Congetture riguardanti alcuni problemi di evoluzione.

A Paper in Honor of John Nash

Ennio De Giorgi

Summary. I have greatly appreciated the invitation to write a paper in honor of John Nash, a scientist who has been a major source of new ideas for mathematicians. His work has been a clear example of how the most original mathematical ideas are often close to the fundamental problems of other disciplines. I believe that this example is very important for any student who is still motivated by the drive that the ancients called *philosophy*, that is love for Wisdom.

The character of my paper is exploratory.

Some conjectures concerning "evolution problems" are presented. They are related to the "steepest descent", to the approximations of Newton's gravitation law, to hyperbolic non linear equations and to "descent movements" of manifolds.

The article identifies several questions, of which I do not know the solution, and points out a number of analogies between problems that are apparently far from each other. I believe that the study of these conjectures might provide an opportunity for scientists that are expert in different fields within pure and applied mathematics to get together and ponder on the connections that exist among various mathematical concepts, such as linear vs. non-linear behavior, stability vs. instability, or convergence of different approximation methods, and certain ideas well developed in physics, such as deterministic vs. non-deterministic behavior, predictability vs. non-predictability, order and chaos, etc.

Introduzione

In questo lavoro esporrò alcune congetture relative a "problemi di evoluzione" legate all'idea di "discesa secondo la massima pendenza", alla legge di gravitazione universale di Newton, alle equazioni iperboliche e ai movimenti di varietà immerse in uno spazio euclideo.

È mia opinione che lo studio di queste congetture possa servire a una migliore comprensione dei fenomeni che si possono presentare quando si approssimano problemi "piú difficili e piú instabili" mediante problemi "meno difficili e piú stabili". In particolare si dovrebbe vedere quando un processo di approssimazione non converge in corrispondenza a tutti i "dati ammissibili" ma si ha convergenza e una certa stabilità del limite solo in corrispondenza a un "insieme denso" di dati oppure a "quasi tutti" i dati. Naturalmente le nozioni di "stabilità", di "insieme denso" e di "quasi tutti" sono legate all'introduzione di ragionevoli topologie, metriche o di qualche misura significativa nella famiglia dei dati ammissibili.

Dato il carattere eterogeneo di queste congetture, che forse sono state in parte trattate in lavori a me ignoti, posso dare solo indicazioni bibliografiche molto frammentarie e incomplete che mi sono state segnalate da vari colleghi e amici e che io stesso non ho ancora avuto il tempo di approfondire. Esse devono essere considerate solo come una prima traccia utile per iniziare la sistematica ricerca bibliografica necessaria per fare realmente il "punto della situazione" al momento attuale.

Spero che una tale ricerca bibliografica e la stessa riflessione sulle congetture esposte possa essere occasione per ritrovare e collegare fra loro vari lavori finora ritenuti molto lontani e forse mettere in evidenza eventuali collegamenti che si possono stabilire tra idee matematiche riguardanti linearitá e non linearitá, stabilitá e instabilitá, convergenza di differenti metodi di approssimazione e concetti della fisica come determinismo e indeterminismo, prevedibilitá e imprevedibilitá, ordine e caos.

Problema 1. (Problemi di discesa.)
Cominciamo col considerare alcuni problemi collegati al "metodo della discesa".
Consideriamo funzionali del tipo

$$F(w, A) = \int_A g(w, \nabla w, \ldots, \nabla^k w) \tag{1}$$

ove A è un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$, w è una funzione di classe $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, g è una funzione di classe C^∞ nello spazio dei polinomi di n variabili reali e grado minore o uguale a k.
In queste ipotesi diremo che una funzione $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ è la funzione di Eulero associata a F e a w e scriveremo

$$\psi = \mathcal{E}(F, w)$$

se per ogni aperto limitato $A \subset \mathbf{R}^n$ e per ogni funzione test $\tau \in C_0^\infty(A)$ vale la condizione

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} \left(F(w + \lambda\tau, A) - F(w, A) \right) = \int_A \tau\, \psi. \tag{2}$$

In alcuni casi in cui la funzione g non è convessa (o non soddisfa altre condizioni vicine alla convessitá, vedi [4]) lo studio dell'equazione differenziale

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathcal{E}(F, u(\cdot, t)) \tag{3}$$

con le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = \varphi(x) \tag{4}$$

nell'insieme $\mathbf{R}^n \times [0, +\infty)$ può presentare notevoli difficoltà e sembra opportuno seguire metodi tipo viscositá artificiale (cfr. per es. [5]) e associare al funzionale F funzionali F_ε definiti, per $\varepsilon \neq 0$, dalla formula

$$F_\varepsilon(w, A) = F(w, A) + \varepsilon^2 \int_A \left|\nabla^{k+1} w\right|^2$$

ove al solito

$$|\nabla^s w|^2 = \sum_{j_1=1}^n \cdots \sum_{j_s=1}^n \Big(\frac{\partial^s u}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_s}} \Big)^2$$

e quindi tentare di approssimare l'equazione differenziale (3) con l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\mathcal{E}(F_\varepsilon, u(\cdot, t)). \tag{5}$$

Un esempio semplice ma non banale di questa situazione si ha considerando il caso $k = 1$, $n = 1$ (cfr. [9,10]),

$$g\left(w, \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\log\left(1 + \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2\right).$$

In tal caso l'equazione (3) diventa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)^{-1}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(1 - \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right)\left(1 + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2\right)^{-2}.$$

Lo studio di questa equazione può presentare notevoli difficoltà quando il dato iniziale verifica in una parte di $\mathbf{R}$ la condizione $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right| > 1$; si può allora considerare il funzionale F_ε che conduce all'equazione "stabilizzata"

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\left(1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right)^{-1}\right) - \varepsilon^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \tag{6}$$

ed enunciare una prima congettura.

Congettura 1. Se $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, se, per ogni $\varepsilon \neq 0$, u_ε è una soluzione dell'equazione (6) con la condizione iniziale (4) ed è limitata in $\mathbf{R} \times [0, +\infty[$, allora per quasi ogni $(x, t) \in \mathbf{R} \times [0, +\infty)$ esiste il limite di $u_\varepsilon(x, t)$ per ε che tende a zero.

Osservazione 1. Se la Congettura 1 risultasse vera si potrebbe rafforzarla imponendo la convergenza *per ogni* (x, t) ed eventualmente anche convergenze piú forti che comportano una maggiore regolarità del limite. Si potrebbe anche richiedere una certa uniformità di convergenza al variare del dato iniziale φ e quindi una dipendenza continua del limite dal dato stesso. Se invece si trovasse qualche controesempio alla Congettura 1 essa potrebbe essere indebolita in vario modo, accontentandosi per esempio della convergenza soltanto per i dati appartenenti ad insiemi densi di qualche spazio metrico o topologico significativo. Per esempio, si potrebbero considerare spazi di funzioni analitiche, polinomi trigonometrici, funzioni legate alla curva degli errori di Gauss, e si potrebbe anche prendere in considerazione qualche misura ragionevole μ che può essere introdotta in tali spazi e sia tale che per μ quasi tutti i dati vi sia convergenza di u_ε.

Osservazione 2. Altri indebolimenti della Congettura 1 si potrebbero avere non richiedendo la convergenza in quasi tutti i punti di $\mathbf{R} \times [0, +\infty)$ ma richiedendo l'esistenza di un numero positivo T tale che u_ε converga in quasi tutto $\mathbf{R}\times[0,T)$. Un primo passo verso la conferma della Congettura 1 o la ricerca di eventuali controesempi potrebbe essere lo studio di successioni di numeri positivi (ε_i) tali che $\lim_{i\to+\infty}\varepsilon_i = 0$ e si abbia una convergenza piú o meno forte della successione (u_{ε_i}).

Osservazione 3. Si possono immaginare molte varianti della Congettura 1, per esempio si può passare dalle funzioni definite in $\mathbf{R}$ al caso di funzioni definite in un intervallo di $\mathbf{R}$ introducendo ragionevoli condizioni al contorno. Si possono pure considerare, invece che dati iniziali a supporto compatto e soluzioni limitate, dati e soluzioni periodiche nella variabile spaziale x, oppure imporre, in luogo della limitatezza, altre condizioni all'infinito. Piú in generale si può passare allo spazio $\mathbf{R}^n$ e porre

$$F(w,A) = \frac{1}{2}\int_A \log(1+|\nabla w|^2)\ ,$$

oppure nel caso $n=1$ porre

$$F(w,A) = \int_A \left(1-\left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2\right)^2\ ,$$

e considerare successivamente il funzionale analogo in $\mathbf{R}^n$,

$$F(w,A) = \int_A \left(1-|\nabla w|^2\right)^2 .$$

Risultati interessanti si potrebbero avere considerando altri casi, per esempio ponendo

$$F_\varepsilon(w,A) = \int_A \varepsilon^2 w^2 + \left(1-|\nabla w|^2\right)^2 + \varepsilon^2|\nabla^2|^2.$$

Infine si possono considerare casi in cui la funzione g che compare nella (1) dipende, oltre che da w e dalle sue derivate, dalle variabili spaziali $(x_1,\ldots,x_n)$ ed eventualmente da un parametro t che ritroveremmo come variabile temporale nelle (3), (5).

Problema 2. (Problema gravitazionale approssimato.)
Passiamo ora alla formulazione di un problema legato a una ragionevole approssimazione della legge di gravitazione universale di Newton (cfr [3,6]); tale problema sarà chiamato "Problema gravitazionale approssimato" e può essere formulato nel modo seguente:

Problema 2.1. Sia μ una misura positiva definita sugli insiemi di Borel di $\mathbf{R}^6$ e sia $\mu(\mathbf{R}^6) < +\infty$. Chiameremo soluzione del Problema gravitazionale approssimato associato a μ una terna di funzioni (s, v, u) che soddisfa le condizioni qualitative (A) e le condizioni integro-differenziali (B) che ora enunciamo.
(A)

$$s = s(\varepsilon, \xi, \eta, t) \in \left[C^1((\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}^7)\right]^3,$$

$$v = v(\varepsilon, \xi, \eta, t) \in \left[C^1((\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}^7)\right]^3,$$

$$u = u(\varepsilon, x, t) \in C^0((\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}^4).$$

La funzione scalare u è derivabile rispetto alle variabili x_1, x_2, x_3 e il suo gradiente, relativo a tali variabili, $\nabla_x u$ appartiene a $C^0(\mathbf{R} \setminus \{0\} \times \mathbf{R}^4)^3$.

(B)
Le funzioni vettoriali s, v verificano le equazioni differenziali

$$\frac{\partial s}{\partial t} = v, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \alpha(\varepsilon, s, t), \quad \alpha(\varepsilon, x, t) = \nabla_x u(\varepsilon, x, t) \tag{1}$$

con le condizioni iniziali

$$s(\varepsilon, \xi, \eta, 0) = \xi, \qquad v(\varepsilon, \xi, \eta, 0) = \eta \tag{2}$$

mentre u soddisfa la condizione integrale

$$u(\varepsilon, x, t) = \int_{\mathbf{R}^6} (|x - s(\varepsilon, \xi, \eta, t)|^2 + \varepsilon^2)^{-1/2} d\mu(\xi, \eta). \tag{3}$$

Osservazione 1. Intuitivamente $s(\varepsilon, \xi, \eta, t)$ rappresenta la posizione al tempo t di una particella che all'istante $t = 0$ si trovava nel punto ξ ed aveva velocità η; $v(\varepsilon, \xi, \eta, t)$ rappresenta la velocità al tempo t della stessa particella, $\alpha(\varepsilon, x, t)$ rappresenta l'accelerazione di una particella che nell'istante t si trovi nel punto x, infine u dovrebbe fornire, per ε molto piccolo, una ragionevole approssimazione del potenziale newtoniano. La misura μ rappresenta una distribuzione di masse (eventualmente animate da una certa velocità) all'istante $t = 0$.

Per comprendere meglio il significato delle formule (1), (2), (3), conviene considerare il caso in cui μ è somma di n misure concentrate in punti, cioè per ogni insieme di Borel $B \subset \mathbf{R}^6$ risulta $\mu(B) = \sum_{h=1}^n m_h \delta(\xi_h, \eta_h)(B)$ ove δ indica la usuale delta di Dirac, cioè

$$\begin{cases} \delta(\xi_h, \eta_h)(B) = 1 & \text{per } (\xi_h, \eta_h) \in B \\ \\ \delta(\xi_h, \eta_h)(B) = 0 & \text{per } (\xi_h, \eta_h) \notin B. \end{cases}$$

In tal caso il potenziale u che compare nella la formula (3) diventa

$$u(\varepsilon, x, t) = \sum_{h=1}^{n} m_h (|x - s(\varepsilon, \xi_h, \eta_h, t)|^2 + \varepsilon^2)^{-1/2}$$

e quindi il sistema costituito da (1), (2), (3) appare una ragionevole approssimazione per il classico problema degli n corpi.

Osservazione 2. Il caso in cui μ non è concentrata in un numero finito di punti è suggerito dall'osservazione dell'universo in cui interagiscono stelle, pianeti, satelliti, nubi di gas, polveri interstellari e altre forme di "massa diffusa". In questo caso la (3) può essere anche scritta nella forma

$$(3^*) \qquad u(\varepsilon, x, t) = \int_{\mathbf{R}^6} (|x - \xi|^2 + \varepsilon^2)^{-1/2} d\mu_t^*(\xi, \eta),$$

ove, per ogni $t \in \mathbf{R}$, la misura μ_t^* è data dalla formula

$$\mu_t^*(B) = \mu\left(\{(\xi, \eta) \in \mathbf{R}^6 : \ \big(\sigma(\varepsilon, \xi, \eta, t), v(\varepsilon, \xi, \eta, t)\big) \in B\}\right);$$

intuitivamente, per ogni $t \in \mathbf{R}$, μ_t^* descrive la distribuzione e le velocità all'istante t della massa presente nell'universo; l'evoluzione di μ_t^* al variare di t sostanzialmente descrive quella che sarebbe l'evoluzione dell'universo se esso fosse governato da una "forza gravitazionale approssimata" calcolabile a partire da un "potenziale elementare" del tipo

$$(4) \qquad (|x - \xi|^2 + \varepsilon^2)^{-1/2} \ ,$$

che per ε piccolo sembra una ragionevole approssimazione del potenziale newtoniano classico proporzionale a

$$|x - \xi|^{-1}.$$

Non mi risulta che vi sia nella letteratura una risposta esauriente alle domande circa l'esistenza di ben determinati limiti per $\varepsilon \to 0$ delle funzioni considerate nel Problema gravitazionale approssimato e in particolare vi sia la verifica o la confutazione della seguente

Congettura 1. Se (s, v, u) è soluzione del Problema gravitazionale approssimato associato alla misura μ allora, per quasi ogni punto $(x, t) \in \mathbf{R}^4$, esiste determinato e finito il limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u(\varepsilon, x, t),$$

inoltre, per quasi ogni $(\xi, \eta, t) \in \mathbf{R}^7$, esistono i due limiti

$$\lim_{\varepsilon\to 0} s(\varepsilon, \xi, \eta, t),$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} v(\varepsilon, \xi, \eta, t).$$

Osservazione 3. È probabile che la Congettura 1, pur valendo per classi assai larghe di misure μ, non valga per ogni scelta della misura μ soddisfacente le condizioni del Problema 1. Finora non ho trovato nella letteratura alcun controesempio; penso che la sua eventuale costruzione dovrebbe risultare piú facile nel caso di misure μ verificanti le condizioni

$$\mu = \sum_{h=1}^{+\infty} m_h \delta(\xi_h, \eta_h), \qquad \sum_{h=1}^{+\infty} m_h < +\infty, \qquad \sum_{h=1}^{+\infty} |\eta_h| = +\infty.$$

Piú difficile ma piú interessante dovrebbe essere il caso

$$\mu = \sum_{h=1}^{+\infty} m_h \delta(\xi_h, \eta_h), \qquad \sum_{h=1}^{+\infty} m_h < +\infty, \qquad \sup_h \left(|\xi_h| + |\eta_h|\right) < +\infty$$

intuitivamente ció corrisponde al caso in cui nell'istante iniziale tutte le particelle sono racchiuse in una zona limitata dello spazio ed é limitato l'insieme delle loro velocitá iniziali.

Possiamo considerare anche una congettura piú debole.

Congettura 2. Detto $\mathcal{M}(\mathbf{R}^6)$ lo spazio delle misure di Borel μ che sono positive in $\mathbf{R}^6$ e verificano la condizione $\mu(\mathbf{R}^6) < +\infty$, dotato della distanza δ definita dalla relazione

$$\delta(\mu, \nu) = \sup_B \left(\mu(B) - \nu(B)\right) + \sup_B \left(\nu(B) - \mu(B)\right),$$

è denso in $\mathcal{M}(\mathbf{R}^6)$ l'insieme delle misure μ per cui vale la tesi della Congettura 1.

Sarebbe pure desiderabile valutare il grado di stabilità al variare di μ dei limiti di soluzioni dei problemi gravitazionali che soddisfano la tesi della Congettura 1. Probabilmente tale grado di stabilità non è sempre molto elevato e quindi sembra opportuno introdurre una nozione abbastanza debole di stabilità, detta $\alpha-$stabilità, mediante la seguente definizione.

Definizione 1. Data una misura μ, una terna di funzioni (s, v, u) soluzioni del Problema gravitazionale approssimato associato a μ ed un numero reale $\alpha \geq 0$, diremo che la (s, v, u) è soluzione $\alpha-$stabile del Problema gravitazionale associato a μ se esistono per quasi ogni $(x, t) \in \mathbf{R}^4$ e quasi ogni $(\xi, \eta, t) \in \mathbf{R}^7$ i limiti

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u(\varepsilon, x, t),$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} s(\varepsilon, \xi, \eta, t),$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} v(\varepsilon, \xi, \eta, t),$$

ed inoltre, scelta comunque una successione di numeri positivi (ε_i), verificante la condizione $\lim_{i \to +\infty} \varepsilon_i = 0$, e una successione di misure positive (μ_i) verificanti la condizione

$$\lim_{i \to +\infty} {\varepsilon_i}^{-\alpha} \delta(\mu_i, \mu) = 0,$$

e detta (s_i, v_i, u_i) la soluzione del Problema gravitazionale approssimato associata a μ_i, risulta per quasi tutti gli $(x, t) \in \mathbf{R}^4$

$$\lim_{i \to +\infty} u_i(\varepsilon_i, x, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} u(\varepsilon, x, t),$$

mentre per quasi ogni $(\xi, \eta, t) \in \mathbf{R}^7$ risulta

$$\lim_{i \to +\infty} s_i(\varepsilon_i, \xi, \eta, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} s(\varepsilon, \xi, \eta, t),$$

$$\lim_{i \to +\infty} v_i(\varepsilon_i, \xi, \eta, t) = \lim_{\varepsilon \to 0} v(\varepsilon, \xi, \eta, t).$$

Possiamo ora dare un rafforzamento significativo della Congettura 2 enunciando la seguente

Congettura 3. Esistono numeri positivi α per i quali è denso nello spazio $\mathcal{M}(\mathbf{R}^6)$ l'insieme delle μ tali che le soluzioni del Problema gravitazionale approssimato associato a μ sono soluzioni $\alpha -$stabili.

Osservazione 4. Se fosse verificata la Congettura 3 sarebbe interessante trovare l'estremo inferiore dei numeri α ivi considerati; è assai probabile che tale estremo sia strettamente maggiore di zero; tenendo conto del fatto che l'$\alpha -$stabilità è tanto piú debole quanto piú α è grande, questo estremo inferiore ci darebbe un'indicazione sul grado globale di stabilità del Problema gravitazionale approssimato.

3. Varianti del Problema gravitazionale approssimato.

Si possono immaginare molte varianti del problema gravitazionale esposto nel §2. Si potrebbe pensare che la forza che agisce tra 2 particelle sia somma di una forza attrattiva e una forza repulsiva e porre per esempio in luogo della (3) del §1

$$u(\varepsilon, x, t) = \int_{\mathbf{R}^6} (|x-s|^2+\varepsilon^2)^{-1/2} - c^2(|x-s|^2+\varepsilon^2)^{-1} d\mu(\xi,\eta)$$

con c costante positiva.

Si potrebbero anche considerare, dopo i limiti per $\varepsilon \to 0$, i limiti di tali limiti per $c \to 0$; ciò corrisponderebbe all'idea che le forze repulsive agiscono solo a distanze piccolissime. Infine si potrebbero immaginare espressioni piú complesse corrispondenti a forze che dipendono non solo dalla posizione ma anche dalla velocità delle particelle, per esempio prendendo in considerazione integrali del tipo:

$$\alpha(\varepsilon, x, y, t) = \int_{\mathbf{R}^6} \phi(\varepsilon, x, y, s(\varepsilon, \xi, \eta, t), v(\varepsilon, \xi, \eta, t)) d\mu(\xi, \eta)$$

e quindi equazioni differenziali del tipo

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \alpha(\varepsilon, s, v, t).$$

Naturalmente ulteriori complicazioni potrebbero essere introdotte ispirandosi a teorie fisiche piú complesse che non interessano per il momento dato che lo scopo di questa nota è solo di richiamare l'attenzione su alcuni "tipi" di problemi matematici di cui successivamente si potrebbero immaginare molte varianti ricche di significato fisico.

Ritornando al Problema gravitazionale approssimato e in particolare all'Osservazione 2 del §2, potremmo considerare il caso in cui la massa μ^* è distribuita con regolarità, cioè esista una funzione $\varphi = \varphi(\varepsilon, x, y, t) \in C^\infty(\mathbf{R} \setminus \{0\} \times \mathbf{R}^7)$ tale che

$$\mu_t^*(B) = \int_B \varphi(\varepsilon, x, y, t) dx dy; \tag{1}$$

in tal caso la funzione $u(\varepsilon, x, t)$ sarà data dalla formula

$$u(\varepsilon, x, t) = \int_{\mathbf{R}^6} \left(|x-\xi|^2+\varepsilon^2\right)^{-1/2} \varphi(\varepsilon, \xi, \eta, t)\, d\xi\, d\eta,$$

e inoltre φ soddisferà l'equazione differenziale lineare del primo ordine

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\sum_{h=1}^{3} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_h} y_h + \frac{\partial \varphi}{\partial y_h} \frac{\partial u}{\partial x_h} \right)$$

di cui le equazioni (1), (2) del Problema 2.1 individuano le linee caratteristiche. Si può porre allora il problema dell'esistenza del limite per $\varepsilon \to 0$ della funzione $\varphi(\varepsilon, x, y, t)$ e studiare i possibili collegamenti con i limiti considerati nelle Congetture 1, 2, 3 del §2. Probabilmente in tale studio potrebbero emergere fenomeni interessanti riguardanti le soluzioni piú o meno generalizzate delle equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine.

4. Limiti di problemi variazionali collegabili ad equazioni iperboliche.

Nella ricerca di eventuali approssimazioni di problemi difficili ed instabili con problemi piú facili e piú stabili si può far rientrare l'idea di ottenere soluzioni di problemi di evoluzione come limite delle soluzioni di problemi di minimo. Un esempio interessante in cui quest'idea è stata applicata con successo si trova nel lavoro [7]. Una possibile variante del risultato di Ilmanen è data dalla seguente congettura.

Congettura 1. Siano $\varphi, \psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $k > 1$ intero; per ogni numero reale positivo λ, $w_\lambda = w_\lambda(x_1, \ldots, x_n, t)$ fornisca il minimo del funzionale

$$F_\lambda(u) = \int_{\mathbf{R}^n \times [0,+\infty[} e^{-\lambda t} \left[\left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 + \lambda^2 |\nabla_x u|^2 + \lambda^2 u^{2k} \right] dx\, dt \tag{1}$$

nella classe delle u soddisfacenti le condizioni iniziali

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \psi(x).$$

Allora esiste il $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} w_\lambda(x,t) = w_0(x,t)$, soddisfacente l'equazione

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = \Delta_x w_0 - k w_0^{2k-1}. \tag{2}$$

Osservazione 1. Se questa congettura risultasse falsa si potrebbe pensare a opportune varianti, per esempio richiedere che essa sia vera per un insieme denso di dati iniziali, sostituire a C^∞ dati analitici a decrescenza rapida, prendere in considerazione funzioni periodiche e in particolare polinomi trigonometrici, o addirittura pensare a un funzionale F_λ di forma diversa da quella indicata nella (1) le cui minimizzanti convergono verso soluzioni della (2). Se viceversa la congettura fosse verificata, si potrebbe pensare a un gran numero di generalizzazioni, partendo da un funzionale F del calcolo delle variazioni e associando ad esso il funzionale

$$F_\lambda(u) = \int_{\mathbf{R}^n \times [0,+\infty[} e^{-\lambda t} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|^2 dx dt + \lambda^2 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} F\big(u(\cdot, t)\big)\, dt.$$

5. Movimenti di varietà secondo funzioni euleriane.

Per introdurre movimenti di varietà immerse in uno spazio euclideo $\mathbf{R}^n$ di ogni dimensione e codimensione cominciamo con lo stabilire alcune notazioni. Per ogni aperto $A \subset \mathbf{R}^n$ continueremo a indicare con $C^\infty(A)$ lo spazio delle funzioni reali continue in A insieme con tutte le loro derivate di ogni ordine, mentre nel caso in cui l'insieme E non è un aperto, scriveremo $f \in C^\infty(E)$ se e soltanto se esistono un aperto $A \supset E$ ed una funzione $f^* \in C^\infty(A)$ tali che, per ogni $x \in E$, $f(x) = f^*(x)$. Dati due aperti A, Ω, scriveremo $A \subset\subset \Omega$ se e solo se la chiusura di A è un compatto contenuto in Ω. Infine, per ogni $E \subset \mathbf{R}^n$ possiamo definire la funzione η_E nel modo seguente:

$$\eta_E(x) = \frac{1}{2}[\mathrm{dist}(x, E)]^2 = \inf\left\{\frac{|x-\xi|^2}{2};\ \xi \in E\right\}. \tag{1}$$

Possiamo ora dare la seguente definizione di varietà h-dimensionale di classe C^∞ in un aperto Ω.

Definizione 1. Sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^n$, sia h intero, $0 \le h \le n$. Diremo che un insieme E è una varietà h-dimensionale di classe C^∞ in Ω e scriveremo $E \in V_h C^\infty(\Omega)$, se sono soddisfatte le tre condizioni seguenti:

$$\Omega \cap E = \{x \in \Omega : \eta_E(x) = 0\} \tag{a}$$

$$\text{esiste un aperto } A \supset \Omega \cap E \text{ tale che } \eta_E \in C^\infty(A) \tag{b}$$

$$\text{per ogni } x \in E \cap \Omega \text{ la matrice hessiana } \nabla^2 \eta_E(x) \text{ ha caratteristica } n-h. \tag{c}$$

Se g è una funzione di classe C^∞ definita nell'insieme dei polinomi reali di grado minore o uguale di k in n variabili reali ed $E \in V_h C^\infty(\Omega)$, allora per ogni aperto $A \subset\subset \Omega$ possiamo considerare il funzionale

$$F(E, A) = \int_{A \cap E} g\big(\eta_E(x), \nabla \eta_E(x), \ldots, \nabla^k \eta_E(x)\big)\, d\mathcal{H}^h(x), \tag{2}$$

ove $\mathcal{H}^h$ è la misura h-dimensionale di Hausdorff; poiché nei punti di E si annullano η_E e $\nabla \eta_E$, questo funzionale dipende in modo non banale da g per $k \ge 2$.
Diamo ora la definizione di funzione euleriana associata ad E ed F.

Definizione 2. Sia E un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$, Ω un aperto di $\mathbf{R}^n$, sia $E = E \cap \Omega \in V_h C^\infty(\Omega)$. Sia $\psi \in (C^\infty(E))^n$ e sia F definito dalla (2). Diremo allora che la funzione vettoriale ψ è la funzione euleriana di F su E, e scriveremo

$$\psi \in \mathcal{E}(F, E)$$

se per ogni aperto $A \subset\subset \Omega$ e per ogni $\tau \in [C_0^\infty(A)]^n$ risulta

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}\big(F(E_\lambda, A - F(E, A)\big) = \int_{E \cap A} \sum_{j=1}^n \tau_j(x)\psi_j(x)\, d\mathcal{H}^h(x),$$

ove $E_\lambda = \{x + \lambda\tau(x);\ x \in A \cap E\}$.

Possiamo dare ora una nozione di movimento di discesa secondo la funzione euleriana.

Definizione 3. Sia $E \subset \mathbf{R}^n$, F definito dalla (2), $0 < T \leq +\infty$, $u = u(x_1, \ldots, x_n, t) \in C^\infty(E \times [0, T[)$. Diremo che u è un movimento di discesa del funzionale F di origine E, e scriveremo $u \in \mathcal{MD}(F, E, T)$ se soddisfa le condizioni seguenti:

(A) $\qquad u(x, 0) = x \ , \qquad$ per ogni $x \in E$.

(B) Esiste una funzione A definita in $E \times [0, T[$ e a valori negli aperti di $\mathbf{R}^n$ tale che per ogni $(x, t) \in E \times [0, T[$, sia

$$x \in A(x, t)$$

e inoltre, posto $L(x, t) = \{u(x, t);\ x \in E \cap A(x, t)\}$, per ogni $(x, t) \in E \times [0, T[$ sia

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \mathcal{E}\big(F, L(x, t)\big)(u(x, t)).$$

Osservazione 1. Nel caso in cui g si riduca a una costante positiva, e quindi $F(E, A)$ è proporzionale alla misura $\mathcal{H}^h(E \cap A)$, ritroviamo in sostanza la definizione classica di movimento secondo la curvatura media (cfr. per es. [1]); in generale non è detto che esistano per tutti i funzionali F definiti dalla (2) e per tutti i dati iniziali E dei movimenti di discesa, ma si può pensare di approssimare gli stessi funzionali con un procedimento simile a quello seguito nel §1. Precisamente, se F è definito dalla (2), possiamo porre, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$F_\varepsilon(E, A) = F(E, A) + \varepsilon^2 \int_{E \cap A} |\nabla^{k+1}\eta_E|^2\, d\mathcal{H}^h \tag{3}$$

e formulare la seguente

Congettura 1. Se E è un compatto appartenente a $V_hC^\infty(\mathbf{R}^n)$, ed F è definito dalla (2), allora, per ogni $\varepsilon \neq 0$ esistono $T_\varepsilon > 0$ ed $u_\varepsilon \in [C^\infty(E \times [0, T_\varepsilon[)]^n$ tali che $u_\varepsilon \in \mathcal{MD}(F_\varepsilon, E, T_\varepsilon)$.

Nel caso in cui g si riduca a una costante positiva, si può ipotizzare l'indipendenza di T da ε come nella seguente

Congettura 2. Se alle ipotesi della Congettura 1 aggiungiamo l'ipotesi $k > h$ e l'ipotesi che g abbia un valore costante positivo allora si può assumere $T_\varepsilon \equiv +\infty$ e quindi $u_\varepsilon \in \big[C^\infty(E \times [0, +\infty[)\big]^n$.

Osservazione 2. In sostanza, la Congettura 2 ci fornirebbe un metodo canonico per approssimare i movimenti secondo la curvatura media. Per quanto riguarda i limiti per $\varepsilon \to 0$ di questi movimenti approssimati si porranno dei problemi piú o meno simili a quelli indicati nei paragrafi precedenti. Per cominciare si potrebbe discutere la seguente congettura che in sostanza equivale ad una specie di risultato di unicitá per il movimento secondo la curvatura media definito con un "metodo di viscositá".

Congettura 3. Nelle ipotesi della Congettura 2, esiste per $\mathcal{H}^{h+1}$ quasi tutti i punti di $E \times [0, +\infty)$ il limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x, t)$$

Osservazione 3. Se la Congettura 3 risultasse falsa si potrebbe indebolirla in vario modo, chiedendo per esempio che essa valga nel caso in cui E oltre ad appartenere a $V_hC^\infty(\mathbf{R}^n)$ appartenga a $V_h^\omega(\mathbf{R}^n)$, cioé che la funzione η_E che compare nella Definizione 1 sia analitica nell'aperto A. Si potrebbe anche chiedere che la tesi della Congettura 3 sia verificata al variare di E in un sottoinsieme denso dello spazio formato dai compatti che appartengono a $V_hC^\omega(\mathbf{R}^n)$ dotato di qualche opportuna topologia.
Se invece la Congettura 3 fosse verificata, si potrebbero esaminare alcuni casi in cui la funzione g che compare nella (2) non si riduca ad una costante. Da un punto di vista fisico, potrebbero anche avere un certo interesse per opportune scelte del funzionale F equazioni del tipo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathcal{E}\big(F, L(x,t)\big)(u(x,t)).$$

Ringraziamenti. Questa nota é il risultato di molte conversazioni avute con vari colleghi e amici, in particolare desidero ringraziare Luigi Ambrosio, Giovanni Bellettini, Giuseppe Bertin, Ivar Ekeland, Antonio Leaci, Carlo Mantegazza, Antonio Marino, Stefano Mortola, Diego Pallara, Sergio Spagnolo e Piero Villaggio.

Bibliografia

[1] **L.Ambrosio-H.M.Soner:** *Level set approach to mean curvature flow in arbitrary codimension,* preprint SNS Pisa n.34 (1994).

[2] **H. Brezis:** *Opérateurs Maximaux Monotones et Sémi-groupes de Contractions dans les Espaces de Hilbert,* North Holland (1973)

[3] **J.M. Dawson:** *Particle Simulation of Plasmas,* Review of Modern Phisics **55, 403** (1983)

[4] **M. Degiovanni, A. Marino, M. Tosques:** *Evolution Equations with Lack of Convexity, Nonlinear Analysis,* Theory Methods and Applications, Vol. 9, 12 **1401-1443** (1985)

[5] **R.J. Di Perna, P.L.Lions:** *Ordinary Differential Equations, Transport Theory and Sobolev Spaces,* Invent.Math,98 **511-547** (1989)

[6] **M. Grillakis:** *Regularity for the wave equations with a critical nonlinearity,* Comm. Pure Appl. Math **14, 749-774** (1992)

[7] **R.W.Hockney, J.W. Eastwood:** *Computer Simulation Using Particles,* New York **Mc Graw-Hill** (1981).

[8] **T.Ilmanen:** *Elliptic regularization and partial regularity for motion by mean curvature,* Mem. AMS **108 (520)** (1994).

[9] **R.H. Miller:** *Numerical experiments in collisionless systems,* Astrophysical &Space Science **14,73** (1971)

[10] **P.Perona-J.Malik:** *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion,* IEEE Computer Society Workshop on Computer Vision, Miami, FL. **16-22** (1987)

[11] **P.Perona-J.Malik:** *Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion,* IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence **12 (7) 629-639** (1990)

[12] **J. Shatah, M. Struwe:** *Regularity results for nonlinear wave equations,* Annals of Math. **138, 503-518** (1993)