Una classe di problemi di transizione di fase con l'effetto di tensione di linea

Giampiero Palatucci

1. – Transizioni di fase con tensione di linea

Il nostro lavoro di ricerca nell'ambito del Dottorato in Matematica è legato allo studio di problemi di transizione di fase liquido-liquido, da un punto di vista variazionale.

In letteratura vi sono molte varianti di funzionali del Calcolo delle Variazioni che descrivono fenomeni di transizioni di fase. Il punto di partenza della nostra ricerca è in alcuni lavori di Alberti, Bouchitté e Seppecher, che trattano di un problema collegato a transizioni di fase in un contenitore $\Omega \subset \mathrm{R}^3$ con effetti sul bordo di tipo "tensione di linea". Questo problema è descritto da un funzionale costituito da una perturbazione singolare dall'effetto regolarizzante e da due potenziali a più "buche" (le fasi, appunto), uno sul dominio Ω e l'altro sulla frontiera $\partial\Omega$. In [1], Alberti, Bouchitté e Seppecher hanno analizzato, in termini di Γ-convergenza, il comportamento asintotico, per ε che va a 0, della seguente famiglia di energie

$$E_\varepsilon(u) := \varepsilon \int_\Omega |Du|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega W(u)dx + \lambda_\varepsilon \int_{\partial\Omega} V(Tu)d\mathcal{H}^2 \quad (u \in H^1(\Omega)),$$

dove W e V sono i potenziali a doppio pozzo, con zeri rispettivamente in $\{\alpha, \beta\}$ e $\{\alpha', \beta'\}$, Tu indica la traccia di u su $\partial\Omega$, $\mathcal{H}^k$ indica la misura di Hausdorff k-dimensionale e λ_ε soddisfa

$$\varepsilon \log \lambda_\varepsilon \to c \in (0, +\infty) \;\text{ quando } \varepsilon \to 0. \tag{1}$$

Il problema di cui ci siamo occupati riguarda il caso in cui la perturbazione singolare è super-quadratica. Siamo, quindi, interessati all'analisi asintotica della seguente famiglia di funzionali definita in $W^{1,p}(\Omega)$.

$$F_\varepsilon(u) := \varepsilon^{p-2}\int_\Omega |Du|^p dx + \frac{1}{\varepsilon^{\frac{p-2}{p-1}}}\int W(u)dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\partial\Omega} V(Tu)d\mathcal{H}^2 \qquad (p > 2). \tag{2}$$

Sia u_ε una successione equilimitata per F_ε. Il comportamento asintotico delle energie F_ε è descritto da un funzionale limite Φ, che è la somma di tre contributi: un'energia di superficie concentrata su Su, insieme dei salti di u (dove u_ε ha una transizione da α a β); un'energia di bordo su $\partial\Omega$ (dove u_ε ha una transizione da Tu

a v); un'energia di linea su Sv (dove Tu_ε ha una transizione da α' a β').
Quindi, Φ dipende da due variabili u e v in $BV(\Omega,\{\alpha,\beta\})\times BV(\partial\Omega,\{\alpha',\beta'\})$:

$$\Phi(u,v)=\sigma_p\mathcal{H}^2(Su)+c_p\int_{\partial\Omega}|\mathcal{W}(Tu)-\mathcal{W}(v)|d\mathcal{H}^2+\gamma_p\mathcal{H}^1(Sv), \tag{3}$$

dove $\mathcal{W}$ è una primitiva di $W^{(p-1)/p}$; $c_p := \dfrac{p}{(p-1)^{p/(p-1)}}$; σ_p è la *tensione di superficie* data da $\sigma_p := c_p|\mathcal{W}(\beta)-\mathcal{W}(\alpha)|$; γ_p è la *tensione di linea* ed è data dal problema di profilo ottimale

$$\gamma_p := \inf\left\{\int_{\mathrm{R}^2_+}|Du|^p dx+\int_{\mathrm{R}}V(Tu)d\mathcal{H}^1 : u\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathrm{R}^2_+), \lim_{t\to-\infty}Tu(t)=\alpha', \lim_{t\to+\infty}Tu(t)=\beta'\right\}. \tag{4}$$

Osserviamo che la variazione della potenza del gradiente nel termine di perturbazione non è una semplice generalizzazione rispetto al caso quadratico. Occorre tener conto dei differenti termini di riscalamento in ε (che seguono da un'analisi di scala). Nel caso quadratico, infatti, il riscalamento logaritmico (1) rende il profilo della transizione irrilevante; non abbiamo "equipartizione dell'energia". Al contrario, tale profilo diventa cruciale nel caso super-quadratico, dove vi è equipartizione dell'energia. Questa caratteristica è stata un'arma a doppio taglio nella dimostrazione del risultato di Γ-convergenza: alcuni argomenti sono risultati semplificati dalla presenza di un problema di profilo ottimale, altri hanno richiesto maggiore attenzione.

Il risultato principale di convergenza è nel seguente teorema.

Teorema 1 [5, Theorem 2.1]. *Siano* $F_\varepsilon : W^{1,p}(\Omega)\to \mathrm{R}$ *e* $\Phi : BV(\Omega,\{\alpha,\beta\})\times BV(\Omega,\{\alpha',\beta'\})\to\mathrm{R}$ *definiti da* (2) *e* (3). *Allora*

(i) (Compattezza) *Se* $(u_\varepsilon)\subset W^{1,p}(\Omega)$ *è una successione tale che* $F_\varepsilon(u_\varepsilon)$ *è limitato, allora* $(u_\varepsilon, Tu_\varepsilon)$ *è precompatta in* $L^1(\Omega)\times L^1(\partial\Omega)$ *e ogni punto di accumulazione appartiene a* $BV(\Omega,\{\alpha,\beta\})\times BV(\partial\Omega,\{\alpha',\beta'\})$.

(ii) (Disuguaglianza del LimInf) *Per ogni* $(u,v)\in BV(\Omega,\{\alpha,\beta\})\times BV(\partial\Omega,\{\alpha',\beta'\})$ *e per ogni successione* $(u_\varepsilon)\subset W^{1,p}(\Omega)$ *tali che* $u_\varepsilon\to u$ *in* $L^1(\Omega)$ *e* $Tu_\varepsilon\to v$ *in* $L^1(\partial\Omega)$,
$$\liminf_{\varepsilon\to 0}F_\varepsilon(u_\varepsilon)\geq\Phi(u,v).$$

(iii) (Disuguaglianza del LimSup) *Per ogni* $(u,v)\in BV(\Omega,\{\alpha,\beta\})\times BV(\partial\Omega,\{\alpha',\beta'\})$ *esiste una successione* $(u_\varepsilon)\subset W^{1,p}(\Omega)$ *tale che* $u_\varepsilon\to u$ *in* $L^1(\Omega)$, $Tu_\varepsilon\to v$ *in* $L^1(\partial\Omega)$ *e*
$$\limsup_{\varepsilon\to 0}F_\varepsilon(u_\varepsilon)\leq\Phi(u,v).$$

La dimostrazione del Teorema 1 necessita di varie tappe, nelle quali deduciamo i termini dell'energia limite Φ localizzando tre effetti: l'effetto "bulk", l'effetto delle pareti del recipiente e l'effetto di bordo.

Nell'effetto "bulk", l'energia limite è valutata come in [3]. È evidente che occorre utilizzare la versione super-quadratica del funzionale di Modica-Mortola. Dunque, è sufficiente eseguire le dovute modifiche per poter sfruttare la proprietà di riscalamento ottimale del funzionale super-quadratico e, come nel caso studiato da Modica, la formula di coarea.

Il secondo termine di Φ può essere ottenuto adattando dei risultati di Modica in un articolo del 1987. In [4], Modica ha studiato un funzionale con crescita quadratica nel termine di perturbazione singolare e con un contributo di bordo del tipo $\lambda\int_{\partial\Omega} g(Tu)d\mathcal{H}^2$, dove λ non dipende da ε e g è una funzione continua e positiva. Occorre, quindi, modificare parte dei risultati ([4, Proposizione 1.2] e [4, Proposizione 1.4]) per il nostro scopo.

L'effetto di bordo necessita di un'analisi più delicata. Vediamo la strategia a grandi tratti. Prima, ci riduciamo al caso in cui il bordo è piatto, poi studiamo il comportamento asintotico dell'energia originale su semi-palle tridimensionali; quindi riduciamo il problema di una dimensione con un argomento di "slicing". A questo punto, il problema principale diventa l'analisi del comportamento asintotico del funzionale bidimensionale seguente:

$$H_\varepsilon(u) := \varepsilon^{p-2}\int_{D_1} |Du|^p dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{E_1} V(Tu)d\mathcal{H}^2,$$

dove D_1 è il semi-disco in R^2 ed E_1 è il suo "diametro" (cfr. [5, Section 3]).

Infine, con un argomento di riarrangiamento monotono lungo una direzione, abbiamo provato che il minimo in (4) è raggiunto da una funzione φ in $W^{1,p}(\mathrm{R}^2_+)$, la cui traccia su R è una funzione non decrescente ([5, Proposition 4.7]).

2. – Un risultato di perturbazione singolare con una norma frazionaria

Un primo passo per la comprensione del problema principale della nostra tesi di Dottorato è costituito dallo studio di un funzionale unidimensionale del tipo di Modica-Mortola con perturbazione non locale con crescita super-quadratica. Nel Capitolo 3 della tesi (cfr. anche [2]), abbiamo analizzato il comportamento asintotico in termini di Γ-convergenza della seguente famiglia di energie in $W^{1-\frac{1}{p},p}(I)$, con I intervallo in R:

$$G_\varepsilon(u) := \varepsilon^{p-2}\iint_{I\times I}\left|\frac{u(x)-u(y)}{x-y}\right|^p dxdy + \frac{1}{\varepsilon}\int_I V(u)\,dx, \quad (p>2), \tag{5}$$

dove V è un potenziale a doppio pozzo con buche in α' e β'. Il funzionale G_ε soddisfa una proprietà di buon riscalamento e quindi il limite è caratterizzato da un problema di profilo ottimale; i.e., G_ε Γ-converge (in $L^1(I)$) a

$$G(u) := \gamma\mathcal{H}^0(Su), \tag{6}$$

dove γ rappresenta il costo minimo, in termini dell'energia non riscalata, di una transizione da α' a β' sull'intera retta reale:

$$\gamma := \inf\left\{\iint_{\mathrm{R}\times\mathrm{R}}\left|\frac{v(x)-v(y)}{x-y}\right|^p dxdy + \int_{\mathrm{R}} V(v)\,dx : v\in W^{1-\frac{1}{p},p}_{\mathrm{loc}}(\mathrm{R}),\right.$$
$$\left.\lim_{x\to-\infty} v(x)=\alpha',\ \lim_{x\to+\infty} v(x)=\beta'\right\}. \tag{7}$$

Teorema **2** [2, Theorem 2.1]. *Siano* $G_\varepsilon : W^{1-\frac{1}{p},p}(I) \to \mathrm{R}$ *e* $G : BV(I, \{\alpha', \beta'\}) \to \mathrm{R}$ *definiti in* (5) *e* (6)*. Allora*

(i) (Compattezza) *Se* $(u_\varepsilon) \subset W^{1-\frac{1}{p},p}(I)$ *è una successione tale che* $G_\varepsilon(u_\varepsilon)$ *è limitato. Allora* (u_ε) *è precompatta in* $L^1(I)$ *e ogni punto di accumulazione appartiene a* $BV(I, \{\alpha', \beta'\})$.

(ii) (Disuguaglianza del LimInf) *Per ogni* $u \in BV(I, \{\alpha', \beta'\})$ *e per ogni successione* $(u_\varepsilon) \subset W^{1-\frac{1}{p},p}(I)$ *tale che* $u_\varepsilon \to u$ *in* $L^1(I)$,

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq G(u).$$

(iii) (Disuguaglianza del LimSup) *Per ogni* $u \in BV(I, \{\alpha', \beta'\})$ *esiste una successione* $(u_\varepsilon) \subset W^{1-\frac{1}{p},p}(I)$ *tale che* $u_\varepsilon \to u$ *in* $L^1(I)$ *e*

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} G_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq G(u).$$

Nella dimostrazione del Teorema 2, abbiamo utilizzato fortemente la "localizzazione" e le proprietà di riscalamento di G_ε. Inoltre, un ruolo importante è stato giocato dalle proprietà di monotonia di G_ε rispetto a troncature e a riarrangiamenti monotoni. Grazie a un argomento di riarrangiamento monotono, abbiamo anche provato che il minimo in (7) è raggiunto e non banale ([2, Proposition 3.3]).

Riferimenti bibliografici

[1] Alberti G., Bouchitté G. e Seppecher P., *Phase Transition with Line-Tension Effect*, Arch. Rational Mech. Anal., **144** (1998), 1-46.

[2] Garroni A. e Palatucci G., *A singular perturbation result with a fractional norm*, in Variational problems in material science, Progress in NonLinear Differential Equations and Their Applications, Birkhäuser, Basel, **68** (2006), 111-126.

[3] Modica L., *Gradient theory of phase transitions and minimal interface criterion*, Arch. Rational Mech. Anal., **98** (1987), 123-142.

[4] Modica L., *Gradient theory of phase transitions with boundary contact energy*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **5** (1987), 487-512.

[5] Palatucci G., *Phase transitions with the line tension effect: the super-quadratic case*, submitted paper, (2007).

Dipartimento di Matematica, Università degli Studi "Roma Tre"
L.go S. Leonardo Murialdo, 1, 00146 Roma
e-mail: `palatucci@mat.uniroma3.it`
Dottorato in Matematica - Ciclo XVIII
Direttore di tesi: prof. Adriana Garroni, Università di Roma "La Sapienza"