto in $\mathbf{R^N}$
$x_i' = (x_1, .., x_{i-1}, x_{i+1}, .., x_N)$	un punto in $\mathbf{R}^{N-1}$
supp f	il supporto della funzione f
Epi f	l'epigrafico della funzione f
f^+, f^-	la parte positiva e negativa della funzione f
f è s.c.i.	f è semicontinua inferiormente
f è seq. s.c.i.	f è sequenzialmente semicontinua inferiormente
S.V.T.	spazio vettoriale topologico

$\omega \subset\subset \Omega$	ω è aperto, $\overline{\omega}$ è compatto, e $\overline{\omega} \subset \Omega$
E'	lo spazio duale di E
$\langle\ ,\ \rangle$	il prodotto scalare nella dualità (E, E')
$\sigma(E, E')$	la topologia debole definita su E
$\sigma(E', E)$	la topologia debole-$*$ definita su E'
$Du = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	il gradiente di u
$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	il laplaciano di u
$\dfrac{\partial u}{\partial n}$	la derivata normale esterna di u
$p' = \begin{cases} \dfrac{p}{p-1} & \text{se } 1 < p < +\infty \\ 1 & \text{se } p = +\infty \\ +\infty & \text{se } p = 1 \end{cases}$	l'esponente coniugato di p
$x_h \downarrow x$	x_h converge decrescendo a x
$\hookrightarrow$	il simbolo dell'immersione continua
$\hookrightarrow\hookrightarrow$	il simbolo dell'immersione compatta
$C^k(\Omega),\ C_b^k(\Omega)$ $C^{0,\alpha}(\Omega)$ $C^\infty(\Omega),\ C_0^\infty(\Omega)$	spazi di funzioni continue
$L^p(\Omega)$ $L^p_{\mathrm{loc}}(\Omega)$	spazi di Lebesgue
$W^{m,p}(\Omega),\ W_0^{m,p}(\Omega)$ $H^m(\Omega),\ H_0^m(\Omega)$	spazi di Sobolev
$\|\cdot\|_{0,\alpha,\Omega}$	la norma usuale su $C^{0,\alpha}(\Omega)$
$\|\cdot\|_{p,\Omega}$	la norma usuale su $L^p(\Omega)$
$\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$	la norma usuale su $W^{m,p}(\Omega)$

1. Introduzione

Molti problemi variazionali vincolati possono essere scritti nella forma

$$\min\{F(u) : u \in X, G(u) = 1\}, \tag{1.1}$$

dove X è un opportuno spazio di funzioni e F, $G : X \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ sono funzionali dati. Introducendo, per ogni $Y \subset X$, la funzione indicatrice χ_Y definita da

$$\chi_Y(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \in Y \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e posto

$$J(u) = F(u) + \chi_{\{G(u)=1\}}(u),$$

tali problemi di minimo possono essere formulati in modo equivalente come

$$\min\{J(u) : u \in X\}. \tag{1.2}$$

Supponendo che il funzionale F sia semicontinuo inferiormente su X, se il funzionale G verifica la proprietà di compattezza

$$u_h \to u \text{ in } X,\ F(u_h) \le c \Longrightarrow G(u_h) \to G(u), \tag{1.3}$$

allora si vede facilmente che il funzionale J da minimizzare risulta semicontinuo inferiormente su X. Quest'ultima è un'ipotesi fondamentale per poter applicare il metodo diretto del calcolo delle variazioni e dimostrare l'esistenza di una soluzione del problema di minimo (1.2). In molte situazioni interessanti accade però che la proprietà di compattezza (1.3) non è verificata: in questi casi il problema (1.2) può non avere soluzione ed è allora importante studiare le successioni minimizzanti del funzionale J. Per fare ciò si considera il problema rilassato

$$\min\left\{\overline{J}(u) : u \in X\right\}, \tag{1.4}$$

dove il funzionale rilassato $\overline{J}$ è definito da

$$\overline{J}(u) := \inf\left\{\liminf_{h\to+\infty} F(u_h) : u_h \to u \text{ in } X,\ G(u_h) = 1\right\}.$$

Supponendo che anche G sia semicontinuo inferiormente su X, si può sempre scrivere, per un opportuno *funzionale di gap* L non negativo, l'uguaglianza

$$\overline{J}(u) = F(u) + L(u) \qquad \forall u \in X.$$

Naturalmente, se l'ipotesi di compattezza (3.1) è soddisfatta, il termine aggiuntivo $L(u)$ è identicamente nullo, mentre se l'ipotesi (3.1) non è soddisfatta, si verifica facilmente che si ha sempre

$$L(u) = \begin{cases} +\infty & \text{se } G(u) > 1 \\ 0 & \text{se } G(u) = 1 \end{cases}$$

e pertanto, per avere l'espressione di $\overline{J}$, basta caratterizzare L solo sulle funzioni $u \in X$ per le quali $G(u) < 1$.

Nella tesi ci occupiamo di caratterizzare il termine di gap L per alcuni problemi variazionali mancanti di compattezza. Il primo caso che abbiamo studiato è stato quello in cui

$$F(u) = \int_\Omega |Du|^2 \, dx \qquad N > 2$$
$$G(u) = \int_\Omega |u|^q \, dx \qquad q \geq 2^* = \frac{2N}{N-2}$$

e lo spazio X delle funzioni ammissibili è $H_0^1(\Omega)$. Sia $C_{0,2}$ la costante ottimale per l'immersione continua di $H_0^1(\Omega)$ in $L^{2^*}(\Omega)$, cioè

$$C_{0,2} := \inf_{H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |Du|^2 \, dx}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*} \, dx\right)^{2/2^*}} \; ;$$

abbiamo ottenuto per il termine di gap $L(u)$ la seguente espressione:

$$L(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } q > 2^* \\ C_{0,2}\left(1 - \int_\Omega |u|^{2^*} dx\right)^{2/2^*} & \text{se } q = 2^*. \end{cases}$$

Successivamente abbiamo provato formule esplicite per il gap $L(u)$ anche nei casi seguenti:

i)
$$\begin{cases} F(u) = \displaystyle\int_\Omega |Du|^p \, dx \qquad 1 < p < N \\ G(u) = \displaystyle\int_\Omega |u|^q \, dx \qquad q \geq 1 \\ X = W_0^{1,p}(\Omega), \text{ oppure } W^{1,p}(\Omega); \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} F(u) = \displaystyle\int_\Omega |Du|^p \, dx \qquad 1 < p < N \\ G(u) = \displaystyle\int_\Omega d^\alpha(x) \, |u|^q \, dx \qquad q \geq 1, \ \alpha \in \mathbf{R}, \\ X = W_0^{1,p}(\Omega), \text{ oppure } W^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

dove $d(x)$ è la funzione distanza da $\partial\Omega$. Pur richiedendo dimostrazioni lievemente più articolate, tali formule risultano analoghe alla precedente.

Abbiamo cercato poi di estendere questi risultati a classi più ampie di funzionali, ottenendo enunciati di maggior generalità. Supponiamo che $\Phi : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ sia una funzione semicontinua inferiormente e consideriamo su $W^{1,p}(\Omega)$ il funzionale

$$J_\Phi(u) := \int_\Omega |Du|^p \, dx + \Phi(\|u\|_{q,\Omega}),$$

dove abbiamo indicato con $\| \cdot \|_{q,\Omega}$ la norma usuale su $L^q(\Omega)$ e dove $1 < p < N$, $q \geq p^*$. Vale allora il seguente

Teorema. *Posto*

$$\mathcal{F}_p := \left\{ \{u_n\} \subset W^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega |u_n|^{p^*} \, dx = 1, \ |\operatorname{supp} u_n| \to 0 \right\},$$
$$K_p := \inf_{\mathcal{F}_p} \left\{ \liminf_{n \to +\infty} \int_\Omega |Du_n|^p \, dx \right\},$$

si ha

$$\overline{J}_\Phi(u) = F(u) + L_\Phi(u),$$

dove il funzionale $L_\Phi(u)$ è dato da

$$L_\Phi(u) = \begin{cases} \displaystyle\inf_{t \geq \|u\|_{q,\Omega}} \Phi(t) & \text{se } q > p^* \\ \displaystyle\inf_{t \geq \|u\|_{q,\Omega}} \Phi(t) + K_p \left(t^{p^*} - \int_\Omega |u|^{p^*} \, dx \right)^{p/p^*} & \text{se } q = p^*. \end{cases}$$

Un analogo teorema vale se il funzionale J_Φ è definito su $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Un altro risultato di carattere generale si può ottenere considerando su $W^{1,p}(\Omega)$ il funzionale J definito da

$$J(u) := F(u) + \chi_{\{G(u)=1\}}(u),$$

dove F e G sono funzionali di tipo integrale della forma

$$F(u) := \int_\Omega f(x, Du)\,dx, \qquad G(u) := \int_\Omega g(x, u)\,dx.$$

Sotto certe ipotesi su f e g, indicando con $\overline{J}$ il funzionale rilassato di J rispetto alla topologia debole, si ha ancora

$$\overline{J}(u) = \begin{cases} +\infty & \text{se } G(u) > 1, \\ F(u) & \text{se } G(u) = 1, \\ F(u) + L(u) & \text{se } G(u) < 1, \end{cases}$$

dove per il gap $L(u)$ si può avere (con opportuni p e q) la seguente caratterizzazione.

Teorema. *Posto*

$$\mathcal{F} := \left\{ \{u_h\} \subset W^{1,p}(\Omega) : G(u_h) = 1,\ |\operatorname{supp} u_h| \to 0 \right\},$$
$$K := \inf_{\mathcal{F}} \left\{ \liminf_{h\to+\infty} F(u_h) \right\},$$

si ha

$$L(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } q > p^*, \\ K\big(1 - G(u)\big)^{p/p^*} & \text{se } q = p^*. \end{cases}$$

Per quanto riguarda la struttura della tesi, i Capitoli 2 e 3 contengono risultati già noti, di carattere introduttivo o preliminare, mentre i risultati originali si trovano a partire dal Capitolo 4 e soprattutto nei Capitoli 5 e 6. Nei Capitoli 2 e 3 abbiamo infatti esposto i risultati del metodo diretto del calcolo delle variazioni, della teoria del rilassamento e della teoria degli spazi di Sobolev con peso che abbiamo utilizzato nei capitoli successivi. Nel Capitolo 4 abbiamo studiato la semicontinuità di alcuni problemi nel caso unidimensionale ed abbiamo richiamato

un risultato di rilassamento ottenuto da Buttazzo e Mizel per una ampia classe di problemi variazionali unidimensionali. Nel Capitolo 5 siamo passati a considerare il caso N-dimensionale, esponendo i nuovi risultati di rilassamento ottenuti. Nel Capitolo 6 abbiamo generalizzato questi risultati a classi più ampie di funzionali. Infine, il Capitolo 7 è dedicato a quelli che potremmo chiamare "problemi aperti": ci siamo posti infatti diverse domande che ci spingeranno senza dubbio ad ampliare questa tesi in varie direzioni e perciò abbiamo voluto inserirle come osservazioni finali.

Desidero ringraziare sinceramente tutti coloro che con grande competenza scientifica e con altrettanto grande affabilità mi hanno guidato, seguito, aiutato, consigliato o incoraggiato in questo lavoro di tesi, in modo particolare il Prof. Giuseppe Buttazzo, il Prof. Ennio De Giorgi, il Dott. Giovanni Alberti, il Prof. Donato Passaseo, il Dott. Paolo Biscari.

2. Un approccio alla teoria del rilassamento

Questo capitolo è di carattere elementare e riguarda sostanzialmente la teoria del rilassamento.

Il punto di partenza è costituito dal metodo diretto del calcolo delle variazioni, che richiede come ipotesi fondamentali la coercività e la semicontinuità del funzionale da minimizzare; viene dunque naturale chiedersi cosa accada allorché una di queste due richieste non sia soddisfatta: accenneremo molto brevemente al problema della mancanza di coercività, per passare subito a soffermarci su quello della mancanza di semicontinuità, da cui nasce ed è motivata la teoria del rilassamento. Introdurremo quindi la definizione di funzionale rilassato e le sue principali proprietà, che derivano dalla definizione stessa tramite semplici argomenti di topologia generale.

2.1. Il metodo diretto come strumento base del calcolo delle variazioni

Nello studio di un problema di minimo $\min_{x \in X} F(x)$, dove X è un insieme, F una funzione da X in $\overline{\mathbf{R}} := \mathbf{R} \cup +\infty$, spesso l'aspetto più interessante è quello dell'*esistenza*.

In questa direzione il cosiddetto *metodo diretto di Tonelli* è uno strumento tanto semplice quanto potente. Tale metodo si basa sul seguente teorema.

Teorema 2.1. *Sia τ una topologia su X tale che:*

i) F sia τ-s.c.i.

ii) F sia τ-coerciva

oppure

i') F sia τ-seq. s.c.i.

ii') F sia τ-seq. coerciva.

Allora il problema $\min_{x \in X} F(x)$ ha almeno una soluzione.

Ricordiamo le nozioni topologiche di semicontinuità inferiore e di coercività assunte come ipotesi nel teorema, insieme alle loro corrispondenti definizioni sequenziali.

Siano (X, τ) uno spazio topologico, $F : X \to \overline{\mathbf{R}}$.

Definizione 2.2. *F si dice τ-s.c.i. se per ogni $t \in \mathbf{R}$, il sottolivello $\{x \in X : F(x) \leq t\}$ è τ-chiuso in X. F si dice seq. τ-s.c.i. se, per ogni $\{x_n\} \to x$ in (X, τ), si ha $F(x) \leq \liminf_{n \to +\infty} F(x_n)$.*

Definizione 2.3. *F si dice τ-coerciva se per ogni $t \in \mathbf{R}$, il sottolivello $\{x \in X : F(x) \leq t\}$ è τ-relativamente compatto in X. F si dice seq. τ-coerciva se, per ogni $x_n \to x$ in (X, τ) tale che $\{F(x_n)\}$ è limitata in $\mathbf{R}$, esiste $\{x_{n_k}\}$ convergente in (X, τ).*

La dimostrazione del teorema è immediata. Ci limitiamo ad osservare che in molti casi le versioni topologiche e sequenziali delle precedenti definizioni coincidono; ciò accade per esempio in questi casi:

- quando (X, τ) soddisfa il primo assioma di numerabilità, in particolare quando (X, τ) è metrizzabile;
- quando F è un funzionale fortemente coercivo
  a) su (X, τ): X è uno spazio normato con X' separabile e τ è la topologia debole su X,
  b) su (X', τ): X è uno spazio normato e separabile e τ è la topologia debole-$*$ su X'.

I seguenti risultati sono utili per stabilire la semicontinuità o la coercività di molti funzionali.

1. *Semicontinuità della norma rispetto alla convergenza debole*

   Siano X uno spazio normato e $\sigma(X, X')$ la topologia debole su X;

$$\{x_n\} \to x \text{ in } \big(X, \sigma(X, X')\big) \Longrightarrow \|x\| \leq \liminf_{n \to +\infty} \|x_n\|.$$

2. *Semicontinuità di funzioni convesse su spazi di Banach*

   Siano X uno spazio di Banach, $F : X \to \overline{\mathbf{R}}$ una funzione convessa;

   $$F \text{ è fortemente s.c.i. } \iff F \text{ è debolmente s.c.i.}$$

3. *Semicontinuità in spazi di funzioni integrabili*

   Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^k$. Sia $f : \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \to [0, +\infty]$ una funzione boreliana tale che:

   i) per q.o. $x \in \Omega$, $f(x, \cdot, \cdot)$ è s.c.i. su $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$

   ii) per q.o. $x \in \Omega$ e $\forall s \in \mathbf{R}^m$, $f(x, s, \cdot)$ è convessa su $\mathbf{R}^n$.

   Allora il funzionale:

   $$F(u, v) := \int_\Omega f(x, u(x), v(x))\, dx$$

   è seq. s.c.i. sullo spazio prodotto $L^1(\Omega, \mathbf{R}^m) \times L^1(\Omega, \mathbf{R}^n)$, dove $L^1(\Omega, \mathbf{R}^m)$ è munito della topologia forte ed $L^1(\Omega, \mathbf{R}^n)$ è munito della topologia debole (cfr. Ioffe [9]).

4. *Coercività negli spazi di Banach riflessivi e nei duali degli spazi di Banach*

   4a. Sia X uno spazio di Banach riflessivo;

   $F : X \to \overline{\mathbf{R}}$ è debolmente coercivo $\Leftrightarrow \lim_{\|x\| \to +\infty} F(x) = +\infty$

   4b. Sia X il duale di uno spazio di Banach;

   $F : X \to \overline{\mathbf{R}}$ è debolmente-$*$ coercivo $\Leftrightarrow \lim_{\|x\| \to +\infty} F(x) = +\infty$.

5. *Coercività negli spazi di Sobolev*

   Sia $\Omega \subseteq \mathbf{R}^k$ un aperto limitato, sia $p \in (1, +\infty)$, e sia $f : \Omega \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{mk} \to \overline{\mathbf{R}}$ una funzione boreliana che soddisfi la seguente condizione di crescita:

   $$f(x, s, z) \geq \alpha\big(|s|^p + |z|^p\big) - \beta(x) \ \big(\text{rispettivamente } f(x, s, z) \geq \alpha|z|^p - \beta(x)\big),$$

   dove $\alpha \in (0, +\infty)$ e $\beta \in L^1(\Omega)$. Allora il funzionale:

   $$F(u) := \int_\Omega f(x, u(x), Du(x))\, dx$$

   è debolmente coercivo su $W^{1,p}(\Omega)$ $\big($rispettivamente su $W_0^{1,p}(\Omega)\big)$.

Come esempi di problemi per i quali il metodo diretto fornisce immediatamente l'esistenza di una soluzione, citiamo il classico *problema di Dirichlet*:

$$\text{(P1)} \qquad \min\left\{\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|Du|^2 - fu\right)\,dx \;:\; u \in H_0^1(\Omega)\right\},$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ e $f \in L^2(\Omega)$; tramite l'equazione di Eulero-Lagrange, il problema (P1) dà luogo al problema in forma differenziale

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Più in generale, tramite il metodo diretto si ottiene l'esistenza di una soluzione di *problemi di minimo per funzionali di tipo integrale* della forma:

$$\text{(P2)} \qquad \min\left\{\int_\Omega f(x, u(x), Du(x))\,dx \;:\; u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbf{R}^m)\right\},$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$, $p \in (1, +\infty)$ ed f è una funzione boreliana da Ω in $[0, +\infty]$ tale che:

i) $f(x, s, z) \geq \alpha|z|^p - \beta(x)$, dove $\alpha \in (0, +\infty), \beta \in L^1(\Omega)$;

ii) per q.o. $x \in \Omega$, $f(x, \cdot, \cdot)$ è s.c.i. su $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{mn}$;

iii) per q.o. $x \in \Omega$, $\forall s \in \mathbf{R}^m$, $f(x, s, \cdot)$ è convessa su $\mathbf{R}^{mn}$.

2.2. Casi in cui il metodo diretto non è applicabile

Nel caso in cui le ipotesi del metodo diretto non sono verificate, si possono fare due osservazioni immediate, ma non di scarso rilievo. La prima è che possono esistere comunque uno o più minimi. La seconda è che la situazione si prospetta molto diversa secondo se quella che è venuta a mancare è la semicontinuità oppure la coercività (oppure entrambe): dunque molto diverse saranno anche le strategie da seguire nei due casi. Questa tesi riguarda problemi in cui si ha *mancanza di semicontinuità*.

Per completezza diamo prima un rapidissimo sguardo anche alla mancanza di coercività (in questo caso trattando per semplicità solo funzionali convessi), per

passare poi alla mancanza di semicontinuità ed introdurre l'argomento principale della tesi.

In questo paragrafo vogliamo sottolineare come lo studio di problemi non semicontinui o non coercivi si riveli spesso assai interessante e, in molti tipi di problemi di minimo, apra nuove direzioni di ricerca.

a) Mancanza di coercività

Vediamo un risultato di esistenza (cfr. Baiocchi, Buttazzo, Gastaldi, Tomarelli [4]) applicabile a molti problemi di minimo convessi ma non coercivi: si ottiene introducendo la nozione di *funzionale di recessione* del funzionale F da minimizzare, che indicheremo con F^∞, e richiedendo oltre alla semicontinuità altre tre ipotesi, che chiameremo *condizione necessaria, compatibilità, compattezza*.

Definizione 2.4. *Sia (V,τ) uno spazio vettoriale topologico (S.V.T.) localmente convesso (T_2) e sia $F : V \to \overline{\mathbf{R}}$ un funzionale proprio, convesso, seq. s.c.i.; definiamo allora il funzionale di recessione di F come*

$$F^\infty(v) := \lim_{t\to+\infty} F(v^0 + tv),$$

dove v^0 è un qualunque punto appartenente al dominio di F, cioè all'insieme $\operatorname{dom} F = \{v \in V : F(v) < +\infty\}$.

Proposizione 2.5. *Il funzionale F^∞ verifica le proprietà seguenti:*

i) il limite che definisce F^∞ esiste ed è indipendente da v^0;

ii) $F^\infty(v) = \sup_{u\in\operatorname{dom} F} \{F(u+v) - F(u)\}$;

iii) F^∞ è proprio, convesso, seq. $\tau-$s.c.i.;

iv) F^∞ è positivamente omogeneo di grado zero.

Vale il seguente risultato di esistenza, per la cui dimostrazione rimandiamo a [4].

Teorema 2.6. *Sia V uno spazio di Banach e sia σ una topologia di S.V.T. su V meno fine di quella forte e tale che la palla unitaria sia seq. $\sigma-$compatta.*

Sia $F : V \to \overline{\mathbf{R}}$ un funzionale proprio, convesso, seq. $\sigma-$ s.c.i., e supponiamo che siano verificate le seguenti ipotesi:

1) condizione necessaria*: $F^\infty(v) \geq 0 \ \forall v \in V$;*

2) compatibilità*: $\ker F^\infty$ sia un sottospazio lineare di V;*

3) compattezza*: se $t_h \to +\infty$ in $\mathbf{R}$, $v_h \to v$ in (V, σ) e $\inf\{F(t_h v_h)\} > -\infty$, allora $\|v_h - v\| \to 0$.*

Allora esiste almeno una soluzione per il problema di minimo

$$\min\{F(v) : v \in V\}.$$

A titolo di esempio vediamo i risultati che si ottengono applicando il precedente teorema al classico *problema di Neumann*:

$$\text{(P3)} \qquad \min\left\{\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|Du|^2 - fu\right) dx \ : \ u \in H^1(\Omega)\right\},$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ e $f \in L^2(\Omega)$; tramite l'equazione di Eulero-Lagrange, il problema (P3) dà luogo al problema in forma differenziale

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Applicando il Teorema 2.6 si ottiene l'esistenza di una soluzione se e solo se è verificata la condizione di compatibilità

$$\int_\Omega f(x)\, dx = 0.$$

Un problema simile è

$$\text{(P4)} \qquad \min\left\{\int_\Omega \left(\frac{1}{2}\left(|Du|^2 + (u^+)^2\right) - fu\right) dx \ : \ u \in H^1(\Omega)\right\},$$

dove Ω e f sono come sopra e u^+ indica la parte positiva di u; tramite l'equazione di Eulero-Lagrange, il problema (P4) dà luogo al problema in forma differenziale

$$\begin{cases} -\Delta u + u^+ = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si ottiene, sempre applicando il Teorema 2.6,

(·) se $\int_\Omega f(x)\,dx < 0$ non esiste alcuna soluzione;

(·) se $\int_\Omega f(x)\,dx > 0$ esiste almeno una soluzione;

(·) se $\int_\Omega f(x)\,dx = 0$ si ha esistenza di almeno una soluzione se e solo se si ha esistenza di una soluzione negativa del problema linearizzato

$$\begin{cases} -\Delta w = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Inoltre si ha:

{ soluzioni del problema iniziale } = { soluzioni ≤ 0 del problema linearizzato }.

b) Mancanza di semicontinuità

Quando si ha un funzionale F non s.c.i. su uno spazio topologico (X, τ), si può studiare il comportamento delle successioni minimizzanti di F, ossia delle successioni $\{x_n\} \subset X$ tali che $F(x_n) \to \inf_X F(x)$. L'interesse per queste ultime appare evidente non appena si osservi cosa accade nel caso in cui $X = \mathbf{R}$.

Come si osserva dalla Figura 2.1, basterebbe cambiare il valore di f in 0 per renderla s.c.i., ed è evidente che il più grande valore che possiamo dare a $f(0)$ se vogliamo che f sia s.c.i. è proprio il $\liminf_{x\to 0} f(x)$.

In tal senso appare associata a f in modo naturale la funzione s.c.i. $\overline{f}$ disegnata nella Figura 2.2. Infatti qualunque altra funzione g del tipo illustrato nella Figura 2.3 ha le caratteristiche di essere s.c.i. e di coincidere con f in tutti i punti in cui f è già s.c.i., ma, tra tutte queste funzioni, $\overline{f}$ è certamente la più significativa. Infatti $\overline{f}$ è la più grande funzione s.c.i. maggiorata da f.

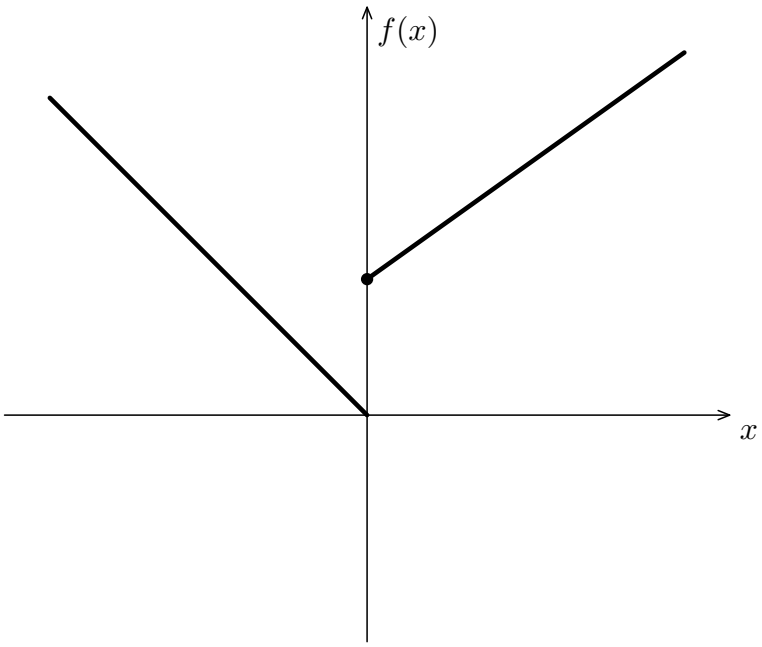

Figura 2.1

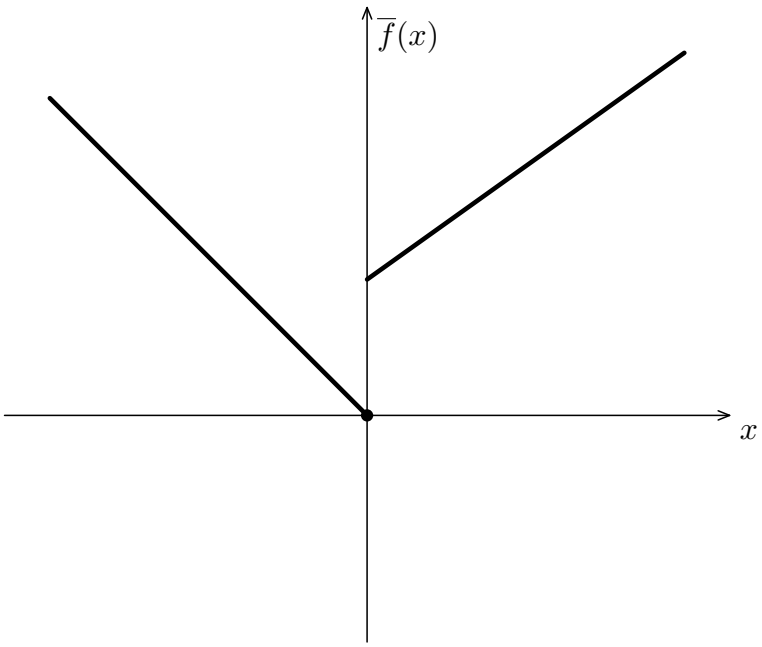

Figura 2.2

Più in generale, a *qualunque* funzionale F definito su *qualunque* spazio topologico (X, τ) possiamo associare quello che si chiama $\overline{F}$, il *funzionale rilassato* di F, cioè *il più grande funzionale s.c.i. maggiorato da* F.

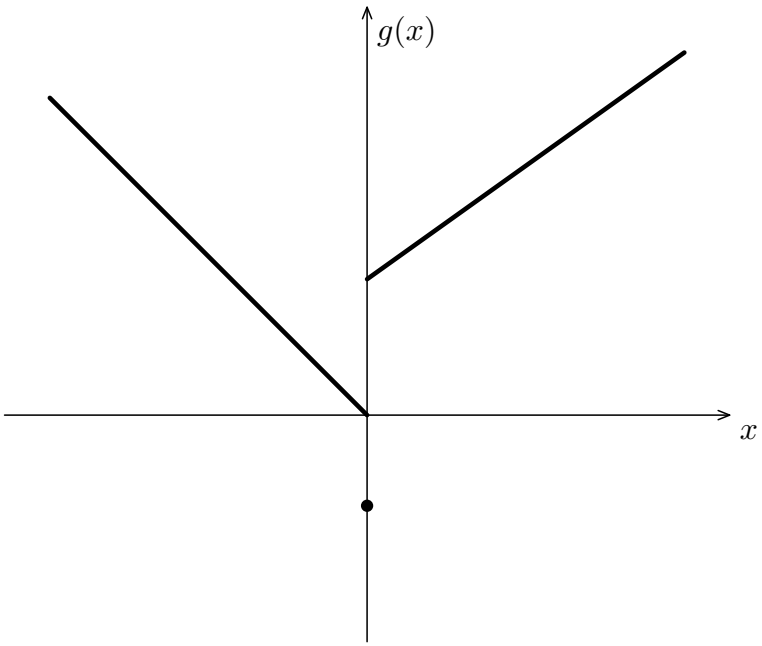

Figura 2.3

Quando F è coercivo, il problema $\min_{x\in X} \overline{F}(x)$ avrà sempre soluzione: infatti se una successione minimizzante per F τ-converge a x^0, tale punto x^0 sarà un punto di minimo per $\overline{F}$.

Quindi, calcolando $\overline{F}$, sapremo dire molto di più sul comportamento delle successioni minimizzanti del funzionale F da cui eravamo partiti.

Ad esempio, i problemi di minimo (P5) e (P6) non sono associati a funzionali semicontinui, come vedremo in seguito:

$$\text{(P5)} \qquad \min\left\{\int_\Omega |Du|^p\,dx + \chi_{\left\{\int_\Omega |u|^{p^*}\,dx=1\right\}}(u) \;:\; u\in W_0^{1,p}(\Omega)\right\};$$

per $p=2$, le equazioni di Eulero-Lagrange forniscono:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{2^*-2}u & \text{in } \Omega,\\ u=0 & \text{su } \partial\Omega; \end{cases}$$

$$\text{(P6)} \qquad \min\left\{\int_\Omega (|u|^p + |Du|^p)\,dx + \chi_{\left\{\int_\Omega |u|^{p^*}\,dx=1\right\}}(u) \;:\; u\in W^{1,p}(\Omega)\right\};$$

per $p = 2$, le equazioni di Eulero-Lagrange forniscono:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = \lambda |u|^{2^*-2} u & \text{in } \Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

In entrambi gli esempi Ω è un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$, $p \in (1, n)$, $p^* = \frac{np}{n-p}$ e χ_A è la funzione indicatrice dell'insieme A, definita da:

$$\chi_A(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } u \in A, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Dimostreremo nei capitoli successivi che entrambi questi problemi non sono semicontinui e calcoleremo anche l'espressione dei corrispondenti funzionali rilassati.

2.3. Generalità sul rilassamento

Per i risultati di questo paragrafo facciamo riferimento a [6]. Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia F un funzionale da X in $\overline{\mathbf{R}}$.

Definizione 2.7. *Il funzionale $\Gamma(\tau^-)F$, definito da*

$$\Gamma(\tau^-)F(x) := \sup\{G(x) : \ G \text{ è } \tau\text{-s.c.i., } G \leq F\},$$

si dice il funzionale τ-rilassato di F.

Proposizione 2.8. *Alcune proprietà di $\Gamma(\tau^-)F$:*

i) $\Gamma(\tau^-)F$ *è τ-s.c.i.;*

ii) $\Gamma(\tau^-)F(x) = \liminf_{y \to x} F(y) =$
$= \min\big\{ \liminf_{i \in I} F(x_i) : (x_i)_{i \in I} \text{ è un net } \tau\text{-convergente a } x \big\}$;

iii) $\inf\{F(y) : y \in X\} \leq \Gamma(\tau^-)F(x) \leq F(x)$; *in particolare:*
$\inf\{F(y) : y \in X\} = \inf\{\Gamma(\tau^-)F(y) : y \in X\}$;

iv) se F è τ-coercivo, anche $\Gamma(\tau^-)F$ lo è;

v) per ogni $G : X \to \mathbf{R}$ τ-continuo si ha $\Gamma(\tau^-)[F + G] = \Gamma(\tau^-)F + G$;

vi) se $\{x_n\} \subset X$ è una successione minimizzante di F τ-convergente a $x \in X$, allora x è un punto di minimo per $\Gamma(\tau^-)F$.

Dimostrazione.

i) Discende dal fatto che F è τ-s.c.i. se e solo se $\operatorname{Epi} F$ è τ-chiuso in $X \times \overline{\mathbf{R}}$ e $\operatorname{Epi}(\sup_{i\in I} F_i) = \bigcap_{i\in I} \operatorname{Epi} F_i$.

ii) Discende dal fatto che il funzionale $x \mapsto \liminf_{y\to x} F(y)$ è τ-s.c.i., è $\leq F$ e per ogni G τ-s.c.i. con $G \leq F$ si ha $G(x) = \liminf_{y\to x} G(y) \leq \liminf_{y\to x} F(y)$.

iii) Basta osservare che il funzionale costante $x \mapsto \inf\{F(y),\, y \in Y\}$ è τ-s.c.i. ed è $\leq F$.

iv) Per ipotesi, per ogni $t \in \mathbf{R}$ esiste un compatto $K_t \subseteq X$ tale che

$$\{x \in X : F(x) \leq t\} \subseteq K_t;$$

dunque, per ogni $t \in \mathbf{R}$,

$$\{x \in X : \Gamma(\tau^-)F(x) \leq t\} \subseteq K_{t+1}.$$

Infatti, se x è tale che $\Gamma(\tau^-)F(x) \leq t$, allora per ogni U intorno di $x \in X$ esiste $y \in U$ tale che $F(y) \leq t+1$, cioè ogni intorno U di x verifica $U \cap K_{t+1} \neq \emptyset$. Allora, siccome K_{t+1} è chiuso, si ha $x \in K_{t+1}$.

v) $$\begin{aligned}\Gamma(\tau^-)[F+G](x) &= \liminf_{y\to x}[F(y)+G(y)] = \\ &= \liminf_{y\to x} F(y) + \lim_{y\to x} G(y) = \Gamma(\tau^-)F(x) + G(x).\end{aligned}$$

vi) Sia $\{x_n\}$ una successione minimizzante per F $\tau-$convergente a x;

$$\begin{aligned}\Gamma(\tau^-)F(x) &\leq \liminf_{n\to+\infty} \Gamma(\tau^-)F(x_n) \leq \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} F(x_n) = \inf_X F(x) = \inf_X \Gamma(\tau^-)F(x).\end{aligned}$$ ■

Per una topologia τ indichiamo con τ_{seq} la sua versione sequenziale, cioè la più fine topologia che abbia le stesse successioni convergenti di τ.

Il funzionale $\Gamma((\tau_{\text{seq}})^-)F$ si indica anche con $\Gamma_{\text{seq}}(\tau^-)F$. Esso è molto utile, qualora si abbia a che fare con topologie deboli su spazi di Lebesgue o di Sobolev.

Poiché per definizione τ_{seq} è una topologia più fine o uguale a τ, si ha sempre $\Gamma(\tau^-)F \leq \Gamma_{\text{seq}}(\tau^-)F$. Si presentano poi di frequente nelle applicazioni casi in cui vale l'uguaglianza: $\Gamma(\tau^-)F = \Gamma_{\text{seq}}(\tau^-)F$. Consideriamo alcuni di questi casi nelle due proposizioni seguenti.

Proposizione 2.9. *Sia X uno spazio di Banach e sia $F : X \to \mathbf{R}$ un funzionale convesso. Supponiamo che sia soddisfatta una di queste due ipotesi:*

i) X' separabile; τ = topologia debole su X

ii) $X = V'$ con V spazio di Banach separabile; τ = topologia debole-$*$ su X.

Allora $\Gamma(\tau^-)F = \Gamma_{\text{seq}}(\tau^-)F$.

Dimostrazione. La nostra tesi è: $\Gamma(\tau^-)F \geq \Gamma_{\text{seq}}(\tau^-)F$, per cui basta dimostrare che $\Gamma_{\text{seq}}(\tau^-)F$ è τ-s.c.i. Facciamolo ad esempio nel caso i), essendo l'altro caso analogo.

Siccome F è convesso, anche $\Gamma_{\text{seq}}(\tau^-)F$ lo è. Inoltre $\Gamma_{\text{seq}}(\tau^-)F$, essendo τ_{seq}-s.c.i., risulta s.c.i. anche rispetto alla topologia della norma. Poiché, come conseguenza del Teorema di Hahn-Banach, un funzionale convesso e fortemente s.c.i. è anche debolmente s.c.i., segue la tesi. ■

Proposizione 2.10. *Supponiamo che il punto $x \in X$ abbia un sistema fondamentale di τ intorni numerabile. Allora:*

$$\Gamma(\tau^-)F(x) = \Gamma_{\text{seq}}(\tau^-)F(x) =$$
$$= \min\Big\{ \liminf_{h\to+\infty} F(x_n) : \{x_n\} \text{ è una successione } \tau-\text{convergente a } x\Big\}.$$

Dimostrazione. Sia

$$S_\tau F(x) := \inf\Big\{ \liminf_{h\to+\infty} F(x_n) : \{x_n\} \text{ è una successione } \tau - \text{convergente a } x\Big\}.$$

Poiché $\Gamma(\tau^-)F(x) \leq S_\tau F(x)$, per avere l' uguaglianza basta mostrare che vale anche la disuguaglianza opposta: facciamo vedere che esiste una successione $\{x_n\}$ τ-convergente a x tale che

$$\liminf_{h\to+\infty}\{F(x_n)\} \leq \Gamma(\tau^-)F(x).$$

Se il secondo membro è $+\infty$, la disuguaglianza è ovvia. Altrimenti, preso un sistema fondamentale numerabile e decrescente $\{U_n\}$ di τ-intorni di x in X, per

ogni $n \in N$ scegliamo $x_n \in U_n$ tale che

$$F(x_n) \leq \frac{1}{n} + \Gamma(\tau^-)F(x).$$

Passando al lim inf si ottiene la tesi.

Poi, dalle disuguaglianze

$$\Gamma_{\text{seq}}(\tau^-)F(x) \geq \Gamma(\tau^-)F(x) = S_\tau F(x) \geq \Gamma_{\text{seq}}(\tau^-)F(x)$$

segue $\Gamma_{\text{seq}}(\tau^-)F(x) = \Gamma(\tau^-)F(x)$. Infine il fatto che l'estremo inferiore nella definizione di S_τ è in realtà un minimo, può essere dimostrato con un procedimento di diagonalizzazione. ■

Nel seguito studieremo la semicontinuità inferiore di funzionali del tipo:

$$J(u) = F(u) + \chi_{\{G(u)=1\}}(u), \qquad u \in (X, \sigma),$$

dove:

(X, σ) è uno spazio di Sobolev munito della topologia debole $\sigma(X, X')$,

F e G sono funzionali non negativi, σ-s.c.i. su X,

χ_A è la funzione indicatrice dell'insieme A già introdotta a pagina 18.

Quando J non risulterà σ-s.c.i., ci occuperemo di trovare l'espressione del funzionale σ-rilassato di J; per brevità indicheremo tale funzionale con $\overline{J}$. Per la precedente proposizione, se F è coercivo, si ha:

$$\overline{J}(u) = \min\Big\{ \liminf_{n\to+\infty} J(u_n) : \{u_n\} \text{ è una successione } \sigma\text{-convergente a } u\Big\}.$$

Fin da adesso possiamo allora distinguere tre casi:

1) $G(u) > 1 \Longrightarrow \overline{J}(u) = +\infty$
2) $G(u) = 1 \Longrightarrow \overline{J}(u) = F(u)$
3) $G(u) < 1 \Longrightarrow F(u) \leq \overline{J}(u)$.

Si arriva a queste conclusioni tramite semplici considerazioni che esponiamo qui di seguito. Intanto, essendo F s.c.i. e $F \leq J$, si ha

$$\overline{J}(u) \geq F(u) \quad \forall u \in X.$$

Andiamo poi ad analizzare cosa succede in ciascuno dei tre casi:

$\underline{1^0 \text{ caso}}$: $G(u) > 1$.

Essendo G s.c.i., non esiste alcuna $u_n \to u$ tale che $G(u_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, e dunque $\overline{J}(u) = +\infty$.

$\underline{2^0 \text{ caso}}$: $G(u) = 1$.

La successione costante $u_n \equiv u$ è tale che $G(u_n) = 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, e si ha

$$\liminf_{n \to +\infty} F(u_n) = F(u);$$

dunque $\overline{J}(u) = F(u)$.

$\underline{3^0 \text{ caso}}$: $G(u) < 1$.

In tal caso possiamo solo scrivere $\overline{J}(u)$ come

$$\overline{J}(u) = F(u) + L(u),$$

dove il gap non negativo $L(u)$ verrà calcolato esplicitamente di volta in volta nelle varie situazioni che prenderemo in considerazione.

3. Spazi di Sobolev con peso

Questo capitolo sarà dedicato ad un'esposizione di risultati utili nel proseguimento, concernenti gli spazi di funzioni che introdurremo.

Premettiamo che, per motivi di spazio, durante tutto il capitolo non riporteremo alcuna dimostrazione, indirizzando chi fosse interessato a consultare [12], dove si trovano tutti i risultati qui esposti con le relative dimostrazioni, e dove è possibile trovare anche una dettagliata bibliografia circa gli articoli dei numerosi autori che si sono occupati di questa materia.

3.1. Principali definizioni

Sia Ω un dominio in $\mathbf{R}^N$. Indichiamo con $W(\Omega)$ l'insieme delle *funzioni peso* su Ω, cioè di tutte le funzioni misurabili, positive e finite q.o. su Ω.

Definizione 3.1. *Per $p \geq 1$, $w \in W(\Omega)$, lo spazio di Lebesgue con peso $L^p(\Omega; w)$ è l'insieme di tutte le funzioni $f = f(x)$ misurabili su Ω tali che risulti finita la norma:*

$$\|f\|_{p,\Omega,w} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_\Omega |f(x)|^p w(x)\, dx \right)^{1/p} & 1 \leq p < +\infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| & p = +\infty. \end{cases}$$

(Per $w \equiv 1$ otteniamo gli spazi di Lebesgue classici senza peso).

Osservazione 3.2. Poiché $f \in L^p(\Omega; w)$ se e soltanto se $f w^{\frac{1}{p}} \in L^p(\Omega)$ e $\|f\|_{p,\Omega,w} = \|f w^{\frac{1}{p}}\|_{p,\Omega}$ (con la "convenzione aritmetica" $\frac{1}{+\infty} = 0$), segue subito che $L^p(\Omega; w)$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma $\|\cdot\|_{p,\Omega,w}$.

Definizione 3.3. *Per $1 \leq p < +\infty$, $s = \{v_0, v_1, \ldots, v_N\} \subset W(\Omega)$, lo spazio di Sobolev con peso $W^{1,p}(\Omega; s)$ è l'insieme di tutte le funzioni $u \in L^p(\Omega; v_0)$ tali che le loro derivate distribuzionali $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ sono in $L^p(\Omega; v_i)$, $i = 1, \ldots, N$. Su questo*

spazio lineare definiamo la norma di $u \in W^{1,p}(\Omega; s)$ *come:*

$$\|u\|_{1,p,\Omega,s} = \left(\|u\|^p_{p,\Omega,v_0} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^p_{p,\Omega,v_i} \right)^{1/p}.$$

Osservazione 3.4. Se $v_i^{-\frac{1}{p}} \in L^{p'}_{\mathrm{loc}}$ allora si verifica che $W^{1,p}(\Omega; s)$ è uno spazio di Banach con la norma $\|\cdot\|_{1,p,\Omega,s}$; inoltre si può dimostrare che l'inclusione $C_0^\infty(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega; s)$ vale se e soltanto se $v_i \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$.

Nel seguito assumeremo sempre che le funzioni peso soddisfino le due condizioni di cui sopra. In tal caso è ben posta la definizione seguente.

Definizione 3.5. $W_0^{1,p}(\Omega; s)$ *è lo spazio di Banach dato dalla chiusura di* $C_0^\infty(\Omega)$ *in* $W^{1,p}(\Omega; s)$.

Se s è un peso del tipo $s = \{v_0, v_1, \ldots, v_N\}$, con $v_1 = \ldots = v_N$, indicheremo gli spazi $W^{1,p}(\Omega; s)$ e $W_0^{1,p}(\Omega; s)$ anche con $W^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$ e $W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$ e la norma $\|\cdot\|_{1,p,\Omega,s}$ con $\|\cdot\|_{1,p,\Omega,v_0,v_1}$.

3.2. Teoremi generali di immersione per spazi di Sobolev con peso

È possibile stabilire condizioni sull'insieme s di funzioni peso v_i, $i = 1, \ldots, N$ e sulla funzione peso w che garantiscano la continuità o la compattezza dell'immersione degli spazi di Sobolev con peso $W_0^{1,p}(\Omega; s)$ negli spazi di Lebesgue con peso $L^q(\Omega; w)$; secondo consuetudine, indicheremo con una freccia $\hookrightarrow$ un'immersione continua e con doppia freccia $\hookrightarrow\hookrightarrow$ un'immersione compatta.

In questo paragrafo riportiamo una serie di risultati a riguardo, dovuti principalmente a Gurka e Opic [8]. Essi sono fondati sul seguente metodo di base.

Per un dominio Ω di $\mathbf{R}^N$ sia $\{Q_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ un ricoprimento di Ω tale che $Q_n \subseteq Q_{n+1} \subset \Omega$ $\forall n \in \mathbf{N}$ e $\bigcup\limits_{n\in N} Q_n = \Omega$; supponendo di avere *immersioni locali*, ossia

che $\forall n \in \mathbf{N}$ valga:

$$W^{1,p}_{(0)}(Q_n; s) \hookrightarrow L^q(Q_n; w)$$

oppure

$$W^{1,p}_{(0)}(Q_n; s) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(Q_n; w),$$

si cercano ipotesi aggiuntive per avere *immersioni globali*, ossia perché valga:

$$W^{1,p}_{(0)}(\Omega; s) \hookrightarrow L^q(\Omega; w)$$

oppure

$$W^{1,p}_{(0)}(\Omega; s) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; w).$$

Lemma 3.6. *Sia $1 \leq p, q < +\infty$ e sia $W^{1,p}(Q_n; s) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(Q_n; w)$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Supponiamo che sia soddisfatta questa condizione:*

$(*)$ $\forall \epsilon > 0\ \exists \bar{n} \in N$ *tale che:*
$\forall u \in W^{1,p}(\Omega; s)$ *si ha:* $\|u\|^q_{q,\Omega,w} \leq \epsilon \|u\|^q_{1,p,\Omega,s} + \|u\|^q_{q,Q_{\bar{n}},w}$.

Allora $W^{1,p}(\Omega; s) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; w)$.

Viceversa, se $W^{1,p}(\Omega; s) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; w)$, allora vale $(*)$.

Osservazione 3.7. La condizione $(*)$ può essere riformulata così:

$$(**) \qquad \lim_{n \to +\infty} \sup_{\|u\|_{1,p,\Omega,s} \leq 1} \|u\|_{q,Q^n,w} = 0, \text{ dove } Q^n = \Omega - Q_n.$$

Mettendo insieme il Lemma 3.6 e l'Osservazione 3.7 si ottiene:

Teorema 3.8. *Sia $1 \leq p, q < +\infty$ e sia $W^{1,p}(Q_n; s) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(Q_n; w)$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Allora: $W^{1,p}(\Omega; s) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; w)$ se e solo se vale $(**)$.*

Introduciamo alcune notazioni. Sia X un sottospazio chiuso di $W^{1,p}(\Omega; s)$; poniamo

$$\|\cdot\|_X := \|\cdot\|_{1,p,\Omega,s};$$

inoltre, sia $X_n := \{u : u = v|_{Q_n},\ v \in X\}$; poniamo allora

$$\|\cdot\|_{X_n} := \|\cdot\|_{1,p,Q_n,s}.$$

In modo analogo al Teorema 3.8 si ha la generalizzazione seguente.

Teorema 3.9. *Sia $1 \leq p, q < +\infty$ e sia $X_n \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(Q_n; w)$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Allora $X \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; w)$ se e solo se vale questa condizione:*

$$(**)_1 \qquad \lim_{n\to+\infty} \sup_{\substack{u\in X \\ \|u\|_X \leq 1}} \|u\|_{q,Q^n,w} = 0.$$

Un risultato simile vale anche per l'immersione continua.

Teorema 3.10. *Sia $1 \leq p, q < +\infty$ e sia $X_n \hookrightarrow L^q(Q_n; w)$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Allora $X \hookrightarrow L^q(\Omega; s)$ se e solo se vale questa condizione:*

$$(**)_2 \qquad \lim_{n\to+\infty} \sup_{\substack{u\in X \\ \|u\|_X \leq 1}} \|u\|_{q,Q^n,w} < +\infty.$$

Osservazione 3.11. Consideriamo funzioni peso $w, v_0, v_1, \ldots, v_N$ e sottoinsiemi $Q_n \subset \Omega$ per i quali esistano delle costanti positive c_n, C_n tali che per q.o. $x \in Q_n$ sia

$$c_n \leq w(x) \leq C_n, \qquad c_n \leq v_i(x) \leq C_n \quad \forall i = 0, 1, \ldots, N.$$

Allora gli spazi con peso $L^q(Q_n; w)$ e $W^{1,p}(Q_n; s)$ risultano isomorfi agli spazi classici senza peso $L^q(Q_n)$ e $W^{1,p}(Q_n)$ e le immersioni locali $X_n \hookrightarrow L^q(Q_n; w)$ o $X_n \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(Q_n; w)$ potranno essere derivate dai classici teoremi di immersione di Sobolev. Per esempio, se per ogni $n \in \mathbf{N}$ è $Q_n \in C^{0,1}$ (la classe dei domini limitati con frontiera localmente descrivibile con funzioni lipschitziane), le condizioni da soddisfare per avere le immersioni locali saranno:

$$\begin{cases} \dfrac{N}{q} - \dfrac{N}{p} + 1 \geq 0 & \text{per la continuità,} \\ \dfrac{N}{q} - \dfrac{N}{p} + 1 > 0 & \text{per la compattezza,} \end{cases}$$

dove abbiamo escluso il caso critico in cui $p = N$, $q = +\infty$.

3.3. Teoremi di immersione per spazi di Sobolev con peso, caso $p \leq q$

L'obiettivo di questo paragrafo è riformulare, nel caso $1 \leq p \leq q < +\infty$, le condizioni $(**)_1$ e $(**)_2$ dei Teoremi 3.9 e 3.10 in termini delle funzioni peso $w, v_0, v_1, \ldots, v_N$. Si supporrà $v_1 = \ldots = v_N$ e quindi tratteremo gli spazi $W^{1,p}_{(0)}(\Omega; v_0, v_1)$. Sia Ω un dominio in $\mathbf{R}^N$ con la sola restrizione $\partial\Omega \neq \emptyset$. Indichiamo con $d(x)$ la distanza del punto x da $\partial\Omega$. Siano $\Omega_n \subset \Omega$ tali che

$$\left\{x \in \Omega : \frac{1}{n} < d(x) < n\right\} \subseteq \Omega_n \subseteq \left\{x \in \Omega : \frac{1}{n+1} < d(x) < n+1\right\},\ n \in \mathbf{N}.$$

Ovviamente è

$$\Omega_n \subseteq \Omega_{n+1} \subset \Omega\ \forall n \in \mathbf{N}, \quad \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \Omega_n = \Omega :$$

gli insiemi Ω_n giocheranno infatti il ruolo degli insiemi Q_n del precedente paragrafo. Supponiamo $\Omega_n \in C^{0,1}$ e denotiamo $\Omega^n = \text{int}(\Omega - \Omega_n)$.

Teorema 3.12. *(Condizioni sufficienti per la continuità e la compattezza). Sia $1 \leq p \leq q < +\infty$. Supponiamo inoltre:*

i) esistono un intero $\bar{n} \in \mathbf{N}$, una funzione $r(x)$ positiva e misurabile su $\Omega^{\bar{n}}$, ed una costante $C_r \geq 1$ tali che

$$\begin{cases} r(x) \leq \dfrac{d(x)}{3} & \text{per q.o. } x \in \Omega^{\bar{n}}, \\ \dfrac{1}{C_r} \leq \dfrac{r(y)}{r(x)} \leq C_r & \text{per q.o. } x \in \Omega^{\bar{n}},\ y \in B(x, r(x)); \end{cases}$$

ii) esiste una costante K_0 tale che

$$v_1(x) r^{-p}(x) \leq K_0 v_0(x) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega^{\bar{n}};$$

iii) esistono due funzioni positive e misurabili $b_0(x)$ e $b_1(x)$ su $\Omega^{\bar{n}}$ tali che, per q.o. $x \in \Omega^{\bar{n}}$, $y \in B(x, r(x))$,

$$w(y) \leq b_0(x) \quad e \quad b_1(x) \leq v(y).$$

Poniamo

$$B_n := \sup_{\Omega^n} \frac{b_0^{1/q}(x)}{b_1^{1/p}(x)}\, r^{N/q-N/p+1}(x).$$

Si ha: se $W^{1,p}(\Omega_n; v_0, v_1) \hookrightarrow L^q(\Omega_n; w)$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *e*

$$(***)_1 \qquad \lim_{n\to+\infty} B_n = B < +\infty,$$

allora

$$W^{1,p}(\Omega; v_0, v_1) \hookrightarrow L^q(\Omega; w);$$

se $W^{1,p}(\Omega_n; v_0, v_1) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega_n; w)$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *e*

$$(***)_2 \qquad \lim_{n\to+\infty} B_n = 0,$$

allora

$$W^{1,p}(\Omega; v_0, v_1) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; w).$$

Teorema 3.13. *(Condizioni necessarie per la continuità e la compattezza). Sia* $1 \le p \le q < +\infty$. *Supponiamo di avere:*

i) come nel Teorema 3.12;

ii) esiste una costante $\hat{K}_0$ *tale che*

$$v_1(x) r^{-p}(x) \ge \hat{K}_0 v_0(x) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega^{\bar{n}};$$

iii) esistono due funzioni positive e misurabili $\hat{b}_0(x)$ *e* $\hat{b}_1(x)$ *su* $\Omega^{\bar{n}}$ *tali che, per q.o.* $x \in \Omega^{\bar{n}}$, $y \in B(x, r(x))$,

$$w(y) \ge \hat{b}_0(x) \quad e \quad \hat{b}_1(x) \ge v_1(y).$$

Poniamo

$$\widehat{B}_n := \sup_{\Omega^n} \frac{\hat{b}_0^{1/q}(x)}{\hat{b}_1^{1/p}(x)}\, r^{N/q-N/p+1}(x).$$

Si ha che:

$$W^{1,p}(\Omega; v_0, v_1) \hookrightarrow L^q(\Omega; w) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \widehat{B}_n = \widehat{B} < +\infty;$$
$$W^{1,p}(\Omega; v_0, v_1) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; w) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \widehat{B}_n = 0.$$

Combinando i due precedenti teoremi si ottiene il seguente risultato.

Teorema 3.14. *(Condizioni necessarie e sufficienti per la continuità e la compattezza). Sia $1 \leq p \leq q < +\infty$. Supponiamo di avere:*

i) come nei due teoremi precedenti;

ii) esistono due costanti positive $k_0 < K_0$ tali che

$$k_0 v_0(x) \leq v_1(x) r^{-p}(x) \leq K_0 v_0(x) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega^{\bar{n}};$$

iii) esistono due funzioni positive e misurabili $b_0(x)$ e $b_1(x)$ su $\Omega^{\bar{n}}$ tali che, per q.o. $x \in \Omega^{\bar{n}}$, $y \in B(x, r(x))$,

$$c_0 b_0(x) \leq w(y) \leq C_0 b_0(x), \qquad c_1 b_1(x) \leq v_1(y) \leq C_1 b_1(x).$$

Sia inoltre B_n definito in modo analogo ai teoremi precedenti. Si ha:
se $W^{1,p}(\Omega_n; v_0, v_1) \hookrightarrow L^q(\Omega_n; w)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora

$$W^{1,p}(\Omega; v_0, v_1) \hookrightarrow L^q(\Omega; w) \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} B_n = B < +\infty;$$

se $W^{1,p}(\Omega_n; v_0, v_1) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega_n; w)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, allora

$$W^{1,p}(\Omega; v_0, v_1) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; w) \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} B_n = 0.$$

Osservazione 3.15. Poiché $W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$ è un sottospazio chiuso di $W^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$, nelle ipotesi del Teorema 3.14 vale la stessa tesi per la continuità o la compattezza delle immersioni di $W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$ in $L^q(\Omega; v_0, v_1)$; d'altra parte dalla dimostrazione del teorema si evince che la tesi continua ad essere vera se indeboliamo le ipotesi sostituendo in esse $W^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$ con $W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$. Pertanto il Teorema 3.14 resta valido anche per $W_0^{1,p}(\Omega; v_0, v_1)$.

Esempio 3.16. Siano $1 \leq p, q < +\infty$; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$; sia Ω un dominio limitato di $\mathbf{R}^N$. Per $x \in \Omega$ poniamo: $w(x) = d^\alpha(x)$, $v_0(x) = d^{\beta-p}(x)$, $v_1(x) = d^\beta(x)$. Per soddisfare le ipotesi del Teorema 3.14 possiamo prendere $\bar{n} = 2$, $r(x) = \frac{d(x)}{3}$ e $b_0(x) = w(x)$, $b_1(x) = v_1(x)$ su $\Omega^{\bar{n}}$; il numero B_n avrà la forma:

$$B_n = c \sup_{x \in \Omega^n} d^{\frac{\alpha}{q} - \frac{\beta}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1}(x).$$

i) *L'immersione continua* $W^{1,p}(\Omega; d^{\beta-p}, d^\beta) \hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha)$.

Sia $\frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 \geq 0$, condizione che garantisce la continuità dell'immersione locale. Dal Teorema 3.14 segue allora che si ha la continuità dell'immersione globale se e solo se

$$\frac{\alpha}{q} - \frac{\beta}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 \geq 0.$$

ii) *L'immersione compatta* $W^{1,p}(\Omega; d^{\beta-p}, d^\beta) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha)$.

Sia $\frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 > 0$, condizione che garantisce la compattezza dell'immersione locale. Dal Teorema 3.14 segue allora che si ha la compattezza dell'immersione globale se e solo se

$$\frac{\alpha}{q} - \frac{\beta}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 > 0.$$

Le stesse condizioni riguardano anche le immersioni di $W_0^{1,p}(\Omega, d^{\beta-p}, d^\beta)$ in $L^q(\Omega, d^\alpha)$ (vedi Osservazione 3.15).

Quanto abbiamo visto finora può essere utilizzato per ottenere una serie di teoremi sulle immersioni degli spazi di Sobolev con peso $W^{1,p}(\Omega; d^\beta, d^\beta)$ negli spazi di Lebesgue con peso $L^q(\Omega; d^\alpha)$. Teoremi di questo tipo sono stati formulati inizialmente da Kufner (cfr. [10]) per il caso $p = q$ e Ω dominio limitato di classe $C^{0,k}$. Precisiamo la definizione di questa classe di domini, visto che compariranno in molti enunciati a seguire.

Definizione 3.17. *Si dice che un dominio limitato* $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ *è di classe* $C^{0,k}$, $k \in (0, 1]$, *se sono soddisfatte queste condizioni:*

i) esiste un numero finito m *di sistemi di coordinate cartesiane* (y_i', y_{i_N}), $y_i' = (y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{N-1}})$ *e uno stesso numero di funzioni* $a_i = a_i(y_i')$ *definite sulla*

chiusura dei cubi $(N-1)$*-dimensionali* $\Delta_i = \{y_i' : |y_{i_j}| < \delta,\ j = 1, \dots, N-1\}$, $i = 1, \dots, m$ *tali che*

$$\forall x \in \partial\Omega \ \ \exists i \in \{1, \dots, m\} : x = (y_i', y_{i_N}),\ y_{i_N} = a_i(y_i');$$

ii) le funzioni a_i *sono hölderiane di esponente* k *su* $\overline{\Delta}_i$*, cioè* $\exists A > 0 : \forall y_i', z_i' \in \overline{\Delta}_i$

$$|a_i(y_i') - a_i(z_i')| \le A\,|y_i' - z_i'|^k, \quad i = 1, \dots, m;$$

iii) esiste $\lambda \in (0,1)$ *tale che gli insiemi* $Q_i = \{(y_i', y_{i_N}) : y_i' \in \Delta_i,\ y_{i_N} \in (a_i(y_i') - \lambda,\ a_i(y_i') + \lambda)\}$ *soddisfano, per* $i = 1, \dots, m$*:*

$$U_i = Q_i \cap \Omega = \{(y_i', y_{i_N}) : y_i' \in \Delta_i,\ y_{i_N} \in (a_i(y_i') - \lambda,\ a_i(y_i'))\},$$
$$\Gamma_i = Q_i \cap \partial\Omega = \{(y_i', y_{i_N}) : y_i' \in \Delta_i,\ y_{i_N} = a_i(y_i')\}.$$

I risultati di Kufner si basano sull'uso di coordinate locali (y_i', y_{i_N}) e sulla classica disuguaglianza di Hardy unidimensionale, usata rispetto alla variabile y_{i_N}:

$$\left(\int_0^{+\infty} |u(t)|^p t^{\epsilon - p}\, dt\right)^{1/p} \le \frac{p}{|\epsilon - p + 1|} \left(\int_0^{+\infty} |u'(t)|^p t^{\epsilon}\, dt\right)^{1/p};$$

tale disuguaglianza è valida per ogni $u \in C_0^\infty(0, +\infty)$ che soddisfi le condizioni

i) $\qquad u(0) = \lim_{t \to 0} u(t) = 0 \qquad$ per $\epsilon < p - 1$,

ii) $\qquad u(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} u(t) = 0 \qquad$ per $\epsilon > p - 1$,

supposto $p > 1$ e $\epsilon \neq p - 1$.

Gli enunciati di Kufner sono stati poi migliorati e generalizzati anche al caso $p \le q$ da Gurka e Opic (cfr. [8]), usando disuguaglianze tipo Hardy in versioni più raffinate e sfruttando i risultati del precedente paragrafo, con particolare riferimento all'Esempio 3.16. Riassumiamo qui i teoremi di immersione nella loro versione più aggiornata e completa possibile.

Teorema 3.18. *Sia* $1 \le p \le q < +\infty$, $\frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 \ge 0$, $\Omega \in C^{0,k}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. *Allora si ha che* $W^{1,p}(\Omega; d^\beta, d^\beta) \hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha)$ *se vale una delle seguenti condizioni:*

i) $\beta > kp$, $\quad \frac{\alpha}{q} - \frac{\beta}{kp} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 \ge 0;$

ii) $k(p-1) < \beta \le kp$, $\quad \frac{\alpha}{q} - \frac{\beta}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + k \ge 0;$

iii) $\beta \le k(p-1)$, $\quad \frac{\alpha}{q} - \frac{k(p-1)}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + k > 0.$

Teorema 3.19. *Sia* $1 \le p \le q < +\infty$, $\frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 > 0$, $\Omega \in C^{0,k}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. *Allora si ha che* $W^{1,p}(\Omega; d^\beta, d^\beta) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha)$ *se vale una delle seguenti condizioni:*

i) $\beta > kp$, $\quad \frac{\alpha}{q} - \frac{\beta}{kp} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 > 0;$

ii) $k(p-1) < \beta \le kp$, $\quad \frac{\alpha}{q} - \frac{\beta}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + k > 0;$

iii) $\beta \le k(p-1)$, $\quad \frac{\alpha}{q} - \frac{k(p-1)}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + k > 0.$

Teorema 3.20. *Sia* $1 \le p \le q < +\infty$, $\frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 \ge 0$, $\Omega \in C^{0,k}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. *Allora si ha che* $W_0^{1,p}(\Omega; d^\beta, d^\beta) \hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha)$ *se vale una delle seguenti condizioni:*

i) $\beta > kp$, $\quad \frac{\alpha}{q} - \frac{\beta}{kp} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 \ge 0;$

ii) $0 < \beta \le kp$, $\quad \frac{\alpha}{q} - \frac{\beta}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + k \ge 0, \qquad \beta \ne k(p-1);$

iii) $\beta \le 0$, $\quad \frac{\alpha}{q} - \frac{k\beta}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + k \ge 0;$

iv) $\beta = k(p-1)$, $\quad \frac{\alpha}{q} - \frac{k(p-1)}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + k > 0.$

Teorema 3.21. *Sia* $1 \le p \le q < +\infty$, $\frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 > 0$, $\Omega \in C^{0,k}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. *Allora si ha che* $W_0^{1,p}(\Omega; d^\beta, d^\beta) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha)$ *se vale una delle seguenti condizioni:*

i) $\beta > kp$, $\quad \frac{\alpha}{q} - \frac{\beta}{kp} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 > 0;$

ii) $0 < \beta \le kp$, $\quad \frac{\alpha}{q} - \frac{\beta}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + k > 0. \qquad \beta \ne k(p-1);$

iii) $\beta \le 0$, $\quad \frac{\alpha}{q} - \frac{k\beta}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + k > 0;$

iv) $\beta = k(p-1)$, $\quad \frac{\alpha}{q} - \frac{k(p-1)}{p} + \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + k > 0.$

I Teoremi 3.18 – 3.21 danno soltanto condizioni *sufficienti* per avere le corrispondenti immersioni. In realtà, per $k = 1$, queste condizioni sono anche *necessarie*, eccettuate le condizioni iii) nei Teoremi 3.18 e 3.19, e le condizioni iv) nei Teoremi 3.20 e 3.21.

Lemma 3.22. *Sia $1 \le p, q < +\infty$ e sia G un dominio limitato di $\mathbf{R}^N$. Allora si ha:*

$$W_0^{1,p}(G) \hookrightarrow L^q(G) \implies \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 \ge 0;$$
$$W_0^{1,p}(G) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(G) \implies \frac{N}{q} - \frac{N}{p} + 1 > 0.$$

Lemma 3.23. *Sia $1 \le p, q < +\infty$ e sia Ω un dominio limitato di $\mathbf{R}^N$. Allora si ha:*

$$W_0^{1,p}(\Omega, d^\beta, d^\beta) \hookrightarrow L^q(\Omega, d^\alpha) \implies \begin{cases} \dfrac{N}{q} - \dfrac{N}{p} + 1 \ge 0, \\ \dfrac{\alpha}{q} - \dfrac{\beta}{p} + \dfrac{N}{q} - \dfrac{N}{p} + 1 \ge 0; \end{cases}$$
$$W_0^{1,p}(\Omega, d^\beta, d^\beta) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega, d^\alpha) \implies \begin{cases} \dfrac{N}{q} - \dfrac{N}{p} + 1 > 0, \\ \dfrac{\alpha}{q} - \dfrac{\beta}{p} + \dfrac{N}{q} - \dfrac{N}{p} + 1 > 0. \end{cases}$$

Unendo il Lemma 3.23 ai Teoremi 3.18 $\to$ 3.21 otteniamo i prossimi due teoremi.

Teorema 3.24. *Sia $1 \le p \le q < +\infty$, $\Omega \in C^{0,1}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\beta > p - 1$. Allora si ha:*

$$W^{1,p}(\Omega, d^\beta, d^\beta) \hookrightarrow L^q(\Omega, d^\alpha) \iff \begin{cases} \dfrac{N}{q} - \dfrac{N}{p} + 1 \ge 0, \\ \dfrac{\alpha}{q} - \dfrac{\beta}{p} + \dfrac{N}{q} - \dfrac{N}{p} + 1 \ge 0; \end{cases}$$
$$W^{1,p}(\Omega, d^\beta, d^\beta) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega, d^\alpha) \iff \begin{cases} \dfrac{N}{q} - \dfrac{N}{p} + 1 > 0, \\ \dfrac{\alpha}{q} - \dfrac{\beta}{p} + \dfrac{N}{q} - \dfrac{N}{p} + 1 > 0. \end{cases}$$

Teorema 3.25. *Sia $1 \le p \le q < +\infty$, $\Omega \in C^{0,1}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\beta \neq p-1$. Allora si ha:*

$$W_0^{1,p}(\Omega, d^\beta, d^\beta) \hookrightarrow L^q(\Omega, d^\alpha) \iff \begin{cases} \dfrac{N}{q} - \dfrac{N}{p} + 1 \ge 0, \\ \dfrac{\alpha}{q} - \dfrac{\beta}{p} + \dfrac{N}{q} - \dfrac{N}{p} + 1 \ge 0; \end{cases}$$

$$W_0^{1,p}(\Omega, d^\beta, d^\beta) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega, d^\alpha) \iff \begin{cases} \dfrac{N}{q} - \dfrac{N}{p} + 1 > 0, \\ \dfrac{\alpha}{q} - \dfrac{\beta}{p} + \dfrac{N}{q} - \dfrac{N}{p} + 1 > 0. \end{cases}$$

3.4. Teoremi di immersione per spazi di Sobolev con peso, caso $p > q$

Nel caso $p > q$ per spazi di Sobolev con pesi generici non si hanno teoremi analoghi a quelli visti per $p \le q$ e pertanto dobbiamo metterci subito nell'ipotesi di pesi speciali come quelli investigati nella seconda parte del paragrafo precedente, ovvero potenze della distanza dal bordo del dominio. Per questi pesi particolari, usando coordinate locali, disuguaglianze tipo Hardy ed i teoremi di validità generale del Paragrafo 3.2, si ottengono i seguenti risultati:

Teorema 3.26. *Sia $1 \le q < p < +\infty$, $\Omega \in C^{0,k}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Allora si ha che $W^{1,p}(\Omega; d^\beta, d^\beta) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha)$ se vale una delle seguenti condizioni:*

i) $\beta > k(p-1) + \dfrac{kp}{q}$, $\qquad \dfrac{\alpha}{q} - \dfrac{\beta}{kp} + \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p} + 1 > 0;$

ii) $k(p-1) < \beta \le k(p-1) + \dfrac{kp}{q}$, $\qquad \dfrac{\alpha}{q} - \dfrac{\beta}{p} + k\left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p} + 1\right) > 0;$

iii) $\beta \le k(p-1)$, $\qquad \alpha > -k.$

Teorema 3.27. *Sia $1 \le q < p < +\infty$, $\Omega \in C^{0,k}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Allora si ha che $W_0^{1,p}(\Omega; d^\beta, d^\beta) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha)$ se vale una delle seguenti condizioni:*

i) $\beta > k(p-1) + \dfrac{kp}{q}$, $\qquad \dfrac{\alpha}{q} - \dfrac{\beta}{kp} + \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p} + 1 > 0;$

ii) $0 < \beta \leq k(p-1) + \dfrac{kp}{q}$, $\qquad \dfrac{\alpha}{q} - \dfrac{\beta}{p} + k\left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p} + 1\right) > 0;$

iii) $\beta \leq 0$, $\qquad \dfrac{\alpha}{q} - \dfrac{k\beta}{p} + k\left(\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p} + 1\right) > 0.$

Questi due teoremi forniscono soltanto condizioni *sufficienti* per la compattezza delle immersioni in questione. Similmente a quanto accade per $p \leq q$, quando $k = 1$ tali condizioni si rivelano anche *necessarie*.

Teorema 3.28. *Sia* $1 \leq q < p < +\infty$, $\Omega \in C^{0,1}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. *Allora si ha che* $W^{1,p}(\Omega; d^\beta, d^\beta) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha)$ *se e solo se vale una delle seguenti condizioni:*

i) $\beta > (p-1)$, $\qquad \dfrac{\alpha}{q} - \dfrac{\beta}{p} + \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p} + 1 > 0;$

ii) $-1 < \beta \leq (p-1)$, $\qquad \alpha > -1;$

iii) $\beta \leq -1$, $\qquad \dfrac{\alpha}{q} - \dfrac{\beta}{p} + \dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p} + 1 > 0.$

Teorema 3.29. *Sia* $1 \leq q < p < +\infty$, $\Omega \in C^{0,1}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. *Allora si ha:*

$$W_0^{1,p}(\Omega; d^\beta, d^\beta) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha) \iff \frac{\alpha}{q} - \frac{\beta}{p} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p} + 1 > 0.$$

Osservazione 3.30. Dalle dimostrazioni dei Teoremi 3.28 e 3.29 emerge il fatto rilevante che per $p > q$ le immersioni di $W^{1,p}(\Omega; d^\beta, d^\beta)$ e di $W_0^{1,p}(\Omega; d^\beta, d^\beta)$ in $L^q(\Omega; d^\alpha)$ o sono compatte oppure non sono neanche continue.

4. Problemi unidimensionali

In questo capitolo trattiamo esclusivamente problemi unidimensionali.

Ricordiamo che i funzionali che studieremo saranno sempre del tipo di quelli introdotti nel Paragrafo 2.3, cioè

$$J(u) = F(u) + \chi_{\{G(u)=1\}}(u), \qquad u \in (X, \sigma),$$

con (X, σ) spazio di Sobolev munito della topologia debole $\sigma(X, X')$, F e G funzionali non negativi e semicontinui su (X, σ) e $\chi_{\{\cdot\}}$ funzione indicatrice dell'insieme che costituisce il vincolo.

Prima di passare al caso N-dimensionale, ci è sembrato opportuno riservare un capitolo a problemi unidimensionali perché in tal caso si possono dare dei risultati più completi, sia dal punto di vista della semicontinuità che da quello del rilassamento: nel primo paragrafo mostreremo come si possono ottenere risultati di semicontinuità per via elementare, senza ricorrere ai teoremi del precedente capitolo; nel secondo paragrafo vedremo poi che, in mancanza di semicontinuità, si riesce a caratterizzare il funzionale rilassato con una formula di rappresentazione di tipo integrale, dovuta a Buttazzo e Mizel [7].

4.1. Alcuni risultati di semicontinuità nel caso unidimensionale

Proposizione 4.1. *Sia I l'intervallo $(0, 1)$, $p > 1$, $q \geq 1$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Il funzionale*

$$J(u) = \int_0^1 (|u|^p + |u'|^p)\, dx + \chi_{\left\{\int_0^1 x^\alpha |u|^q\, dx = 1\right\}}(u)$$

è debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente su $W^{1,p}(I)$ se e solo se

$$\alpha p + p - q + pq > 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo $\alpha p + p - q + pq > 0$ ed indichiamo con le notazioni ormai usuali

$$F(u) = \int_0^1 (|u|^p + |u'|^p)\, dx; \qquad G(u) = \int_0^1 x^\alpha |u|^q\, dx.$$

Per avere la semicontinuità di J bisogna dimostrare che

$$u_h \to u \text{ debolmente in } W^{1,p}(I) \Longrightarrow J(u) \le \liminf_{h\to+\infty} J(u_h).$$

Se $\liminf_{h\to+\infty} J(u_h) = +\infty$, non c'è niente da dimostrare. Se $\liminf_{h\to+\infty} J(u_h) < +\infty$, allora per ogni $h_0 \in \mathbf{N}$ esistono infiniti $h \ge h_0$ tali che $G(u_h) = 1$ e quindi, a meno di sottosuccessioni, possiamo supporre $G(u_h) = 1$ per ogni $h \in \mathbf{N}$.

Osserviamo poi che, essendo F semicontinuo inferiormente su $W^{1,p}$ (vedi pagina 10), si ha $F(u) \le \liminf_{h\to+\infty} F(u_h)$ e pertanto sarà $J(u) \le \liminf_{h\to+\infty} J(u_h)$ se e solo se $G(u) = 1$. In conclusione basta far vedere che

$$u_h \to u \text{ debolmente in } W^{1,p}(I),\ G(u_h) = 1\ \forall h \in \mathbf{N} \Longrightarrow G(u) = 1.$$

Sia dunque $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(I)$ con $G(u_h) = 1$ per ogni $h \in \mathbf{N}$. Poiché per la proprietà triangolare della norma $\|\cdot\|_{q,I,x^\alpha}$ si ha $G(u_h - u)^{1/q} \ge G(u_h)^{1/q} - G(u)^{1/q}$, basterà dimostrare che $G(u_h - u)$ è infinitesimo per $h \to +\infty$. Scriviamo $G(u_h - u)$ come somma di due termini:

$$\int_0^1 x^\alpha |u_h - u|^q\, dx = \int_0^\epsilon x^\alpha |u_h - u|^q\, dx + \int_\epsilon^1 x^\alpha |u_h - u|^q\, dx.$$

Il secondo termine è infinitesimo per $h \to +\infty$ per ogni $\epsilon \in (0,1)$ in quanto si può maggiorare con

$$\|u_h - u\|^q_{\infty,I} \int_\epsilon^1 x^\alpha\, dx,$$

che è infinitesimo per $h \to +\infty$. Infatti l'immersione di $W^{1,p}(I)$ in $C(\overline{I})$ risulta compatta per ogni $p > 1$ e quindi $\|u_h - u\|_{\infty,I} \to 0$.

Il primo termine è infinitesimo per $\epsilon \to 0$:

$$\int_0^\epsilon x^\alpha |u_h - u|^q\, dx \le \int_0^\epsilon x^\alpha \left(\int_0^x |u_h'(t) - u'(t)|\, dt \right)^q dx \le$$
$$\le \int_0^\epsilon x^{\alpha + \frac{q}{p'}} \|u_h' - u'\|^q_{p,I}\, dx = \|u_h' - u'\|^q_{p,I} \int_0^\epsilon x^{\alpha+\frac{q}{p'}}\, dx \to 0,$$

dove abbiamo indicato con p' l'esponente coniugato di p; poiché $u_h' \to u'$ debolmente in $L^p(I)$, $\|u_h' - u'\|_{p,I}$ risulta limitato, mentre $\int_0^\epsilon x^{\alpha+\frac{q}{p'}}\,dx$ tende a 0 per $\epsilon \to 0$ purché $\alpha + \frac{q}{p'} > -1$, ossia $\alpha p + p - q + pq > 0$, che è vero per ipotesi.

Quindi facendo prima il limite per $h \to +\infty$ e poi per $\epsilon \to 0$ abbiamo la tesi.

Consideriamo ora il caso $\alpha p + p - q + pq \leq 0$. Per negare la semicontinuità di J esibiamo un controesempio, mostrando che esiste $u_h \to 0$ debolmente in $W^{1,p}$ tale che $G(u_h) = 1$ per ogni $h \in \mathbf{N}$; questo ci darà la tesi poiché avremo

$$+\infty = J(0) > \liminf_{h\to+\infty} J(u_h) = \liminf_{h\to+\infty} F(u_h).$$

Fissiamo una funzione $\Phi \in C_0^\infty(I)$ tale che $\|\Phi\|_{q,I} = 1$ ed una successione $r_h \downarrow 0$. Poniamo poi

$$u_h(x) := r_h^{-1/q}\, x^{-\alpha/q}\, \Phi\left(\frac{x}{r_h}\right) \quad \text{per ogni } h \in \mathbf{N}.$$

La successione $\{u_h\}$ soddisfa il vincolo per costruzione:

$$\int_0^1 x^\alpha |u_h|^q\,dx = \int_0^1 r_h^{-1} \left|\Phi\left(\frac{x}{r_h}\right)\right|^q\,dx = \int_0^1 |\Phi(y)|^q\,dy = 1.$$

Si ha inoltre

$$F(u_h) = \int_0^1 (|u_h|^p + |u_h'|^p)\,dx = r_h^{-\frac{p}{q}-\frac{\alpha p}{q}+1} \int_0^1 y^{-\frac{\alpha p}{q}} |\Phi(y)|^p\,dy + \\ + r_h^{-\frac{p}{q}-\frac{\alpha p}{q}-p+1} \int_0^1 \left|-\frac{\alpha}{q} y^{-\frac{\alpha}{q}-1}\Phi(y) + y^{-\frac{\alpha}{q}}\Phi'(y)\right|^p\,dy.$$

Se $-\frac{p}{q} - \frac{\alpha p}{q} - p + 1 > 0$, ossia $\alpha p + p - q + pq < 0$, la successione $\{u_h\}$ converge fortemente a 0 in $W^{1,p}(I)$.

Se $-\frac{p}{q} - \frac{\alpha p}{q} - p + 1 = 0$, ossia $\alpha p + p - q + pq = 0$, la successione $\{u_h\}$ è limitata in $W^{1,p}(I)$ e quindi, a meno di passare ad un'estratta, possiamo supporre che converga debolmente in $W^{1,p}(I)$; poiché $u_h \to 0$ puntualmente, il suo limite debole dovrà essere necessariamente 0. ∎

Proposizione 4.2. *Sia I l'intervallo $(0,1)$ di $\mathbf{R}$, $p > 1$, $q \geq 1$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Il funzionale*

$$J(u) = \int_0^1 (x^{\beta-p}|u|^p + x^\beta |u|'^p)\, dx + \chi_{\left\{\int_0^1 x^\alpha |u|^q\, dx = 1\right\}}(u)$$

è debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente su $W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta)$ se e solo se

$$\alpha p - \beta q + p - q + pq > 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo $\alpha p - \beta q + p - q + pq > 0$. Come abbiamo già spiegato nel corso della precedente dimostrazione, si tratta di far vedere che

$$u_h \to u \text{ debolmente in } W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta),\ G(u_h) = 1\ \forall h \in \mathbf{N} \Longrightarrow G(u_h - u) \to 0.$$

Dimostreremo ciò separatamente quando $p < q$, $p = q$, $p > q$.

1) $p > q$.

Cerchiamo un γ tale che $x^\gamma u \in W^{1,p}(I)$. Deve essere:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_I x^{\gamma p}|u|^p\, dx < +\infty, \\ \displaystyle\int_I |x^\gamma u' + \gamma x^{\gamma-1} u|^p\, dx < +\infty. \end{cases}$$

Queste due condizioni sono entrambe soddisfatte scegliendo $\gamma = \frac{\beta}{p}$. Inoltre si ha

$$\int_I x^\alpha |u_h - u|^q\, dx \leq \left\| x^{\frac{\beta}{p}}(u_h - u) \right\|_{\infty,I}^{\epsilon} \int_I x^{\alpha - \frac{\beta\epsilon}{p}} |u_h - u|^{q-\epsilon}\, dx.$$

Mostriamo che $\left\| x^{\frac{\beta}{p}}(u_h - u) \right\|_{\infty,I} \to 0$. Se è $x^{\frac{\beta}{p}}(u_h - u) \to 0$ debolmente in $W^{1,p}(I)$, l'affermazione segue dall'immersione compatta di $W^{1,p}(I)$ in $C(\overline{I})$ per $p > 1$. Bisogna allora dimostrare che: $u_h - u \to 0$ debolmente in $W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta)$ implica $x^{\frac{\beta}{p}}(u_h - u) \to 0$ debolmente in $W^{1,p}(I)$.

Preso $F \in \left(W^{1,p}(I)\right)'$, la tesi è che $\langle F, x^{\frac{\beta}{p}}(u_h - u)\rangle \to 0$. Il funzionale $x^{\frac{\beta}{p}}F$ definito da $\langle x^{\frac{\beta}{p}}F, v\rangle := \langle F, x^{\frac{\beta}{p}}v\rangle$ risulta lineare e continuo su $W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^{\beta})$: siano $f_0, f_1 \in L^{p'}(I)$ tali che $\langle F, v\rangle = \int_I (f_0 v + f_1 v')\,dx$ per ogni $v \in W^{1,p}(I)$ e sia $u \in W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^{\beta})$:

$$\left|\langle x^{\frac{\beta}{p}}F, u\rangle\right| = \left|\langle F, x^{\frac{\beta}{p}}u\rangle\right| = \left|\int_I \left[f_0 x^{\frac{\beta}{p}}u + f_1\left(x^{\frac{\beta}{p}}u' + \frac{\beta}{p}x^{\frac{\beta}{p}-1}u\right)\right]dx\right| \leq$$

$$\leq \left(\int_I x^{\beta}|u|^p\,dx\right)^{1/p}\|f_0\|_{p',I} + \left[\left(\int_I x^{\beta}|u'|^p\,dx\right)^{1/p} + \right.$$

$$\left. + \frac{|\beta|}{p}\left(\int_I x^{\beta-p}|u|^p\,dx\right)^{1/p}\right]\|f_1\|_{p',I} \leq$$

$$\leq \left(\|f_0\|_{p',I} + \frac{|\beta|}{p}\,\|f_1\|_{p',I}\right)\left(\int_I x^{\beta-p}|u|^p\,dx\right)^{1/p} + \|f_1\|_{p',I}\left(\int_I x^{\beta}|u'|^p\,dx\right)^{1/p} \leq$$

$$\leq K\|u\|_{1,p,I,x^{\beta-p},x^{\beta}}.$$

Pertanto, se $u_h - u \to 0$ debolmente in $W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^{\beta})$, si ha $\langle x^{\frac{\beta}{p}}F, u_h - u\rangle \to 0$, ossia $\langle F, x^{\frac{\beta}{p}}(u_h - u)\rangle \to 0$.

Ritornando alla stima di $G(u_h - u)$, abbiamo dimostrato che quest'ultimo è infinitesimo per $h \to +\infty$ purché esista un $\epsilon > 0$ tale che $\int_I x^{\alpha - \frac{\beta\epsilon}{p}}|u_h - u|^{q-\epsilon}\,dx$ sia limitato.

Dimostriamo ora l'esistenza di un tale ϵ.

Cerchiamo $x_1, x_2, y_1, y_2, \epsilon$ tali che:

$$\alpha - \frac{\beta\epsilon}{p} = x_1 + x_2 \tag{1}$$

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = 1 \tag{2}$$

$$x_2 y_2 = \beta - p \tag{3}$$

$$(q - \epsilon)y_2 = p \tag{4}$$

$$x_1 y_1 > -1 \tag{5}$$

$$y_1 \geq 1 \tag{6}$$

$$y_2 \geq 1 \tag{7}$$

$$\epsilon > 0. \tag{8}$$

Dall'equazione (4) ricaviamo

$$y_2 = \frac{p}{q-\epsilon};$$

sostituendo y_2 nella (3) otteniamo

$$x_2 = \frac{(\beta - p)(q-\epsilon)}{p};$$

sostituendo y_2 nella (2) otteniamo

$$y_1 = \frac{p}{p-(q-\epsilon)};$$

sostituendo x_2 nella (1) otteniamo

$$x_1 = \alpha - \frac{\beta\epsilon}{p} - \frac{(\beta-p)(q-\epsilon)}{p}.$$

Imponendo (5) si trova

$$f(\epsilon) := \frac{\alpha p - \beta q + pq - \epsilon p}{p - q + \epsilon} > -1.$$

Poiché f è une funzione continua di ϵ, se $f(0) > -1$ esiste un $\bar{\epsilon} > 0$ tale che $f(\bar{\epsilon}) > -1$; ma $f(0) = \frac{\alpha p - \beta q + pq}{p-q}$ e quindi, purché $p > q$, si ha

$$f(0) > -1 \iff \alpha p - \beta q + pq > -p + q,$$

e l'ultima disuguaglianza è vera per ipotesi. Restano da verificare (6) e (7):

$$y_1 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{p}{p-q+\epsilon} \geq 1; \qquad y_2 \geq 1 \Leftrightarrow \frac{p}{q-\epsilon} \geq 1.$$

Entrambe queste richieste sono soddisfatte pur di prendere ϵ abbastanza piccolo: basta che sia $\epsilon < q$.

Siano allora $(x_1, x_2, y_1, y_2, \epsilon)$ una soluzione del sistema (1)-(8):

$$\begin{aligned}\int_I x^{\alpha - \frac{\beta\epsilon}{p}} |u_h - u|^{q-\epsilon}\, dx &= \int_I x^{x_1+x_2} |u_h - u|^{q-\epsilon}\, dx \leq \\ &\leq \left(\int_I x^{x_1 y_1}\, dx\right)^{1/y_1} \left(\int_I x^{x_2 y_2} |u_h - u|^{(q-\epsilon)y_2}\, dx\right)^{1/y_2} = \\ &= \left(\int_I x^{x_1 y_1}\, dx\right)^{1/y_1} \left(\int_I x^{\beta - p} |u_h - u|^p\, dx\right)^{\frac{q-\epsilon}{p}} \leq \text{cost.}\end{aligned}$$

poiché, se $u_h - u \to 0$ debolmente in $W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta)$, si ha che $\|u_h - u\|_{1,p,I,x^{\beta-p},x^\beta}$ è limitata. Questo conclude la dimostrazione nel caso $p > q$. La stessa dimostrazione si può ripetere pressoché inalterata anche nel caso $p = q$.

2) $p = q$.

Ripetiamo la dimostrazione fatta nel caso precedente fino all'impostazione del sistema (1)-(8). Come prima sfruttiamo le equazioni (1), (2), (3), (4) ed arriviamo ad imporre (5):

$$\frac{\alpha p - \beta q + pq - \epsilon p}{p - q + \epsilon} > -1$$

che, per $p = q$, diventa:

$$\frac{\alpha p - \beta p + p^2 - \epsilon p}{\epsilon} > -1, \quad \text{ossia} \quad \alpha p - \beta p + p^2 > \epsilon(p-1).$$

Ciò è vero per qualche $\bar{\epsilon} > 0$ se $\alpha p - \beta p + p^2 > 0$. Osserviamo che per $p = q$ l'ipotesi in cui stiamo lavorando, cioè $\alpha p - \beta q + p - q + pq > 0$, diventa $\alpha p - \beta p + p^2 > 0$, che anche questa volta è esattamente quello che ci serve.

Infine si verifica che si riescono a soddisfare anche (6) e (7):

$$y_1 \geq 1 \iff \frac{p}{p - q + \epsilon} = \frac{p}{\epsilon} \geq 1; \qquad y_2 \geq 1 \iff \frac{p}{q - \epsilon} = \frac{p}{p - \epsilon} \geq 1.$$

Entrambe queste richieste sono soddisfatte $\forall \epsilon \in (0, 1)$. Ciò conclude la dimostrazione nel caso $p = q$.

3) $p < q$.

L'obiettivo è sempre quello di stimare $G(u_h - u)$: questa volta però sarà necessario sfruttare non solo la limitatezza di $F(u_h - u)$, ma anche quella di $G(u_h - u)$; a tale scopo utilizzeremo due volte invece che una sola volta la disuguaglianza di Hölder. Scegliamo sempre $\gamma = \frac{\beta}{p}$ in modo che $x^\gamma u \in W^{1,p}(I)$ $\forall u \in W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta)$. Si ha ancora:

$$\int_I x^\alpha |u_h - u|^q \, dx \leq \left\| x^{\frac{\beta}{p}} (u_h - u) \right\|_{\infty,I}^{\epsilon} \int_I x^{\alpha - \frac{\beta\epsilon}{p}} |u_h - u|^{q-\epsilon} \, dx$$

e di nuovo, in modo identico a prima, si dimostra che $\|x^{\frac{\beta}{p}}(u_h - u)\|_{\infty,I} \to 0$. Il problema è far vedere che, per qualche $\epsilon > 0$, $\int_I x^{\alpha - \frac{\beta\epsilon}{p}} |u_h - u|^{q-\epsilon}\, dx$ risulta limitato. Dimostriamo ora l'esistenza di un tale ϵ. Cerchiamo $x_1, x_2, x_3, \eta_1, \eta_2, y_1, y_2, y_3, \epsilon$ tali che:

$$\alpha - \frac{\beta\epsilon}{p} = x_1 + x_2 + x_3 \tag{1}$$

$$\eta_1 + \eta_2 = q - \epsilon \tag{2}$$

$$\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} + \frac{1}{y_3} = 1 \tag{3}$$

$$x_1 y_1 = \beta - p \tag{4}$$

$$\eta_1 y_1 = p \tag{5}$$

$$x_2 y_2 = \alpha \tag{6}$$

$$\eta_2 y_2 = q \tag{7}$$

$$x_3 y_3 > -1 \tag{8}$$

$$y_1 \geq 0 \tag{9}$$

$$y_2 \geq 0 \tag{10}$$

$$y_3 \geq 0 \tag{11}$$

$$\epsilon > 0. \tag{12}$$

Dall'equazione (4) ricaviamo

$$x_1 = \frac{\beta - p}{y_1};$$

dall'equazione (5) ricaviamo

$$\eta_1 = \frac{p}{y_1};$$

dall'equazione (6) ricaviamo

$$x_2 = \frac{\alpha}{y_2};$$

dall'equazione (7) ricaviamo

$$\eta_2 = \frac{q}{y_2}.$$

Sostituendo η_1 e η_2 nell'equazione (2) otteniamo $\frac{p}{y_1} + \frac{q}{y_2} = q - \epsilon$, da cui

$$y_2 = \frac{qy_1}{y_1(q-\epsilon) - p};$$

sostituendo y_2 nell'equazione (3) otteniamo $\frac{1}{y_3} = 1 - \frac{1}{y_1} - \frac{y_1(q-\epsilon)-p}{qy_1}$, da cui

$$y_3 = \frac{qy_1}{\epsilon y_1 + p - q};$$

sostituendo x_1 e x_2 nell'equazione (1) otteniamo: $x_3 = \alpha - \frac{\beta\epsilon}{p} - \frac{\beta - p}{y_1} - \frac{\alpha}{y_2}$, da cui

$$x_3 = \frac{\epsilon y_1(\alpha p - \beta q) + p(\alpha p - \beta q + pq)}{pqy_1}.$$

Rimangono liberi da scegliere ϵ e y_1 in modo da soddisfare le disuguaglianze (8)-(12). Innanzitutto scegliamo $\epsilon > 0$ e $y_1 > 0$ in modo che siano soddisfatte (9) e (12). Vediamo poi che si riescono a soddisfare anche (10) e (11):

$$y_2 = \frac{qy_1}{y_1(q-\epsilon) - p} > 0 \qquad \text{se} \qquad \epsilon < q \quad \text{e} \quad y_1 > \frac{p}{q-\epsilon};$$
$$y_3 = \frac{qy_1}{\epsilon y_1 + p - q} > 0 \qquad \text{se} \qquad y_1 > \frac{q-p}{\epsilon}.$$

Poiché se $0 < \epsilon < q$ è $\frac{p}{q-\epsilon} > \frac{q-p}{\epsilon}$, (10) e (11) saranno soddisfatte entrambe scegliendo $\epsilon \in (0, q)$ e $y_1 > \frac{p}{q-\epsilon}$. Rimane da vedere quando vale (8):

$$\frac{\epsilon y_1(\alpha p - \beta q) + p(\alpha p - \beta q + pq)}{p(\epsilon y_1 + p - q)} > -1$$

che, avendo scelto $y_1 > \frac{q-p}{\epsilon}$, si riscrive come:

$$\epsilon y_1(\alpha p - \beta q + p) > -p(\alpha p - \beta q + pq + p - q).$$

Osserviamo che $\alpha p - \beta q + pq + p - q > 0$ per ipotesi. Distinguiamo allora due casi:

i) $\alpha p - \beta q + p \geq 0$: poiché il primo membro risulta positivo o nullo ed il secondo membro negativo, (8) è sempre verificata;

ii) $\alpha p - \beta q + p < 0$: la disuguaglianza (8) si riscrive come

$$y_1 < \frac{-p(\alpha p - \beta q + pq + p - q)}{\epsilon(\alpha p - \beta q + p)};$$

è possibile soddisfare questa condizione se e solo se

$$\frac{p}{q-\epsilon} < \frac{-p(\alpha p - \beta q + pq + p - q)}{\epsilon(\alpha p - \beta q + p)},$$

ossia

$$\epsilon(q-p) > -q(\alpha p - \beta q + pq + p - q),$$

che è sempre verificata perché il primo membro risulta positivo ed il secondo membro negativo.

Pertanto, scegliendo $\epsilon \in (0, q)$ e

$$\begin{cases} y_1 > \dfrac{p}{q-\epsilon} & \text{se } \alpha p - \beta q + p \geq 0, \\ y_1 \in \left(\dfrac{p}{q-\epsilon}, \dfrac{-p(\alpha p - \beta q + pq + p - q)}{\epsilon(\alpha p - \beta q + p)} \right) & \text{se } \alpha p - \beta q + p < 0, \end{cases}$$

le disuguaglianze (8)-(12) sono soddisfatte.

Sia allora $(x_1, x_2, x_3, \eta_1, \eta_2, y_1, y_2, y_3, \epsilon)$ una soluzione del sistema (1)-(12).

$$\int_I x^{\alpha - \frac{\beta\epsilon}{p}} |u_h - u|^{q-\epsilon}\, dx = \int_I x^{x_1+x_2+x_3} |u_h - u|^{\eta_1+\eta_2}\, dx \leq$$

$$\leq \left(\int x^{x_1 y_1} |u_h - u|^{\eta_1 y_1}\, dx \right)^{1/y_1} \left(\int x^{x_2 y_2} |u_h - u|^{\eta_2 y_2}\, dx \right)^{1/y_2} \left(\int x^{x_3 y_3}\, dx \right)^{1/y_3} =$$

$$= \left(\int x^{\beta-p} |u_h - u|^p\, dx \right)^{1/y_1} \left(\int x^{\alpha} |u_h - u|^q\, dx \right)^{1/y_1} \left(\int x^{x_3 y_3}\, dx \right)^{1/y_3} \leq \text{cost.};$$

infatti, se $u_h - u \to 0$ debolmente in $W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^{\beta})$ con $G(u_h) = 1$ per ogni $h \in \mathbf{N}$, si ha:

·) $\|u_h - u\|_{1,p,I,x^{\beta-p},x^{\beta}}$ è limitata;

·) $G(u_h - u)^{1/q} \leq G(u_h)^{1/q} + G(u)^{1/q} \leq 2$.

La dimostrazione della semicontinuità di J nel caso $\alpha p - \beta q + pq + p - q > 0$ è così conclusa.

Consideriamo ora il caso $\alpha p - \beta q + p - q + pq \leq 0$. Come abbiamo già fatto per la Proposizione 4.1, per negare la semicontinuità di J esibiamo un controesempio, mostrando che esiste $u_h \to 0$ debolmente in $W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^{\beta})$ tale che $G(u_h) = 1$ per ogni $h \in \mathbf{N}$.

Fissiamo una funzione $\Phi \in C_0^\infty(I)$ tale che $\|\Phi\|_{q,I} = 1$ ed una successione di numeri $r_h \downarrow 0$. Sia inoltre $u_h(x) := r_h^{-\frac{1}{q}} x^{-\frac{\alpha}{q}} \Phi\big(\frac{x}{r_h}\big)$. Per costruzione, la successione $\{u_h\}$ soddisfa il vincolo:

$$\int_0^1 x^\alpha |u_h|^q \, dx = \int_0^1 r_h^{-1} \left| \Phi\left(\frac{x}{r_h}\right) \right|^q \, dx = \int_0^1 |\Phi(y)|^q \, dy = 1.$$

Inoltre si ha

$$F(u_h) = \int_0^1 (x^{\beta-p}|u_h|^p + x^\beta |u_h'|^p) \, dx = r_h^{-\frac{p}{q} - \frac{\alpha p}{q} - p + 1 + \beta} \cdot$$
$$\cdot \int_0^1 \left(y^{-\frac{\alpha p}{q}} |\Phi(y)|^p y^{\beta-p} + \left| -\frac{\alpha}{q} y^{-\frac{\alpha}{q}-1} \Phi(y) + y^{-\frac{\alpha}{q}} \Phi'(y) \right|^p y^\beta \right) dy.$$

Se $-\frac{p}{q} - \frac{\alpha p}{q} - p + 1 + \beta > 0$, ossia $\alpha p - \beta q + p - q + pq < 0$, la successione $\{u_h\}$ converge fortemente a 0 in $W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta)$.

Se $-\frac{p}{q} - \frac{\alpha p}{q} - p + 1 + \beta = 0$, ossia $\alpha p - \beta q + p - q + pq = 0$, la successione $\{u_h\}$ è limitata in $W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta)$; per affermare che, a meno di passare ad una sottosuccessione estratta, possiamo supporre $\{u_h\}$ debolmente convergente in $W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta)$, bisogna dimostrare che lo spazio $W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta)$ risulta riflessivo.

Per provare che, per ogni $p > 1$ e per ogni $\beta \in \mathbf{R}$, $W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta)$ è riflessivo, basta dimostrare che, per ogni $p > 1$ e per ogni $\gamma \in \mathbf{R}$, $L^p(I; x^\gamma)$ è riflessivo. Infatti in tal caso lo spazio prodotto $E := L^p(I; x^{\beta-p}) \times L^p(I; x^\beta)$ è riflessivo, l'operatore $T : W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta) \to E$ definito da $Tu := (u, u')$ è un'isometria di $W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta)$ in E e pertanto $T\left(W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta)\right)$ è un sottospazio chiuso di E. Dunque $T\left(W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta)\right)$ è riflessivo e conseguentemente anche $W^{1,p}$ $(I; x^{\beta-p}, x^\beta)$ lo è.

Per far vedere che $L^p(I; x^\gamma)$ è riflessivo, per il Teorema di Milman-Pettis è sufficiente dimostrarne l'uniforme convessità. Ricordiamo le seguenti due disuguaglianze di Clarkson (cfr. [5]), valide la prima per $2 \le p < +\infty$, la seconda per $1 < p \le 2$:

$$(1) \qquad \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{p,I}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{p,I}^p \le \frac{1}{2} \left(\|f\|_{p,I}^p + \|g\|_{p,I}^p \right) \qquad \forall f, g \in L^p(I)$$

$$(2) \qquad \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{p,I}^{p'} + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{p,I}^{p'} \leq \frac{1}{2} \left(\|f\|_{p,I}^{p} + \|g\|_{p,I}^{p} \right)^{\frac{1}{p-1}} \qquad \forall f, g \in L^p(I).$$

Dal momento che $\|u\|_{p,I,x^\gamma} = \|x^{\frac{\gamma}{p}} u\|_{p,I}$ $\forall u \in L^p(I; x^\gamma)$, è immediato che (1) e (2) valgono $\forall f,\ g \in L^p(I; x^\gamma)$ sostituendo $\|\cdot\|_{p,I}$ con $\|\cdot\|_{p,I,x^\gamma}$. Se ne deduce che, fissato $\epsilon > 0$ se $\|f\|_{p,I,x^\gamma} \leq 1$, $\|g\|_{p,I,x^\gamma} \leq 1$ e $\|f-g\|_{p,I,x^\gamma} > \epsilon$, allora $\|\frac{f+g}{2}\|_{p,I,x^\gamma} < 1-\delta$, dove

$$\delta = \begin{cases} 1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p\right)^{1/p} & \text{se } 2 \leq p < +\infty \\ 1 - \left(1 - \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^{p'}\right)^{1/p'} & \text{se } 1 < p \leq 2. \end{cases}$$

Possiamo quindi supporre che esista $u \in W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta)$ tale che $u_h - u \to 0$ debolmente in $W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta)$.

Abbiamo già osservato che questo implica $x^{\frac{\beta}{p}}(u_h - u) \to 0$ debolmente in $W^{1,p}(I)$; ma $x^{\frac{\beta}{p}} u_h \to 0$ puntualmente, e pertanto il suo limite debole è necessariamente 0: dunque $u_h \to 0$ debolmente in $W^{1,p}(I; x^{\beta-p}, x^\beta)$. La dimostrazione è così conclusa. ■

Osservazione 4.3. Osserviamo che, se I è l'intervallo $(0,1)$ di $\mathbf{R}$, la distanza di un punto $x \in I$ da ∂I è data da

$$d(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \\ 1-x & \text{se } x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

Pertanto in dimensione 1 le singolarità presentate da pesi del tipo x^γ sono dello stesso tipo di quelle presentate da pesi del tipo $d^\gamma(x)$: gli insiemi singolari sono in entrambi i casi di dimensione 0. Dunque i risultati espressi dalle due precedenti proposizioni avrebbero potuto, anche se solo in parte, essere dedotti dai teoremi di immersione del Capitolo 3, i quali confermano alcune delle affermazioni appena dimostrate: ci riferiamo in particolare ai Teoremi 3.19 e 3.28 per quanto concerne la Proposizione 4.1 e all'Esempio 3.16 per quanto concerne la Proposizione 4.2.

4.2. Un risultato di rilassamento nel caso unidimensionale

In [7] Buttazzo e Mizel hanno ottenuto una formula di rilassamento per una classe di funzionali del calcolo delle variazioni soggetti a vincoli; la forma di tali funzionali è la stessa di quelli che abbiamo finora considerato, cioè

$$J(u) = F(u) + \chi_{\{G(u)=1\}}(u).$$

Più precisamente Buttazzo e Mizel hanno studiato il problema in queste ipotesi: hanno preso come classe di funzioni ammissibili $\mathcal{A} = \left\{u \in W^{1,1}(I) : u(0) = 0\right\}$, dove I è l'intervallo $(0,1)$ di $\mathbf{R}$ e come funzionali F e G

$$F(u) = \int_I f(x,u,u')\,dx, \qquad G(u) = \int_I g(x,u)\,dx,$$

dove $f(x,s,\zeta)$ è una funzione non negativa e boreliana da $\Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ in $\overline{\mathbf{R}}$ semicontinua inferiormente in (s,ζ) e convessa in ζ, e $g(x,s)$ è una funzione non negativa e boreliana da $\Omega \times \mathbf{R}$ in $\overline{\mathbf{R}}$ semicontinua inferiormente in s.

In queste ipotesi hanno cercato di scrivere il più grande funzionale semicontinuo inferiormente rispetto alla convergenza debole in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(I)$ e minore o uguale di J, cioè il funzionale rilassato di J rispetto alla convergenza debole in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(I)$. Poiché, per le assunzioni fatte su f e su g, F e G risultano sequenzialmente semicontinui inferiormente, si ottiene, come abbiamo già avuto modo di spiegare:

$$\overline{J}(u) = \begin{cases} +\infty & \text{se } G(u) > 1, \\ F(u) & \text{se } G(u) = 1, \\ F(u) + L(u) & \text{se } G(u) < 1, \end{cases}$$

dove $L(u)$ è una sorta di termine di penalizzazione che compare dopo il rilassamento a causa del vincolo iniziale. Descriviamo ora la caratterizzazione esplicita del gap L ottenuta da Buttazzo e Mizel; per fare ciò adottiamo le seguenti notazioni:

$$\begin{aligned} F_x(u) &= \int_0^x f(t,u,u')\,dt, \\ G_x(u) &= z_u(x) = \int_0^x g(t,u)\,dt, \\ V(x,s,z) &= \inf\left\{F_x(u) : u \in \mathcal{A},\ u(x) = s,\ G_x(u) = z\right\}, \\ W(x,s,z) &= \liminf_{(\xi,\eta)\to(s,z)} V(x,\xi,\eta). \end{aligned}$$

Il teorema di rappresentazione per L è il seguente.

Teorema 4.4. *Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

i) per ogni $\delta > 0$ esistono una funzione $a_\delta \in L^1(I)$ e una funzione θ_δ da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ tali che:

$$f(x,s,z) \geq \theta_\delta(|\zeta|) - a_\delta(x) \quad \forall x \in (\delta,1),\ \forall \delta \in \mathbf{R},\ \forall \zeta \in \mathbf{R};$$

ii) $g(x,s)$ è continua in s e per ogni $\delta > 0$ esiste una funzione $\gamma_\delta(x,t)$ crescente in t e integrabile in s tale che:

$$g(x,s) \leq \gamma_\delta(x,|s|) \quad \forall x \in (\delta,1),\ \forall s \in \mathbf{R}.$$

Allora per ogni $u \in \mathcal{A}$ con $G(u) < 1$ si ha:

$$L(u) \geq \limsup_{x\to 0} W\left(x, u(x), 1 - \int_x^1 g(t,u)\,dt\right), \tag{1}$$

$$L(u) \leq \liminf_{x\to 0} V\left(x, u(x), 1 - \int_x^1 g(t,u)\,dt\right). \tag{2}$$

Pertanto se $V(x,\cdot,\cdot)$ è semicontinuo inferiormente su $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ si ha:

$$L(u) = \lim_{x\to 0} V\left(x, u(x), 1 - \int_x^1 g(t,u)\,dt\right).$$

Dimostrazione. Prendiamo una qualunque successione $\{u_h\}$ in $\mathcal{A}$ con $G(u_h) = 1$ per ogni $h \in \mathbf{N}$ e $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(I)$; per ogni $\delta > 0$ si ha:

$$\begin{aligned} F(u_h) &= \int_0^\delta f(x,u_h,u_h')\,dx + \int_\delta^1 f(x,u_h,u_h')\,dx \geq \\ &\geq V\left(\delta, u_h(\delta), 1 - \int_\delta^1 g(x,u_h)\,dx\right) + \int_\delta^1 f(x,u_h,u_h')\,dx \geq \\ &\geq W\left(\delta, u_h(\delta), 1 - \int_\delta^1 g(t,u_h)\,dx\right) + \int_\delta^1 f(x,u_h,u_h')\,dx. \end{aligned}$$

Il passaggio al lim inf per $h \to +\infty$ dà, usando i) e ii):

$$\overline{J}(u) \geq W\left(\delta, u(\delta), 1 - \int_\delta^1 g(x,u)\,dx\right) + \int_\delta^1 f(x,u,u')\,dx$$

e, per $\delta \to 0$,

$$\overline{J}(u) \geq \limsup_{\delta\to 0} W\left(\delta, u(\delta), 1 - \int_\delta^1 g(x,u)\,dx\right) + F(u),$$

che prova la disuguaglianza (1).

Per provare la disuguaglianza (2), prendiamo $x_h \to 0$ e $\{v_h\}$ in $\mathcal{A}$ tali che:

$$\text{(a)}\ \liminf_{x\to 0} V\left(x, u(x), 1 - \int_x^1 g(t,u)\,dt\right) = \liminf_{h\to+\infty} V\left(x_h, u(x_h), 1 - \int_{x_h}^1 g(t,u)\,dt\right),$$

$$\text{(b)}\ v_h(x_h) = u(x_h), \quad \int_0^{x_h} g(t,u)\,dt = 1 - \int_{x_h}^1 g(t,u)\,dt,$$

$$\text{(c)}\ \int_0^{x_h} f(t,v_h,v_h')\,dt \leq \frac{1}{h} + V\left(x_h, u(x_h), 1 - \int_{x_h}^1 g(t,u)\,dt\right).$$

Definiamo

$$u_h(x) := \begin{cases} v_h(x) & \text{se } x \in (0, x_h), \\ u(x) & \text{se } x \in (x_h, 1); \end{cases}$$

si ha $u_h \in \mathcal{A}$, $G(u_h) = 1$ per (b) e $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,1}_{\text{loc}}(I)$ per i). Inoltre, per (a) e (b):

$$\begin{aligned}
\overline{J}(u) &\leq \liminf_{h\to+\infty} F(u_h) = \\
&= \liminf_{h\to+\infty} \left[\int_0^{x_h} f(t,u_h,u_h')\,dt + \int_{x_h}^1 f(t,u_h,u_h')\,dt\right] \leq \\
&\leq \liminf_{h\to+\infty} \left[\frac{1}{h} + V\left(x_h, u(x_h), 1 - \int_{x_h}^1 g(t,u)\,dt\right) + F(u)\right] = \\
&= \liminf_{x\to 0} V\left(x, u(x), 1 - \int_x^1 g(t,u)\,dt\right) + F(u).
\end{aligned}$$

Così anche la disuguaglianza (2) è dimostrata. ■

Osservazione 4.5. La formula di rilassamento appena vista può essere applicata per esempio ai funzionali trattati nel paragrafo precedente. Per questi ultimi

tuttavia il gap L caratterizzato dal Teorema 4.4 potrebbe essere calcolato anche in modo esplicito, riducendo la sua espressione ad una funzione di $G(u)$. Non facciamo questo calcolo adesso poiché lo faremo nel Capitolo 5 per funzionali che saranno in certo senso un analogo in dimensione N di quelli unidimensionali della Proposizione 4.1. Volendo rilassare i funzionali del Paragrafo 4.1 basterebbe quindi adattare la formula per L contenuta nel Paragrafo 5.2 ai suddetti funzionali unidimensionali.

5. Risultati di rilassamento per problemi variazionali N-dimensionali con mancanza di compattezza.

Questo capitolo contiene i risultati di rilassamento che abbiamo ottenuto per alcuni problemi variazionali della forma

$$\min\left\{F(u)+\chi_{\{G(u)=1\}}(u) : u\in(X,\sigma)\right\},$$

nei quali il vincolo G può non verificare l'ipotesi di compattezza. È questo ad esempio il caso in cui (X,σ) è lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ munito della topologia debole e

$$F(u)=\int_\Omega (|u|^p+|Du|^p)\,dx, \qquad G(u)=\int_\Omega |u|^q\,dx,$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbf{R}^N$, $1<p<N$ e $q\geq p^*:=\frac{Np}{N-p}$. Questo caso sarà trattato nel Paragrafo 5.1.

Nel Paragrafo 5.2 trattiamo invece il medesimo problema introducendo nel vincolo un peso del tipo $d^\alpha(x)$, dove $d(x)$ indica la distanza del punto x di Ω da $\partial\Omega$ e $\alpha\in\mathbf{R}$, e sostituendo quindi $G(u)$ con

$$G_\alpha(u)=\int_\Omega d^\alpha(x)|u|^q\,dx;$$

per lo studio della semicontinuità del corrispondente funzionale $J_\alpha(u)=F(u)+\chi_{\{G_\alpha(u)=1\}}(u)$ faremo uso della teoria degli spazi di Sobolev con peso esposta nel Capitolo 3, mentre per trovare il rilassato di J_α il modo di procedere sarà simile a quello adottato nel caso senza il peso.

5.1. Rilassamento dei problemi di Dirichlet e di Neumann con non-linearità critica e supercritica.

Dedichiamo questo paragrafo ad un risultato di rilassamento riguardante i funzionali che avevamo già introdotto, al fine di evidenziarne la mancanza di semicontinuità, negli esempi (P5) e (P6) del Paragrafo 2.2; per $p = 2$ e $q = 2^*$ l'equazione di Eulero di questi funzionali corrisponde rispettivamente ai problemi di Dirichlet e di Neumann con non-linearità critica.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^N$ con $\partial\Omega$ di classe C^1, siano $1 < p < N$ e $q \geq 1$, e sia

$$J(u) = \int_\Omega (|u|^p + |Du|^p)\, dx + \chi_{\left\{\int_\Omega |u|^q\, dx = 1\right\}}(u).$$

Proposizione 5.1. *J è debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente su $W^{1,p}(\Omega)$ se e solo se $q < p^*$, dove*

$$p^* := \frac{Np}{N-p}\ .$$

Dimostrazione. Cominciamo con il considerare $q < p^*$: prendiamo una successione $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$ con $G(u_h) = 1$ per ogni $h \in \mathbf{N}$ e proviamo che $G(u) = 1$, dopo di che la semicontinuità di J sarà evidente. Del resto anche il fatto che debba essere $G(u) = 1$ è immediato: basta ricordare che, per il teorema di compattezza di Rellich-Kondrachov, si ha $u_h \to u$ fortemente in $L^q(\Omega)$.

Mostriamo ora che se $q \geq p^*$ esiste $\{u_h\}$ convergente debolmente a 0 in $W^{1,p}(\Omega)$ con $G(u_h) = 1$ per ogni $h \in \mathbf{N}$.

Sia $B^N(x, r)$ la sfera di centro x e raggio r in $\mathbf{R}^N$. Fissiamo una funzione $\Phi \in C_0^\infty\left(B^N(0,1)\right)$, un punto $x^0 \in \Omega$ ed una successione $r_h \downarrow 0$. Poniamo allora

$$u_h(x) := r_h^{-\frac{N}{q}}\ \Phi\left(\frac{x - x^0}{r_h}\right).$$

Si ha

$$\int_\Omega |u_h|^q\,dx = \int_\Omega r_h^{-N}\left|\Phi\left(\frac{x-x^0}{r_h}\right)\right|^q\,dx = \int_{B^N(0,1)}|\Phi(y)|^q\,dy = 1;$$

inoltre

$$\begin{aligned}\int_\Omega (|u_h|^p + |Du_h|^p)\,dx \;&= r_h^{-\frac{Np}{q}+N}\int_{B^N(0,1)}|\Phi(y)|^p\,dy + \\ &+ r_h^{-\frac{Np}{q}-p+N}\int_{B^N(0,1)}|-\frac{N}{q}\Phi(y)+\Phi'(y)|^p\,dy.\end{aligned}$$

Se $-\frac{Np}{q}-p+N>0$, ossia $q>p^*$, la successione $\{u_h\}$ converge fortemente a 0 in $W^{1,p}(\Omega)$.

Se $-\frac{Np}{q}-p+N=0$, ossia $q=p^*$, la successione $\{u_h\}$ è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ e quindi, a meno di passare ad un'estratta, possiamo supporre che converga debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$; poiché $u_h\to 0$ puntualmente, segue che $u_h\to 0$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$. ■

Passiamo ora alla questione del rilassamento.

Consideriamo ancora il funzionale:

$$J(u) = \int_\Omega (|u|^p + |Du|^p)\,dx + \chi_{\left\{\int_\Omega |u|^q\,dx=1\right\}}(u), \quad u\in W^{1,p}(\Omega),$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbf{R}^N$ con $\partial\Omega$ di classe C^1 e $1<p<N$.

Quando J non risulta debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente su $W^{1,p}(\Omega)$, fatto che per la Proposizione 5.1 accade se e solo se $q\geq p^*$, vogliamo scrivere il funzionale $\overline{J}$ rilassato di J rispetto alla topologia della convergenza debole in $W^{1,p}(\Omega)$. Adottando come al solito le notazioni:

$$F(u) := \int_\Omega (|u|^p + |Du|^p)\,dx, \qquad G(u) := \int_\Omega |u|^q\,dx,$$

risulta:

$$\overline{J}(u) = \begin{cases} +\infty & \text{se } G(u)>1,\\ F(u) & \text{se } G(u)=1,\\ F(u)+L(u) & \text{se } G(u)<1, \text{ con } L(u)\in[0,+\infty].\end{cases}$$

In questo caso il termine di gap L può essere calcolato esplicitamente: si ottiene infatti il seguente risultato.

Teorema 5.2. *Posto*

$$\mathcal{F}_p := \left\{ \{u_n\} \subset W^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega |u_n|^{p^*}\, dx = 1, |\operatorname{supp} u_n| \to 0 \right\}$$
$$K_p := \inf_{\mathcal{F}_p} \left\{ \liminf \int_\Omega |Du_n|^p\, dx \right\},$$

si ha, per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *con* $G(u) < 1$,

$$L(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } q > p^*, \\ K_p \left(1 - \displaystyle\int_\Omega |u|^{p^*}\, dx\right)^{p/p^*} & \text{se } q = p^*. \end{cases}$$

Dimostrazione. Come si vede, l'espressione di L è molto diversa secondo se $q > p^*$ oppure $q = p^*$: chiameremo il primo *caso supercritico* ed il secondo *caso critico*; la differenza tra i due è dovuta naturalmente al fatto che per $q = p^*$ sussiste la continuità dell' immersione $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, mentre per $q > p^*$ tale immersione, oltre a non essere compatta, non è neppure continua.

Dividiamo allora la dimostrazione in due parti, occupandoci prima del caso più facile, quello supercritico, e poi passando a quello critico, che risulterà più delicato.

Parte I: caso supercritico

Sia $q > p^*$ e sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tale che $G(u) < 1$. Ricordando che

$$\overline{J}(u) = \min\big\{ \liminf_{h\to+\infty} F(u_h) : u_h \to u \text{ debolmente in } W^{1,p}(\Omega),\ G(u_h) = 1 \big\},$$

bisogna provare due fatti:

i) per ogni $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$, con $G(u_h) = 1$, si ha

$$F(u) \le \liminf_{h\to+\infty} F(u_h);$$

ii) esiste $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$, con $G(u_h) = 1$, per cui

$$F(u) = \liminf_{h\to+\infty} F(u_h).$$

Dalla semicontinuità inferiore di F si ottiene immediatamente i). Per trovare invece una successione verificante ii) utilizziamo il fatto, dimostrato in una nota alla pagina seguente, che per $q > p^*$ l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ non è continua: per ogni $h \in \mathbf{N}$ esiste $v_h \in W^{1,p}(\Omega)$ tale che

$$\|v_h\|_{1,p,\Omega} \leq \frac{1}{h} \|v_h\|_{q,\Omega};$$

normalizzando, possiamo anche supporre che per ogni $h \in \mathbf{N}$ si abbia

$$\|v_h\|_{q,\Omega} = 1, \qquad \|v_h\|_{1,p,\Omega} < \frac{1}{h}.$$

Presa una qualunque $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $G(u) < 1$, definiamo $u_h := u + \lambda_h v_h$, dove $\{\lambda_h\}$ è una successione di numeri reali positivi scelta in modo da soddisfare la condizione $G(u_h) = 1$ per ogni $h \in \mathbf{N}$.

Mostriamo che una tale scelta di λ_h è possibile. Consideriamo per ogni $h \in \mathbf{N}$ la funzione $\psi_h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definita da

$$\psi_h(t) := G(u + tv_h) = \int_\Omega |u + tv_h|^q \, dx.$$

Si ha che $\psi_h(0) = G(u) < 1$ per ipotesi, mentre, se $t > 0$,

$$\psi_h(t)^{1/q} = \|u + tv_h\|_{q,\Omega} \geq t\|v_h\|_{q,\Omega} - \|u\|_{q,\Omega} \geq t - 1$$

e quindi $\lim_{t \to +\infty} \psi_h(t) = +\infty$. Poiché, per ogni $h \in \mathbf{N}$, ψ_h è una funzione continua di t, deve esistere un $\lambda_h \in (0, +\infty)$ tale che $\psi_h(\lambda_h) = 1$.

Mostriamo che $u_h \to u$ fortemente in $W^{1,p}(\Omega)$ e quindi che $F(u_h) \to F(u)$, da cui *a fortiori* discende la tesi. Per dimostrare che la successione $\|u_h - u\|_{1,p,\Omega} = \lambda_h \|v_h\|_{1,p,\Omega}$ è infinitesima basta far vedere che λ_h è limitata, poiché la successione $\|v_h\|_{1,p,\Omega}$ è infinitesima per costruzione. Ora, ricordando come sono stati scelti i λ_h, si ha, per ogni $h \in \mathbf{N}$,

$$1 = G(u + \lambda_h v_h) = \int_\Omega |u + \lambda_h v_h|^q \, dx \geq \left(\|\lambda_h v_h\|_{q,\Omega} - \|u\|_{q,\Omega}\right)^q,$$

da cui segue che $0 < \lambda_h \leq 1 + \|u\|_{q,\Omega}$ per ogni $h \in \mathbf{N}$ e quindi $\{\lambda_h\}$ è limitata.

NOTA. Mostriamo infine come si possa vedere facilmente che, per $q > p^*$, non si ha l'immersione continua di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ (cfr. [1]). Supponiamo infatti, a meno di una traslazione, $0 \in \Omega$; fissato $r > 0$ tale che $\overline{B^N(0,3r)} \subseteq \Omega$, sia $f \in C^\infty(0,+\infty)$ tale che

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } t \leq r \\ 0 & \text{se } t \geq 2r \end{cases}$$

e sia $u \in C^\infty(B^N(0,3r) \setminus \{0\})$ dipendente solo da $\rho := |x|$. La funzione w definita da

$$w(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \rho > 3r \\ f(\rho)u(\rho) & \text{se } 0 < \rho < 3r \end{cases}$$

ha supporto compatto in Ω ed appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$ se e solo se u appartiene a $W^{1,p}(B^N(0,r))$; costruiremo ora una $u \in W^{1,p}(B^N(0,r)) \setminus L^q(B^N(0,r))$, e pertanto, quando $q > p^*$, non potrà sussistere nessuna immersione continua del tipo $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Sia $u(x) = \rho^\lambda$, dove l'esponente λ verrà specificato sotto. È $Du(x) = \lambda\rho^{\lambda-2}x$ e quindi

$$\int_{B^N(0,r)} |Du(x)|^p \, dx \leq \text{cost.} \int_0^r \rho^{(\lambda-1)p+N-1} \, d\rho.$$

Perciò, $u \in W^{1,p}(B^N(0,1))$ purché $(\lambda-1)p + N - 1 > 0$, ossia

$$(a) \qquad \lambda > 1 - \frac{N}{p}.$$

D'altronde,

$$\int_{B^N(0,r)} |u(x)|^q \, dx = \text{cost.} \int_0^r \rho^{\lambda q+N-1} \, d\rho.$$

Quindi, $u \notin L^q(B^N(0,1))$ purché $\lambda q + N < 0$, ossia

$$(b) \qquad \lambda < -\frac{N}{q}.$$

Poiché $-\frac{N}{q} > 1 - \frac{N}{p} \iff q > p^*$, ogni volta che è soddisfatta quest'ultima condizione è possibile anche scegliere un λ che verifichi entrambi (a) e (b).

Parte II: caso critico

Sia ora $q = p^*$, e sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ tale che $G(u) < 1$. Come prima i fatti da dimostrare sono due:

i) per ogni $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$, con $G(u_h) = 1$ si ha

$$F(u) + K_p \left(1 - \int_\Omega |u|^{p^*}\, dx\right)^{p/p^*} \leq \liminf_{h\to+\infty} F(u_h).$$

ii) esiste $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$, con $G(u_h) = 1$ per cui

$$F(u) + K_p \left(1 - \int_\Omega |u|^{p^*}\, dx\right)^{p/p^*} = \liminf_{h\to+\infty} F(u_h).$$

Cominciamo con il dimostrare i) scrivendo qualunque successione $\{u_h\}$ debolmente convergente a u in $W^{1,p}(\Omega)$ come $u_h = w_h + v_h$, con $\{w_h\}$ ancora debolmente convergente a u, $\{v_h\}$ debolmente convergente a 0 e $|\operatorname{supp} v_h| \to 0$. Per fare ciò osserviamo che se $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$ si ha $u_h \to u$ fortemente in $L^1(\Omega)$ e quindi $u_h \to u$ in misura, cioè posto $A_{h,\epsilon} := \{x : |(u_h - u)(x)| > \epsilon\}$, si ha

$$\forall\ \epsilon > 0 \qquad |A_{h,\epsilon}| \to 0 \text{ per } h \to +\infty.$$

Mostriamo che si può trovare una successione infinitesima $\{\epsilon_h\}$ tale che

$$|A_{h,\epsilon_h}| \to 0 \text{ per } h \to +\infty.$$

Per ipotesi esiste h_1 tale che $|A_{h,\frac{1}{2}}| < \frac{1}{2}$ per ogni $h \geq h_1$, esiste $h_2 > h_1$ tale che $|A_{h,\frac{1}{4}}| < \frac{1}{4}$ per ogni $h \geq h_2$, e così via per ogni $j \in \mathbf{N}$ esiste $h_j > h_{j-1}$ tale che $|A_{h,\frac{1}{2^n}}| < \frac{1}{2^n}$ per ogni $h \geq h_n$. Poniamo

$$\epsilon_h = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq h < h_1 \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } h_1 \leq h < h_2 \\ \dfrac{1}{4} & \text{se } h_2 \leq h < h_3 \\ \dots & \dots \\ 2^{-j} & \text{se } h_j \leq h < h_{j+1} \\ \dots & \dots \end{cases}$$

Si ha $|A_{h,\epsilon_h}| < \epsilon_h$ per ogni h, da cui $|A_{h,\epsilon_h}| \to 0$ per $h \to +\infty$. Infatti se $\epsilon_h = 2^{-j}$, allora per definizione di ϵ_h è $h \geq h_j$ e perciò per definizione di h_j si ha $|A_{h,\epsilon_h}| = |A_{h,2^{-j}}| < 2^{-j} = \epsilon_h$.

Definiamo allora:

$$v_h := (u_h - u - \epsilon_h)^+ - (u_h - u + \epsilon_h)^- , \qquad w_h := u_h - v_h.$$

Posto $S_h := \{x : |u_h(x) - u(x)| \geq \epsilon_h\}$, si ha:

$$|v_h| = \begin{cases} |u_h - u \mp \epsilon_h| & \text{su } S_h, \\ 0 & \text{su } \Omega \setminus S_h; \end{cases} \qquad |w_h| = \begin{cases} |u \pm \epsilon_h| & \text{su } S_h, \\ |u_h| & \text{su } \Omega \setminus S_h; \end{cases}$$

$$|Dv_h| = \begin{cases} |Du_h - Du| & \text{q.o. su } S_h, \\ 0 & \text{q.o. su } \Omega \setminus S_h; \end{cases} \qquad |Dw_h| = \begin{cases} |Du| & \text{q.o. su } S_h, \\ |Du_h| & \text{q.o. su } \Omega \setminus S_h. \end{cases}$$

Utilizzando il fatto che $|S_h| \to 0$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\liminf_{h\to+\infty} F(u_h) &= \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega (|u_h|^p + |Du_h|^p)\, dx = \\
&= \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega (|w_h + v_h|^p + |Dw_h + Dv_h|^p)\, dx = \\
&= \liminf_{h\to+\infty} \left[\int_{\Omega\setminus S_h} (|w_h|^p + |Dw_h|^p)\, dx + \right. \\
&\qquad \left. + \int_{S_h} (|w_h + v_h|^p + |Dw_h + Dv_h|^p)\, dx \right] = \\
&= \liminf_{h\to+\infty} \left[\int_\Omega (|w_h|^p + |Dw_h|^p)\, dx - \int_{S_h} (|u \pm \epsilon_h|^p + |Du|^p)\, dx + \right. \\
&\qquad \left. + \int_{S_h} (|u \pm \epsilon_h + v_h|^p + |Du + Dv_h|^p)\, dx \right] = \\
&= \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega (|w_h|^p + |Dw_h|^p)\, dx + \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega (|v_h|^p + |Dv_h|^p)\, dx.
\end{aligned}$$

Stimiamo separatamente ciascuno di questi ultimi due addendi:

1) Poiché $w_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$, si ha

$$\liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega (|w_h|^p + |Dw_h|^p)\, dx \geq \int_\Omega (|u|^p + |Du|^p)\, dx = F(u).$$

2) Poiché la successione $\{v_h\}$ appartiene a $\mathcal{F}_p$, si ha:

$$\liminf_{h\to+\infty}\int_\Omega (|v_h|^p + |Dv_h|^p)\,dx \;\geq \liminf_{h\to+\infty} K_p\left(\int_\Omega |v_h|^{p^*}\,dx\right)^{p/p^*}.$$

Inoltre, dalla uguaglianza

$$\begin{aligned}1 = \int_\Omega |u_h|^{p^*}\,dx \;&= \int_\Omega |w_h + v_h|^{p^*}\,dx = \\ &= \int_{\Omega\setminus S_h} |w_h|^{p^*}\,dx + \int_{S_h} |w_h + v_h|^{p^*}\,dx = \\ &= \int_{\Omega\setminus S_h} |u_h|^{p^*}\,dx + \int_{S_h} |u \pm \epsilon_h + v_h|^{p^*}\,dx,\end{aligned}$$

si ricava, per $h \to +\infty$,

$$\lim_{h\to+\infty}\int_\Omega |v_h|^{p^*}\,dx = \lim_{h\to+\infty}\left(1 - \int_{\Omega\setminus S_h} |u_h|^{p^*}\,dx\right) = 1 - \int_\Omega |u|^{p^*}\,dx.$$

Dunque,

$$\liminf_{h\to+\infty}\int_\Omega (|v_h|^p + |Dv_h|^p)\,dx \geq K_p\left(1 - \int_\Omega |u|^{p^*}\,dx\right)^{p/p^*}$$

e quindi

$$\begin{aligned}\liminf_{h\to+\infty} F(u_h) \;&\geq \liminf_{h\to+\infty}\int_\Omega (|w_h|^p + |Dw_h|^p)\,dx + \\ &+ \liminf_{h\to+\infty}\int_\Omega (|v_h|^p + |Dv_h|^p)\,dx \geq F(u) + K_p\left(1 - \int_\Omega |u|^{p^*}\,dx\right)^{p/p^*},\end{aligned}$$

e così il primo fatto i) è dimostrato.

Passiamo allora alla dimostrazione del secondo fatto ii). Sia $\{v_h\}$ una successione ottimale per K_p normalizzata rispetto a $\|\cdot\|_{p^*,\Omega}$, cioè

$$\begin{cases} |S_h| := |\operatorname{supp} v_h| \to 0, \\ \|v_h\|_{p^*,\Omega} = 1 \quad \forall h \in \mathbf{N}, \\ F(v_h) \to K_p. \end{cases}$$

Definiamo $u_h := u + \lambda_h v_h$, dove $\{\lambda_h\}$ è una successione di numeri reali positivi scelta in modo da soddisfare la condizione $G(u_h) = 1$; abbiamo già visto nella

prima parte della dimostrazione che, grazie all'ipotesi $G(u) < 1$, questa scelta è possibile. Calcoliamo adesso il limite per $h \to +\infty$ della successione λ_h. Dalle uguaglianze

$$1 = G(u_h) = \int_\Omega |u + \lambda_h v_h|^{p^*}\, dx = \int_{\Omega \setminus S_h} |u|^{p^*}\, dx + \int_{S_h} |u + \lambda_h v_h|^{p^*}\, dx,$$

tenuto conto che

·) $\int_{\Omega \setminus S_h} |u|^{p^*}\, dx \to \int_\Omega |u|^{p^*}\, dx$,

·) $\int_{S_h} |u + \lambda_h v_h|^{p^*}\, dx \to \left(\lim_{h \to +\infty} \lambda_h^{p^*} \right) \int_{S_h} |v_h|^{p^*}\, dx = \lim_{h \to +\infty} \lambda_h^{p^*}$,

si ha

$$\lim_{h \to +\infty} \lambda_h = \left(1 - \int_\Omega |u|^{p^*}\, dx \right)^{1/p^*}.$$

Verifichiamo ora che la successione u_h è quella cercata.

$$\begin{aligned}
\liminf_{h \to +\infty} F(u_h) &= \liminf_{h \to +\infty} F(u + \lambda_h v_h) = \\
&= \liminf_{h \to +\infty} \int_\Omega (|u + \lambda_h v_h|^p + |Du + \lambda_h Dv_h|^p)\, dx = \\
&= \liminf_{h \to +\infty} \left[\int_{\Omega \setminus S_h} (|u|^p + |Du|^p)\, dx + \int_{S_h} (|u + \lambda_h v_h|^p + \right. \\
&\qquad \left. + |Du + \lambda_h Dv_h|^p)\, dx \right] = \\
&= \int_\Omega (|u|^p + |Du|^p)\, dx + \liminf_{h \to +\infty} \left[\lambda_h^p \int_{S_h} (|v_h|^p + |Dv_h|^p)\, dx \right] = \\
&= F(u) + K_p \lim_{h \to +\infty} \lambda_h^p = F(u) + K_p \left(1 - \int_\Omega |u|^{p^*}\, dx \right)^{p/p^*}.
\end{aligned}$$

Questo conclude la dimostrazione del Teorema 5.2. ∎

La proposizione seguente riguarda il caso particolare in cui $p = 2$.

Proposizione 5.3. *Per $p = 2$ nell'enunciato del Teorema 5.2 possiamo sostituire alla costante K_2 la costante $\widetilde{K}_2$ definita da*

$$\widetilde{K}_2 := \inf_{\widetilde{\mathcal{F}}_2} \left\{ \liminf_{h \to +\infty} \int_\Omega |Du_h|^2\, dx \right\},$$

dove

$$\widetilde{\mathcal{F}}_2 := \left\{ \{u_h\} \subset H^1(\Omega) : \int_\Omega |u_h|^{2^*}\, dx = 1, \quad u_h \to 0 \text{ debolmente in } H^1(\Omega) \right\}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione del primo fatto i) può rimanere pressoché inalterata: basta osservare che la successione $\{v_h\}$, definita come nella dimostrazione del Teorema 5.2, appartiene a $\widetilde{\mathcal{F}}_2$. Per quanto riguarda invece la dimostrazione del secondo fatto ii), essa va modificata come segue: sia $\{v_h\}$ una successione ottimale per $\widetilde{K}_2$ normalizzata rispetto a $\|\cdot\|_{2^*,\Omega}$, cioè

$$\begin{cases} v_h \to 0 \text{ debolmente in } H^1(\Omega), \\ \|v_h\|_{2^*,\Omega} = 1 \quad \forall h \in \mathbf{N}, \\ F(v_h) \to \widetilde{K}_2. \end{cases}$$

Definiamo ancora $u_h := u + \lambda_h v_h$, scegliendo $\{\lambda_h\}$ in modo tale che $G(u_h) = 1$ per ogni $h \in \mathbf{N}$. Per calcolare il limite della successione $\{\lambda_h\}$, non possiamo più giovarci del fatto che $|S_h| = |\operatorname{supp} v_h| \to 0$, non sapendo se quest'ultima proprietà è goduta dalla successione $\{v_h\}$. Procediamo allora così: imponendo il vincolo alla successione $\{u_h\}$ otteniamo:

$$1 = \int_\Omega |u + \lambda_h v_h|^{2^*}\, dx = \int_{\Omega\setminus S_h} |u|^{2^*}\, dx + \int_{S_h} |u + \lambda_h v_h|^{2^*}\, dx,$$

da cui, aggiungendo e sottraendo $\int_{S_h} |u|^{2^*}\, dx$ e $\int_{S_h} |\lambda_h v_h|^{2^*}\, dx$ si ricava:

$$1 - \int_\Omega |u|^{2^*}\, dx = \int_{S_h} \left(|u + \lambda_h v_h|^{2^*} - |u|^{2^*} - |\lambda_h v_h|^{2^*} \right) dx + \lambda_h^{2^*} \int_{S_h} |v_h|^{2^*}\, dx.$$

Dimostriamo che il termine

$$\int_{S_h} \left(|u + \lambda_h v_h|^{2^*} - |u|^{2^*} - |\lambda_h v_h|^{2^*} \right) dx$$

è infinitesimo; poiché $v_h \to 0$ debolmente in $H^1(\Omega)$, è $v_h \to 0$ fortemente in $L^2(\Omega)$, e dunque posto $S_{h,j} := \left\{ x \in \Omega : |v_h(x)| > \frac{1}{j} \right\}$, si ha che, per ogni fissato $j \in \mathbf{N}$, $|S_{h,j}| \to 0$ per $h \to +\infty$. Scriviamo $S_h = \bigcup\limits_j S_{h,j} = A_h \dot\cup B_h$, dove

$$A_h = \bigcup_{j=0}^{k} S_{h,j} \quad \text{e} \quad B_h = \left(\bigcup_{j=k+1}^{+\infty} S_{h,j} \right) \setminus A_h,$$

essendo k un qualunque intero fissato. Si ha

$$\int_{S_h} \left(|u + \lambda_h v_h|^{2^*} - |u|^{2^*} - |\lambda_h v_h|^{2^*} \right) dx = \int_{A_h} \left(|u + \lambda_h v_h|^{2^*} - |u|^{2^*} - |\lambda_h v_h|^{2^*} \right) dx + \int_{B_h} \left(|u + \lambda_h v_h|^{2^*} - |u|^{2^*} - |\lambda_h v_h|^{2^*} \right) dx;$$

l'integrale su A_h è infinitesimo per $h \to +\infty$ poiché $|A_h| \to 0$ per $h \to +\infty$ e $\int_\Omega |\lambda_h v_h|^{2^*} dx$ è limitato, per cui

$$\lim_{h\to+\infty} \left| \int_{A_h} \left(\left|u + \lambda_h v_h\right|^{2^*} - |u|^{2^*} - \left|\lambda_h v_h\right|^{2^*} \right) dx \right| \leq$$

$$\leq C \lim_{h\to+\infty} \left[\int_{A_h} |u|^{2^*} dx + \left(\int_{A_h} |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{1}{2^*}} \left(\int_{A_h} \left|\lambda_h v_h\right|^{2^*} \right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \right] = 0.$$

Per quanto riguarda l'integrale su B_h, osserviamo che $B_h \subseteq \Omega \setminus S_{h,k}$ per cui $|v_h(x)| \leq \frac{1}{k}$ su B_h e pertanto, essendo $\{\lambda_h\}$ limitata, si ha

$$\left| \int_{B_h} \left(\left|u + \lambda_h v_h\right|^{2^*} - |u|^{2^*} - \left|\lambda_h v_h\right|^{2^*} \right) dx \right| \leq C \left(\frac{1}{k^{2^*}} + \frac{1}{k} \int_\Omega |u|^{2^*-1} dx \right).$$

Dunque

$$\limsup_{h\to+\infty} \left| \int_{S_h} \left(\left|u + \lambda_h v_h\right|^{2^*} - |u|^{2^*} - \left|\lambda_h v_h\right|^{2^*} \right) dx \right| \leq \frac{C}{k}$$

e per l'arbitrarietà di k si ha quindi che il termine

$$\int_{S_h} \left(|u + \lambda_h v_h|^{2^*} - |u|^{2^*} - |\lambda_h v_h|^{2^*} \right) dx$$

è infinitesimo e pertanto

$$\lambda_h \to \left(1 - \int_\Omega |u|^{2^*} dx \right)^{1/2^*}.$$

Verifichiamo infine che la successione $\{u_h\}$ dà l'uguaglianza voluta.

Utilizziamo il fatto che $v_h \to 0$ debolmente in $H^1(\Omega)$ e quindi che

$$\int_\Omega (u\, v_h + Du \cdot Dv_h)\, dx \to 0;$$

sviluppando i quadrati nell'espressione di $F(u_h)$ abbiamo allora

$$\begin{aligned}
\liminf_{h\to+\infty} F(u_h) &= \liminf_{h\to+\infty} F(u + \lambda_h v_h) = \\
&= \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega (|u + \lambda_h v_h|^2 + |Du + \lambda_h Dv_h|^2)\, dx = \\
&= \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega \big(|u|^2 + 2\lambda_h u v_h + |\lambda_h v_h|^2 + |Du|^2 + \\
&\qquad + 2\lambda_h Du \cdot Dv_h + |\lambda_h Dv_h|^2\big)\, dx = \\
&= \int_\Omega (|u|^2 + |Du|^2)\, dx + \liminf_{h\to+\infty} \lambda_h^2 \int_\Omega (|v_h|^2 + |Dv_h|^2)\, dx = \\
&= F(u) + \widetilde{K}_2 \left(1 - \int_\Omega |u|^{2^*} dx \right)^{2/2^*}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Dalla Proposizione 5.3 discende immediatamente il seguente corollario.

Corollario 5.4. *Si ha l'uguaglianza*

$$K_2 = \widetilde{K}_2.$$

Risultati analoghi valgono per il funzionale

$$J_0(u) = \int_\Omega |Du|^p \, dx + \chi_{\left\{\int_\Omega |u|^q \, dx = 1\right\}}(u),$$

considerato questa volta sul sottospazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ di $W^{1,p}(\Omega)$ (Ω è ancora un aperto limitato e regolare di $\mathbf{R}^N$ e $1 < p < N$).

In modo identico alla Proposizione 5.1 si dimostra la seguente

Proposizione 5.5. *J_0 è debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente su $W_0^{1,p}(\Omega)$ se e solo se $q < p^*$, dove $p^* := \frac{Np}{N-p}$.*

Quando J_0 non è semicontinuo indichiamo con $\overline{J}_0$ il rilassato di J_0 rispetto alla topologia della convergenza debole in $W_0^{1,p}(\Omega)$; ponendo

$$F(u) = \int_\Omega |Du|^p \, dx \quad \text{e} \quad G(u) = \int_\Omega |u|^q \, dx,$$

avremo ancora

$$\overline{J}_0(u) = \begin{cases} +\infty & \text{se } G(u) > 1, \\ F(u) & \text{se } G(u) = 1, \\ F(u) + L_0(u) & \text{se } G(u) < 1, \text{ con } L_0(u) \in [0, +\infty], \end{cases}$$

dove l'espressione del gap $L_0(u)$ è data dal teorema seguente.

Teorema 5.6. *Posto*

$$\mathcal{F}_{0,p} := \left\{ \{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega |u_n|^{p^*} \, dx = 1, \ |\operatorname{supp} u_n| \to 0 \right\},$$

$$K_{0,p} := \inf_{\mathcal{F}_{0,p}} \left\{ \liminf \int_\Omega |Du_n|^p \, dx \right\},$$

si ha

$$L_0(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } q > p^*, \\ K_{0,p} \left(1 - \displaystyle\int_\Omega |u|^{p^*} \, dx \right)^{p/p^*} & \text{se } q = p^*. \end{cases}$$

La dimostrazione del Teorema 5.6 può essere ottenuta ricalcando quella del Teorema 5.2. Tuttavia lavorando su $W_0^{1,p}(\Omega)$ anziché su $W^{1,p}(\Omega)$, bisogna osservare che vale la *proprietà di riscalamento* espressa dal lemma seguente, nel quale abbiamo indicato con $\tilde{u}$ la funzione di $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ che risulta prolungando a zero fuori da Ω una u di $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Lemma 5.7. *Per ogni $\lambda \in \mathbf{R}$, l'applicazione $u \longmapsto u_\lambda$ di $W_0^{1,p}(\Omega)$ in sé, definita da*

$$u_\lambda(x) := \lambda^{-\frac{N}{p^*}}\ \tilde{u}\left(\frac{x}{\lambda}\right),$$

conserva entrambe le norme $\|Du\|_{p,\Omega}$ e $\|u\|_{p^*,\Omega}$.

Dimostrazione. Si tratta di una semplice verifica. Si ha infatti

$$\begin{aligned}
\cdot)\int_\Omega |Du_\lambda|^p\,dx &= \int_\Omega \lambda^{(-\frac{N}{p^*}-1)p}\left|D\tilde{u}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^p dx = \\
&= \int_{\lambda\Omega} \lambda^{(-\frac{N}{p^*}-1)p}\left|Du\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^p dx = \int_\Omega \lambda^{(-\frac{N}{p^*}-1)p}|Du(y)|^p\lambda^N\,dy = \\
&= \int_\Omega |Du(y)|^p\,dy = \int_\Omega |Du|^p\,dx. \\
\cdot)\ \int_\Omega |u_\lambda|^{p^*}\,dx &= \int_\Omega \lambda^{-N}\left|\tilde{u}\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^{p^*} dx = \int_{\lambda\Omega} \lambda^{-N}\left|u\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right|^{p^*} dx = \\
&= \int_\Omega \lambda^{-N}|u(y)|^{p^*}\lambda^N\,dy = \int_\Omega |u(y)|^{p^*}\,dy = \int_\Omega |u|^{p^*}\,dx.
\end{aligned}$$

■

Come conseguenza del Lemma 5.7 abbiamo:

Proposizione 5.8. *Per qualunque $p \in (1, N)$ nell'enunciato del Teorema 5.6 possiamo sostituire alla costante $K_{0,p}$ la costante $C_{0,p}$ definita da*

$$C_{0,p} := \inf_{W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |Du|^p\,dx}{\left(\int_\Omega |u|^{p^*}\,dx\right)^{p/p^*}}\ .$$

Dimostrazione. La dimostrazione del primo fatto rimane inalterata.

Per quanto riguarda invece il secondo fatto, è sufficiente provare che, presa una successione ottimale per $C_{0,p}$, ossia una successione $\{v_h\}$ che verifichi:

$$\begin{cases} \|v_h\|_{p^*,\Omega} = 1 \quad \forall h \in \mathbf{N}, \\ F(v_h) \to C_{0,p}, \end{cases}$$

possiamo supporre che $|\operatorname{supp} v_h| \to 0$. Per il Lemma 5.7 è chiaro che, a meno di passare a $v_{h,\frac{1}{h}}(x) = h^{N/p^*} v_h(hx)$, è lecito fare tale supposizione e ciò esaurisce la prova della proposizione. ■

Dalla Proposizione 5.8 discende immediatamente il seguente risultato.

Corollario 5.9. *Per ogni $p \in (1, N)$ si ha*

$$K_{0,p} = C_{0,p}.$$

Vogliamo adesso far vedere come in alcuni casi sia possibile calcolare il valore delle costanti K_p e $K_{0,p}$ che compaiono rispettivamente nelle espressioni di L e di L_0 dei Teoremi 5.2 e 5.6: più precisamente, grazie ai Corollari 5.4 e 5.9, identificheremo K_2 e $K_{0,p}$ per ogni p. Cominciamo con $K_{0,p}$.

Utilizzando il Corollario 5.9 ci si riduce a individuare la miglior costante $C_{0,p} = C_{0,p}(\Omega)$ per l'immersione $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$; abbiamo scritto $C_{0,p} = C_{0,p}(\Omega)$ per sottolineare come a priori questa costante ottimale potrebbe dipendere in qualche modo dal dominio Ω in questione. In realtà però non è così e si ha

$$C_{0,p}(\Omega) = C_{0,p}(\mathbf{R}^N) =: C_{0,p}$$

per ogni dominio Ω di $\mathbf{R}^N$: ciò è dovuto alla proprietà di riscalamento vista nel Lemma 5.7. Infatti, poiché $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ si ha in modo ovvio $C_{0,p}(\Omega) \leq$

$C_{0,p}(\mathbf{R}^N)$; d'altra parte, per avere anche la disuguaglianza opposta, basta osservare che l'estremo inferiore che definisce $C_{0,p}(\Omega)$ può essere preso sul sottospazio denso $C_0^\infty(\Omega)$ e che per qualunque Ω esiste un riscalamento che associa ad ogni u in $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ una funzione u_{λ,x_0} in $C_0^\infty(\Omega)$ $\big($dove $u_{\lambda,x_0}(x) := \lambda^{-\frac{N}{p^*}}\tilde{u}\big(\frac{x-x^0}{\lambda}\big)\big)$, in modo tale che $\|Du\|_{2,\mathbf{R}^N} = \|Du_{\lambda,x^0}\|_{2,\Omega}$ e $\|u\|_{2^*,\mathbf{R}^N} = \|u_{\lambda,x^0}\|_{2^*,\Omega}$: pertanto vale anche $C_{0,p}(\Omega) \geq C_{0,p}(\mathbf{R}^N)$ e dunque si ha l'uguaglianza. Basta allora determinare il valore di $C_{0,p}(\mathbf{R}^N)$.

Il calcolo di quest'ultimo si trova nell'articolo di Talenti [13], dove si dimostra che

$$C_{0,p}(\mathbf{R}^N) = \pi^{-1/2} N^{-1/p^*} \left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)\Gamma(N)}{\Gamma\left(\frac{N}{p}\right)\Gamma\left(1+N-\frac{N}{p}\right)} \right)^{1/N}.$$

Proposizione 5.10. *Nel Teorema 5.6 si ha per la costante* $K_{0,p}$

$$K_{0,p} = \pi^{-1/2} N^{-1/p^*} \left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)\Gamma(N)}{\Gamma\left(\frac{N}{p}\right)\Gamma\left(1+N-\frac{N}{p}\right)} \right)^{1/N} \qquad \forall p \in (1,N).$$

Passiamo ora ad occuparci della determinazione di K_2, per la quale faremo riferimento all'articolo di Adimurthi - Mancini [2] e a quello più recente di Adimurthi - Pacella - Yadava [3]. Adottiamo le seguenti notazioni, conformi a quelle dei suddetti lavori:

$$\begin{aligned} Q_\lambda(u) &:= \frac{\displaystyle\int_\Omega |Du|^2\,dx + \lambda \int_\Omega |u|^2\,dx}{\displaystyle\left(\int_\Omega |u|^{2^*}\,dx\right)^{2/2^*}}; \\ S_\lambda &:= \inf\left\{Q_\lambda(u) : u \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}\right\}; \\ S &:= \inf\left\{\int_\Omega |Du|^2\,dx : u \in H^1(\Omega),\ \int_\Omega |u|^{2^*}\,dx = 1\right\}. \end{aligned}$$

Il problema di Neumann corrispondente al problema dell'esistenza di un minimo per Q_λ è:

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u^{2^*-1} & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

dove λ è una costante positiva.

Riportiamo qui di seguito i risultati che ci serviranno dopo.

1. (cfr. [2]) Esiste un $\lambda_0 > 0$ tale che per ogni $\lambda > \lambda_0$ il problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = u^{2^*-1} & \text{in } \Omega \\ u > 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ammette una soluzione u_λ che minimizza Q_λ (cioè $Q_\lambda(u_\lambda) = S_\lambda$).

2. (cfr. [3]) Si ha:

   i) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} S_\lambda = S\, 2^{-2/N}$

   ii) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda \displaystyle\int_\Omega |v_\lambda|^2\, dx = 0$ se $v_\lambda \subset H^1(\Omega)$ è tale che

$$Q_\lambda(v_\lambda) \le S\, 2^{-2/N} \quad \text{e} \quad 0 < \liminf_{\lambda\to+\infty} \|v_\lambda\|_{2^*,\Omega} \le \limsup_{\lambda\to+\infty} \|v_\lambda\|_{2^*,\Omega} < +\infty.$$

Allo scopo di dimostrare che $K_2 = S\, 2^{-2/N}$, ricordiamo che, per il Corollario 5.4, si ha $K_2 = \widetilde{K}_2$, dove

$$\widetilde{K}_2 := \inf_{\widetilde{\mathcal{F}}_2} \left\{ \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega |Du_h|^2\, dx \right\},$$

con

$$\widetilde{\mathcal{F}}_2 := \left\{ \{u_h\} \subset H^1(\Omega) : \int_\Omega |u_h|^{2^*}\, dx = 1, u_h \to 0 \text{ debolmente in } H^1(\Omega) \right\}.$$

Poiché le successioni di $\widetilde{\mathcal{F}}_2$ sono fortemente convergenti a 0 in $L^2(\Omega)$, per ogni λ reale possiamo riscrivere $\widetilde{K}_2$ come

$$\widetilde{K}_2 = \inf_{\widetilde{\mathcal{F}}_2} \left\{ \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega (\lambda |u_h|^2 + |Du_h|^2)\, dx \right\};$$

d'altra parte, per ogni λ, S_λ può essere riscritto come

$$S_\lambda = \inf_{\mathcal{I}} \left\{ \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega (\lambda|u_h|^2 + |Du_h|^2)\, dx \right\},$$

dove

$$\mathcal{I} := \left\{ \{u_h\} \subset H^1(\Omega) : \int_\Omega |u_h|^{2^*}\, dx = 1 \right\}.$$

Essendo $\widetilde{\mathcal{F}}_2 \subset \mathcal{I}$, si ha subito $\widetilde{K}_2 \geq S_\lambda$ per ogni λ, e così $\widetilde{K}_2 \geq S\ 2^{-2/N}$. Per provare che vale anche la disuguaglianza opposta, dobbiamo trovare una successione $\{u_h\} \subset H^1(\Omega)$ tale che

$$\int_\Omega |u_h|^{2^*}\, dx = 1, \quad u_h \to 0 \text{ debolmente in } H^1(\Omega),$$
$$\liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega |Du_h|^2\, dx = S\ 2^{-2/N}.$$

Sia $v_\lambda \in H^1(\Omega)$ tale che $Q_\lambda(v_\lambda) = S_\lambda$, $\|v_\lambda\|_{2^*,\Omega} = 1$: per λ abbastanza grande esiste una tale v_λ per il risultato 1.; poiché v_λ verifica le ipotesi di cui al punto ii) del risultato 2., si ha $\int_\Omega \lambda|v_\lambda|^2\, dx \to 0$ per $\lambda \to +\infty$. D'altra parte, per il punto i) del risultato 2., $\lim_{\lambda\to+\infty} S_\lambda = S\ 2^{-2/N}$ e quindi avremo

$$S\ 2^{-2/N} = \lim_{\lambda\to+\infty} S_\lambda = \lim_{\lambda\to+\infty} \int_\Omega (\lambda|v_\lambda|^2 + |Dv_\lambda|^2)\, dx = \lim_{\lambda\to+\infty} \int_\Omega |Dv_\lambda|^2\, dx.$$

Osserviamo infine che la successione $\{v_\lambda\}$, convergendo fortemente a 0 in $L^2(\Omega)$ ed essendo limitata in $H^1(\Omega)$, è debolmente convergente a 0 in $H^1(\Omega)$; abbiamo pertanto dimostrato che $\widetilde{K}_2 \geq S\ 2^{-2/N}$, ossia che deve valere l'uguaglianza $\widetilde{K}_2 = S\ 2^{-2/N}$. In altri termini abbiamo ottenuto il seguente risultato.

Proposizione 5.11. *Nel Teorema 5.2 si ha per la costante K_2*

$$K_2 = S\ 2^{-2/N} = 2^{-2/N}\ \pi^{-1/2}\ N^{-1/2} \left(\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N/2)} \right)^{1/N}.$$

Riteniamo che un risultato simile a quello della proposizione sopra debba valere anche per la costante K_p quando $p \neq 2$; per avere ciò occorrerebbe che valessero, per ogni p, enunciati analoghi ai risultati 1. e 2. visti a pagina precedente per $p = 2$: in letteratura non abbiamo però trovato niente a riguardo e per il momento non ci siamo occupati di studiare questo aspetto del problema.

5.2. Inserimento di un peso nei problemi di Dirichlet e di Neumann con non-linearità critica e supercritica.

Nel Capitolo 4 abbiamo visto come sia possibile determinare condizioni necessarie e sufficienti per la semicontinuità inferiore del funzionale unidimensionale

$$\int_0^1 (|u|^p + |u'|^p)\,dx + \chi_{\left\{\int_0^1 x^\alpha |u|^q\,dx=1\right\}}(u), \quad u \in W^{1,p}(I)$$

rispetto alla topologia della convergenza debole; d'altra parte nel paragrafo precedente abbiamo visto che siamo in grado di trovare il rilassato del funzionale N-dimensionale

$$\int_\Omega (|u|^p + |Du|^p)\,dx + \chi_{\left\{\int_\Omega |u|^q\,dx=1\right\}}(u), \quad u \in W^{1,p}(\Omega)$$

sempre rispetto alla topologia della convergenza debole.

In questo paragrafo consideriamo il funzionale

$$J_\alpha(u) := \int_\Omega (|u|^p + |Du|^p)\,dx + \chi_{\left\{\int_\Omega d^\alpha(x)|u|^q\,dx=1\right\}}(u), \quad u \in W^{1,p}(\Omega),$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbf{R}^N$ di classe $C^{0,1}$, $1 < p < N$, $q \geq 1$, $\alpha \in \mathbf{R}$, e $d(x)$ è la distanza del punto x di Ω da $\partial\Omega$. In particolare, risponderemo alle seguenti due domande:

1) è possibile, come nel caso unidimensionale del Capitolo 4, fornire condizioni necessarie e sufficienti su p, q, α per avere la debole sequenziale semicontinuità inferiore di J_α su $W^{1,p}(\Omega)$?
2) è possibile, come nel caso $\alpha = 0$ del precedente paragrafo, calcolare esplicitamente il termine di gap L_α che comparirà nell'espressione di $\overline{J}_\alpha$, il funzionale rilassato di J_α rispetto alla topologia debole su $W^{1,p}(\Omega)$?

1) La questione della semicontinuità

Per studiare la semicontinuità di J_α faremo ricorso al contenuto del Capitolo 3; in particolare utilizzeremo i teoremi riguardanti la continuità e la compattezza delle immersioni di $W^{1,p}(\Omega)$ e di $W_0^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega; d^\alpha)$. Notiamo subito che le condizioni espresse da tali teoremi nei due casi di $W^{1,p}(\Omega)$ e di $W_0^{1,p}(\Omega)$ *non* coincidono. Pertanto studieremo questi due casi separatamente, indicando il funzionale J_α con $J_{0,\alpha}$ allorché lo considereremo sul sottospazio $W_0^{1,p}(\Omega)$ anziché su tutto $W^{1,p}(\Omega)$; in altri termini, studiando J_α avremo a che fare con un problema di tipo Neumann, mentre studiando $J_{0,\alpha}$ avremo a che fare con un problema di tipo Dirichlet. Mentre le condizioni per la semicontinuità nel caso Dirichlet o Neumann quando non c'era il peso erano le stesse, inserendo il peso esse si presenteranno più semplici nel caso Dirichlet e alquanto più delicate e articolate nel caso Neumann: ciò è dovuto proprio alla presenza del peso d^α, che per α negativo è singolare lungo tutto il bordo di Ω e rende importante il comportamento delle funzioni vicino alla frontiera.

Cominciamo dal caso di Dirichlet.

Proposizione 5.12. *Se $p \le q$, $J_{0,\alpha}$ è debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente su $W^{1,p}(\Omega)$ se e solo se*

$$q < \min\left\{p^*,\ p^* + \frac{\alpha p}{N-p}\right\}.$$

Se $p > q$, $J_{0,\alpha}$ è debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente su $W^{1,p}(\Omega)$ se e solo se

$$q < \frac{p}{1-p} + \frac{\alpha p}{1-p}\,.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$F(u) = \int_\Omega (|u|^p + |Du|^p)\,dx, \qquad G_\alpha(u) = \int_\Omega d^\alpha(x)|u|^q\,dx.$$

Caso $p \leq q$.

Il Teorema 3.21, applicato con $\beta = 0$, garantisce che quando $q < \min\left\{p^*, p^* + \frac{\alpha p}{N-p}\right\}$ si ha l'immersione compatta $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha)$; quindi se $u_h \to u$ debolmente in $W_0^{1,p}(\Omega)$, allora $G_\alpha(u_h) \to G_\alpha(u)$; in particolare se $G_\alpha(u_h) = 1$ per ogni $h \in \mathbf{N}$, anche $G_\alpha(u) = 1$, da cui la semicontinuità di J_α.

Il Lemma 3.23, sempre applicato con $\beta = 0$, ci dice invece che quando $q > p^*$ oppure quando $q > p^* + \frac{\alpha p}{N-p}$ (casi che chiamiamo *supercritici*) l'immersione di $W_0^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega; d^\alpha)$ *non* è *continua*, mentre, quando $q = p^*$ e $\alpha \geq 0$, oppure quando $q < p^*$ e $\alpha = (q - p^*)\left(\frac{N-p}{p}\right)$, cioè nei casi che chiamiamo *critici*, l'immersione di $W_0^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega; d^\alpha)$ è *continua ma non compatta*.

Mostriamo che sia nei casi critici come nei casi supercritici J_α non risulta semicontinuo.

i) Casi supercritici.

La mancanza di continuità dell'immersione ci dice che per ogni $h \in \mathbf{N}$ possiamo trovare $u_h \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tale che $\|u_h\|_{q,\Omega,d^\alpha} \geq h\|u_h\|_{1,p,\Omega}$; normalizzando la successione $\{u_h\}$, possiamo supporre che sia $\|u_h\|_{q,\Omega,d^\alpha} = 1$ e $\|u_h\|_{1,p,\Omega} \leq \frac{1}{h}$ per ogni $h \in \mathbf{N}$. Abbiamo quindi $\{u_h\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ con $G_\alpha(u_h) = 1$ per ogni $h \in \mathbf{N}$ e $u_h \to 0$ fortemente in $W_0^{1,p}(\Omega)$, da cui

$$+\infty = J_\alpha(0) > \liminf_{h\to+\infty} J_\alpha(u_h) = \liminf_{h\to+\infty} F(u_h) = 0.$$

Questo nega la semicontinuità di J_α.

ii) Casi critici.

La mancanza di compattezza dell'immersione ci dice che esiste una successione $\{u_h\}$ limitata in $W_0^{1,p}(\Omega)$ che non ammette sottosuccessioni convergenti in $L^q(\Omega; d^\alpha)$. Essendo $\{u_h\}$ limitata in $W_0^{1,p}(\Omega)$, a meno di passare a una sottosuccessione possiamo supporre che converga debolmente a u in $W_0^{1,p}(\Omega)$; poiché si ha l'immersione continua, questo comporta anche la convergenza debole a u in $L^q(\Omega; d^\alpha)$. Posto $L := \limsup_{h\to+\infty} \|u_h\|_{q,\Omega,d^\alpha}$, non si può avere

$L \leq \|u\|_{q,\Omega,d^\alpha}$, altrimenti per uniforme convessità di $L^q(\Omega; d^\alpha)$ avremmo $\{u_h\}$ fortemente convergente a u in $L^q(\Omega; d^\alpha)$, contro l'ipotesi su $\{u_h\}$: quindi $L > \|u\|_{q,\Omega,d^\alpha}$. Possiamo supporre, a meno di passare ad una sottosuccessione, che $\|u_h\|_{q,\Omega,d^\alpha}$ converga a L; distinguiamo allora due casi: $L = 0$ e $L \neq 0$.
Nel primo caso $u_h \to 0$ fortemente in $L^q(\Omega; d^\alpha)$, contro l'ipotesi su $\{u_h\}$. Nel secondo caso la successione $\|u_h\|^{-1}_{q,\Omega,d^\alpha}$ è limitata, e quindi la successione

$$v_h := \frac{u_h}{\|u_h\|_{q,\Omega,d^\alpha}}$$

è limitata in $W^{1,p}_0(\Omega)$: possiamo allora supporre, sempre a meno di sottosuccessioni, che $\{v_h\}$ converga a v in $W^{1,p}_0(\Omega)$. Ma, poiché $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}_0(\Omega)$ e $\|u_h\|^{-1}_{q,\Omega,d^\alpha} \to 1/L$, avremo $v = u/L$ e pertanto $\|v\|_{q,\Omega,d^\alpha} = \|u\|_{q,\Omega,d^\alpha}/L < 1$: abbiamo trovato che la successione $\{v_h\}$ è limitata in $W^{1,p}_0(\Omega)$, verifica $G_\alpha(v_h) = 1$ per ogni $h \in \mathbf{N}$ e converge debolmente in $W^{1,p}_0(\Omega)$ ad una v con $G_\alpha(v) < 1$.

Questo nega la semicontinuità di J_α.

Caso $p > q$.

Il Teorema 3.29 applicato con $\beta = 0$ garantisce che quando $q < \frac{p}{1-p} + \frac{\alpha p}{1-p}$ si ha l'immersione compatta $W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha)$, da cui la semicontinuità di J_α.

L'Osservazione 3.30, sempre applicata con $\beta = 0$, ci dice invece che quando $q \geq \frac{p}{1-p} + \frac{\alpha p}{N-p}$, l'immersione di $W^{1,p}_0(\Omega)$ in $L^q(\Omega; d^\alpha)$ non può essere continua perché per il Teorema 3.29 non è compatta: pertanto, tale caso rientrerà sempre nella categoria dei *supercritici*; la mancanza di semicontinuità di J_α quando $q \geq \frac{p}{1-p} + \frac{\alpha p}{1-p}$ si dedurrà allora in modo identico a quanto fatto nei casi supercritici per $p \leq q$. ■

Volendo visualizzare il contenuto della Proposizione 5.12, per $p \leq q$ avremo il grafico illustrato nella Figura 5.1, in cui abbiamo riportato sull'asse delle ascisse la quantità $-q + p^*$ e sull'asse delle ordinate la quantità $\frac{\alpha p}{N-p} - q + p^*$. Poichè siamo

nel caso $p \leq q$, abbiamo imposto $-q + p^* \leq -p + p^*$. Nella figura, i due segmenti in neretto ed il punto che li collega rappresentano i casi critici; la regione più scura che occupa il primo quadrante rappresenta i casi di semicontinuità per J_α, mentre la zona più chiara corrisponde ai casi supercritici. Possiamo anche osservare che, nei tratti critici, α assume valori positivi su quello verticale, si annulla nell'origine, ed assume valori negativi su quello orizzontale.

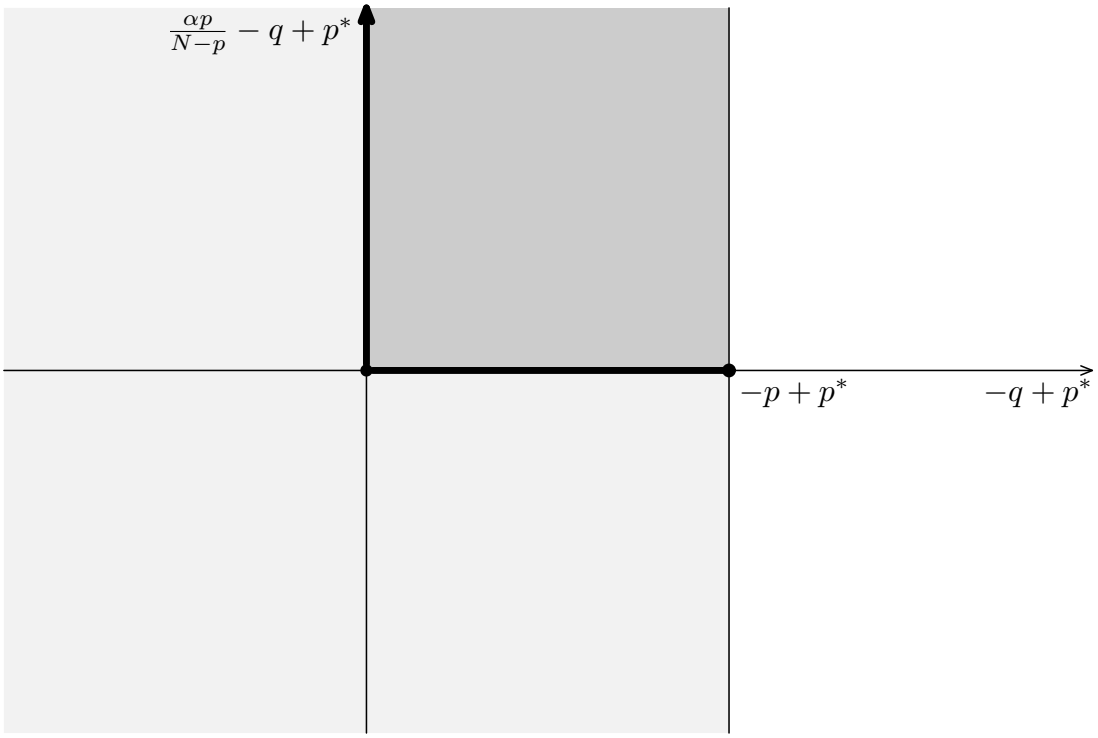

Figura 5.1

Per $p > q$ si ottiene invece il grafico mostrato nella Figura 5.2, in cui abbiamo riportato su un asse la variabile q. Siccome $q \in (1, p)$, si ha:

- ·) per $\alpha \geq \frac{1-2p}{p}$ si ha $\frac{p}{1-p} + \frac{\alpha p}{1-p} \leq 1$ e quindi la condizione di semicontinuità per J_α non è mai verificata;
- ·) per $-p < \alpha < \frac{1-2p}{p}$ si ha $\frac{p}{1-p} + \frac{\alpha p}{1-p} \in (1, p)$ e quindi la condizione di semicontinuità per J_α può essere verificata;
- ·) per $\alpha \leq -p$ si ha $\frac{p}{1-p} + \frac{\alpha p}{1-p} \geq p$ e quindi la condizione di semicontinuità per J_α è sempre verificata.

In questa figura, le linee in grassetto rappresentano i casi supercritici, mentre le linee tratteggiate corrispondono alle zone di semicontinuità.

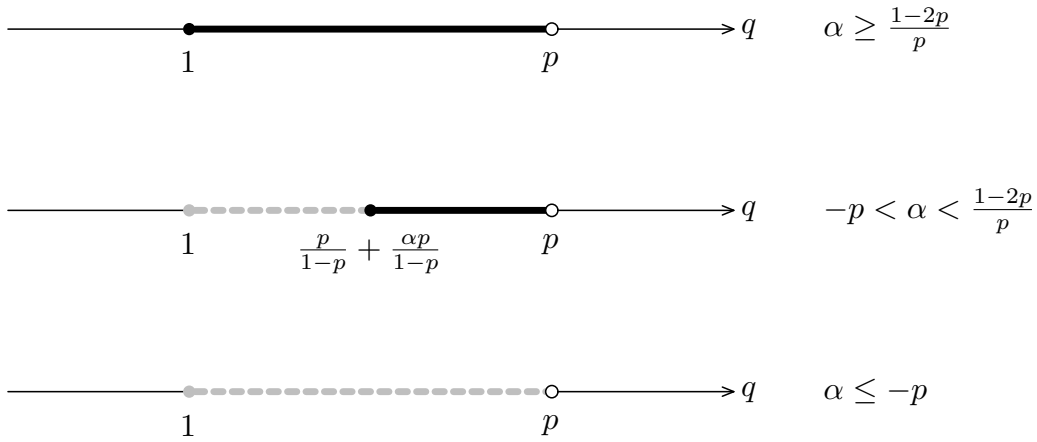

Figura 5.2

Passiamo ora al caso Neumann.

Lemma 5.13. *Sia $\alpha \leq -1$, $\Omega \in C^{0,1}$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Allora si ha*

$$\int_\Omega d^\alpha(x)|u|^q\,dx < +\infty \quad \Longrightarrow \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Dimostrazione. È divisa in due passi. Il primo consiste nel provare la seguente affermazione nel caso unidimensionale.

Siano $p,\ q \in (1,+\infty)$, $\alpha \leq -1$, I l'intervallo $(0,1)$ di $\mathbf{R}$; se una funzione $f = f(t)$ appartiene a $W^{1,p}(I) \cap L^q(I, t^\alpha)$, allora $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$.

Per dimostrare questo fatto teniamo presente che per ipotesi f soddisfa le condizioni

$$(*) \qquad \int_0^1 |f'(t)|^p\,dt < +\infty;$$

$$(**) \qquad \int_0^1 |f(t)|^q t^\alpha\,dt < +\infty.$$

Allora, dalle relazioni

$$|f(t+h) - f(t)| = \left|\int_t^{t+h} f'(s)\,ds\right| \leq |h|^{1/p'} \left(\int_t^{t+h} |f'(s)|^p\,ds\right)^{1/p},$$

usando $(*)$, segue che $|f(t+h)-f(t)| \to 0$ per $h \to 0$ uniformemente rispetto a t, quindi f è uniformemente continua ed esiste il $\lim_{t\to 0} f(t) =: l_0$. Ma se fosse $l_0 \neq 0$, avremmo una contraddizione con $(**)$, poiché $\alpha \leq -1$, e così $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$.

Il secondo passo consiste nel provare la tesi del lemma sfruttando il primo passo ed utilizzando coordinate locali: per queste ultime adottiamo le notazioni della Definizione 3.17. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega, d^\alpha)$. Passiamo a coordinate locali (y_i', y_{i_n}). La funzione w definita da $w(y_i', t) := u\left(y_i', a_i(y_i') - t\right)$ appartiene a $W^{1,p}(Q) \cap L^q(Q, t^\alpha)$, dove $Q := \Delta_i \times (0, \epsilon)$. Pertanto per ogni fissato $y_i' \in \Delta_i$, la funzione $f = f(t)$ definita da $f(t) := w(y_i', t)$ soddisfa le ipotesi dell'affermazione dimostrata nel primo passo e quindi si deduce che $\lim_{t\to 0} f(t) = 0$. Ciò significa che per ogni fissato $y_i' \in \Delta_i$ si ha $\lim_{t\to 0} w(y_i', t) = 0$, ossia $\lim_{t\to 0} u\left(y_i', a_i(y_i') - t\right) = 0$. ■

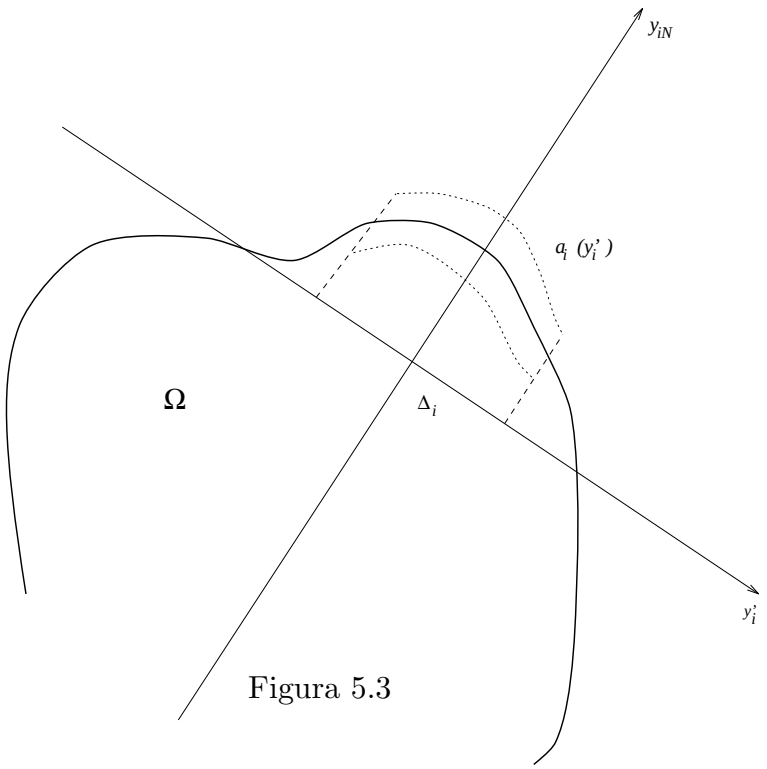

Figura 5.3

Veniamo ora allo studio della semicontinuità di J_α.

Proposizione 5.14. *Sia $p \leq q$. Se è verificata una delle seguenti condizioni:*

i) $$\begin{cases} q < p^* \\ q < \left(\frac{N-p}{N-1}\right)\left(p^* + \frac{\alpha p}{N-p}\right), \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} \alpha \geq 0 \\ q < p^*, \end{cases}$$

iii)
$$\begin{cases} \alpha \leq -1 \\ q < p^* + \frac{\alpha p}{N-p}, \end{cases}$$

allora J_α risulta debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente su $W^{1,p}(\Omega)$.

Se invece è verificata una delle seguenti condizioni:

iv)
$$q \geq p^*,$$

v)
$$q \geq p^* + \frac{\alpha p}{N-p},$$

allora J_α non risulta debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente su $W^{1,p}(\Omega)$.

Sia $p > q$. Allora J_α è debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente su $W^{1,p}(\Omega)$ se e solo se $\alpha > -1$.

Nel corso della dimostrazione, quando J_α non è semicontinuo cercheremo anche di distinguere tra casi critici e casi supercritici, attribuendo a questi termini lo stesso significato di prima: l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega; d^\alpha)$ sarà continua ma non compatta nei casi critici, non continua in quelli supercritici.

Daremo inoltre ormai per noti i seguenti fatti, per i quali facciamo riferimento alla dimostrazione della Proposizione 5.12:

a) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha)$ con compattezza $\Longrightarrow$ J_α è semicontinuo;
b) $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha)$ con continuità $\Longrightarrow$ non siamo in un caso supercritico, quindi J_α è semicontinuo oppure siamo in un caso critico;
c) l'immersione manca di compattezza $\Longrightarrow$ J_α non è semicontinuo, quindi siamo in un caso critico oppure in un caso supercritico;
d) l'immersione manca di continuità $\Longrightarrow$ siamo in un caso supercritico.

Dimostrazione. Cominciamo con il considerare il caso $p \le q$.

i) Il Teorema 3.19 applicato con $\beta = 0$ garantisce che se $q < p^*$ e inoltre $q < \left(\frac{N-p}{N-1}\right)\left(p^* + \frac{\alpha p}{N-p}\right)$, si ha l'immersione compatta $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha)$ e pertanto J_α è semicontinuo.

ii) Poiché $\alpha \ge 0$, esiste una costante positiva C tale che $d^\alpha(x) \le C$ su Ω; poiché $q < p^*$, per il classico Teorema di Rellich-Kondrachov si ha $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$ con compattezza. Allora si ha anche $W^{1,p}(\Omega) \to\to L^q(\Omega; d^\alpha)$ con compattezza e quindi J_α è semicontinuo.

iii) Per il Lemma 5.13 poiché $\alpha \le -1$ si ha

$$\left\{u \in W^{1,p}(\Omega) : G_\alpha(u) < +\infty\right\} = \left\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) : G_\alpha(u) < +\infty\right\};$$

la semicontinuità di J_α se $q < \min\left\{p^*, \left(p^* + \frac{\alpha p}{N-p}\right)\right\} = p^* + \frac{\alpha p}{N-p}$ segue allora dalla Proposizione 5.12.

Infatti data $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si possono presentare due casi: $u \notin L^q(\Omega; d^\alpha)$, e allora per ogni successione $\{u_h\}$ debolmente convergente a u in $W^{1,p}(\Omega)$ si ha $J_\alpha(u) = \liminf J_\alpha(u_h) = +\infty$, oppure $u \in L^q(\Omega; d^\alpha)$, e allora per il Lemma 5.13 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$: in tal caso per ogni successione $\{u_h\}$ debolmente convergente a u in $W^{1,p}(\Omega)$ con $G_\alpha(u_h) < +\infty$ per ogni $h \in \mathbf{N}$, si ha $\{u_h\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ e pertanto, per l'immersione compatta di $W_0^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega; d^\alpha)$, si ha $G_\alpha(u_h) \to G_\alpha(u)$.

iv) Proviamo che per $q > p^*$ l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega; d^\alpha)$ non è continua, e quindi siamo in un caso supercritico, mentre per $q = p^*$ l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega; d^\alpha)$ non è compatta, e quindi siamo in un caso critico oppure supercritico. Sia $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ con $\partial\Omega_0$ di classe $C^{0,1}$.

Se $q > p^*$ esiste una successione $\{u_h\}$ limitata in $W^{1,p}(\Omega_0)$ che non è limitata in $L^q(\Omega_0)$; sia $\tilde{u}_h \in W^{1,p}(\Omega)$ un prolungamento di u_h a Ω: $\tilde{u}_h := (Tu)|_\Omega$, dove T è un operatore lineare e continuo di prolungamento da $W^{1,p}(\Omega_0)$ in $W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$. Esiste una costante positiva K tale che

$$\|\tilde{u}_h\|_{1,p,\Omega} \le \|Tu_h\|_{1,p,\mathbf{R}^N} \le K\|u_h\|_{1,p,\Omega_0} \qquad \text{per ogni } h \in \mathbf{N},$$

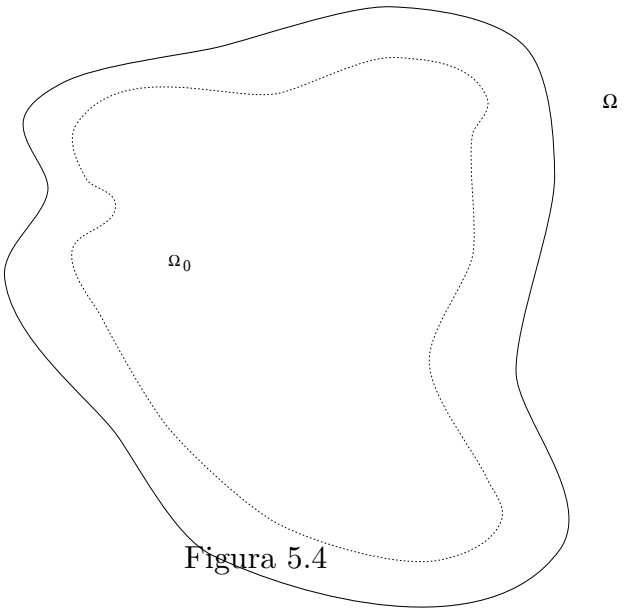

Figura 5.4

quindi $\{\tilde{u}_h\}$ è limitata in $W^{1,p}(\Omega)$. Inoltre, esistono C_1 e C_2 costanti positive tali che

$$0 < C_1 \leq d(x) \leq C_2 < +\infty \qquad \forall x \in \Omega_0$$

e pertanto qualunque sia α esiste una costante positiva C tale che

$$d^\alpha(x) \geq \frac{1}{C} \qquad \forall x \in \Omega_0.$$

Se per assurdo $\{\tilde{u}_h\}$ fosse limitata in $L^q(\Omega; d^\alpha)$, esisterebbe una costante positiva M tale che $\int_\Omega d^\alpha(x)|\tilde{u}_h|^q\,dx \leq M$ per ogni $h \in \mathbf{N}$ ed avremmo

$$\int_{\Omega_0} |u_h|^q\,dx \leq C \int_{\Omega_0} d^\alpha(x)|u_h|^q\,dx \leq C \int_\Omega d^\alpha(x)|\tilde{u}_h|^q\,dx \leq CM,$$

contro l'ipotesi che $\{u_h\}$ non fosse limitata in $L^q(\Omega_0)$.

Analogamente, se $q = p^*$, esiste una successione $\{v_h\}$ limitata in $W^{1,p}(\Omega_0)$ che non ammette sottosuccessioni fortemente convergenti in $L^q(\Omega_0)$; se prolunghiamo come prima v_h a $\tilde{v}_h \in W^{1,p}(\Omega)$, la successione $\{\tilde{v}_h\}$ risulterà ancora limitata in $W^{1,p}(\Omega)$ e non ammetterà sottosuccessioni fortemente convergenti in $L^q(\Omega; d^\alpha)$. Infatti di nuovo qualunque sia α esiste una costante positiva C tale che $d^\alpha(x) \geq \frac{1}{C}$ su Ω_0. Se per assurdo esistesse una sottosuccessione $\left\{\tilde{v}_{h_k}\right\}$ fortemente convergente a $\tilde{v}$ in $L^q(\Omega; d^\alpha)$, avremmo, posto $v := \tilde{v}|_{\Omega_0}$,

$$\int_{\Omega_0} |v_{h_k} - v|^q\,dx \leq C \int_{\Omega_0} d^\alpha(x)|v_{h_k} - v|^q\,dx \leq C \int_\Omega d^\alpha(x)|\tilde{v}_{h_k} - \tilde{v}|^q\,dx \to 0$$

e quindi $\{v_{h_k}\}$ convergerebbe a v in $L^q(\Omega_0)$, contro l'ipotesi che $\{v_h\}$ non ammettesse sottosuccessioni fortemente convergenti in $L^q(\Omega_0)$.

Quando $q = p^*$ cerchiamo ora di distinguere tra casi critici e supercritici.

Affermiamo che per $q = p^*$ e $\alpha \geq 0$ si ha $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha)$ con continuità e quindi siamo in un caso critico.

Infatti, poiché per $q = p^*$ per il classico teorema di immersione di Sobolev si ha $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ e poiché per $\alpha \geq 0$ esiste una costante positiva C tale che $d^\alpha(x) \leq C$ per ogni $x \in \Omega$, avremo per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$\left(\int_\Omega d^\alpha(x)|u|^q\,dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_\Omega |u|^q\,dx\right)^{1/q} \leq CK\left(\int_\Omega (|u|^p + |Du|^p)\,dx\right)^{1/p}.$$

Al contrario il caso $q = p^*$ e $\alpha < 0$ si rivelerà supercritico, come vedremo al punto successivo.

v) Per $q > p^* + \frac{\alpha p}{N-p}$ abbiamo visto nella Proposizione 5.12 che $W_0^{1,p}(\Omega)$ non si immerge con continuità in $L^q(\Omega; d^\alpha)$, quindi tanto meno si può avere l'immersione continua per $W^{1,p}(\Omega)$ e perciò siamo in un caso supercritico. (Vi rientra in particolare il caso in cui $q = p^*$ e $\alpha < 0$).

Per $q = p^* + \frac{\alpha p}{N-p}$ e $q < p^*$ abbiamo visto sempre nella Proposizione 5.12 che $W_0^{1,p}(\Omega)$ si immerge con continuità ma senza compattezza in $L^q(\Omega; d^\alpha)$, quindi per tutto $W^{1,p}(\Omega)$ l'immersione sarà sicuramente non compatta e potrà essere continua o meno e perciò siamo in un caso critico oppure supercritico.

In particolare quando $q = p^* + \frac{\alpha p}{N-p}$ e $\alpha \leq -1$ data $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $G_\alpha(u) < 1$, per il Lemma 5.13 si ha $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e

$$\begin{aligned}\overline{J}_\alpha(u) &= \min\left\{\liminf_{h\to+\infty} F(u_h) : u_h \to u \text{ deb. in } W^{1,p}(\Omega),\ G_\alpha(u_h) = 1\ \forall\ h\right\} = \\ &= \min\left\{\liminf_{h\to+\infty} F(u_h) : u_h \to u \text{ deb. in } W_0^{1,p}(\Omega),\ G_\alpha(u_h) = 1\ \forall\ h\right\} = \\ &= \overline{J}_{0,\alpha}(u);\end{aligned}$$

allora, siccome su $W_0^{1,p}(\Omega)$ il caso $q = p^* + \frac{\alpha p}{N-p}$, $q < p^*$ era critico, quando $\alpha \leq -1$ tale caso sarà *"critico in senso generalizzato"* anche su $W^{1,p}(\Omega)$, nel senso che *non* abbiamo proprio la continuità dell'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in

$L^q(\Omega; d^\alpha)$ bensì soltanto la continuità dell'immersione di $W^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega; d^\alpha)$ in $L^q(\Omega; d^\alpha)$: questa differenza sarà però ininfluente riguardo l'espressione di $\overline{J}_\alpha(u)$ per le u con $G_\alpha(u) < 1$.

Consideriamo ora il caso $p > q$. Il Teorema 3.28 applicato con $\beta = 0$ garantisce che quando $\alpha > -1$ si ha l'immersione compatta $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega; d^\alpha)$, da cui la semicontinuità di J_α. L'Osservazione 3.30, sempre applicata con $\beta = 0$, ci dice invece che quando $\alpha \leq -1$ l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega; d^\alpha)$ non può essere continua perché per il Teorema 3.28 non è compatta e quindi il caso $\alpha \leq -1$ rientra nella categoria dei supercritici. ■

Il quadro che dà la Proposizione 5.14 nel caso $p \leq q$ è quello illustrato nella Figura 5.5 in cui, come nella Figura 5.1, i tratti in neretto rappresentano i casi critici, la regione più scura indica la regione di semicontinuità e quella più chiara corrisponde ai casi supercritici.

Sull'asse delle ascisse abbiamo la variabile $Np - Nq + pq = (N - p)(-q + p^*)$ e sull'asse delle ordinate la variabile

$$\alpha p + q + Np - Nq = (N-1)\left[-q + \left(\frac{N-p}{N-1}\right)\left(p^* + \frac{\alpha p}{N-p}\right)\right].$$

Poiché siamo nel caso $p \leq q$ abbiamo imposto $x = (N - p)(-q + p^*) \leq (N - p)(-p + p^*) = p^2$. Il luogo $\alpha = 0$ ed il luogo $\alpha = -1$ sono rappresentati rispettivamente dalle rette tra loro parallele

$$y = x + q(1 - p)$$
$$y = x + q(1 - p) - p,$$

mentre il luogo $q = p^* + \frac{\alpha p}{N-p}$ è rappresentato dalla retta orizzontale

$$y = q(1 - p).$$

Sull'asse delle ascisse abbiamo messo il valore p^2 più a destra di $(p-1)q$ in modo arbitrario o per meglio dire casuale, visto che dipende dai valori di p e di q il fatto

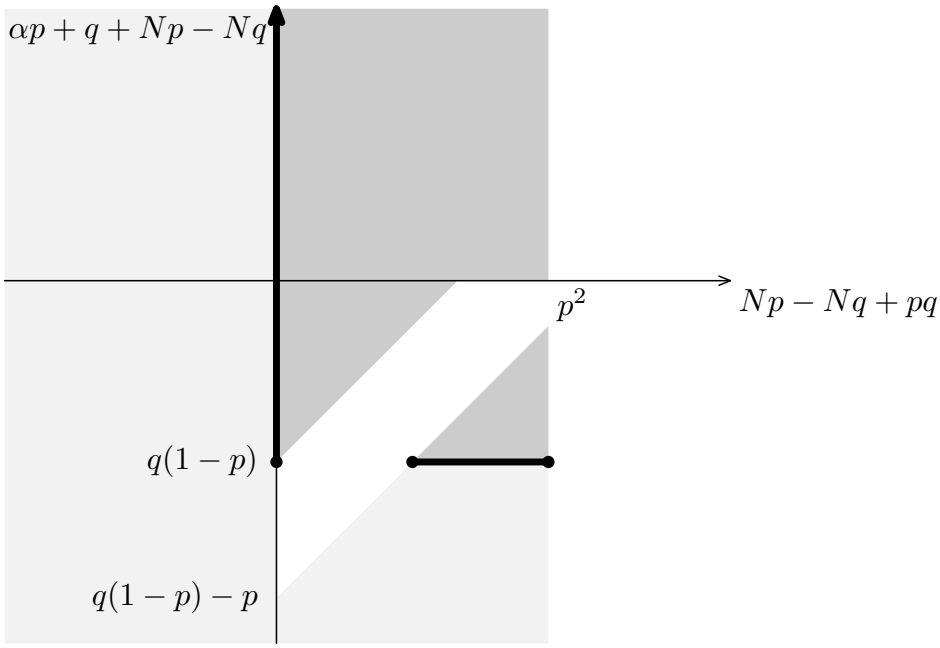

Figura 5.5

che p^2 sia maggiore, minore o uguale a $(p-1)q$, mentre si ha sempre $p^2 \leq (p-1)q+p$. Infine osserviamo che anche questa volta dei due tratti critici su quello verticale α assume valori positivi e al contrario su quello orizzontale valori negativi.

Per quanto riguarda invece il caso $p > q$, la situazione non dipende nè dalla dimensione N, nè da p e q, ma soltanto da α, e si presenta semplicemente come mostrato in Figura 5.6: la linea in neretto rappresenta la zona di semicontinuità, mentre quella tratteggiata corrisponde ai casi supercritici.

Figura 5.6

2) La questione del rilassamento

Sia per J_α come per $J_{0,\alpha}$ si possono stabilire risultati di rilassamanto analoghi a quelli stabiliti nei Teoremi 5.2 e 5.6 per J e J_0: iniziamo con il teorema per J_α, a cui il teorema per $J_{0,\alpha}$ sarà perfettamente analogo. In modo identico al caso

senza il peso si dimostra che

$$\overline{J}_\alpha(u) = \begin{cases} +\infty & \text{se } G_\alpha(u) > 1 \\ F(u) & \text{se } G_\alpha(u) = 1 \\ F(u) + L_\alpha(u) & \text{se } G_\alpha(u) < 1, \text{ con } L_\alpha(u) \in [0, +\infty], \end{cases}$$

dove naturalmente

$$F(u) = \int_\Omega (|u|^p + |Du|^p)\, dx, \qquad G_\alpha(u) = \int_\Omega d^\alpha(x)|u|^q\, dx.$$

Teorema 5.15. *Posto*

$$\mathcal{F}_{p,\alpha} := \left\{ \{u_h\} \subset W^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega d^\alpha(x)|u_h|^q\, dx = 1,\ |\operatorname{supp} u_h| \to 0 \right\}$$

$$K_{p,\alpha} := \inf_{\mathcal{F}_{p,\alpha}} \left\{ \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega |Du_h|^p\, dx \right\},$$

si ha

$$L_\alpha(u) = \begin{cases} 0 & \textit{nei casi supercritici,} \\ K_{p,\alpha} \left(1 - \displaystyle\int_\Omega d^\alpha(x)|u|^q\, dx \right)^{p/q} & \textit{nei casi critici.} \end{cases}$$

Dimostrazione. Per la distinzione tra casi critici e supercritici facciamo riferimento alle Figure 5.5 e 5.6. Questa dimostrazione è molto simile a quella del Teorema 5.2 e perciò la tracceremo rapidamente, soffermandoci solo nei punti in cui interviene la novità del peso d^α.

Parte I: casi supercritici

Presa u tale che $G_\alpha(u) < 1$, la tesi è che $\overline{J}_\alpha(u) = F(u)$ e ricordiamo che provarla significa dimostrare i due fatti seguenti:

i) 1^0 fatto: per ogni $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$ con $G_\alpha(u_h) = 1$ per ogni $h \in \mathbf{N}$ è $F(u) \le \liminf_{h\to+\infty} F(u_h)$. Ciò è immediato poiché F è debolmente semicontinuo su $W^{1,p}(\Omega)$.

ii) 2^0 fatto: esiste $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$ con $G_\alpha(u_h) = 1$ per ogni $h \in \mathbf{N}$, per cui $F(u) = \liminf_{h\to+\infty} F(u_h)$; per trovare una tale successione sfruttiamo

il fatto che per ipotesi l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega; d^\alpha)$ non è continua: esiste una successione $\{v_h\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ tale che $\|v_h\|_{q,\Omega,d^\alpha} = 1$ e $\|v_h\|_{1,p,\Omega} < \frac{1}{h}$ per ogni $h \in \mathbf{N}$. La successione cercata sarà allora definita da $u_h := u + \lambda_h v_h$, dove ogni λ_h è scelto in modo tale che $G_\alpha(u_h) = 1$ per ogni $h \in \mathbf{N}$; infatti $u_h \to u$ fortemente in $W^{1,p}(\Omega)$ (poiché $\|v_h\|_{1,p,\Omega} \to 0$ e $\{\lambda_h\}$ è limitata) e questo comporta $F(u_h) \to F(u)$.

Parte II: casi critici

Presa u tale che $G_\alpha(u) < 1$, la tesi è che $\overline{J}_\alpha(u) = F(u) + L_\alpha(u)$ e per provarla dobbiamo dimostrare i soliti due fatti.

La presenza del peso richiede una particolare attenzione nella dimostrazione del 1^0 fatto. Scriveremo di nuovo una qualsiasi successione $\{u_h\}$ debolmente convergente a u in $W^{1,p}(\Omega)$ come $u_h = w_h + v_h$, con $\{w_h\}$ ancora debolmente convergente a u, $\{v_h\}$ debolmente convergente a 0 e $|\operatorname{supp} v_h| \to 0$. Definiremo però in modo diverso le successioni $\{w_h\}$ e $\{v_h\}$. Invece di porre come prima

$$v_h = (u_h - u - \epsilon_h)^+ - (u_h - u + \epsilon_h)^-,$$

dove $\{\epsilon_h\}$ tendeva a 0 per $h \to +\infty$ in modo tale che $|\{x : |u_h(x) - u(x)| > \epsilon_h\}| \to 0$ per $h \to +\infty$, questa volta definiamo

$$v_h := (u_h - u - \epsilon_h\varphi)^+ - (u_h - u + \epsilon_h\varphi)^-,$$

dove $\{\epsilon_h\}$ tende a 0 per $h \to +\infty$ in modo tale che

$$|S_h| = |\{x : |u_h(x) - u(x)| > \epsilon_h\varphi\}| \to 0 \text{ per } h \to +\infty,$$

e φ è una funzione positiva appartenente a $W^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega; d^\alpha)$: l'esistenza di una tale successione $\{\epsilon_h\}$ si può dimostrare analogamente a come abbiamo fatto nelle pagine 58-59, quando avevamo $\alpha = 0$ e $\varphi \equiv 1$. Si osservi che se avessimo preso $\varphi \equiv 1$ come nel caso $\alpha = 0$, la condizione $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega; d^\alpha)$ sarebbe stata violata almeno quando $\alpha \leq -1$. Per ogni $h \in \mathbf{N}$ definiamo $w_h := u_h - v_h$. Avremo

quindi

$$|v_h| = \begin{cases} |u_h - u \mp \epsilon_h \varphi| & \text{su } S_h \\ 0 & \text{su } \Omega \setminus S_h, \end{cases}$$
$$|w_h| = \begin{cases} |u \pm \epsilon_h \varphi| & \text{su } S_h \\ u_h & \text{su } \Omega \setminus S_h. \end{cases}$$

Da queste definizioni si ricava:

i) $$\int_{S_h} \left(|w_h|^p + |Dw_h|^p\right) dx \to 0 \quad \text{per } h \to +\infty;$$

infatti

$$\int_{S_h} \left(|w_h|^p + |Dw_h|^p\right) dx = \int_{S_h} \left(|u \pm \epsilon_h \varphi|^p + |Du \pm \epsilon_h D\varphi|^p\right) dx \leq$$
$$\leq \left[\left(\int_{S_h} |u|^p \, dx \right)^{1/p} + \left(\int_{S_h} |Du|^p \, dx \right)^{1/p} + \right.$$
$$\left. + |\epsilon_h| \left(\left(\int_{\Omega} |\varphi|^p \, dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |D\varphi|^p \, dx \right)^{1/p} \right) \right]^p \to 0 \text{ per } h \to +\infty$$

poiché $|S_h| \to 0$, $|\epsilon_h| \to 0$ ed u e φ appartengono a $W^{1,p}(\Omega)$.

(ii) $$\int_{S_h} d^\alpha(x) |w_h|^q \, dx \to 0 \quad \text{per } h \to +\infty;$$

infatti

$$\int_{S_h} d^\alpha(x) |w_h|^q \, dx = \int_{S_h} d^\alpha(x) |u \pm \epsilon_h \varphi|^q \, dx \leq$$
$$\leq \left[\left(\int_{S_h} d^\alpha(x) |u|^q \, dx \right)^{1/q} + |\epsilon_h| \left(\int_{\Omega} d^\alpha(x) |\varphi|^q \, dx \right)^{1/q} \right]^q \to 0 \text{ per } h \to +\infty$$

poiché $|S_h| \to 0$, $|\epsilon_h| \to 0$ ed u e φ appartengono a $L^q(\Omega; d^\alpha)$. Dunque

$$\begin{aligned}
&\liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega (|u_h|^p + |Du_h|^p)\,dx = \\
&= \liminf_{h\to+\infty} \left[\int_{\Omega\setminus S_h} (|w_h|^p + |Dw_h|^p)\,dx + \int_{S_h} (|w_h+v_h|^p + |Dw_h+Dv_h|^p)\,dx \right] \geq \\
&\geq \liminf_{h\to+\infty} \int_{\Omega\setminus S_h} (|w_h|^p + |Dw_h|^p)\,dx + \liminf_{h\to+\infty} \int_{S_h} (|w_h+v_h|^p + |Dw_h+Dv_h|^p)\,dx = \\
&= \liminf_{h\to+\infty} \left[\int_\Omega (|w_h|^p + |Dw_h|^p)\,dx - \int_{S_h} (|w_h|^p + |Dw_h|^p)\,dx \right] + \\
&\qquad + \liminf_{h\to+\infty} \int_{S_h} (|v_h|^p + |Dv_h|^p)\,dx = \\
&= \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega (|w_h|^p + |Dw_h|^p)\,dx + \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega (|v_h|^p + |Dv_h|^p)\,dx \geq \\
&\geq F(u) + \liminf_{h\to+\infty} K_{p,\alpha} \left(\int_\Omega d^\alpha(x)|v_h|^q\,dx \right)^{p/q}.
\end{aligned}$$

Inoltre, dalle uguaglianze

$$1 = \int_\Omega d^\alpha(x)|w_h+v_h|^q\,dx = \int_{\Omega\setminus S_h} d^\alpha(x)|w_h|^q\,dx + \int_{S_h} d^\alpha(x)|w_h+v_h|^q\,dx$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega d^\alpha(x)|v_h|^q\,dx \; &= 1 - \liminf_{h\to+\infty} \int_{\Omega\setminus S_h} d^\alpha(x)|w_h|^q\,dx = \\
&= 1 - \liminf_{h\to+\infty} \int_{\Omega\setminus S_h} d^\alpha(x)|w_h-u+u|^q\,dx = \\
&= 1 - \int_\Omega d^\alpha(x)|u|^q\,dx,
\end{aligned}$$

dal momento che

$$\int_{\Omega\setminus S_h} d^\alpha(x)|w_h-u|^q\,dx \leq \int_{\Omega\setminus S_h} d^\alpha(x)\;\epsilon_h\;|\varphi|^q\,dx \leq \epsilon_h \int_\Omega d^\alpha(x)|\varphi|^q\,dx \to 0$$

per $h \to +\infty$. Quindi si ha $\liminf_{h\to+\infty} G_\alpha(v_h) = 1 - G_\alpha(u)$, e pertanto

$$\liminf_{h\to+\infty} F(u_h) \geq F(u) + K_{p,\alpha} \left(1 - \int_\Omega d^\alpha(x)|u|^q\,dx \right)^{p/q}.$$

Nella dimostrazione del 2^0 fatto invece il peso non interviene in modo essenziale. Prendiamo una successione $\{v_h\}$ ottimale per $K_{p,\alpha}$ tale che

$$\begin{cases} |S_h| := |\operatorname{supp} v_h| \to 0, \\ \|v_h\|_{q,\Omega,d^\alpha} = 1 \quad \forall h, \\ F(v_h) \to K_{p,\alpha}. \end{cases}$$

La successione cercata $\{u_h\}$, per la quale valga l'uguaglianza

$$\liminf_{h\to+\infty} F(u_h) = F(u) + L_\alpha(u),$$

sarà definita da $u_h := u + \lambda_h v_h$, con i λ_h scelti come sempre in modo che sia $G_\alpha(u_h) = 1$. La successione $\{\lambda_h\}$ converge a $\left(1 - \int_\Omega d^\alpha(x)|u|^q\,dx\right)^{1/q}$; infatti,

$$\begin{aligned} 1 &= G_\alpha(u_h) = \int_\Omega d^\alpha(x)|u + \lambda_h v_h|^q\,dx = \\ &= \int_{\Omega\setminus S_h} d^\alpha(x)|u|^q\,dx + \int_{S_h} d^\alpha(x)|u + \lambda_h v_h|^q\,dx \to \int_\Omega d^\alpha(x)|u|^q\,dx + \lim_{h\to+\infty} \lambda_h^q; \end{aligned}$$

allora

$$\begin{aligned} \lim_{h\to+\infty} F(u_h) &= \lim_{h\to+\infty} \int_\Omega \left(|u + \lambda_h v_h|^p + |Du + \lambda_h Dv_h|^p\right) dx = \\ &= \lim_{h\to+\infty} \left[\int_{\Omega\setminus S_h} \left(|u|^p + |Du|^p\right) dx + \right. \\ &\qquad \left. + \int_{S_h} \left(|u + \lambda_h v_h|^p + |Du + \lambda_h Dv_h|^p\right) dx\right] = \\ &= F(u) + K_{p,\alpha} \lim_{h\to+\infty} \lambda_h^p = F(u) + L_\alpha(u) \end{aligned}$$

e la dimostrazione del Teorema 5.15 è conclusa. ∎

L'analogo teorema per $J_{0,\alpha}$ è il seguente (per la distinzione tra casi critici e supercritici facciamo riferimento alle Figure 5.1 e 5.2).

Teorema 5.16. *Posto*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{0,p,\alpha} &:= \left\{\{u_n\} \subset W^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega d^\alpha(x)|u_n|^q\,dx = 1, |\operatorname{supp} u_n| \to 0\right\}, \\ K_{0,p,\alpha} &:= \inf_{\mathcal{F}_{0,p,\alpha}} \left\{\liminf \int_\Omega |Du_n|^p\,dx\right\}, \end{aligned}$$

si ha

$$L_{0,\alpha}(u) = \begin{cases} 0 & \text{nei casi supercritici} \\ K_{0,p,\alpha}\left(1 - \int_\Omega d^\alpha(x)|u|^q\,dx\right)^{p/q} & \text{nei casi critici.} \end{cases}$$

6. Generalizzazioni dei risultati ottenuti

In questo capitolo presentiamo alcune generalizzazioni dei risultati ottenuti, dimostrando formule di rilassamento valide per classi più ampie di funzionali.

6.1. Rilassamento dei problemi di Dirichlet e di Neumann con non-linearità critica e supercritica per una classe più ampia di funzionali.

Consideriamo su $W^{1,p}(\Omega)$ il funzionale

$$J_\Phi(u) = \int_\Omega (|u|^p + |Du|^p)\, dx + \Phi(\|u\|_{q,\Omega}),$$

dove $\Phi : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ è una generica funzione; osserviamo che, prendendo $\Phi(t) = \chi_{\{t=1\}}(t)$, il funzionale J_Φ si riduce al funzionale J studiato nel Paragrafo 5.1. In questo paragrafo studieremo il problema del rilassamento del funzionale J_Φ, supponendo che Ω sia un aperto limitato di $\mathbf{R}^N$ con $\partial\Omega$ di classe C^1, che $1 < p < N$ e $q \geq 1$, e che $\Phi : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ sia una funzione semicontinua inferiormente.

Vediamo per cominciare in quali casi non occorre fare il rilassamento essendo J_Φ già semicontinuo.

Proposizione 6.1. *Se $q < p^*$, J_Φ è debolmente sequenzialmente semicontinuo inferiormente su $W^{1,p}(\Omega)$.*

Dimostrazione. Se $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$, per il teorema di compattezza di Rellich-Kondrachov si ha $\|u_h\|_{q,\Omega} \to \|u\|_{q,\Omega}$; allora, per semicontinuità inferiore di Φ su $[0, +\infty]$ e di $F(\cdot) = \|\cdot\|^p_{1,p,\Omega}$ rispetto alla convergenza debole su $W^{1,p}(\Omega)$, avremo

$$J_\Phi(u) \leq \liminf_{h\to+\infty} J_\Phi(u_h). \qquad \blacksquare$$

Quando invece $q \geq p^*$, indicando con $\overline{J}_\Phi$ il funzionale rilassato di J_Φ rispetto alla topologia debole di $W^{1,p}(\Omega)$ e con $F(u) = \|u\|^p_{1,p,\Omega}$, si ha il risultato seguente.

Teorema 6.2. *Posto*

$$\mathcal{F}_p := \left\{ \{u_h\} \subset W^{1,p}(\Omega) : \int_\Omega |u_h|^{p^*}\, dx = 1,\ |\operatorname{supp} u_h| \to 0 \right\},$$
$$K_p := \inf_{\mathcal{F}_p} \left\{ \liminf_{h\to+\infty} \int_\Omega |Du_h|^p\, dx \right\},$$

si ha:

$$\overline{J}_\Phi(u) = F(u) + L_\Phi(u),$$

dove il funzionale $L_\Phi(u)$ è dato da

$$L_\Phi(u) = \begin{cases} \inf\limits_{t \geq \|u\|_{q,\Omega}} \Phi(t) & \text{se } q > p^*, \\ \inf\limits_{t \geq \|u\|_{q,\Omega}} \Phi(t) + K_p \left(t^{p^*} - \int_\Omega |u|^{p^*}\, dx \right)^{p/p^*} & \text{se } q = p^*. \end{cases}$$

Dimostrazione. Cominciamo con il considerare il caso $q > p^*$.

1^0 fatto: per ogni $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$, è

$$\liminf_{h\to+\infty} J_\Phi(u_h) \geq F(u) + L_\Phi(u).$$

Osserviamo che se $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$ si ha

$$\|u\|_{q,\Omega} \leq \liminf_{h\to+\infty} \|u_h\|_{q,\Omega}$$

e quindi per ogni $\epsilon > 0$ si ha definitivamente $\|u\|_{q,\Omega} - \epsilon \leq \|u_h\|_{q,\Omega}$. Quindi per ogni $\epsilon > 0$ si ha:

$$\liminf_{h\to+\infty} J_\Phi(u_h) = \liminf_{h\to+\infty} [F(u_h) + \Phi(\|u_h\|_{q,\Omega})] \geq F(u) + \inf_{t \geq \|u\|_{q,\Omega} - \epsilon} \Phi(t),$$

da cui, per semicontinuità inferiore di Φ, segue

$$\liminf_{h\to+\infty} J_\Phi(u_h) \geq F(u) + L_\Phi(u).$$

2^0 fatto: esiste $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$ tale che

$$\liminf_{h\to+\infty} J_\Phi(u_h) = F(u) + L_\Phi(u).$$

Sia ξ_h una successione in $\big[\|u\|_{q,\Omega}, +\infty\big)$ tale che $\Phi(\xi_h) \downarrow \inf_{[\|u\|_{q,\Omega},+\infty)} \Phi$; escludiamo subito la possibilità che $\xi_h \to 0$: se fosse $\xi_h \to 0$, avremmo $u = 0$ ed inoltre $\Phi(0) = \min_{[0,+\infty)} \Phi$; pertanto, prendendo la successione $\{u_h\}$ identicamante nulla si otterrebbe subito $\overline{J}_\Phi(0) = \min_{[0,+\infty)} \Phi = \Phi(0) = \liminf_{h\to+\infty} J_\Phi(u_h)$, ed il secondo fatto sarebbe già dimostrato. Dunque possiamo supporre $\xi_h \geq \bar\epsilon$ per un certo $\bar\epsilon > 0$.

Possiamo anche supporre che per ogni $h \in \mathbf{N}$ si abbia $\xi_h > \|u\|_{q,\Omega} + \bar\epsilon$ per un certo $\bar\epsilon > 0$, poiché se fosse $\xi_h \to \|u\|_{q,\Omega}$ avremmo $\Phi(\|u\|_{q,\Omega}) = \min_{[\|u\|_{q,\Omega},+\infty)} \Phi$; pertanto, prendendo la successione $\{u_h\}$ identicamente uguale a u si otterrebbe subito $\overline{J}_\Phi(u) = F(u) + \min_{[\|u\|_{q,\Omega},+\infty)} \Phi = F(u) + \Phi(\|u\|_{q,\Omega}) = \liminf_{h\to+\infty} J_\Phi(u_h)$, ed il secondo fatto sarebbe già dimostrato.

Siccome per $q > p^*$ l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ non è continua, esiste una successione $\{v_h\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ tale che $\|v_h\|_{q,\Omega} = 1$ e $\|v_h\|_{1,p,\Omega} < \frac{1}{h\xi_h}$ per ogni $h \in \mathbf{N}$.

Sia poi $\{\lambda_h\}$ una successione in $(0, +\infty)$ tale che $\|u + \lambda_h v_h\|_{q,\Omega} = \xi_h$: esiste una tale successione $\{\lambda_h\}$ poiché per ogni $h \in \mathbf{N}$ la funzione continua di una variabile reale ψ_h definita da $\psi_h(t) := \|u + tv_h\|_{q,\Omega}$ assume su $(0, +\infty)$ tutti i valori compresi tra $\psi_h(0) = \|u\|_{q,\Omega}$ e $\lim_{t\to+\infty} \psi_h(t) = +\infty$.

Osserviamo che $\lambda_h\|v_h\|_{1,p,\Omega} \to 0$ per $h \to +\infty$; infatti

$$\xi_h = \|u + \lambda_h v_h\|_{q,\Omega} \Longrightarrow \xi_h \geq -\|u\|_{q,\Omega} + \lambda_h\|v_h\|_{q,\Omega} \Longrightarrow \lambda_h \leq \xi_h + \|u\|_{q,\Omega} \Longrightarrow$$
$$\lambda_h\|v_h\|_{1,p,\Omega} \leq \|u\|_{q,\Omega}\|v_h\|_{1,p,\Omega} + \xi_h\|v_h\|_{1,p,\Omega} \leq \frac{\|u\|_{q,\Omega}}{h\xi_h} + \frac{1}{h} \to 0 \text{ per } h \to +\infty,$$

poiché abbiamo già escluso il caso che ξ_h sia infinitesimo per $h \to +\infty$.

Poniamo allora $u_h := u + \lambda_h v_h$ ed affermiamo che $\{u_h\}$ è la successione cercata. Infatti:

$$\lim_{h\to+\infty} J_\Phi(u_h) = \lim_{h\to+\infty} [F(u_h) + \Phi(\|u_h\|_{q,\Omega})] =$$
$$= \lim_{h\to+\infty} \left[\int_\Omega (|u + \lambda_h v_h|^p + |Du + \lambda_h Dv_h|^p)\, dx + \Phi(\xi_h)\right] = F(u) + \inf_{[\|u\|_{q,\Omega},+\infty)} \Phi.$$

Consideriamo ora il caso $q = p^*$. Osserviamo in primo luogo che, posto per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$g_u(t) := K_p \left(t^{p^*} - \int_\Omega |u|^{p^*} \, dx \right)^{p/p^*} + \Phi(t),$$

esiste il minimo di g_u su $\big[\|u\|_{p^*,\Omega}, +\infty\big)$: infatti poiché Φ è semicontinua inferiormente, anche g_u lo è e, poiché Φ è non negativa, g_u è coerciva. Dimostriamo ora la formula per $\overline{J}_\Phi$.

1^0 fatto: per ogni $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$, è

$$\liminf_{h\to+\infty} J_\Phi(u_h) \geq F(u) + L_\Phi(u).$$

Scriviamo ogni successione $\{u_h\}$ debolmente convergente a u in $W^{1,p}(\Omega)$ come $u_h = w_h + v_h$, con $\{w_h\}$ ancora debolmente convergente a u, $\{v_h\}$ debolmente convergente a 0 e $|\operatorname{supp} v_h| \to 0$.

Per fare questo si procede come abbiamo già fatto nel Teorema 5.2 e come allora si ridimostra anche che per $h \to +\infty$

$$\begin{aligned} &F(u_h) - [F(v_h) + F(w_h)] \to 0, \\ &\int_\Omega |u_h|^{p^*} \, dx - \left[\int_\Omega |u|^{p^*} \, dx + \int_\Omega |v_h|^{p^*} \, dx \right] \to 0. \end{aligned}$$

Avremo allora:

$$\begin{aligned} &\liminf_{h\to+\infty} J_\Phi(u_h) = \liminf_{h\to+\infty} [F(u_h) + \Phi(\|u_h\|_{p^*,\Omega})] = \\ &= \liminf_{h\to+\infty} [F(w_h) + F(v_h) + \Phi(\|u_h\|_{p^*,\Omega})] \geq \\ &\geq \liminf_{h\to+\infty} F(w_h) + \liminf_{h\to+\infty} [F(v_h) + \Phi(\|u_h\|_{p^*,\Omega})] \geq \\ &\geq F(u) + \liminf_{h\to+\infty} \left[K_p \left(\int_\Omega |v_h|^{p^*} \, dx \right)^{p/p^*} + \Phi(\|u_h\|_{p^*,\Omega}) \right] = \\ &= F(u) + \liminf_{h\to+\infty} \left[K_p \left(\int_\Omega |u_h|^{p^*} \, dx - \int_\Omega |u|^{p^*} \, dx \right)^{p/p^*} + \Phi(\|u_h\|_{p^*,\Omega}) \right] = \\ &= F(u) + \liminf_{h\to+\infty} g_u(\|u_h\|_{p^*,\Omega}) \geq F(u) + \min_{[\|u\|_{p^*,\Omega}, +\infty)} g_u, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che

$u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega) \Longrightarrow$

$\|u\|_{p^*,\Omega} \leq \liminf_{h\to+\infty} \|u_h\|_{p^*,\Omega} \Longrightarrow$

$\forall \epsilon > 0 \quad \|u\|_{p^*,\Omega} - \epsilon \leq \|u_h\|_{p^*,\Omega}$ definitivamente in $h \Longrightarrow$

$\forall \epsilon > 0 \quad \liminf_{h\to+\infty} g_u(\|u_h\|_{p^*,\Omega}) \geq \min_{[\,\|u\|_{p^*,\Omega}-\epsilon,+\infty)} g_u \Longrightarrow$

$\liminf_{h\to+\infty} g_u(\|u_h\|_{p^*,\Omega}) \geq \min_{[\,\|u\|_{p^*,\Omega},+\infty)} g_u$ (per semicontinuità inferiore di g_u).

2^0 fatto: esiste $u_h \to u$ debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$ tale che

$$\liminf_{h\to+\infty} J_\Phi(u_h) = F(u) + L_\Phi(u).$$

Sia $\eta_u \geq \|u\|_{p^*,\Omega}$ tale che $g_u(\eta_u) = \min_{[\|u\|_{p^*,\Omega},+\infty)} g_u$. Ovviamente se fosse $\eta_u = \|u\|_{p^*,\Omega}$, prendendo la successione $\{u_h\}$ identicamente uguale a u si otterrebbe:

$$\begin{aligned}\liminf_{h\to+\infty} J_\Phi(u_h) &= \liminf_{h\to+\infty} [F(u_h) + \Phi(\|u_h\|_{p^*,\Omega})] = \\ &= F(u) + \Phi(\|u\|_{p^*,\Omega}) = F(u) + g_u(\eta_u) = F(u) + L_\Phi(u),\end{aligned}$$

ed il secondo fatto sarebbe già dimostrato. Consideriamo allora $\eta_u > \|u\|_{p^*,\Omega}$.

Sia $\{v_h\}$ una successione in $W^{1,p}(\Omega)$ ottimale per K_p, ossia tale che

$$\begin{cases} |\operatorname{supp} v_h| \to 0, \\ \|v_h\|_{p^*,\Omega} = 1 \quad \forall h \in \mathbf{N}, \\ F(v_h) \to K_p. \end{cases}$$

Sia λ_h una successione in $(0,+\infty)$ tale che $\|u + \lambda_h v_h\|_{p^*,\Omega} = \eta_u$: esiste una tale successione $\{\lambda_h\}$ poiché per ogni $h \in \mathbf{N}$ la funzione continua di t definita da $\psi_h(t) := \|u + t v_h\|_{p^*,\Omega}$ assume su $(0,+\infty)$ tutti i valori compresi tra $\psi_h(0) = \|u\|_{p^*,\Omega} < \eta_u$ e $\lim_{t\to+\infty} \psi_h(t) = +\infty$.

Poniamo $u_h := u + \lambda_h v_h$ e verifichiamo che $\{u_h\}$ dà l'uguaglianza voluta. Osserviamo preliminarmente che per come abbiamo scelto $\{v_h\}$ si ha:

$$\cdot) \qquad \int_\Omega |u + \lambda_h v_h|^{p^*}\,dx - \left(\int_\Omega |u|^{p^*}\,dx + \lambda_h^{p^*} \int_\Omega |v_h|^{p^*}\,dx\right) \to 0 \implies$$

$$\eta_u^{p^*} - \left(\int_\Omega |u|^{p^*}\,dx + \lambda_h^{p^*}\right) \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_h \to \left(\eta_u^{p^*} - \int_\Omega |u|^{p^*}\,dx\right)^{1/p^*};$$

$$\cdot) \qquad \int_\Omega |u+\lambda_h v_h|^p + |Du+\lambda_h Dv_h|^p\,dx - \left(\int_\Omega (|u|^p+|Du|^p)\,dx + \right.$$
$$\left. +\lambda_h^p \int_\Omega (|v_h|^p+|Dv_h|^p)\;dx\right) \to 0 \quad \Longrightarrow$$
$$F(u+\lambda_h v_h) \to F(u) + K_p\left(\eta_u^{p^*} - \int_\Omega |u|^{p^*}\,dx\right)^{p/p^*}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}\lim_{h\to+\infty} J_\Phi(u_h) &= \liminf_{h\to+\infty}\left[F(u_h)+\Phi(\|u_h\|_{p^*,\Omega})\right] = \\ &= F(u) + K_p\left(\eta_u^{p^*} - \int_\Omega |u|^{p^*}\,dx\right)^{p/p^*} + \Phi\big(\eta_u\big) = \\ &= F(u) + L_\Phi(u),\end{aligned}$$

e ciò esaurisce la dimostrazione del Teorema 6.2. ■

Osservazione 6.3. Nel caso particolare in cui $\Phi(t) = \chi_{\{t=1\}}(t)$ il funzionale J_Φ si riduce al funzionale J del Paragrafo 5.1 e si ha

$$L_\Phi(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } q > p^* \\ K_p\left(1-\int_\Omega |u|^{p^*}\,dx\right)^{p/p^*} & \text{se } q = p^*, \end{cases}$$

ritrovando così l'espressione di $\overline{J}(u)$.

Osservazione 6.4. Potremmo considerare il funzionale J_Φ su $W_0^{1,p}(\Omega)$ anziché su $W^{1,p}(\Omega)$: la Proposizione 6.1 continuerebbe a valere e nel Teorema 6.2 basterebbe sostituire alla costante K_p la costante $K_{0,p}$ del Teorema 5.6.

Naturalmente, con le stesse notazioni del Capitolo 5, si avrebbero ancora le uguaglianze $K_{0,p} = C_{0,p}$ e $K_2 = S\;2^{-2/N}$ stabilite rispettivamente nel Corollario 5.9 e nella Proposizione 5.11.

6.2. Rilassamento di problemi di tipo integrale con nonlinearità critica e supercritica

In questo paragrafo presentiamo un'altra possibile generalizzazione del Teorema 5.2.

Sia ancora Ω un aperto limitato e regolare di $\mathbf{R}^N$, siano $1 < p < N$ e $q \geq p^*$. Consideriamo su $W^{1,p}(\Omega)$ il funzionale

$$J(u) = F(u) + \chi_{\{G(u)=1\}}(u),$$

dove F e G sono funzionali di tipo integrale della forma

$$F(u) = \int_\Omega f(x, Du)\, dx, \qquad G(u) = \int_\Omega g(x, u)\, dx;$$

supponiamo che le funzioni f e g verifichino le seguenti condizioni:

i) f e g sono boreliane;

ii) esistono costanti positive α, β, γ, δ tali che

$$\alpha|z|^p \leq f(x, z) \leq \beta|z|^p, \qquad \gamma|s|^q \leq g(x, s) \leq \delta|s|^q;$$

iii) $f(x, \cdot)$ e $g(x, \cdot)$ sono omogenee, rispettivamente di grado p e q;

iv) $f(x, \cdot)$ e $g(x, \cdot)$ sono rispettivamente convessa e continua.

Per il funzionale rilassato $\bar{J}$ rispetto alla topologia debole su $W^{1,p}(\Omega)$ si avrà come al solito

$$\bar{J}(u) = \begin{cases} +\infty & \text{se } G(u) > 1 \\ F(u) & \text{se } G(u) = 1 \\ F(u) + L(u) & \text{se } G(u) < 1, \text{ con } L(u) \in [0, +\infty]. \end{cases}$$

Nelle ipotesi sopra si può avere per il termine di gap $L(u)$ la caratterizzazione seguente.

Teorema 6.5. *Posto*

$$\mathcal{F} := \left\{ \{u_h\} \subset W^{1,p}(\Omega) : G(u_h) = 1,\ |\operatorname{supp} u_h| \to 0 \right\},$$

$$K := \inf_{\mathcal{F}} \left\{ \liminf_{h \to +\infty} F(u_h) \right\},$$

si ha

$$L(u) = \begin{cases} 0 & \text{se } q > p^* \\ K\,(1 - G(u))^{p/p^*} & \text{se } q = p^*. \end{cases}$$

La dimostrazione si dovrebbe ricalcare, con qualche modifica, sulla traccia di quella del Teorema 5.2, utilizzando le ipotesi fatte sulle funzioni f e g.

Un analogo risultato si avrebbe definendo il funzionale J su $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Osservazione 6.6. Se F e G sono definiti come nel teorema precedente, e $\Phi : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ è una funzione semicontinua inferiormente, un risultato analogo al Teorema 6.2 si può ottenere per il rilassato del funzionale J_Φ definito da

$$J_\Phi(u) = F(u) + \Phi\left(G(u)\right).$$

7. Problemi aperti

In questo ultimo capitolo presenteremo brevemente alcuni problemi aperti collegati agli argomenti trattati nella tesi.

1. Sia Ω un aperto limitato e regolare di $\mathbf{R}^N$, sia $p > N$ e sia $\alpha \geq 0$; sia inoltre $\Phi : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ una funzione semicontinua inferiormente. Consideriamo su $W^{1,p}(\Omega)$ il funzionale

$$J_\Phi(u) := \int_\Omega |Du|^p \, dx + \Phi(\|u\|_{0,\alpha,\Omega}),$$

dove abbiamo indicato con $\| \cdot \|_{0,\alpha,\Omega}$ la norma usuale sullo spazio $C^{0,\alpha}(\Omega)$ delle funzioni hölderiane con esponente α. Vorremmo calcolare l'espressione di $\overline{J}_\Phi$, il funzionale rilassato di J_Φ rispetto alla topologia debole su $W^{1,p}(\Omega)$. Naturalmente, se $\alpha < 1 - \frac{N}{p}$, per l'immersione compatta di $W^{1,p}(\Omega)$ in $C^{0,\alpha}(\Omega)$, J_Φ risulta semicontinuo inferiormente su $W^{1,p}(\Omega)$. Nei casi supercritici, cioè quando $\alpha > 1 - \frac{N}{p}$, si dimostra facilmente, utilizzando la mancanza di continuità dell'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ e seguendo uno schema analogo a quello utilizzato nei capitoli precedenti, che si ha

$$\overline{J}_\Phi(u) = F(u) + L_\Phi(u),$$

dove il funzionale L_Φ è definito da

$$L_\Phi(u) := \inf_{t \geq \|u\|_{0,\alpha,\Omega}} \Phi(t).$$

Nel caso critico $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, in cui l'immersione di $W^{1,p}(\Omega)$ in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ è continua ma non compatta, non siamo riusciti ad identificare l'espressione del funzionale rilassato $\overline{J}_\Phi$; ciò è dovuto in sostanza al fatto che, se $\{S_h\}$ è una successione di insiemi misurabili contenuti in Ω con $|S_h| \to 0$, si ha

$$u \in L^q(\Omega) \Longrightarrow \|u\|_{q,S_h} \to 0,$$

mentre

$$u \in C^{0,\alpha}(\Omega) \not\Longrightarrow \|u\|_{0,\alpha,S_h} \to 0.$$

Resta quindi ancora aperto il problema di trovare l'espressione di $\overline{J}_\Phi$ nel caso critico $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$.

2. Sarebbe interessante anche cercare di rilassare funzionali analoghi a quelli già studiati, ma definiti su spazi di Sobolev frazionari. Questi ultimi possono essere introdotti in diversi modi, peraltro non tutti equivalenti fra di loro; definiamo qui gli spazi che si incontrano più spesso in letteratura, indicati di solito con $W^{s,p}(\Omega)$, per arbitrari domini in $\mathbf{R}^N$, s qualunque, e $1 \le p \le +\infty$. Per $0 < \theta < 1$ e $1 \le p < +\infty$ sia $T^{\theta,p}(\Omega)$ lo spazio di Banach delle (classi di equivalenza di) funzioni $u \in L^p(\Omega)$ per cui la norma

$$\left\|u; T^{\theta,p}(\Omega)\right\| := \left(\|u\|_{p,\Omega}^p + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{N-1+(1-\nu)p}}\, dxdy\right)^{1/p}$$

è finita, dove $\nu + \frac{1}{p} = \theta$.
Sia $s \ge 0$ e sia $1 \le p < +\infty$. Se $s = m \in \mathbf{N}$, definiamo $W^{s,p}(\Omega) := W^{m,p}(\Omega)$. Se s non è un intero, scriviamo $s = m + \sigma$, dove m è un intero e $0 < \sigma < 1$: lo spazio $W^{s,p}(\Omega)$ è dato in questo caso dalle (classi di equivalenza di) funzioni $u \in W^{m,p}(\Omega)$ le cui derivate distribuzionali $D^\alpha u$, $|\alpha| = m$, appartengono a $T^{1-\sigma,p}(\Omega)$. $W^{s,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma

$$\|u\|_{s,p,\Omega} := \left(\|u\|_{m,p,\Omega}^p + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u; T^{1-\sigma,p}(\Omega)\|^p\right)^{1/p}.$$

In modo analogo si può definire anche $W^{s,\infty}(\Omega)$ come lo spazio di Banach delle (classi di equivalenza di) funzioni $u \in W^{m,\infty}(\Omega)$ per le quali è finita la norma

$$\|u\|_{s,\infty,\Omega} := \max\left\{\|u\|_{m,\infty,\Omega}, \quad \max_{|\alpha|=m} \operatorname*{ess\,sup}_{x,y\in\Omega\ x\neq y} \frac{|D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\sigma}\right\}.$$

Per gli spazi $W^{s,p}(\Omega)$ valgono teoremi di immersione molto generali, dei quali ricordiamo alcuni casi particolari: sia Ω un dominio regolare di $\mathbf{R}^N$, sia $s > 0$ e $1 < p < N$; allora si ha:

i) se $N > sp$, allora $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per $p \leq q \leq \frac{Np}{N-sp}$,

ii) se $N = sp$, allora $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ per $p \leq q < +\infty$,

iii) se $N < (s-k)p$ per qualche intero $k \geq 0$, allora $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_b^k(\Omega)$.

Nei casi i) e ii) sarebbe interessante trovare l'espressione del funzionale rilassato $\overline{J}_\Phi$ quando il funzionale J_Φ è definito su $W^{s,p}(\Omega)$ come

$$J_\Phi(u) := \|u\|^p_{s,p,\Omega} + \Phi(\|u\|_{q,\Omega});$$

analogamente anche nel caso ii), essendo J_Φ definito su $W^{s,p}(\Omega)$ come

$$J_\Phi(u) := \|u\|^p_{s,p,\Omega} + \Phi(\|u; C_b^k(\Omega)\|),$$

dove naturalmente $\|u; C_b^k(\Omega)\|$ indica la norma usuale su $C_b^k(\Omega)$.

Più in generale lo stesso problema si pone quando J_Φ è definito su $W^{s,p}(\Omega)$ come

$$J_\Phi(u) := \|u\|^p_{s,p,\Omega} + \Phi\left(\|u\|_{r,q,\Omega}\right);$$

in questo caso si dovrebbero usare naturalmente i teoremi di immersione di $W^{s,p}(\Omega)$ in $W^{r,q}(\Omega)$.

3. Come abbiamo già fatto notare a pagina 70, rimane aperto il problema della determinazione delle costanti K_p per $p \neq 2$. A questo proposito sarà probabilmente di aiuto la conoscenza della letteratura francese sulla materia, in particolare dei lavori sulla compattezza per concentrazione di P.L. Lions [11].

4. In tutta la tesi, per quanto riguarda gli spazi di Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, abbiamo sempre fatto l'ipotesi $p > 1$, perché per trattare il caso $p = 1$ avremmo dovuto inevitabilmente lavorare anche in altri spazi funzionali, cioè negli spazi $BV(\Omega)$. Sarebbe interessante stabilire se, con opportune modifiche, anche nel caso $p = 1$ continuano a valere risultati analoghi a quelli ottenuti per $p > 1$.

5. Un altro caso che potremmo studiare è quello in cui $p = N$: esso richiede di lavorare, come ora accenneremo brevemente, negli spazi di Orlicz. Sia

$$A(t) := \exp\left[t^{p/(p-1)}\right] - 1.$$

Poniamo $K_A(\Omega)$ l'insieme di tutte le (classi di equivalenza di) funzioni misurabili u su Ω che soddisfano

$$\int_\Omega A(|u(x)|)\,dx < +\infty.$$

Lo spazio di Orlicz $L_A(\Omega)$ è definito come l'inviluppo lineare di $K_A(\Omega)$, cioè il più piccolo spazio vettoriale contenente $K_A(\Omega)$. Si può dimostrare che il funzionale

$$\|u\|_{A,\Omega} := \inf\left\{k > 0 : \int_\Omega A\left(\frac{|u(x)|}{k}\right)\,dx \le 1\right\}$$

è una norma su $L_A(\Omega)$ e che, se Ω è limitato e sufficientemente regolare, si ha l'immersione continua

$$W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L_A(\Omega).$$

Pertanto nel caso in cui $p = N$, non essendo definito l'esponente p^*, si potrebbe cercare di rilassare J_Φ quando Φ dipende dalla norma $\|\cdot\|_{A,\Omega}$, cioè quando $J_\Phi(u)$ è definito su $W^{1,N}(\Omega)$ come

$$J_\Phi(u) := \|u\|^N_{1,N,\Omega} + \Phi(\|u\|_{A,\Omega}).$$

Bibliografia.

[1] R. A. Adams: *Sobolev spaces.* Academic press, London (1975).

[2] Adimurthi, G. Mancini: *The Neumann Problem for Elliptic Equations with Critical Nonlinearity.* A tribute in honour of G. Prodi, Scuola Normale Superiore, Pisa (1991), 9 − 25.

[3] Adimurthi, F. Pacella, S. L. Yadava: *Interaction between the Geometry of the Boundary and Positive Solutions of Semilinear Neumann Problem with Critical Nonlinearity.* Journal of Functional Analysis, **113** (1993), 318 − 350.

[4] C. Baiocchi, G. Buttazzo, F. Gastaldi, F. Tomarelli: *General Existence Theorems for Unilateral Problems in Continuum Mechanics.* Arch. Rational Mech. Anal., **100** (1988), 149 − 189.

[5] H. Brezis: *Analyse fonctionnelle.* Masson, Paris (1993).

[6] G. Buttazzo: *Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in The Calculus of Variations.* Pitman Res. Notes Math. Ser **207**, Longman, Harlow (1989).

[7] G. Buttazzo, V. J. Mizel: *On a Gap Phenomen for Isoperimetrically Constrained Variational Problems.* Preprint.

[8] P. Gurka, B. Opic: *Continuous and Compact Imbeddings of Weighted Sobolev Spaces I, II, III.* Czechoslovak Math. J. **38**, 133 (1988), 730-744; **39**, 134 (1989), 78-94.

[9] A.D. Ioffe: *On Lower Semicontinuity of Integral Functionals.* Siam Journal on Control and Optimization **15** (1977), 521-538 and 971-1000.

[10] A. Kufner: *Weighted Sobolev Spaces.* Teubner Text, Lipzig (1980).

[11] P.L. Lions: *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations, I and II.* Annales de l'Institut Henri Poincaré **I** (1984), 109-145 and 223-284.

[12] B. Opic, A. Kufner: *Hardy - type Inequalities.* Pitman Res. Notes Math. Ser **219**, Longman, Harlow (1990).

[13] G. Talenti: *Best Constant in Sobolev Inequality.* Ann. Mat. Pura Appl., **110** (1976), 353 − 372.