Politecnico di Milano
Facoltà di Ingegneria dei Sistemi
Tesi di Laurea in Ingegneria Matematica

STABILITÀ DI SEMIGRUPPI LINEARI ASTRATTI GENERATI DA EQUAZIONI INTEGRO-DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

Relatore:
Chiar.mo Prof. VITTORINO PATA
Controrelatore:
Chiar.mo Prof. STEFANO MORTOLA

Candidato:
EDOARDO MAININI
Matr. n. 673687

Anno Accademico 2005-2006

Ringraziamenti

Voglio ringraziare il Prof. Vittorino Pata per tutto il tempo trascorso con me durante l'elaborazione della tesi e per l'entusiasmo che ha saputo trasmettermi.
Desidero inoltre ringraziare il Prof. Claudio Giorgi per il prezioso contributo riguardante l'appendice sul modello fisico.
Un ringraziamento va infine al Prof. Stefano Mortola per i diversi consigli che hanno contribuito al migliormento di questo lavoro.

Sommario

Sia H uno spazio di Hilbert reale, e sia A un operatore lineare autoaggiunto strettamente positivo su H con dominio $\mathcal{D}(A) \Subset H$ (dunque A ha inverso compatto). Data una funzione $\mu \not\equiv 0$ su $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$, non crescente, regolare a tratti e sommabile, e ponendo $V = \mathcal{D}(A^{1/2})$, consideriamo lo spazio L^2 pesato $\mathcal{M} = L^2_\mu(\mathbb{R}^+, V)$; consideriamo inoltre il generatore infinitesimale del semigruppo di traslazioni a destra su $\mathcal{M}$, ossia l'operatore lineare

$$(T\eta)(s) = -\eta'(s), \qquad \mathcal{D}(T) = \{\eta \in \mathcal{M} : \eta' \in \mathcal{M},\ \eta(0) = 0\}\ ,$$

dove l'apice indica la derivata distribuzionale rispetto a $s \in \mathbb{R}^+$, e $\eta(0) = \lim_{s\to 0} \eta(s)$ in V. In questo lavoro di tesi, ci proponiamo di studiare il comportamento asintotico del seguente sistema di evoluzione lineare nelle variabili $u(t) : [0,\infty) \to H$ e $\eta^t : [0,\infty) \to \mathcal{M}$

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + \beta A u(t) + \displaystyle\int_0^\infty \mu(s) A\eta^t(s)\, ds = 0 \qquad t > 0 \\ \dot{\eta}^t = T\eta^t + u(t) \qquad t > 0 \\ u(0) = u_0 \\ \eta^0(s) = \eta_0(s)\ . \end{cases} \tag{1}$$

β è un parametro non negativo, mentre $u_0 \in H$ e $\eta_0 \in \mathcal{M}$ sono i dati iniziali. Il problema (1) è scritto secondo la formulazione della *storia passata* (si veda [9, 10, 11]), poiché η rende conto dei valori della variabile u negli istanti di tempo precedenti quello iniziale, e il *nucleo di memoria* μ misura quanto il sistema è influenzato dalla sua storia passata. Ponendo

$$k(s) = \int_s^\infty \mu(y)\, dy\ ,$$

si può dimostrare che il sistema (1) è una riformulazione dell'equazione integro-differenziale

$$\dot{u}(t) + \beta A u(t) + \int_0^\infty k(s) A u(t-s)\, ds = 0 \qquad t > 0\ , \tag{2}$$

con le condizioni iniziali

$$u(0) = u_0\ , \qquad u(t)_{|t<0} = \eta_0'(-t)\ .$$

In realtà, (1) è più generale rispetto alla (2), la quale richiede una maggiore regolarità sul dato iniziale η_0.

Quando $H = L^2(\Omega)$ e $A = -\Delta$ con condizioni al bordo di Dirichlet, la (2) descrive l'evoluzione della temperatura relativamente al valore di equilibrio in un conduttore di calore rigido, omogeneo e isotropo occupante un dominio limitato Ω, dove la legge di conduzione del calore è di tipo Coleman-Gurtin (si veda [4]) se $\beta > 0$, o di tipo Gurtin-Pipkin (si veda [22]) se $\beta = 0$. Il caso $\beta = 0$ emerge anche nello studio dei fluidi viscoelastici.

Il problema (1) genera un semigruppo di contrazioni $S(t)$ agente sullo spazio di Hilbert $\mathcal{H} = H \times \mathcal{M}$, le cui proprietà di decadimento per $t \to \infty$ costituiscono l'oggetto della nostra analisi. Più precisamente, per un dato nucleo di memoria μ, siamo interessati allo studio della stabilità e della stabilità esponenziale di $S(t)$. Risultati di buona posizione e di andamento asintotico per (1) o (2) sono stati ottenuti in diversi lavori (si veda [18, 19]). In particolare, in [19] è mostrato che $S(t)$ è esponenzialmente stabile se μ soddisfa la disuguaglianza differenziale

$$\mu'(s) + \delta\mu(s) \leq 0 \qquad \forall s > 0 \,, \tag{3}$$

per qualche $\delta > 0$. Questa condizione sufficiente, generalmente utilizzata per ottenere il decadimento esponenziale di semigruppi legati a problemi con memoria, è piuttosto restrittiva. Il recente lavoro [2] mostra che una condizione necessaria per ottenere il decadimento esponenziale per un problema simile è che esistano $C \geq 1$ e $\delta > 0$ tali che

$$\mu(t + s) \leq Ce^{-\delta t}\mu(s) \,, \tag{4}$$

per ogni $t \geq 0$ e quasi ogni $s > 0$. In questa sede dimostriamo che la stessa cosa vale per (1). Come notato in [2], non è difficile dimostrare che la (4) è equivalente alla (3) se $C = 1$. Nonostante ciò, quando $C > 1$, la differenza tra le due condizioni è molto grande. Dunque, uno dei nostri obiettivi è ottenere la stabilità esponenziale di $S(t)$ sotto ipotesi più deboli della (3). Un simile tentativo si è risolto con successo nell'analisi di un'altra equazione con memoria della viscoelasticità lineare in [30].

Nel presente lavoro, anzitutto otteniamo un risultato di buona posizione per il problema (1) attraverso un'applicazione del teorema di Lumer-Phillips sulla generazione dei semigruppi di contrazioni; a riguardo, consideriamo il caso generale in cui il nucleo presenti una successione di salti. In seguito, la corrispondenza tra (1) e (2) è mostrata sotto l'ipotesi aggiuntiva

$$k(s) \leq K\mu(s) \,,$$

per qualche K positivo, rendendo in tal modo più preciso l'analogo argomento riportato in [21].

Un quadro completo sulle proprietà di stabilità è fornito sotto un'ulteriore ipotesi, specificamente

$$\int_0^\infty s^2\mu(s)\, ds < \infty \,;$$

mostriamo infatti che si ha stabilità in tutti i casi tranne quelli risonanti, caratterizzati da un nucleo a scala con una sequenza di salti della forma $s_n = \ell k_n$, $k_n \in \mathbb{N}$, e da almeno un autovalore α_m di A "risonante" con esso, ossia

$$\ell = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_m \kappa}} \,,$$

essendo κ l'area sottesa dal nucleo μ.
Infine, otteniamo alcuni risultati di stabilità esponenziale; un risultato della teoria dei semigruppi afferma che $S(t)$ è esponenzialmente stabile se e solo se, per qualche $\varepsilon > 0$ e per ogni $z \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$ (essendo $\mathbb{L}$ il generatore infinitesimale di $S(t)$)

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(i\lambda \mathbb{I} - \mathbb{L})z\|_{\mathcal{H}} \geq \varepsilon \|z\|_{\mathcal{H}} \, .$$

Sviluppando questa condizione, siamo in grado di dimostrare che, se H è finito dimensionale (il caso delle equazioni ordinarie), la condizione necessaria (4) è anche sufficiente, fatta eccezione per le situazioni risonanti.
Se H è infinito dimensionale, le cose vanno diversamente, e abbiamo un controesempio per il problema monodimensionale di Laplace con condizioni di Dirichlet. Il nostro metodo per ottenere il decadimento esponenziale è allora basato sulla stima di opportuni funzionali ausiliari definiti su $\mathcal{H}$. A riguardo, incontriamo la stessa restrizione di [30] sulla "piattezza" del nucleo, ovvero, se $\beta = 0$ e la misura (rispetto a $\mu(s)ds$) delle regioni piatte non raggiunge $\kappa/2$, allora la (4) è in effetti sufficiente, mentre non siamo in grado di provare alcun risultato per rapporti di piattezza più grandi. Il caso $\beta > 0$ è invece sempre esponenzialmente stabile sotto la (4).

Abstract

Let H be a real Hilbert space, and let A be a selfadjoint strictly positive linear operator on H with domain $\mathcal{D}(A) \Subset H$ (thus A has compact inverse). Given a piecewise-smooth decreasing summable function $\mu \not\equiv 0$ on $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$, and naming $V = \mathcal{D}(A^{1/2})$, we consider the L^2-weighted space $\mathcal{M} = L^2_\mu(\mathbb{R}^+, V)$ along with the infinitesimal generator of the right-translation semigroup on $\mathcal{M}$, that is, the linear operator

$$(T\eta)(s) = -\eta'(s), \qquad \mathcal{D}(T) = \{\eta \in \mathcal{M} : \eta' \in \mathcal{M},\ \eta(0) = 0\},$$

where the *prime* stands for the distributional derivative with respect to $s \in \mathbb{R}^+$, and $\eta(0) = \lim_{s\to 0} \eta(s)$ in V. In this work, we address the study of the asymptotic behavior of the linear evolution system in the unknowns $u(t) : [0, \infty) \to H$ and $\eta^t : [0, \infty) \to \mathcal{M}$

$$\begin{cases} \dot{u}(t) + \beta A u(t) + \displaystyle\int_0^\infty \mu(s) A \eta^t(s)\, ds = 0 \qquad t > 0 \\ \dot{\eta}^t = T\eta^t + u(t) \qquad t > 0 \\ u(0) = u_0 \\ \eta^0(s) = \eta_0(s)\ . \end{cases} \tag{1}$$

Here, β is a nonnegative parameter, while $u_0 \in H$ and $\eta_0 \in \mathcal{M}$ are given initial data. Problem (1) is cast in the so-called *memory setting* (see [9, 10, 11]), since η accounts for the past values of the variable u, and the *memory kernel* μ measures how much the system is influenced by its past history. Indeed, putting

$$k(s) = \int_s^\infty \mu(y)\, dy\ ,$$

system (1) can be shown to be a reformulation of the integro-differential equation

$$\dot{u}(t) + \beta A u(t) + \int_0^\infty k(s) A u(t - s)\, ds = 0 \qquad t > 0\ , \tag{2}$$

with the initial conditions

$$u(0) = u_0, \qquad u(t)_{|t<0} = \eta_0'(-t)\ .$$

In fact, (1) is more general than (2), which requires more regularity on the initial datum η_0.

When $H = L^2(\Omega)$ and $A = -\Delta$ with Dirichlet boundary conditions, (2) describes the evolution of the temperature relative to the equilibrium value in a rigid isotropic homogeneous heat conductor occupying a bounded domain Ω, where the heat conduction law is of Coleman-Gurtin type [4] if $\beta > 0$, or of Gurtin-Pipkin type [22] if $\beta = 0$. The case $\beta = 0$ also arises in the study of viscoelastic fluids.

Problem (1) generates a linear contraction semigroup $S(t)$ acting on the Hilbert space $\mathcal{H} = H \times \mathcal{M}$, whose decay properties as $t \to \infty$ constitute the object of our investigation. More precisely, for a given memory kernel μ, we are interested to study the stability and the exponential stability of $S(t)$. Well-posedness and asymptotic results for (1) or (2) have been established in several works (see e.g. [18, 19]). In particular, [19] shows that $S(t)$ is exponentially stable provided that μ satisfies the differential inequality

$$\mu'(s) + \delta\mu(s) \leq 0 \qquad \forall s > 0 \,, \tag{3}$$

for some $\delta > 0$. This sufficient condition, commonly exploited to obtain exponential decay of semigroups arising from problems with memory, is rather restrictive. Indeed, the recent paper [2] shows that a necessary condition in order for exponential stability to hold for a similar problem arising from viscoelasticity is that there exists $C \geq 1$ and $\delta > 0$ such that

$$\mu(t+s) \leq Ce^{-\delta t}\mu(s) \,, \tag{4}$$

for every $t \geq 0$ and almost every $s > 0$. We will see that the same fact holds true also for (1). As noted in [2], it is not difficult to demonstrate that (4) is equivalent to (3) if $C = 1$. Nonetheless, when $C > 1$, the gap between the two conditions is huge. Therefore, one of our aims is to establish the exponential stability of $S(t)$ under much weaker conditions than (3). A similar attempt has turned out to be successful in the analysis of a linearly viscoelastic equation with memory [30].

In the present work, we first establish a well-posedness result for problem (1) through an application of the Lumer-Phillips theorem on the generation of contraction semigroups; we consider the general case in which the kernel admits a sequence of jumps. Then, the correspondence between (1) and (2) is shown under the weak additional hypothesis

$$k(s) \leq K\mu(s) \,,$$

for some positive K, so making more precise the analogous argument of [21].
A complete picture of the stability properties is given under a further assumption, namely,

$$\int_0^\infty s^2\mu(s)\,ds < \infty \,.$$

We show that stability occurs in all cases except the resonant ones, characterized by a step kernel having a sequence of jumps of the form $s_n = \ell k_n$, $k_n \in \mathbb{N}$, with at least a resonant eigenvalue α_m of A, that is

$$\ell = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha_m \kappa}} \,,$$

being κ the the total mass of the kernel μ.
Finally, we establish some exponential stability results. A theorem of the theory of semigroups states that $S(t)$ is exponentially stable if and only if, for some $\varepsilon > 0$ and for all

$z \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$ (being $\mathbb{L}$ the infinitesimal generator of $S(t)$),

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|(i\lambda \mathbb{I} - \mathbb{L})z\|_{\mathcal{H}} \geq \varepsilon \|z\|_{\mathcal{H}} \, .$$

Exploiting this condition, we are able to show that, if H is finite-dimensional (that is, the case of ODEs), the necessary condition (4) is also sufficient, apart from resonant situations. If H is infinite-dimensional, this is not the case, and we have a counterexample for the one-dimensional Laplace problem with Dirichlet boundary conditions. Our method to obtain exponential stability is then based on estimates of some auxiliary functionals defined on $\mathcal{H}$. We encounter the same restriction of [30] on the "flatness" of the kernel, precisely, if $\beta = 0$ and the measure (with respect to $\mu(s)ds$) of the flat regions does not reach $\kappa/2$, then (4) is in fact sufficient, whereas we are not able to prove any result for other values of the flatness rate. Instead, the case $\beta > 0$ is shown to be always exponentially stable within (4).

Indice

Introduzione

Il presente lavoro di tesi è volto allo studio analitico di un problema di evoluzione astratto, avente come particolare istanza un modello con memoria di interesse applicativo in ambito fisico matematico: esso emerge anzitutto nella meccanica dei contuinui, specificamente nella termoviscoelasticità, dove le relazioni costitutive presentano una natura ereditaria, ed in secondo luogo nelle teorie della conduzione del calore, per quanto riguarda l'evoluzione della temperatura nel caso in cui si tenga in considerazione la presenza di una memoria termica. In tali contesti sono presenti ampie teorie, spesso formalizzate in strutture matematiche, come la teoria dei materiali con memoria "evanenscente", ed in essi emergono delle equazioni differenziali alle derivate parziali con corrispondenti problemi ai valori iniziali e al contorno; in particolare, le classiche equazioni di tipo evolutivo, come l'equazione delle onde e l'equazione del calore, vengono modificate dall'aggiunta di termini convolutivi per rendere conto della storia passata delle variabili, ed è a questo livello che sarà focalizzata l'attenzione.
Questo lavoro è completamente dedicato al caso dell'equazione del primo ordine, dunque possiamo considerare come riferimento la classica equazione del calore con correzione integrale dovuta alla presenza di proprietà di tipo ereditario:

$$\partial_t u - \beta\Delta u - \int_0^\infty k(s)\Delta u(t-s)\,ds = 0 \qquad \beta > 0\ ,$$

dove k è una funzione sommabile convessa e sufficientemente regolare. Dunque, tramite il termine convolutivo sono tenuti in considerazione i valori della variabile in tutti gli istanti di tempo passati, e di conseguenza il dato iniziale da assegnare sarà costituito da tutti i valori della variabile nei tempi precedenti quello iniziale, che senza perdere in generalità supponiamo essere $t_0 = 0$; di conseguenza avremo il dato $u(t)|_{t\leq 0}$.
È opportuno notare che, a differenza del caso dell'equazione del calore classica (puramente parabolica), le perturbazioni non vengono avvertite istantaneamente in tutti i punti del mezzo, ma subiscono un ritardo misurato dal nucleo di convoluzione $k(s)$.
Parallelamente, viene considerata l'equazione

$$\partial_t u - \int_0^\infty k(s)\Delta u(t-s)\,ds = 0\ .$$

Quest'ultima, di tipo puramente iperbolico, presenta maggiori problematiche dal punto di vista della dissipazione dell'energia, la quale è dovuta al solo termine integrale. Emergono

dunque questioni delicate che saranno discusse approfonditamente nel corso dell'intero lavoro, dove giocherà un ruolo importante la distinzione tra i casi $\beta > 0$ e $\beta = 0$.
Le corrispondenti equazioni del secondo ordine possono essere trattate attraverso i medesimi argomenti, e con risultati del tutto analoghi a quelli che di seguito saranno presentati. Questa equazione (con la suddetta distinzione sul valore del parametro β) sarà in realtà studiata tramite una generalizzazione astratta; pertanto i risultati ottenuti sono di fatto leggibili e applicabili ad una più vasta classe di problemi, scritti in forma generale attraverso una determinata ambientazione funzionale. Inoltre, interpretando le soluzioni come traiettorie in opportuni spazi di Banach, è possibile l'utilizzo sistematico e la collocazione del problema nel contesto dei sistemi dinamici infinito dimensionali. La teoria dei semigruppi di operatori lineari costituisce allora lo strumento matematico su cui sono basati tutti gli argomenti esposti nel corso della tesi; infatti, la stessa equazione integro-differenziale può essere riportata in questo ambito di trattazione tramite un'opportuna tecnica per descrivere la storia passata della variabile, e una volta generato il semigruppo di operatori, esso diverrà l'oggetto centrale dello studio, attraverso cui andranno lette tutte le proprietà delle soluzioni dell'equazione di partenza.
L'obiettivo principale, a cui sono dedicati due capitoli, è lo studio delle proprietà asintotiche delle soluzioni. I relativi risultati sono ottenuti tramite opportune ipotesi sul nucleo di integrazione, rispetto alle quali si cercherà di mantenere una buona generalità; fornire una descrizione sufficientemente esaustiva del comportamento a lungo termine delle soluzioni e del loro eventuale stabilizzarsi sulla soluzione nulla costituisce dunque la fase centrale dell'elaborato.
La struttura del lavoro è la seguente: nel primo capitolo viene presentato il problema ai valori iniziali astratto da affrontare, con la relativa ambientazione funzionale, ed in seguito viene introdotto il corrispondente problema nello spazio delle storie, necessario per lo sviluppo e l'applicazione delle tecniche della teoria dei semigruppi di operatori; in seguito, una sezione sarà in particolare dedicata al legame tra questo problema e quello di partenza. Sono inoltre evidenziate le ipotesi sul nucleo di integrazione relativo al termine di memoria; queste ultime rappresentano un aspetto fondamentale del quale si terrà conto durante l'intero corso del lavoro. Poiché, come già specificato, l'ambito nel quale ci muoveremo è quello delle memorie evanescenti, si tratterà certamente di una funzione che decade a zero in corrispondenza di istanti di tempo lontani nel passato; tuttavia, al di là dell'ipotesi di monotonia, si è cercato di imporre vincoli il meno restrittivi possibile, evitando condizioni troppo forti spesso presenti in letteratura. Infine viene mostrato come effettivamente il problema ambientato nello spazio delle storie generi un semigruppo fortemente continuo di contrazioni, e come conseguenza si ha un risultato di buona posizione.
Nel secondo capitolo analizziamo la stabilità del semigruppo, che dipende in maniera sostanziale dalla forma del nucleo in relazione allo spettro dell'operatore astratto dell'equazione di partenza; in particolare, mostreremo che, sotto un'ulteriore (e poco restrittiva) ipotesi sul nucleo medesimo, la stabilità è garantita nel caso $\beta > 0$, mentre il problema puramente iperbolico presenta dei fenomeni di risonanza, ad eccezione dei quali la stabilità è però nuovamente garantita.
Nel terzo capitolo consideriamo le proprietà di stabilità esponenziale; dopo aver stabilito

una condizione necessaria di decadimento (che riguarda il nucleo di memoria), equivalente a quella per l'equazione del secondo ordine, per il problema iperbolico operiamo la fondamentale distinzione tra i casi finito e infinito dimensionale. Nella prima situazione, mostriamo come la stabilità esponenziale sia presente, soddisfatta la condizione necessaria, in tutti casi fatta eccezione per quelli risonanti (per i quali non si ha neppure stabilità); nella seconda (nella quale rientrano le equazioni della fisica matematica citate in precedenza), le cose vanno diversamente, e per ottenere una condizione sufficiente per il decadimento esponenziale verranno introdotte delle restrizioni sul nucleo, le quali porteranno ad un risultato analogo a quello noto per l'equazione del secondo ordine. Nel caso $\beta > 0$ non si ha d'altro canto necessità di distinzione a livello dimensionale, e si ha un risultato ottimale, ovvero la condizione necessaria di stabilità esponenziale è anche sufficiente; chiaramente, la presenza di un'ulteriore termine dissipativo rende più immediati i risultati di decadimento.
Il lavoro di tesi si conclude con due ampie appendici: nell'Appendice A vengono discussi in maggiore dettaglio i modelli della termodinamica razionale dei corpi continui dai quali emergono le equazioni integro-differenziali costituenti le principali istanze del problema astratto affrontato in precedenza; viene mostrato come l'equazione di interesse in questa tesi emerga nell'ambito della conduzione del calore ed in quello della meccanica dei continui, in particolare dei fluidi viscoelastici; la discussione sui materiali con proprietà ereditarie è estesa più in generale alla viscoelasticità lineare, dunque anche al caso dell'equazione del secondo ordine, che emerge nel caso dei solidi.
Nell'Appendice B sono invece riportati alcuni strumenti matematici il cui utilizzo ricorre frequentemente nel corso dell'analisi: oltre alla teoria dei semigruppi di operatori fortemente continui, vengono richiamati alcuni risultati classici di teoria della misura.

Capitolo 1

L'equazione e il sistema dinamico

1.1 Preliminari

Il primo passo consiste nella formalizzazione del problema da analizzare. Procediamo dunque con l'introduzione dell'opportuna ambientazione funzionale; la notazione introdotta in questo capitolo costituirà un riferimento per l'intero lavoro.
Sia H uno spazio di Hilbert reale separabile con prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e norma indotta $|| \cdot ||$; sia A un operatore lineare autoaggiunto definito su un dominio $\mathcal{D}(A)$ denso in H; chiediamo che l'operatore sia strettamente positivo con inverso compatto. In queste ipotesi, A ammette una successione (divergente se H è infinito dimensionale) $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ di autovalori strettamente positivi, e i corrispondenti autovettori e_n, ovvero,

$$Ae_n = \alpha_n e_n \qquad e_n \in \mathcal{D}(A) \ ,$$

formano una base ortonormale di H. Inoltre abbiamo la decomposizione spettrale

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x, e_n \rangle e_n \ .$$

Osservazione 1.1. I casi concreti citati nell'introduzione (e discussi in appendice) si ottengono ponendo $A = -\Delta$, con condizioni al bordo di Dirichlet omogenee su un dominio regolare $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, nel qual caso $H = L^2(\Omega)$, $\mathcal{D}(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Il problema di evoluzione astratto da analizzare è il seguente:

$$\begin{cases} \dot{u} + \beta A u + \displaystyle\int_0^\infty k(s) A u(t-s)\, ds = 0 \qquad t > 0 \\ u(0) = u_0 \\ u(t) = h(t) \qquad t < 0 \ . \end{cases} \tag{1.1}$$

β è una costante non negativa, $k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è un nucleo di integrazione sul quale forniremo dettagli tra breve, u_0 e $h(t)$ sono dati iniziali assegnati. In generale, cerchiamo una

soluzione $u \in C([0,\infty),H)$, e l'equazione in (1.1) va intesa in senso variazionale, mentre discuteremo in seguito riguardo alla regolarità da richiedere ai dati iniziali.
In questo lavoro ci proponiamo di studiare l'equazione differenziale attraverso la teoria dei semigruppi di operatori, e vogliamo dunque reinterpretare il problema (1.1) come un problema di Cauchy astratto su un opportuno spazio di funzioni. A questo scopo, introduciamo la seguente variabile ausiliaria, che assume il significato di integrale della storia passata (si veda [9, 10, 11]):

$$\eta^t(s) = \int_{t-s}^{t} u(y)\,dy \qquad s \geq 0\,,\ t > 0\,.$$

Supponendo che il nucleo di integrazione k sia positivo, non crescente e sommabile con la sua derivata, e ponendo

$$\mu(s) = -k'(s)\,,$$

possiamo riscrivere il termine integrale procedendo formalmente nella seguente maniera:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty k(s)Au(t-s)\,ds &= \left[k(s)\int_0^s Au(t-y)\,dy\right]_0^\infty - \int_0^\infty k'(s)\int_0^s Au(t-y)\,dy\,ds\\ &= \int_0^\infty \mu(s)A\eta^t(s)\,ds\,.\end{aligned}$$

Inoltre notiamo che $\eta^t(s)$ soddisfa:

$$\partial_t\eta^t(s) = -\partial_s\eta^t(s) + u(t)\,.$$

Se infine poniamo

$$\eta_0(s) = \int_0^s h(-y)\,dy\,,$$

possiamo introdurre il seguente problema in due variabili:

$$\begin{cases}\dot{u}(t) + \beta Au(t) + \displaystyle\int_0^\infty \mu(s)A\eta^t(s)\,ds = 0 \quad t > 0\\ \dot{\eta}^t(s) = -\partial_s\eta^t(s) + u(t) \quad s,t > 0\\ u(0) = u_0\\ \eta^0(s) = \eta_0(s)\,.\end{cases} \tag{1.2}$$

Questo secondo problema, che sarà d'ora innanzi l'oggetto di studio, è stato ottenuto dal precedente attraverso ragionamenti puramente formali, e vedremo in seguito in che senso essi siano di fatto equivalenti (ed anzi come il secondo costituisca una generalizzazione del primo). Per farlo è necessario ambientare opportunamente (1.2).

Notazione per gli spazi funzionali

Introduciamo anzitutto i domini delle potenze dell'operatore A

$$H_r = \mathcal{D}(A^{r/2}) \quad r \in \mathbb{R} ;$$

si tratta di spazi di Hilbert con prodotto scalare e norma indotta

$$\langle u_1, u_2 \rangle_r = \langle A^{r/2} u_1, A^{r/2} u_2 \rangle , \qquad ||u||_r = ||A^{r/2} u|| .$$

Identificando H con il suo duale H^*, risulta

$$H_r^* = H_{-r} .$$

Definiamo inoltre gli spazi L^2 su $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ rispetto alla misura $\mu(s)ds$ a valori in spazi di Banach

$$\mathcal{M}_r = L^2_\mu(\mathbb{R}^+, H_{r+1})$$

con prodotto scalare e norma

$$\langle\langle \eta_1, \eta_2 \rangle\rangle_r = \int_0^\infty \mu(s) \langle \eta_1(s), \eta_2(s) \rangle_{r+1} \, ds , \qquad |||\eta|||_r^2 = \int_0^\infty \mu(s) ||\eta(s)||_{r+1}^2 \, ds ;$$

in corrispondenza, abbiamo anche lo spazio di Sobolev

$$H^1_\mu(\mathbb{R}^+, H_{r+1}) = \{ g \in \mathcal{M}_r \ : \ g' \in \mathcal{M}_r \} .$$

Consideriamo infine gli spazi di Hilbert

$$\mathcal{H}_r = H_r \times \mathcal{M}_r ,$$

con

$$||(u, \eta)||_{\mathcal{H}_r}^2 = ||u||_r^2 + |||\eta|||_r^2 , \qquad \langle (u_1, \eta_1), (u_2, \eta_2) \rangle_{\mathcal{H}_r} = \langle u_1, u_2 \rangle_r + \langle\langle \eta_1, \eta_2 \rangle\rangle_r .$$

Avvertenza. Quando $r = 0$, omettiamo per semplicità di notazione il pedice sia negli spazi che nei prodotti scalari e nelle norme corrispondenti.

1.2 Ipotesi sul nucleo di integrazione

Le ipotesi che forniremo ora sul nucleo di integrazione μ che compare nel problema (1.2) saranno da considerarsi valide per tutto il corso del lavoro, e saranno utilizzate per tutti i risultati di questo capitolo e dei successivi. In particolare, rimanendo nell'ambito dei nuclei decrescenti, abbiamo cercato di imporre poche restrizioni (per esempio non chiediamo la continuità) per avere risultati abbastanza generali. Sul senso delle ipotesi che seguono avremo modo di tornare a più riprese.

Richiediamo che $\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sia non negativa, non identicamente nulla, non crescente, sommabile e poniamo

$$\kappa = \int_0^\infty \mu(s)\, ds \ ;$$

ricordiamo anche che

$$\int_s^\infty \mu(s)\, ds = k(s) \ .$$

Eventualmente, il supporto di μ può essere compatto; introduciamo allora la quantità

$$S_\infty = \sup\{s \in \mathbb{R}^+ \ : \ \mu(s) > 0\} \ .$$

Osservazione 1.2. Se $S_\infty < \infty$, gli integrali che compaiono nelle equazioni (1.1) e (1.2) sono da interpretarsi su $(0, S_\infty)$.

Per quanto riguarda le eventuali discontinuità, assumiamo che esista una successione $\{s_n\}_{n\geq 0}$ monotona crescente, eventualmente finita (poniamo anche $s_0 = 0$; s_n può ridursi al solo s_0), oppure convergente a $s_\infty \in (0, \infty]$, tale che μ presenti salti per $s = s_n$, $n > 0$, mentre sia assolutamente continua in tutti gli intervalli della forma (s_{n-1}, s_n), $n > 0$ e nell'intervallo (s_∞, ∞), se non vuoto. Nel caso la sequenza sia finita, s_∞ rappresenta il suo ultimo elemento. Sia N il numero dei salti (eventualmente $N = \infty$). Con μ' intenderemo la derivata di μ (che esiste quasi ovunque).
Definiamo, per $n \geq 1$,

$$\mu_n = \mu(s_n^-) - \mu(s_n^+) \ ,$$

ed anche, se $s_\infty < \infty$,

$$\mu_\infty = \mu(s_\infty^-) - \mu(s_\infty^+) \ .$$

Mettiamo inoltre in evidenza alcuni particolari nuclei che incontreremo nel corso della trattazione (si veda anche [2]).

- **nuclei a scala:** nuclei della forma

$$\mu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \chi_{[s_{n-1}, s_n)}(s),$$

  dove $\{\gamma_n\}$ è una successione positiva strettamente decrescente (finché, eventualmente, $\gamma_n = 0$ per qualche $n \in \mathbb{N}$; se $\gamma_n = 0$, $\gamma_m = 0$ per ogni $m \geq n$). Inoltre sia $\gamma_\infty = \inf_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n$. Si noti che è presente almeno un salto e che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n (s_n - s_{n-1}) = \kappa.$$

- **nuclei di passo $\boldsymbol{\ell}$:** nuclei a scala per i quali esiste $\tau > 0$ e una successione strettamente crescente $\{k_n\}$ di numeri naturali, con $k_0 = 0$, tali che

$$s_n = \tau k_n.$$

Ridefinendo $\{k_n\}$, è possibile ridefinire anche τ (ad esempio, τ/p con $p \in \mathbb{N}$ anziché τ). Tuttavia esiste il maggiore dei τ possibili, e lo indicheremo con ℓ (il passo del nucleo); si tratta del massimo comune divisore di $\{\tau k_n\}_{n\geq 1}$.

- **nuclei risonanti:** nuclei di passo ℓ per i quali la quantità

$$\Omega_m = \frac{\ell}{2\pi}\sqrt{\alpha_m \kappa}\,, \qquad m \in \mathbb{N}$$

appartiene a $\mathbb{N}$ per almeno un $m \in \mathbb{N}$. In seguito chiariremo il motivo per il quale utilizziamo questo nome. Si noti anche che la risonanza è una proprietà definita specificamente rispetto all'operatore A.

1.3 Ambientazione del problema (1.2)

Lo spazio

$$\mathcal{M} = L^2_\mu(\mathbb{R}^+, H_1)\ ,$$

rappresenta, come vedremo, l'ambientazione ideale della variabile η, e in particolare su di esso definiamo l'operatore lineare T con il seguente dominio

$$\mathcal{D}(T) = \{\eta \in \mathcal{M}\ :\ \eta' \in \mathcal{M}\ ,\ \eta(0) = 0\}\ ;$$

esso agisce nel modo seguente:

$$T\eta = -\eta'\ .$$

$\mathcal{D}(T)$ consiste nell'insieme delle funzioni di $\mathcal{M}$ con derivata distribuzionale (rispetto a s) in $\mathcal{M}$ e valore al bordo (rispetto a s) nullo, intendendo tale valore come limite.

Osservazione 1.3. Notiamo che se $\eta \in \mathcal{D}(T)$, allora $\eta \in H^1_\mu(\mathbb{R}^+, H_1)$, e grazie ai risultati di inclusione degli spazi di Sobolev (si veda [13]), si ha anche

$$\eta \in AC([0, S_\infty), H_1)\ .$$

Nel caso in cui $S_\infty < \infty$ e $s_\infty = S_\infty$, si ha invece assoluta continuità fino a S_∞ incluso.

Il valore $\eta(0) = 0$ è dunque da interpretarsi come continuità in zero di $\eta(s)$ nello spazio H_1; tale condizione va intesa come esistenza e annullamento di

$$\lim_{s\to 0} ||\eta(s)||_1\ .$$

Grazie a tutto ciò, se $\eta \in \mathcal{D}(T)$, si ha

$$\eta(s) = \int_0^s \eta'(y)\, dy\ .$$

In questo modo possiamo pensare alla seconda equazione di (1.2) come ad un'equazione di evoluzione in $\mathcal{M}$, con dato iniziale fornito invece da $\eta^0(s) = \eta_0(s)$.
Più in generale, avendo introdotto lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}$, possiamo interpretare l'intero sistema (1.2) come un problema di Cauchy astratto su $\mathcal{H}$:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \mathbb{L}z(t) \\ z(0) = z_0 \ , \end{cases} \tag{1.3}$$

con $z = (u, \eta)$, dove l'operatore lineare $\mathbb{L}$ su $\mathcal{H}$ è definito come

$$\mathbb{L}z = \left(-A \left(\beta u + \int_0^\infty \mu(s)\eta(s)\, ds \right) \ , \ T\eta + u \right) \ ,$$

con dominio

$$\mathcal{D}(\mathbb{L}) = \left\{ z \in \mathcal{H} \ : \ u \in H_1 \ , \ \beta u + \int_0^\infty \mu(s)\eta(s)\, ds \ \in \ H_2 \ , \ \eta \in \mathcal{D}(T) \right\} .$$

Osservazione 1.4. Se $\eta \in \mathcal{M}$, essendo μ integrabile, con la disuguaglianza di Hölder otteniamo

$$\int_0^\infty \mu(s)||\eta(s)||_1\, ds \leq \kappa^{1/2} \left(\int_0^\infty \mu(s)||\eta(s)||_1^2\, ds \right)^{1/2} < \infty \ ;$$

pertanto è anche vero che $\eta \in L^1_\mu(\mathbb{R}^+, H_1)$. Con un argomento standard di teoria della misura, segue che $\int_0^\infty \mu(s)\eta(s)\, ds \in H_1$.

1.4 Generazione del semigruppo

L'esistenza e l'unicità per il problema (1.2) seguono dimostrando che $\mathbb{L}$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo di operatori lineari limitati su $\mathcal{H}$. La più classica caratterizzazione dei generatori infinitesimali è fornita dal teorema di Hille-Yosida [32]; per il nostro problema particolare è però conveniente ricorrere al teorema di Lumer-Phillips, che è richiamato nell'Appendice B. Ricordiamo che un operatore lineare Λ su uno spazio di Hilbert reale X con dominio $\mathcal{D}(\Lambda)$ si dice dissipativo se

$$\langle \Lambda x, x \rangle_X \leq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{D}(\Lambda) \ .$$

Inoltre, un semigruppo fortemente continuo $G(t)$ si dice di contrazioni se vale

$$||G(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq 1 \qquad \forall t \geq 0 \ ,$$

dove $\mathcal{L}(X)$ è lo spazio degli operatori limitati su X.
Siamo dunque pronti per dimostrare il risultato di buona posizione.

Teorema 1.5. *Il problema* (1.2) *genera un semigruppo fortemente continuo di contrazioni* $S(t)$ *su* $\mathcal{H}$.

Dimostrazione.
$\diamond$ DISSIPATIVITÀ DELL'OPERATORE $\mathbb{L}$. Considereremo il caso in cui sia presente almeno un salto; in assenza di salti la dimostrazione risulta semplificata. Sia $z \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$, allora

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbb{L}z, z\rangle_{\mathcal{H}} =& \left\langle -A\left(\beta u + \int_0^\infty \mu(s)\eta(s)\,ds\right), u\right\rangle + \langle\langle T\eta,\eta\rangle\rangle + \langle\langle u,\eta\rangle\rangle \\
=& -\beta\langle u,u\rangle_1 - \int_0^\infty \mu(s)\langle u,\eta(s)\rangle_1\,ds \\
& + \langle\langle T\eta,\eta\rangle\rangle + \int_0^\infty \mu(s)\langle u,\eta(s)\rangle_1\,ds \\
=& -\beta||u||_1^2 + \langle\langle T\eta,\eta\rangle\rangle\ ,
\end{aligned}
$$

dove abbiamo sfruttato il fatto che l'operatore A è positivo. A questo punto possiamo scomporre il termine $\langle\langle T\eta,\eta\rangle\rangle$ nella somma degli integrali sugli intervalli sui quali il nucleo di integrazione è assolutamente continuo. Ricordando che N è il numero dei salti,

$$
\begin{aligned}
\langle\langle T\eta,\eta\rangle\rangle &= -\int_0^\infty \mu(s)\langle \eta'(s),\eta(s)\rangle_1\,ds \\
&= -\int_0^{s_\infty} \mu(s)\langle \eta'(s),\eta(s)\rangle_1\,ds - \int_{s_\infty}^{S_\infty} \mu(s)\langle \eta'(s),\eta(s)\rangle_1\,ds\ ,
\end{aligned}
$$

dove l'ultimo termine è diverso da zero solo se $s_\infty < S_\infty$. Per quanto riguarda il primo, osservando che

$$
-\int_0^{s_\infty} \mu(s)\langle \eta'(s),\eta(s)\rangle_1\,ds = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^N \int_{s_{n-1}}^{s_n} \mu(s)\frac{d}{ds}||\eta(s)||_1^2\,ds\ ,
$$

integrando per parti, si ottiene

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^N \int_{s_{n-1}}^{s_n} \mu(s)\frac{d}{ds}||\eta(s)||_1^2\,ds \\
&= -\lim_{y\to 0}\left(\mu(y)||\eta(y)||_1^2 + \int_y^{s_1} \mu'(s)||\eta(s)||_1^2\,ds\right) \\
&\quad + \mu(s_1^-)||\eta(s_1)||_1^2 + \sum_{n=2}^N \left[\mu(s)||\eta(s)||_1^2\right]_{s_{n-1}}^{s_n} - \sum_{n=2}^N \int_{s_{n-1}}^{s_n} \mu'(s)||\eta(s)||_1^2\,ds\ .
\end{aligned}
$$

Usando l'Osservazione 1.3 ed il fatto che la norma di $\eta(0)$ è zero,

$$
\begin{aligned}
\lim_{y\to 0}\mu(y)||\eta(y)||_1^2 &\le \limsup_{y\to 0}\mu(y)\left(\int_0^y ||\eta'(\zeta)||_1\,d\zeta\right)^2 \\
&\le \limsup_{y\to 0}\left(\int_0^y \sqrt{\mu(\zeta)}||\eta(\zeta)||_1\,d\zeta\right)^2 \\
&\le \limsup_{y\to 0}\left(y\int_0^y \mu(\zeta)||\eta(\zeta)||_1^2\,d\zeta\right) \\
&= 0\ ,
\end{aligned}
$$

essendo $\eta' \in \mathcal{M}$. Riordinando i termini della serie, possiamo allora scrivere

$$\begin{aligned}
&-\int_0^{s_\infty} \mu(s)\langle \eta'(s), \eta(s)\rangle_1 \, ds \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{s_\infty} \mu'(s)||\eta(s)||_1^2 \, ds - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \mu_n ||\eta(s_n)||_1^2 - \frac{1}{2}\lim_{s\to s_\infty} \mu(s)||\eta(s)||_1^2 \, .
\end{aligned}$$

I tre termini che compaiono a destra hanno tutti lo stesso segno, e l'espressione al primo membro è finita: ricaviamo la convergenza dell'integrale e della serie, e di conseguenza l'esistenza del limite. In particolare, poiché $\mu(s)\|\eta(s)\|_1^2$ è integrabile su $\mathbb{R}^+$, il limite è nullo se $s_\infty = \infty$; se invece $s_\infty < \infty$, utilizzando la continuità di $||\eta(s)||_1^2$ in s_∞ (si veda l'Osservazione 1.3), vale

$$\lim_{s\to s_\infty} \mu(s)||\eta(s)||_1^2 = \mu(s_\infty^-)||\eta(s_\infty)||_1^2 \, .$$

Nel caso in cui si abbia $s_\infty < S_\infty$, dobbiamo valutare il rimanente integrale. Precisamente,

$$\begin{aligned}
-\int_{s_\infty}^{S_\infty} \mu(s)\langle \eta'(s), \eta(s)\rangle_1 \, ds = \; &-\frac{1}{2}\int_{s_\infty}^{S_\infty} \mu(s)\frac{d}{ds}||\eta(s)||_1^2 \, ds \\
&= \frac{1}{2}\Big[\mu(s_\infty^+)||\eta(s_\infty)||_1^2 - \lim_{y\to S_\infty} \mu(y)||\eta(y)||_1^2\Big] \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{s_\infty}^{S_\infty} \mu'(s)||\eta(s)||_1^2 \, ds \, ,
\end{aligned}$$

da cui scopriamo che il limite nel secondo membro esiste finito; d'altra parte,

$$\lim_{s\to S_\infty} \mu(s) = 0 \, ,$$

e pertanto,

$$\begin{aligned}
&\lim_{y\to S_\infty} \mu(y)||\eta(y)||_1^2 \\
&= \lim_{y\to S_\infty} \mu(y)\bigg(||\eta(s_\infty)||_1 + \int_{s_\infty}^{y} ||\eta'(s)||_1 \, ds\bigg)^2 \\
&\le 2\limsup_{y\to S_\infty} \mu(y)||\eta(s_\infty)||_1^2 + 2\limsup_{y\to S_\infty} \bigg(\int_{s_\infty}^{S_\infty} \chi_{(s_\infty, y)}(s)\sqrt{\mu(y)}||\eta'(s)||_1 \, ds\bigg)^2 \\
&= 0 \, ,
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato il teorema della convergenza dominata, con $\sqrt{\mu(s)}||\eta'(s)||_1$ come funzione dominante, per valutare il termine integrale. Ponendo allora

$$J[\eta] = \sum_n \mu_n ||\eta(s_n)||_1^2 \, ,$$

dove la somma è estesa a tutti i valori di n in corrispondenza dei punti di salto s_n, compreso s_∞ se $s_\infty < \infty$, perveniamo all'uguaglianza

$$\langle\langle T\eta, \eta\rangle\rangle = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mu'(s)||\eta(s)||_1^2\, ds - \frac{1}{2}J[\eta]\,.$$

Notiamo che il termine $J[\eta]$ che tiene conto dei salti è non negativo, e inoltre $\mu'(s) \leq 0$; concludiamo che

$$\langle \mathbb{L}z, z\rangle_{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mu'(s)||\eta(s)||_1^2\, ds - \frac{1}{2}J[\eta] - \beta||u||_1^2 \leq 0\,. \tag{1.4}$$

$\diamond$ Suriettività dell'operatore $\mathbb{I} - \mathbb{L}$. Mostriamo che $\mathbb{I} - \mathbb{L} : \mathcal{D}(\mathbb{L}) \subset \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ è suriettivo; a questo scopo dobbiamo mostrare che, per ogni $z^* \in \mathcal{H}$, l'equazione

$$(\mathbb{I} - \mathbb{L})z = z^* \tag{1.5}$$

ammette soluzione z appartenente al dominio dell'operatore $\mathbb{L}$. Scriviamo per esteso l'equazione (1.5):

$$u + A\left(\beta u + \int_0^\infty \mu(s)\eta(s)\, ds\right) = u^*\,, \tag{1.6}$$

$$\eta + \eta' - u = \eta^*\,; \tag{1.7}$$

la (1.7) si integra (poniamo $\eta(0) = 0$) ottenendo

$$\eta(s) = (1 - e^{-s})u + \int_0^s e^{y-s}\eta^*(y)dy\,, \tag{1.8}$$

e sostituendo in (1.6) si ha

$$(\mathbb{I} + \gamma A)\, u = w\,, \tag{1.9}$$

dove

$$\gamma = \beta + \int_0^\infty \mu(s)(1 - e^{-s})\, ds$$

e

$$w = u^* - A\left(\int_0^\infty \mu(s)\int_0^s e^{y-s}\eta^*(y)\, dyds\right)\,.$$

Per i passaggi che effettueremo in seguito è utile introdurre le seguenti funzioni definite su $\mathbb{R}^+$:

$$g(s) = \sqrt{\mu(s)}\|\eta^*(s)\|_1\,,$$

$$f(s) = e^{-s}\,,$$

$$F(s) = f * g(s) = \int_0^s f(s-y)g(y)\, dy = \int_0^s e^{-(s-y)}\sqrt{\mu(y)}\|\eta^*(y)\|_1\, dy\,.$$

F è il prodotto di convoluzione su $\mathbb{R}^+$ tra f e g (si veda l'Appendice B). In particolare $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$ e $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$; infatti:

$$\int_0^\infty e^{-s} ds = 1 = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} ,$$

$$\left(\int_0^\infty \mu(s) \|\eta^*(s)\|_1^2 ds \right)^{1/2} = \|\eta^*\|_{\mathcal{M}} = \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} .$$

Grazie alle proprietà regolarizzanti del prodotto di convoluzione (si veda l'Appendice B) abbiamo che $F \in L^2(\mathbb{R}^+)$ e

$$\|F\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \|\eta^*\|_{\mathcal{M}}.$$

Riprendiamo l'equazione (1.9), e mostriamo che $w \in H_{-1}$; infatti $u^* \in H$, e per quanto riguarda l'altro termine, dobbiamo mostrare l'appartenenza a H_1 dell'integrale

$$\int_0^\infty \mu(s) \int_0^s e^{y-s} \eta^*(y)\, dyds ;$$

essa segue, ragionando come nell'Osservazione 1.4, dalla stima

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mu(s) \int_0^s e^{y-s} ||\eta^*(y)||_1 \, dyds &\leq \int_0^\infty \sqrt{\mu(s)} \int_0^s e^{y-s} \sqrt{\mu(y)} ||\eta^*(y)||_1 \, dyds \\
&= \int_0^\infty \sqrt{\mu(s)} F(s)\, ds \\
&\leq \kappa^{1/2} ||F||_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\
&\leq \kappa^{1/2} |||\eta^*||| .
\end{aligned}$$

Essendo il secondo membro in H_{-1}, la (1.9) ammette un'unica soluzione in H_1, data da $(\mathbb{I} + \gamma A)^{-1} w$. Dunque $u \in H_1$.
Passiamo all'equazione (1.7); sappiamo che $\eta^* \in \mathcal{M}$ (per ipotesi). Utilizziamo l'espressione (1.8) per mostrare che $\eta \in \mathcal{M}$; dalla (1.8),

$$\int_0^\infty \mu(s) ||\eta(s)||_1^2 \, ds \leq \int_0^\infty \mu(s) \|(1 - e^{-s}) u\|_1^2 + \int_0^\infty \mu(s) \left\| \int_0^s e^{y-s} \eta^*(y) dy \right\|_1^2 ds .$$

Il primo termine è certamente limitato; basta allora far vedere che

$$\int_0^\infty \mu(s) \left\| \int_0^s e^{y-s} \eta^*(y) dy \right\|_1^2 ds < \infty .$$

Ma

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mu(s) \left\| \int_0^s e^{y-s}\eta^*(y)dy \right\|_1^2 ds &\leq \int_0^\infty \mu(s)\Big(\int_0^s e^{y-s}\|\eta^*(y)\|_1 dy\Big)^2 ds \\
&\leq \int_0^\infty \left(\int_0^s e^{y-s}\sqrt{\mu(y)}\|\eta^*(y)\|_1 dy\right)^2 ds \\
&= \int_0^\infty (F(s))^2 ds \\
&= \|F\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\
&\leq \|\eta^*\|^2_{\mathcal{M}} .
\end{aligned}$$

Dunque $\eta \in \mathcal{M}$; ma sappiamo anche che $u \in H_1$, dunque $u \in \mathcal{M}$, e per confronto nell'equazione (1.7) otteniamo anche $\eta' \in \mathcal{M}$. Inoltre

$$\left|\left| \int_0^s e^{y-s}\eta^*(y)\, dy \right|\right|_1 \leq \int_0^s ||\eta^*(y)||_1\, dy \leq \frac{1}{\mu(s)} \int_0^s \mu(y)||\eta^*(y)||_1\, dy \; ;$$

il primo termine è limitato intorno a $s = 0$; utilizzando la disuguaglianza di Hölder, otteniamo che il secondo tende a zero per $s \to 0$; pertanto, essendo $u \in H_1$, dalla (1.8) deduciamo che $\eta(s) \to 0$ in H_1 per $s \to 0$. Possiamo a questo punto concludere che $\eta \in \mathcal{D}(T)$.
Infine per confronto nell'equazione (1.6) abbiamo che

$$A\left(\beta u + \int_0^\infty \mu(s)\eta(s)\, ds\right) \in H \; ,$$

e pertanto

$$\beta u + \int_0^\infty \mu(s)\eta(s)\, ds \;\in\; H_2 \; ,$$

e dunque la dimostrazione è conclusa. □

Osservazione 1.6. In realtà il teorema di Lumer-Phillips si applica, senza alcuna modifica nella dimostrazione, prendendo come spazio delle fasi al posto di $\mathcal{H}$ lo spazio di Hilbert $\mathcal{H}_r$, $r \in \mathbb{R}$. Pertanto $S(t)$ risulta essere un semigruppo di contrazioni su *ogni* spazio $\mathcal{H}_r$. Allo stesso modo, *tutti* i risultati che dimostreremo in seguito valgono con $\mathcal{H}_r$ al posto di $\mathcal{H}$.

Come caso più semplice, il problema di evoluzione definito da

$$\begin{cases} \dot{\eta}^t = T\eta^t \\ \eta^0 = \eta_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

genera il semigruppo fortemente continuo di contrazioni $\Sigma(t)$ su $\mathcal{M}$, definito da:

$$[\Sigma(t)\eta_0](s) = \begin{cases} \eta_0(s-t) & s > t \\ 0 & s \leq t \; ; \end{cases} \tag{1.11}$$

si tratta del semigruppo di traslazioni a destra e T ne è il generatore infinitesimale (si veda [21]).
Come conseguenza, la componente η della soluzione del problema (1.2) ammette la seguente rappresentazione:

$$\eta^t(s) = \begin{cases} \eta_0(s-t) + \displaystyle\int_0^t u(y)\, dy & s > t \\ \displaystyle\int_{t-s}^t u(y)\, dy & s \leq t\ . \end{cases} \tag{1.12}$$

Infatti, se la (1.11) è la soluzione di (1.10), il corrispondente problema non omogeneo si risolve applicando il principio di Duhamel (si veda [32]): dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{\eta}^t = T\eta^t + \varphi(t,s) \\ \eta^0 = \eta_0\ , \end{cases}$$

la soluzione si esprime come

$$\eta^t(s) = [\Sigma(t)\eta_0](s) + \int_0^t \Sigma(\tau)\varphi(t-\tau, s)\, d\tau\ ,$$

dove

$$\Sigma(\tau)\varphi(t-\tau,s)\, d\tau = \begin{cases} \varphi(t-\tau, s-\tau) & s > \tau \\ 0 & s \leq \tau\ , \end{cases}$$

e dunque

$$\int_0^t \Sigma(\tau)\varphi(t-\tau,s)\, d\tau = \begin{cases} \displaystyle\int_0^t \varphi(t-\tau, s-\tau)\, d\tau & s > t \\ \displaystyle\int_0^s \varphi(t-\tau, s-\tau)\, d\tau & s \leq t\ . \end{cases}$$

La variabile η^t di (1.2) soddisfa un problema la cui non omogeneità è $u(t)$ (in particolare è dipendente soltanto da t), come si vede dalla seconda equazione di (1.2). Dunque la soluzione è semplificata e assume la forma (1.12).

1.5 Legame tra (1.1) e (1.2)

Concludiamo il primo capitolo mostrando come, sotto certe ipotesi di regolarità sul dato iniziale, la soluzione del problema (1.1) corrisponda a quella del problema (1.2) finora analizzato; a questo scopo è necessario introdurre una ulteriore (lieve) ipotesi sul nucleo di integrazione μ: l'integrabilità della sua primitiva $k(s)$.

Lemma 1.7. *Sia $k(s)$ integrabile; allora*

$$\lim_{s\to S_\infty} \frac{k(s)}{\sqrt{\mu(s)}} = 0\ .$$

Dimostrazione. Nel caso μ abbia supporto compatto, abbiamo

$$k(s) \leq \left(\int_s^\infty \sqrt{\mu(y)}\, dy \right) \sqrt{\mu(s)} \ ,$$

e la tesi segue immediatamente. Se invece $S_\infty = \infty$, posto $r(s) = \mu(s)/k(s)^2$, dimostriamo che

$$\lim_{s\to\infty} r(s) = \infty \ .$$

La retta tangente a $k(s)$ nel punto $s = \zeta$ è definita da

$$\tau(s) = -r(\zeta)k(\zeta)^2 s + k(\zeta) + r(\zeta)k(\zeta)^2\zeta$$

Poiché $k''(s) = -\mu'(s) \geq 0$, k è convessa su $\mathbb{R}^+$, dunque $\tau(s) \leq k(s)$ per ogni s; segue allora che

$$\lim_{\zeta\to\infty} \frac{1}{r(\zeta)} = 2 \lim_{\zeta\to\infty} \int_\zeta^{\zeta+1/(r(\zeta)k(\zeta))} \tau(s)\, ds \leq \limsup_{\zeta\to\infty} \int_\zeta^\infty k(s)\, ds = 0 \ ,$$

grazie all'integrabilità di k $\square$

Osservazione 1.8. Si noti che in generale, date due funzioni f, g positive e monotone decrescenti su $\mathbb{R}^+$, limitate in un intorno dell'origine, con f integrabile e g non integrabile, non è detto che valga

$$\lim_{s\to\infty} \frac{f(s)}{g(s)} = 0 \ .$$

Si può costruire infatti un esempio per cui addirittura

$$\liminf_{s\to\infty} \frac{g(s)}{f(s)} = 0 \ .$$

Consideriamo il problema (1.1); introduciamo ora le opportune ipotesi sul dato iniziale $u(t)|_{t\leq 0}$: sia

$$u(0) \in H \ , \qquad \int_0^s u(-y)\, dy \in \mathcal{M} \ , \qquad u(-s) \in \mathcal{M}_{-1} \ , \qquad s > 0 \ . \tag{1.13}$$

Teorema 1.9. *Il problema* (1.1) *con dato iniziale soddisfacente le ipotesi* (1.13) *ammette un'unica soluzione $u \in C([0,\infty), H)$. Inoltre, definendo*

$$u_0 = u(0) \ , \qquad \eta_0(s) = \int_0^s u(-y)\, dy \ ,$$

la soluzione $u(t)$ coincide con la prima componente di $S(t)(u_0, \eta_0)$.

Dimostrazione. Supponiamo di avere una soluzione $u \in C([0,\infty), H)$. In virtù di (1.13), si ha che $u_0 \in H$, $\eta_0 \in \mathcal{M}$, $\eta_0' \in \mathcal{M}_{-1}$. Mostriamo che $u(t)$ è necessariamente uguale alla prima componente della soluzione di (1.2) corrispondente al dato iniziale $(u_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$; di conseguenza $u(t)$ sarà unica. A questo scopo, essendo $u \in C([0,\infty), H)$, moltiplichiamo (1.1) per una funzione test in H_2, indicata con $A^{-1}w$, $w \in H$:

$$\langle A^{-1}\dot{u}(t), w\rangle + \beta\langle u(t), w\rangle + \int_0^\infty k(s)\langle u(t-s), w\rangle\, ds = 0\ .$$

Se poniamo

$$\eta^t(s) = \int_{t-s}^t u(y)dy\ ,$$

abbiamo che

$$(\eta^t)'(s) = u(t-s)\ ,$$

dunque η^t e $(\eta^t)'$ sono in $\mathcal{M}_{-1}$ per ogni $t \geq 0$. Inoltre $\eta^t(s) \to 0$ in H per $s \to 0$; infatti si ha

$$\begin{aligned} ||\eta^t(s)|| &\leq \int_0^s ||(\eta^t)'(\zeta)||\, d\zeta \\ &\leq \frac{1}{\mu(s)} \int_0^s \mu(\zeta)||(\eta^t)'(\zeta)||\, d\zeta \\ &\leq \frac{1}{\mu(s)} \left(\int_0^s \mu(\zeta)\, d\zeta\right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \mu(\zeta)||(\eta^t)'(\zeta)||^2\right)^{1/2} \quad ; \end{aligned}$$

ora, per y tendente a zero, il primo fattore è limitato, il terzo anche perché $\eta' \in \mathcal{M}_{-1}$, il secondo tende a zero perché μ è integrabile; di conseguenza

$$\lim_{s\to 0} ||\eta^t(s)|| \leq \limsup_{s\to 0} \int_0^s ||(\eta^t)'(\zeta)||\, d\zeta = 0\ .$$

Ragionando come nel Teorema 1.5, con lo spazio H al posto di H_1, il limite

$$\lim_{s\to S_\infty} \mu(s)\|\eta^t(s)\|^2$$

esiste finito. Integriamo per parti e usiamo nuovamente la continuità in zero di $\eta^t(s)$, ottenendo

$$\begin{aligned} \int_0^\infty k(s)\langle u(t-s), w\rangle\, ds &= \int_0^{S_\infty} k(s)\langle (\eta^t)'(s), w\rangle\, ds \\ &= \int_0^{S_\infty} \mu(s)\langle \eta^t(s), w\rangle\, ds + \lim_{s\to S_\infty} k(s)\langle \eta^t(s), w\rangle \\ &= \int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^t(s), w\rangle\, ds\ ; \end{aligned}$$

infatti, per $s \to S_\infty$, grazie al Lemma 1.7,

$$|k(s)\langle \eta^t(s), w\rangle| \le k(s)\|\eta^t(s)\|\|w\| \le \frac{k(s)}{\sqrt{\mu(s)}}\sqrt{\mu(s)}\,\|\eta^t(s)\|\|w\| \to 0\ . \tag{1.14}$$

Dunque η^t soddisfa la (1.12) mentre $u(t)$ soddisfa

$$\langle A^{-1}\dot{u}(t), w\rangle + \beta\langle u(t), w\rangle + \int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^t(s), w\rangle\, ds = 0\ .$$

In virtù dell'Osservazione 1.6, il problema 1.2 genera un semigruppo fortemente continuo di contrazioni, in particolare, su $\mathcal{H}_{-1}$; indichiamolo con $S_0(t)$. Dunque abbiamo ottenuto che $(u(t), \eta^t) = S_0(t)(u_0, \eta_0)$; d'altra parte $S_0(t)$ e $S(t)$ coincidono su $\mathcal{H}$, e poiché $(u_0, \eta_0) \in \mathcal{H}$, concludiamo che $(u(t), \eta^t) = S(t)(u_0, \eta_0)$.
Finora abbiamo dimostrato che se una soluzione per (1.1) esiste, allora è unica; per dimostrare l'esistenza, fissiamo (u_0, η_0) tali che

$$u_0 \in H\ , \qquad \eta_0 \in \mathcal{M}\ , \qquad \eta_0' \in \mathcal{M}_{-1}\ , \qquad \lim_{s\to 0} \eta_0(s) = 0 \ \text{ in } H\ . \tag{1.15}$$

Utilizzando al contrario lo stesso argomento, si dimostra che la prima componente di $S(t)(u_0, \eta_0) \in C([0,\infty), \mathcal{H})$ è soluzione di (1.1) in corrispondenza del dato iniziale

$$u(0) = u_0\ , \qquad u(t)|_{t<0} = \eta_0'(-t)\ . \tag{1.16}$$

Infatti, dato (u_0, η_0) come in (1.15), $S(t)(u_0, \eta_0)$ è (l'unica) soluzione di (1.2); pertanto soddisfa in particolare, in forma variazionale ($w \in H$),

$$\langle A^{-1}\dot{u}(t), w\rangle + \beta\langle u(t), w\rangle + \int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^t(s), w\rangle\, ds = 0\ . \tag{1.17}$$

Integrando per parti l'ultimo termine abbiamo

$$\int_0^\infty \mu(s)\langle \eta^t(s), w\rangle\, ds = \big[k(s)\langle \eta^t(s), w\rangle\big]_0^{S_\infty} - \int_0^{S_\infty} k(s)\langle (\eta^t)'(s), w\rangle\, ds = 0\ ;$$

i termini di bordo si annullano grazie all'ultima delle ipotesi (1.15) e utilizzando nuovamente la (1.14); inoltre, essendo $(u(t), \eta^t)$ soluzione di (1.2), η^t assume l'espressione (1.12), e di conseguenza

$$(\eta^t)'(s) = \begin{cases} \eta_0'(s-t) & s > t \\ u(t-s) & s \le t\ ; \end{cases}$$

possiamo allora riscrivere la (1.17) come

$$\langle A^{-1}\dot{u}(t), w\rangle + \beta\langle u(t), w\rangle + \int_t^\infty k(s)\langle (\eta_0^t)'(s), w\rangle\, ds + \int_0^t k(s)\langle u(t-s), w\rangle\, ds = 0\ ;$$

pertanto, con il dato iniaziale (1.16), $u(t)$ è soluzione di (1.1).
Poiché, partendo da (u_0, η_0) come in (1.15) e ponendo $u(t)|_{t\le 0}$ come in (1.16), si ottengono tutti e soli i dati iniziali per (1.1) soddisfacenti le ipotesi (1.13), abbiamo ottenuto il risultato di esistenza per (1.1) con dato iniziale in tale classe.
Inoltre, abbiamo evidenziato la corrispondenza desiderata tra le soluzioni dei problemi (1.1) e (1.2). $\square$

Capitolo 2

Stabilità

2.1 Impostazione del problema

Lo studio delle proprietà asintotiche del semigruppo generato dall'equazione (1.2) è il principale obiettivo di questo lavoro. I risultati più importanti sono presentati in questo capitolo e nel successivo.
Iniziamo richiamando la definizione di stabilità per i semigruppi. Sia X uno spazio di Banach, $G(t)$ un semigruppo fortemente continuo di operatori lineari su X; esso si dice stabile se

$$\lim_{t\to\infty} ||G(t)x||_X = 0 \qquad \forall x \in X\ .$$

Dunque, quella definita è una proprietà di decadimento di tutte le soluzioni; con il termine stabilità non indichiamo pertanto la loro sola limitatezza nello spazio delle fasi; proprietà quest'ultima sicuramente verificata per il nostro semigruppo $S(t)$, essendo esso di contrazioni.
Sebbene si abbia il decadimento di tutte le soluzioni, lo schema di decadimento non è necessariamente uniforme; in tal caso si avrebbe stabilità esponenziale, proprietà che sarà discussa nel Capitolo 3.

Ritorniamo al nostro problema; ci chiediamo in questo capitolo quali condizioni sul nucleo di integrazione garantiscano la stabilità del semigruppo $S(t)$. Nel seguito, dato $z_0 = (u_0, \eta_0)$, indichiamo $z(t) = (u(t), \eta^t) = S(t)z_0$. E' utile ricordare che l'*energia* del sistema rispetto al dato iniziale z_0 è la quantità $||S(t)z_0||^2_{\mathcal{H}}$; dato il problema di Cauchy astratto definito in (1.3), moltiplicando per $z(t)$ in $\mathcal{H}$, otteniamo (per ogni $z_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||S(t)z_0||^2_{\mathcal{H}} = \langle \mathbb{L}z(t), z(t)\rangle_{\mathcal{H}}\ .$$

Pertanto, dalla (1.4) otteniamo l'uguaglianza dell'energia:

$$\frac{d}{dt}||S(t)z_0||^2_{\mathcal{H}} = \int_0^\infty \mu'(s)||\eta^t(s)||^2_1\, ds - J[\eta^t] - 2\beta||u(t)||^2_1\ . \tag{2.1}$$

Otterremo il risultato di stabilità utilizzando il Lemma B.3 (si veda l'Appendice B), ovvero dimostrando che esiste uno spazio di Banach riflessivo $\mathcal{V}$ immerso con continuità e densità in $\mathcal{H}$ tale che, per ogni $z_0 \in \mathcal{V}$,

I. $||S(t)z_0||_{\mathcal{H}} = ||z_0||_{\mathcal{H}}$ per ogni $t > 0$ implica $z_0 = 0$;

II. $\bigcup_{t \geq t_0} S(t)z_0$ è relativamente compatto in $\mathcal{H}$ e limitato in $\mathcal{V}$, per qualche $t_0 \geq 0$.

Poniamo

$$\mathcal{V} = H_2 \times [\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{D}(T)] \; ; \tag{2.2}$$

la norma

$$||(u,\eta)||_{\mathcal{V}}^2 = ||Au||^2 + |||A\eta|||^2 + |||T\eta|||^2$$

lo rende uno spazio di Banach (riflessivo), ed è immerso con continuità e densità in $\mathcal{H}$. Inoltre $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}(\mathbb{L})$; infatti si ha evidentemente $u \in H_2$, $\eta \in \mathcal{D}(T)$ ed anche $\int_0^\infty \mu(s)\eta(s)\,ds \in H_2$, in virtù dell'Osservazione 1.4.

Incominciamo mostrando che la condizione **II** è verificata sotto una determinata ipotesi sul nucleo di integrazione.

Lemma 2.1. *Sia $\mathcal{V}$ l'insieme definito in* (2.2)*; sia inoltre verificata l'ipotesi*

$$\int_0^\infty s^2 \mu(s)\,ds < \infty \; . \tag{2.3}$$

Allora per ogni $z_0 \in \mathcal{V}$, l'insieme $\bigcup_{t\geq 1} S(t)z_0$ è limitato in $\mathcal{V}$ e relativamente compatto in $\mathcal{H}$.

Dimostrazione. Grazie all'Osservazione 1.6, il problema (1.2) genera un semigruppo di contrazioni anche su $\mathcal{H}_2$, ed esso coincide con la restrizione su di $S(t)$ su $\mathcal{H}_2$. Pertanto

$$||S(t)z_0||_{\mathcal{H}_2} \leq ||z_0||_{\mathcal{H}_2} \qquad \forall t \geq 0 \; , \; \forall z_0 \in \mathcal{V} \subset \mathcal{H}_2 \; . \tag{2.4}$$

Resta da controllare l'ultimo addendo della norma di $\mathcal{V}$. Dalla (1.12),

$$T\eta^t(s) = \begin{cases} T\eta_0(s-t) & s > t \\ -u(t-s) & s \leq t \; , \end{cases}$$

e quindi

$$|||T\eta^t(s)||| = \int_0^t \mu(s)||u(t-s)||_1^2\,ds + \int_t^\infty \mu(s)||T\eta_0(s-t)||_1^2\,ds \; .$$

entrambi i termini sono uniformemente limitati in t: il primo perché lo è la norma di u (il semigruppo è di contrazioni) e il nucleo è integrabile, il secondo perché siamo in $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}(\mathbb{L})$, dunque $T\eta_0 \in \mathcal{M}$ e

$$\begin{aligned} \int_t^\infty \mu(s)||T\eta_0(s-t)||_1^2\,ds &= \int_0^\infty \mu(t+y)||T\eta_0(y)||_1^2\,dy \\ &\leq \int_0^\infty \mu(y)||T\eta_0(y)||_1^2\,dy \; . \end{aligned}$$

Insieme alla (2.4), questo garantisce che, dato $z_0 \in \mathcal{V}$, $S(t)z_0$ è limitato in $\mathcal{V}$, da cui segue che $\bigcup_{t\geq t_0} S(t)z_0$ è limitato in $\mathcal{V}$ per ogni $t_0 \geq 0$ e per ogni $z_0 \in \mathcal{V}$.
Per quel che concerne la compattezza, utilizziamo il Lemma B.4 (si veda l'Appendice B ed anche [31]) con riferimento agli insiemi

$$H_2 \Subset H_1 \hookrightarrow H \ .$$

Abbiamo un limitato in $\mathcal{V}$ e dobbiamo provarne la compattezza in $\mathcal{H}$: con la prima componente la compattezza è garantita da $H_2 \Subset H$. Per quanto riguarda la seconda, la limitatezza in $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{D}(T)$ non assicura in generale la compattezza in $\mathcal{M}$: allora la condizione di uniformità che utilizzeremo è quella del Lemma B.4. La componente η^t varia in un limitato di $L^2_\mu(\mathbb{R}^+, H_2) \cap H^1_\mu(\mathbb{R}^+, H)$ (addirittura di $L^2_\mu(\mathbb{R}^+, H_2) \cap H^1_\mu(\mathbb{R}^+, H_1)$). Ricordiamo infatti che se $X \hookrightarrow Y$, allora $H^1_\mu(\mathbb{R}^+, X) \hookrightarrow H^1_\mu(\mathbb{R}^+, Y)$.
L'obiettivo ora è mostrare che

$$\lim_{x\to\infty} \left[\sup_{t\geq 1} \int_{(0,\,1/x)\cup(x,\,\infty)} \mu(s)||\eta^t(s)||_1^2 \, ds \right] = 0 \ ;$$

si tratta infatti della seconda condizione del Lemma B.4, con $t_0 = 1$. Ricorriamo alla formula di rappresentazione di η, la (1.12), e otteniamo

$$||\eta^t(s)||_1 \leq \begin{cases} ||\eta_0(s-t)||_1 + \displaystyle\int_0^t ||\mu(s)||_1 \, ds \leq ||\eta_0(s-t)||_1 + t||z_0||_{\mathcal{H}} & s > t \\ \displaystyle\int_{t-s}^t ||\mu(s)||_1 \, ds \leq s||z_0||_{\mathcal{H}} & s \leq t \ , \end{cases}$$

da cui

$$||\eta^t(s)||_1^2 \leq \begin{cases} 2||\eta_0(s-t)||_1^2 + 2s^2||z_0||_{\mathcal{H}}^2 & s > t \\ s^2||z_0||_{\mathcal{H}}^2 & s \leq t \ . \end{cases}$$

Poniamo ora $t, x \geq 1$ (dovremo infatti passare all'estremo superiore per $t \geq 1$ e al limite per $x \to \infty$). Con queste posizioni, e utilizzando l'ultima disuguaglianza, abbiamo i due seguenti casi:

$$\begin{aligned} &\int_{(0,\,1/x)\cup(x,\,\infty)} \mu(s)||\eta^t(s)||_1^2 \, ds \\ &\leq \begin{cases} ||z_0||_{\mathcal{H}}^2 \displaystyle\int_0^{1/x} s^2\mu(s) \, ds + 2||z_0||_{\mathcal{H}}^2 \int_x^\infty s^2\mu(s) \, ds + 2\int_x^\infty \mu(s)||\eta_0(s-t)||_1^2 & x > t \\ ||z_0||_{\mathcal{H}}^2 \displaystyle\int_0^{1/x} s^2\mu(s) \, ds + 2\int_t^\infty \mu(s)||\eta_0(s-t)||_1^2 \, ds + 2||z_0||_{\mathcal{H}}^2 \int_x^\infty s^2\mu(s) \, ds & x \leq t \ , \end{cases} \end{aligned}$$

che possiamo riassumere in

$$\int_{(0,\,1/x)\cup(x,\,\infty)} \mu(s)||\eta^t(s)||_1^2 \leq 2||z_0||_{\mathcal{H}}^2 \int_{(0,\,1/x)\cup(x,\,\infty)} s^2\mu(s)\, ds + 2\int_{\max\{x,\,t\}}^\infty \mu(s)||\eta_0(s-t)||_1^2 ds \ .$$

Facciamo tendere x all'infinito; al secondo membro, il primo integrale è infinitesimo in virtù della (2.3), mentre per il secondo, dividendo in due parti (per esempio $x > 2t$ e $x \leq 2t$), abbiamo la seguente stima uniforme in t

$$\begin{aligned}\int_{\max\{x,t\}}^{\infty} \mu(s)||\eta_0(s-t)||_1^2\, ds &= \int_{\max\{x-t,0\}}^{\infty} \mu(t+y)||\eta_0(y)||_1^2\, dy \\ &\leq \begin{cases} \displaystyle\int_{x/2}^{\infty} \mu(y)||\eta_0(y)||_1^2\, dy & x > 2t \\ \displaystyle\int_0^{\infty} \mu(x/2+y)||\eta_0(y)||_1^2\, dy & x \leq 2t\ ; \end{cases}\end{aligned}$$

entrambe le quantità tendono a zero per $x \to \infty$, poiché $\eta_0 \in \mathcal{M}$ e grazie al teorema della convergenza dominata. $\square$

Osservazione 2.2. La condizione (2.3) equivale all'integrabilità della funzione $\int_s^\infty k(y)dy$; si tratta di una condizione abbastanza naturale poiché, se valida, un dato iniziale della forma $\eta_0(s) = sv$, $v \in H_1$, appartiene a $\mathcal{M}$, e dunque rientra nei dati iniziali ammissibili; ad esso corrisponde una storia costante $u(t)|_{t<0}$ come dato iniziale per il problema (1.1).

Abbiamo dunque trovato un insieme $\mathcal{V}$ per il quale la **II** è verificata per $t_0 = 1$. Notiamo anche che, se $z_0 \in \mathcal{V}$, in virtù della (2.1), l'uguaglianza della condizione **I** si traduce in

$$\int_0^\infty \mu'(s)||\eta^t(s)||_1^2\, ds - J[\eta^t] - 2\beta||u(t)||_1^2 = 0 \qquad \forall t \geq 0\ .$$

Tenendo presente il Lemma 2.1, possiamo allora riformulare, per il nostro caso particolare, il Lemma B.3 dell'Appendice B nel seguente modo:

Lemma 2.3. *Valga la* (2.3). *Inoltre, per ogni* $z_0 \in \mathcal{V}$, *l'uguaglianza*

$$\int_0^\infty \mu'(s)||\eta^t(s)||_1^2\, ds - J[\eta^t] - 2\beta||u(t)||_1^2 = 0 \qquad \forall t \geq 0 \tag{2.5}$$

implichi $u(t) = 0$ *per ogni* $t \geq 0$. *Allora* $S(t)$ *è stabile.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \mathcal{V}$. Supponiamo che valga la (2.5) e che $u(t) = 0$ per ogni $t \geq 0$. Dobbiamo mostrare che $\eta^t = 0$ per ogni $t \geq 0$. A tale scopo, consideriamo la rappresentazione di η^t fornita dalla (1.12). Essa si riduce a

$$\eta^t(s) = \begin{cases} \eta_0(s-t) & s \geq t \\ 0 & s < t\ . \end{cases}$$

In particolare η^t è soluzione di un problema omogeneo; di conseguenza abbiamo (si veda (1.11))

$$||S(t)z_0||_{\mathcal{H}} = |||\Sigma(t)\eta_0||| \qquad \forall t \geq 0\ .$$

Valendo la (2.5), dalla (2.1) abbiamo che $||S(t)z_0||_{\mathcal{H}}$ è costante per ogni $z_0 \in \mathcal{V}$ (è possibile fare riferimento all'uguaglianza dell'energia poiché $\mathcal{V} \subset \mathcal{D}(\mathbb{L})$). Pertanto,

$$|||\Sigma(t)\eta_0||| = |||\eta_0||| \qquad \forall t \geq 0 \; . \tag{2.6}$$

Il semigruppo $\Sigma(t)$ è sempre stabile, infatti

$$|||\Sigma(t)\eta_0|||^2 = \int_t^\infty \mu(s)||\eta_0(s-t)||_1^2 \, ds = \int_0^\infty \mu(t+s)||\eta_0(s)||_1^2 \, ds \; ;$$

scelta $\mu(s)||\eta_0(s)||_1^2$ come dominante in $L^1(\mathbb{R}^+)$, il teorema della convergenza dominata consente di concludere che $|||\Sigma(t)\eta_0|||^2$ è infinitesima nel limite $t \to \infty$, e per ogni $\eta_0 \in \mathcal{M}$. Allora dalla (2.6) otteniamo che $\eta_0 = 0$. Dunque $z_0 = 0$. □

A questo punto il riferimento per la stabilità è il Lemma 2.3: entra ora in gioco la distinzione tra $\beta > 0$ e $\beta = 0$.

$\diamond$ Nel caso $\beta > 0$, affinché la (2.5), in cui compare la somma di tre termini non positivi, sia verificata è necessario che u sia identicamente zero; segue la stabilità di $S(t)$ (sotto l'ipotesi (2.3)).

$\diamond$ Più articolato è il caso $\beta = 0$, che trattiamo in dettaglio nel prossimo paragrafo: perché la (2.5) sia verificata, è necessario che $\eta^t(s)$ si annulli in tutti i valori s_n dove il nucleo presenta dei salti, e deve anche annullarsi negli altri punti, almeno se in corrispondenza di essi non vale $\mu' = 0$. Dunque deve esistere almeno un punto $\widetilde{s}$ in cui $\eta^t = 0$ per ogni $t \geq 0$; se allora consideriamo la formula di rappresentazione (1.12) abbiamo

$$\int_{t-\widetilde{s}}^t u(y)\, dy = 0 \qquad t > \widetilde{s} \; ,$$

ovvero, se definiamo

$$U(t) = \int_0^t u(y)\, dy \; ,$$

si ha che U è periodica di periodo $\widetilde{s}$.

2.2 Nuclei di passo $\boldsymbol{\ell}$ e nuclei risonanti

Nell'analisi del caso $\beta = 0$, le situazioni più interessanti sono relative ai nuclei a scala. La prima distinzione riguarda i nuclei di passo ℓ.

Teorema 2.4. *Sia $\beta = 0$. Supponiamo che il nucleo non sia di passo ℓ. Allora $S(t)$ è stabile sotto l'ipotesi* (2.3).

Dimostrazione. Utilizzeremo il risultato classico secondo cui se una funzione misurabile ammette periodi arbitrariamente piccoli, allora è costante (si veda l'Appendice B).
Sia valida la (2.5). Se esiste un insieme di misura positiva su cui $\mu'(s) < 0$, allora esistono

certamente due valori $\widetilde{s}_1$, $\widetilde{s}_2$ a rapporto irrazionale dove η si annulla, e in corrispondenza dei quali U è periodica; ma allora U è costante grazie al Corollario B.11, e di conseguenza u è nulla; dunque il Lemma 2.3 si applica garantendo la stabilità di $S(t)$.
La stessa situzione si verifica nel caso in cui μ sia una funzione a scala, ma con almeno due salti in corrispondenza di valori a rapporto irrazionale.
Rimane il caso in cui μ è tale che la successione s_n si può scrivere come

$$s_n = \begin{cases} \lambda & n = 1 \\ \lambda(p_n + r_n) & n > 1 \ , \end{cases} \tag{2.7}$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $p_n \in \mathbb{N}$, $r_n \in \mathbb{Q} \cap [0,1)$ (ossia ogni coppia di elementi della successione è a rapporto razionale); essendo λ un periodo di U, lo è anche λp_n per ogni n, e di conseguenza anche λr_n per ogni n (è differenza di periodi).
In (2.7) abbiamo due possibili situazioni.

1. L'insieme degli r_n distinti non è finito; allora ammette un'estratta di Cauchy r_{n_k}; poiché $\lambda|r_{n_{k+1}} - r_{n_k}|$ è periodo per U per ogni k, U ha periodi arbitrariamente piccoli, dunque è costante (Teorema B.8). In questo caso concludiamo che $S(t)$ è stabile con il Lemma 2.3.

2. L'insieme degli r_n distinti è finito. È immediato verificare che allora il nucleo è di passo ℓ; ponendo $r_n = a_n/b_n$, con $a_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $b_n \in \mathbb{N}$, $a_1 = 0$, $p_1 = 1$, essendo m i valori distinti assunti dalla successione r_n, si ha infatti $s_n = \tau k_n$ con

$$\tau = \frac{\lambda}{\prod_{j=1}^m b_j} \ , \qquad k_n = \frac{p_n b_n + a_n}{b_n} \left(\prod_{j=1}^m b_j \right) .$$

Con questa dimostrazione abbiamo esaurito tutti i casi tranne quello di cui al punto 2. $\square$

Il nucleo di passo ℓ richiede un'ulteriore condizione per la stabilità, come mostrano i risultati seguenti.

Teorema 2.5. *Sia $\beta = 0$, valga la (2.3) e il nucleo sia di passo ℓ ma non risonante; allora $S(t)$ è stabile.*

Dimostrazione. Sia $z_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$, e valga la (2.5). Poiché

$$\mu(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \chi_{[\ell k_{n-1}, \ell k_n)}(s) \ ,$$

la (2.5) si traduce in

$$\eta^t(\ell k_n) = 0, \qquad \forall t \geq 0 \ ,$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(\ell k_{n-1}) > 0$. Riscrivendo la (1.12) in termini di U, abbiamo

$$\eta^t(s) = \begin{cases} U(t) + \eta_0(s-t) & s > t \\ U(t) - U(t-s) & s \leq t \ . \end{cases}$$

Pertanto,

$$U(t) = U(t - \ell k_n) \qquad \forall t \geq \ell k_n$$

e

$$\eta_0(s) = -U(\ell k_n - s) \qquad \forall s \in (0, \ell k_n]\ .$$

Per la prima uguaglianza $U(t)$ è ℓk_n-periodica, dunque è ℓ-periodica, essendo uguale a 1 il massimo comune divisore di $\{k_n\}$. Estendendo $U(t)$ a tutto $\mathbb{R}$ per periodicità, dalla seconda uguaglianza ricaviamo

$$\eta_0(s) = -U(-s) \qquad \Longrightarrow \qquad \eta^t(s) = U(t) - U(t - s)\ ,$$

per ogni s tale che $\mu(s) > 0$, e dunque

$$\int_0^\infty \mu(s) A \eta^t(s) ds = \kappa A U(t) - \int_0^\infty \mu(s) A U(t - s) ds = \kappa A U(t)\ ,$$

grazie al fatto che $U(t - s)$ è ℓ-periodica e μ è costante su ogni intervallo $[\ell k_{n-1}, \ell k_n)$. Concludiamo che $U(t)$ soddisfa l'equazione delle onde astratta:

$$\ddot{U}(t) + \kappa A U(t) = 0\ .$$

Per ogni m, la funzione ℓ-periodica $\gamma_m(t) = \langle U(t), e_m \rangle$ risolve l'equazione ordinaria

$$\ddot{\gamma}_m(t) + \kappa \alpha_m \gamma_m(t) = 0\ .$$

In particolare, $\gamma_m(t)$ è τ_m-periodica, con $\tau_m = 2\pi/\sqrt{\kappa\alpha_m}$. Inoltre, τ_m è il *minimo* periodo di $\gamma_m(t)$, a meno che $\gamma_m(t)$ non sia identicamente nulla, e ciò significa che $\ell = p\,\tau_m$ per qualche $p \in \mathbb{N}$, in conflitto con l'ipotesi di non risonanza di μ. Di conseguenza, $\gamma_m(t)$ si deve annullare per ogni m, ma questo implica che $U(t) \equiv 0$. Possiamo allora applicare nuovamente il Lemma 2.3 e dedurre la stabilità di $S(t)$. □

Infine, mostriamo cosa succede nel caso risonante.

Teorema 2.6. *Sia $\beta = 0$ e il nucleo sia risonante. Allora $S(t)$ non è stabile.*

Dimostrazione. Sia $\{\alpha_m, e_m\}$ la successione delle coppie autovalore-autovettore di A. Per $\omega \neq 0$, consideriamo il dato iniziale

$$(u_0, \eta_0(s)) = (0, \frac{1}{\omega}(\cos(\omega s) - 1)) \ \in \mathcal{H}\ . \tag{2.8}$$

Mostriamo che

$$(u, \eta) = (e_m \sin \omega t, \int_{t-s}^t u(y)\, dy) \tag{2.9}$$

è la soluzione corrispondente.
In effetti la (2.9) riproduce il dato iniziale (2.8) per $t = 0$; inoltre

$$\begin{aligned} \eta^t(s) &= -\frac{1}{\omega}(\cos\omega t - \cos\omega(t-s))e_m \\ \partial_t\eta^t(s) &= (\sin\omega t - \sin\omega(t-s))e_m \\ \partial_s\eta^t(s) &= (\sin\omega(t-s))e_m\ ; \end{aligned}$$

pertanto la seconda equazione del sistema (1.2) risulta soddisfatta, mentre la prima (essendo $Ae_m = \alpha_m e_m$) diviene

$$\begin{aligned} & \omega\cos\omega t - \frac{\alpha_m}{\omega}\kappa\cos\omega t + \frac{\alpha_m}{\omega}\int_0^\infty \mu(s)\cos\omega(t-s)\,ds = 0 \\ \Rightarrow\quad & \omega\cos\omega t - \frac{\alpha_m}{\omega}\kappa\cos\omega t + \frac{\alpha_m}{\omega}\sum_{n=1}^\infty \mu_n \int_{\ell k_{n-1}}^{\ell k_n} \cos\omega(t-s)\,ds = 0 \\ \Rightarrow\quad & \omega\cos\omega t - \frac{\alpha_m}{\omega}\kappa\cos\omega t - \frac{\alpha_m}{\omega^2}\sum_{n=1}^\infty \mu_n \left[\sin\omega(t-s)\right]_{\ell k_{n-1}}^{\ell k_n} = 0\ . \end{aligned} \tag{2.10}$$

A questo punto la somma dei primi due termini è nulla se $\omega = \sqrt{\alpha_m k}$, mentre il terzo è nullo se $\omega\ell = 2m\pi$ per qualche m intero positivo. In conclusione abbiamo la soluzione oscillante (2.9) nel caso di nuclei di passo ℓ con

$$\frac{\ell}{2\pi}\sqrt{\alpha_m\kappa} = r$$

per qualche r intero positivo, ovvero proprio nel caso dei nuclei risonanti (la risonanza è condizione necessaria e sufficiente perché sia verificata la (2.10)). □

Osservazione 2.7. Si noti che nel caso $\beta = 0$ con nucleo risonante, $S(t)$ non solo non è stabile, ma addirittura possiede traiettorie periodiche; la risonanza annulla di fatto la dissipazione.

Osservazione 2.8. Quest'ultimo risultato è valido indipendentemente dal fatto che la condizione (2.3) sia soddisfatta; nel caso lo sia, abbiamo ottenuto un quadro completo sulla stabilità di $S(t)$.

Osservazione 2.9. Consideriamo il seguente esempio. Sia $H = L^2(0,\pi)$, e

$$A = -\frac{d^2}{dx^2}, \qquad H_2 = H^2(0,\pi)\cap H_0^1(0,\pi);.$$

Allora, $\{\alpha_m\} = \{m^2\}$. Posto

$$\Omega = \frac{\ell}{2\pi}\sqrt{\kappa}\ ,$$

si ha che $\Omega_m = m\Omega$. Dunque in questo caso il nucleo è risonante se e solo se $\Omega \in \mathbb{Q}$.
Considerazioni simili si possono fare per altre scelte dello spazio H e dell'operatore A, ottenendo risultati che dipendono dalla distribuzione e dall'andamento asintotico degli autovalori di A (si veda [2]).

Riassumiamo i risultati di questo capitolo nel seguente

Teorema 2.10. *Sia soddisfatta la condizione* (2.3) *sul nucleo di integrazione. Allora* $S(t)$ *è stabile se e solo se*

(i) $\beta > 0$*; oppure*

(ii) $\beta = 0$ *e* μ *non è risonante.*

Capitolo 3

Stabilità esponenziale

Sia X uno spazio di Banach, $G(t)$ un semigruppo fortemente continuo di operatori lineari su X; esso si dice esponenzialmente stabile se esistono due costanti $M \geq 1$, $\omega > 0$ tali che

$$||G(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{-\omega t} \qquad \forall t \geq 0 \; .$$

È ben noto che se $||G(t_0)||_{\mathcal{L}(X)} < 1$ per qualche $t_0 > 0$, allora $G(t)$ è esponenzialmente stabile (si veda [32]). Pertanto se la norma di $G(t)$ decade, il decadimento è necessariamente esponenziale. Inoltre, se esiste uno schema di decadimento comune per tutti i dati iniziali in X, allora il semigruppo è esponenzialmente stabile: infatti, assumiamo che esista una funzione positiva $\psi(t)$ con $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0$ tale che

$$||G(t)x||_X \leq C_x \psi(t) \; ,$$

con $C_x > 0$ (dipendente da x). Allora gli operatori lineari e continui

$$\Lambda_t = \frac{1}{\psi(t)}\, G(t) \qquad t \geq 0$$

soddisfano

$$\sup_{t\geq 0} ||\Lambda_t x||_X \leq C_x \qquad \forall x \in X \; .$$

Per il teorema di Banach-Steinhaus esiste una costante C tale che

$$||G(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq C\psi(t) \; .$$

Osservazione 3.1. La stabilità non implica in generale il decadimento a zero della norma di $G(t)$: ci può essere stabilità senza uno schema di andamento a zero uniforme su X, come mostra il seguente esempio.
Sia $G(t)$ il semigruppo fortemente continuo definito sullo spazio di Hilbert ℓ^2 delle successioni a quadrato sommabile da

$$G(t)x = (x_1 e^{-t}, x_2 e^{-t/2}, \ldots, x_n e^{-t/n}, \ldots) \; ,$$

dove $x = (x_1, x_2, \ldots) \in \ell^2$. Allora $||G(t)||_{\mathcal{L}(\ell^2)} = 1$ per ogni $t \geq 0$, ma

$$||G(t)x||^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 e^{-2t/n} ,$$

quantità che tende a zero per ogni x appartenente a ℓ^2.

Osservazione 3.2. Sia Λ il generatore infinitesiamle di un semigruppo fortemente continuo $G(t)$ su uno spazio di Hilbert X, e sia $\omega > 0$; allora

$$||G(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{-\omega t}$$

se e solo se

$$\langle \Lambda x, x \rangle \leq -\omega ||x||_X^2 \qquad \forall x \in \mathcal{D}(\Lambda) .$$

In questa situazione, pertanto, il decadimento esponenziale si ricava immediatamente. Un esempio nel quale il criterio è applicabile è l'equazione

$$\dot{u} + Au = 0 .$$

Nel nostro caso, invece, il decadimento esponenziale non si può ottenere in modo analogo.

Lo scopo di questo capitolo, è fornire delle condizioni per la stabilità esponenziale del semigruppo associato al problema (1.2). Una condizione sufficiente classicamente utilizzata è la seguente (si veda per esempio [15, 19, 25]): esista $\delta > 0$ tale che

$$\mu'(s) + \delta\mu(s) \leq 0 \qquad \forall s > 0$$

o equivalentemente

$$\mu(t+s) \leq e^{-\delta t}\mu(s) \qquad \forall t \geq 0 \, , \, \forall s > 0 \, .$$

Si tratta però di una condizione eccessivamente restrittiva; ad esempio essa impedisce al nucleo di avere zone di piattezza non nulle ed anche flessi a tangente orizzontale. Essa è stata messa in discussione per la prima volta in [30], dove compare una condizione più debole che andiamo ora a introdurre.

3.1 La condizione necessaria

Con il prossimo teorema dimostriamo che una condizione necessaria per il decadimento esponenziale di $S(t)$ è la seguente: esistano due costanti $C \geq 1$, $\delta > 0$ tali che

$$\mu(t+s) \leq Ce^{-\delta t}\mu(s) \qquad \forall t \geq 0 \tag{3.1}$$

valga per quasi ogni $s > 0$.

Teorema 3.3. *Se $S(t)$ è esponenzialmente stabile, allora il nucleo μ soddisfa la* (3.1).

Dimostrazione. Definiamo $\widetilde{\mathcal{M}} = L^2_\mu(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Sia $\zeta \in \widetilde{\mathcal{M}}$, e selezioniamo $z_0 = (0, \zeta e_1)$. Allora, la corrispondente soluzione di (1.3) è

$$S(t)z_0 = (\chi(t)e_1, \xi^t e_1)\ ,$$

dove

$$\begin{cases} \dot{\chi}(t) + \beta\alpha_1\chi(t) + \alpha_1 \displaystyle\int_0^\infty \mu(s)\xi^t(s)ds = 0 \qquad t > 0 \\ \dot{\xi}^t = T\xi^t + \chi(t) \qquad t > 0 \\ \chi(0) = 0 \\ \xi^0(s) = \zeta(s)\ . \end{cases}$$

Ora T è il generatore infinitesimale del semigruppo di traslazioni a destra $\Sigma(t)$ su $\widetilde{\mathcal{M}}$, che agisce come

$$[\Sigma(t)\zeta](s) = \begin{cases} 0, & 0 < s \le t, \\ \zeta(s-t), & s > t, \end{cases}$$

L'ipotesi di decadimento esponenziale assicura che

$$\max\{|\chi(t)|, \sqrt{\alpha_1}\|\xi^t\|_{\mathcal{M}_1}\} \le \|S(t)z_0\|_{\mathcal{H}} \le \sqrt{\alpha_1}Me^{-\omega t}\|\zeta\|_{\mathcal{M}_1}.$$

In particolare, posto $\psi(t) = \int_0^t \chi(y)dy$, si ha

$$|\psi(t)| \le \int_0^t |\chi(y)|dy \le \frac{M\sqrt{\alpha_1}}{\omega}\|\zeta\|_{\mathcal{M}_1}.$$

Grazie alla (1.12), e ricordando che abbiamo indicato con $k(s)$ la primitiva di $\mu(s)$, abbiamo

$$\begin{aligned} M^2e^{-2\omega t}\|\zeta\|^2_{\mathcal{M}_1} &\ge \|\xi^t\|^2_{\mathcal{M}_1} \\ &\ge \int_t^\infty \mu(s)|\zeta(s-t) + \psi(t)|^2 ds \\ &\ge \frac{1}{2}\int_t^\infty \mu(s)|\zeta(s-t)|^2 ds - |\psi(t)|^2 k(t) \\ &\ge \frac{1}{2}\|\Sigma(t)\zeta\|^2_{\mathcal{M}_1} - \frac{M^2\alpha_1}{\omega^2}k(t)\|\zeta\|^2_{\mathcal{M}_1}. \end{aligned}$$

Dunque per ogni $\zeta \in \mathcal{M}_1$,

$$\|\Sigma(t)\zeta\|_{\mathcal{M}_1} \le \Upsilon(t)\|\zeta\|_{\mathcal{M}_1},$$

avendo posto

$$\Upsilon(t) = M\sqrt{2e^{-2\omega t} + \frac{2\alpha_1}{\omega^2}k(t)}\,.$$

Poiché $\Upsilon(t) \to 0$ per $t \to \infty$, esiste uno schema di decadimento uniforme su $\widetilde{\mathcal{M}}$, e grazie a quanto messo in evidenza all'inizio del capitolo, possiamo concludere che $\Sigma(t)$ è esponenzialmente stabile su $\widetilde{\mathcal{M}}$, ossia esistono $C \geq 1$, $\delta > 0$ tali che

$$\|\Sigma(t)\|^2_{\mathcal{L}(\widetilde{\mathcal{M}})} \leq Ce^{-\delta t} .$$

Allora, per ogni $\zeta \in \widetilde{\mathcal{M}}$, vale

$$\|\Sigma(t)\zeta\|^2_{\widetilde{\mathcal{M}}} - Ce^{-\delta t}\|\zeta\|^2_{\widetilde{\mathcal{M}}} = \int_0^\infty \big[\mu(t+s) - Ce^{-\delta t}\mu(s)\big]|\zeta(s)|^2 ds \leq 0 .$$

Per ogni t fissato, sia

$$\mathcal{A}_t = \big\{s \in \mathbb{R}^+ \,:\, \mu(t+s) - Ce^{-\delta t}\mu(s) > 0\big\}.$$

Scegliendo $\zeta(s) = \chi_{\mathcal{A}_t}(s)$ (che certamente appartiene a $\widetilde{\mathcal{M}}$), concludiamo che

$$\int_{\mathcal{A}_t} \big[\mu(t+s) - Ce^{-\delta t}\mu(s)\big] ds = 0,$$

da cui la tesi. □

In virtù dei ragionamenti del capitolo precedente possiamo già affermare che tale condizione non è sufficiente; infatti ogni nucleo risonante a supporto compatto soddisfa la (3.1) ma non dà nemmeno stabilità. Ci si può allora chiedere se, escluse queste situazioni patologiche, i casi stabili siano anche esponenzialmente stabili. La risposta a questa domanda dipende dalla finitezza della dimensione dello spazio di Hilbert H al quale appartiene u, come mostriamo nelle sezioni successive.

3.2 Il caso finito dimensionale

Consideriamo il caso in cui lo spazio H sia N-dimensionale; allora l'operatore A è una matrice simmetrica definita positiva, e $\mathcal{D}(A) \equiv H$ (in generale $H_r \equiv H$, per ogni r).
Abbiamo allora il seguente

Teorema 3.4. *Se lo spazio di Hilbert H è finito dimensionale e il nucleo di integrazione μ soddisfa la* (3.1) *e non è risonante, allora il sistema dinamico $S(t)$ è esponenzialmente stabile.*

Dimostrazione. Facciamo ricorso alla condizione necessaria e sufficiente per la stabilità esponenziale dei semigruppi di contrazioni riportata nell'Appendice B (Teorema B.2). È necessario considerare il complessificato dello spazio $\mathcal{H}$ e dell'operatore $\mathbb{L}$; per semplicità li indicheremo sempre allo stesso modo; in particolare abbiamo i complessificati di H e di $\mathcal{M}$, che in questo caso sono rispettivamente $\mathbb{C}^N$ e $L^2_\mu(\mathbb{R}^+,\mathbb{C}^N)$. Richiamiamo tale condizione: esista $\varepsilon > 0$ tale che

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|(i\lambda\mathbb{I} - \mathbb{L})z\|_{\mathcal{H}} \geq \varepsilon \|z\|_{\mathcal{H}} \qquad \forall z \in \mathcal{D}(\mathbb{L}) \tag{3.2}$$

Per assurdo, essa non sia verificata. Allora devono esistere tre successioni

$$\lambda_n \in \mathbb{R}, \qquad u_n \in \mathbb{C}^N, \qquad \eta_n \in L^2_\mu(\mathbb{R}^+,\mathbb{C}^N) \tag{3.3}$$

con

$$||u_n||^2_{\mathbb{C}^N} + \int_0^\infty \mu(s)||\eta_n(s)||^2_{\mathbb{C}^N}\, ds = 1 \,, \tag{3.4}$$

e con $(u_n,\eta_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$ (a qusto scopo, essendo H finito dimensionale è sufficiente richiedere che sia $\eta_n \in \mathcal{D}(T)$), tali che

$$\begin{cases} i\lambda_n u_n + \displaystyle\int_0^\infty \mu(s)A\eta_n(s)\, ds = a_n & \text{in } \mathbb{C}^N \\ i\lambda_n\eta_n - u_n - T\eta_n = b_n & \text{in } L^2_\mu(\mathbb{R}^+,\mathbb{C}^N)\,, \end{cases} \tag{3.5}$$

dove $a_n \to 0$ in $\mathbb{C}^N$ e $b_n \to 0$ in $L^2_\mu(\mathbb{R}^+,\mathbb{C}^N)$. Sostanzialmente devono esistere delle successioni per le quali, al limite, il primo membro nella (3.2) sia infinitesimo, mentre il secondo rimanga finito.
Il primo passo consiste nel dimostrare che λ_n è una successione limitata. Dall'integrazione della seconda equazione in (3.5) otteniamo

$$\eta_n(s) = \frac{1}{i\lambda_n}\, u_n(1 - e^{-i\lambda_n s}) + \Gamma_n(s)\,, \tag{3.6}$$

dove

$$\Gamma_n(s) = e^{-i\lambda_n s}\int_0^s e^{i\lambda_n\zeta}\, b_n(\zeta)\, d\zeta\,. \tag{3.7}$$

Inoltre sia

$$I_n = \int_0^\infty \mu(s)||\Gamma_n(s)||^2_{\mathbb{C}^N}\, ds\,. \tag{3.8}$$

Allora, utilizzando la condizione necessaria per il decadimento esponenziale, grazie alla quale

$$\mu(s) = \mu(s-\zeta+\zeta) \leq Ce^{-\delta(s-\zeta)}\mu(\zeta)\,,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} I_n &\leq \int_0^\infty \mu(s)\left(\int_0^s ||b_n(\zeta)||_{\mathbb{C}^N}\, d\zeta\right)^2 ds \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^s \sqrt{\mu(s)}||b_n(\zeta)||_{\mathbb{C}^N}\right)^2 ds \\ &\leq C\int_0^\infty \left(\int_0^s e^{-\delta(s-\zeta)/2}\sqrt{\mu(\zeta)}||b_n(\zeta)||_{\mathbb{C}^N}\right)^2 ds\,; \end{aligned}$$

indichiamo con $L_n(s)$ l'integrale interno: si tratta del prodotto di convoluzione su $\mathbb{R}^+$ tra $\exp(-\delta\zeta/2) \in L^1(\mathbb{R}^+)$ e $\sqrt{\mu(\zeta)}||b_n(\zeta)||_{\mathbb{C}^N} \in L^2(\mathbb{R}^+)$; richiamando nuovamente il risultato sulla convoluzione dell'Appendice B, abbiamo

$$||L_n||_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq ||e^{-\delta\zeta/2}||_{L^1(\mathbb{R}^+)}||\sqrt{\mu(\zeta)}b_n(\zeta)||_{L^2(\mathbb{R}^+)} .$$

Concludiamo che

$$I_n \leq \frac{4C}{\delta^2}||b_n||^2_{L^2_\mu(\mathbb{R}^+,\mathbb{C}^N)} , \tag{3.9}$$

pertanto I_n è infinitesimo per n che tende all'infinito grazie al fatto che b_n è infinitesima in $L^2_\mu(\mathbb{R}^+,\mathbb{C}^N)$.
Con la disuguaglianza di Hölder, e considerando nuovamente la (3.6) e la (3.7), si ha

$$\begin{aligned} \left|\left|\int_0^\infty \mu(s)\eta_n(s)\,ds\right|\right|_{\mathbb{C}^N} &\leq \int_0^\infty \mu(s)||\eta_n(s)||_{\mathbb{C}^N}\,ds \\ &\leq \kappa^{1/2}||\eta_n||_{L^2_\mu(\mathbb{R}^+,\mathbb{C}^N)} \\ &\leq \kappa^{1/2}\left[\left(\frac{k}{|\lambda_n|}\right)^{1/2}||u_n||_{\mathbb{C}^N} + \left(\int_0^\infty \mu(s)||\Gamma_n(s)||^2_{\mathbb{C}^N}\,ds\right)^{1/2}\right] \end{aligned} \tag{3.10}$$

A questo punto supponiamo per assurdo che λ_n non sia limitata; allora possiamo scegliere un'estratta (che indichiamo sempre con λ_n) divergente in modulo. Al limite rispetto a questa sottosuccessione, dall'ultima disuguaglianza notiamo che nel primo termine u_n è limitata in $\mathbb{C}^N$ (poiché deve rispettare la (3.4)), e dunque tale termine è infinitesimo; ma lo è anche il secondo in virtù della (3.9). Allora concludiamo che $\eta_n \to 0$ in $L^2_\mu(\mathbb{R}^+,\mathbb{C}^N)$ e inoltre

$$\int_0^\infty \mu(s)\eta_n(s)\,ds \to 0 \quad \text{in } \mathbb{C}^N .$$

Sfruttiamo ora il fatto che l'operatore A è una matrice in uno spazio H finito dimensionale, per concludere che anche

$$\int_0^\infty \mu(s)A\eta_n(s)\,ds$$

è una quantità infinitesma di $\mathbb{C}^N$.
Quindi, analizzando la prima equazione in (3.5), concludiamo che il secondo termine tende a zero, e per ipotesi anche il terzo; deve allora tendere a zero il primo, ma poiché λ_n non è infinitesima, deve esserlo u_n. La situazione è dunque la seguente: u_n è infinitesima in $\mathbb{C}^N$, mentre η_n lo è in $L^2_\mu(\mathbb{R}^+,\mathbb{C}^N)$; ma questo viola la (3.4).
Pertanto λ_n deve essere una successione limitata.

Abbiamo λ_n e u_n successioni limitate in $\mathbb{C}^N$. Consideriamo delle estratte convergenti (che indichiamo ancora con pedice n), e siano λ e u i rispettivi limiti. Sommando e sottraendo $i\lambda u$ nella prima equazione di (3.5), otteniamo

$$i\lambda u + \int_0^\infty \mu(s)A\eta_n(s)\,ds = \widetilde{a}_n \qquad \text{dove } \widetilde{a}_n \to 0 . \tag{3.11}$$

Anzitutto notiamo che il valore limite λ non può essere nullo; consideriamo infatti la seconda equazione in (3.5). Grazie alla (3.10) η_n è limitata in $L^2_\mu(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^N)$, dunque $i\lambda_n\eta_n$ tende a zero a sua volta; sommando e sottrendo il valore limite u, abbiamo allora

$$-u - T\eta_n = \widetilde{b}_n \qquad \text{dove } \widetilde{b}_n \to 0 \ ,$$

risolvendo la quale si ha

$$\eta_n(s) = su + \int_0^s \widetilde{b}_n(\zeta)\, d\zeta \ , \tag{3.12}$$

e sostituendo nella (3.11), dove $\lambda = 0$, troviamo che

$$\widetilde{a}_n = Au \int_0^\infty s\mu(s)\, ds + \int_0^\infty \mu(s) \left(\int_0^s A\widetilde{b}_n(\zeta)\, d\zeta \right) d\zeta \ . \tag{3.13}$$

Il primo membro è infinitesimo in $\mathbb{C}^N$, mentre la norma in $\mathbb{C}^N$ dell'ultimo è minore o uguale di

$$\int_0^\infty \mu(s) \left(\int_0^s ||A\widetilde{b}_n(\zeta)||_{\mathbb{C}^N}\, d\zeta \right) ds \ .$$

Tenendo conto dell'equivalenza delle norme in $\mathbb{C}^N$, e usando la disuguaglianza di Hölder, si giunge a dimostrare che tale quantità è infinitesima, seguendo gli stessi passaggi utilizzati in precedenza per dimostrare che l'integrale I_n (definito in (3.8)) tende a zero. Inoltre dalla condizione di decadimento (3.1) segue che il nucleo μ decade esponenzialmente, dunque è finita la quantità $\int_0^\infty s\mu(s)ds$.
Dalla (3.13) dobbiamo allora concludere che $u = 0$; ma in questo modo dalla (3.12) abbiamo

$$\int_0^\infty \mu(s)||\eta_n(s)||^2_{\mathbb{C}^N}\, ds = \int_0^\infty \mu(s) \left|\left| \int_0^s \widetilde{b}_n(\zeta)\, d\zeta \right|\right|^2_{\mathbb{C}^N} ds \ ,$$

e tale quantità è infinitesima (ancora si tratta analogamente a I_n); al limite, insieme a $u = 0$, ciò viola la (3.4). Concludiamo che $\lambda \neq 0$.

Ripartiamo allora dalla (3.11); consideriamo inoltre la (3.6), al solito sommando e sottraendo il valore limite $u(1 - \exp(-i\lambda s))/(i\lambda)$ per avere

$$\eta_n(s) = \frac{1}{i\lambda}(1 - e^{-i\lambda s})u + \widetilde{\Gamma}_n(s) \ , \tag{3.14}$$

dove $\widetilde{\Gamma}_n \to 0$ in $L^2_\mu(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^N)$. Sostituiamo dunque nella (3.11), ottenendo:

$$i\lambda u + \frac{\kappa}{i\lambda} Au - \frac{\widehat{\mu}(\lambda)}{i\lambda} Au + \int_0^\infty \mu(s)\widetilde{\Gamma}_n(s)\, ds = \widetilde{a}_n \ , \tag{3.15}$$

dove

$$\widehat{\mu}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-i\lambda s}\mu(s)\, ds$$

è la trasformata di Fuorier sulla semiretta. Dei cinque termini in (3.15) gli ultimi due sono infinitesimi; in particolare il quarto, applicando Hölder, è maggiorato da $(\kappa\widetilde{I}_n)^{1/2}$, con

$$\widetilde{I}_n = \int_0^\infty \mu(s)||\widetilde{\Gamma}_n(s)||^2_{\mathbb{C}^N}\, ds \; .$$

Resta allora in $\mathbb{C}^N$ l'equazione

$$(-\lambda^2\mathbb{I} + \kappa A - \widehat{\mu}(\lambda)A)u = 0 \; . \tag{3.16}$$

Se fosse $u = 0$, dalla (3.14) dedurremmo che $\eta_n \to 0$ in $L^2_\mu(\mathbb{R}^+, \mathbb{C}^N)$, in contrasto con la (3.4). Allora u è autovettore per la matrice $-\lambda^2\mathbb{I} + \kappa A - \widehat{\mu}(\lambda)A$ corrispondente a un autovalore nullo. Gli autovalori di tale matrice sono (detto $\sigma(A)$ lo spettro di A)

$$\left\{-\lambda^2 + \kappa\alpha_i - \widehat{\mu}(\lambda)\alpha_i \; : \; \alpha_i \in \sigma(A)\right\} \; .$$

Gli autovalori di A sono reali, dunque la (3.16) è soddisfatta in corrispondenza di un autovalore α_j tale che

$$\widehat{\mu}(\lambda) = \frac{-\lambda^2 + \kappa\alpha_j}{\alpha_j} \; . \tag{3.17}$$

Se la (3.17) è soddisfatta, $\widehat{\mu}(\lambda)$ è reale, e allora

$$\Im(\widehat{\mu}(\lambda)) = -\int_0^\infty \sin(\lambda s)\mu(s)\, ds = 0 \; . \tag{3.18}$$

L'integrale è non negativo; infatti

$$\int_0^\infty \sin(\lambda s)\mu(s)\, ds = \sum_{k=0}^\infty \int_{2\pi k/\lambda}^{2\pi(k+1)/\lambda} \sin(\lambda s)\mu(s)\, ds \; ,$$

e ciascun termine è non negativo, essendo μ non crescente ed il seno positivo nel primo semiperiodo. Se non fosse nullo, si dovrebbe concludere che la (3.16) non ha soluzione, e da questo conseguirebbe che non è possibile trovare le tre successioni di (3.3) in modo da violare la (3.2), e si avrebbe la stabilità esponenziale del semigruppo $S(t)$. L'annullamento dell'integrale in (3.18) si ha se e solo se il nucleo è di passo ℓ con ℓ multiplo del periodo del seno, infatti i termini della serie precedente sono tutti nulli se e solo se sui corrispondenti intervalli μ è costante: μ deve essere una funzione a scala la cui successione dei salti è data da

$$s_n = \frac{2\pi}{|\lambda|}k_n \qquad k_n \in \mathbb{N} \; ,$$

ovvero il nucleo deve essere di passo $2\pi p/|\lambda|$ per qualche $p \in \mathbb{N}$; nella parte reale di $\widehat{\mu}(\lambda)$ compare il coseno anziché il seno, pertanto in queste condizioni anch'essa è nulla, e dalla (3.17) deduciamo che

$$|\lambda| = \sqrt{\kappa\alpha_j} \; .$$

Quindi il nucleo deve essere di passo ℓ con

$$\ell = \frac{2\pi p}{\sqrt{\kappa \alpha_j}} \ ,$$

ossia

$$\frac{\ell}{2\pi}\sqrt{\kappa \alpha_j} = p \ .$$

Abbiamo dunque la condizione di risonanza ottenuta nel capitolo precedente come condizione necessaria per il soddisfacimento della (3.16), dunque del sistema (3.5).
Esclusi i casi risonanti, nei quali non vi è nemmeno stabilità, concludiamo che $S(t)$ è esponenzialmente stabile. □

3.3 Il caso infinito dimensionale

La condizione (3.1) è sempre necessaria come è già stato sottolineato. In generale non è però sufficiente, poiché non è applicabile la dimostrazione del Teorema 3.4; infatti abbiamo che il dominio di A^r cambia con r (ricordiamo che in generale $H_r \hookrightarrow H_s$ se $r \geq s \geq 0$), e dunque un controllo sulla norma $\mathcal{M}$ non implica un controllo sulla norma $\mathcal{M}_1$.
In effetti portiamo ora un controesempio che dimostra come la condizione (3.1) non sia sufficiente per il decadimento esponenziale del semigruppo $S(t)$, anche qualora il nucleo non sia risonante. Consideriamo il seguente caso particolare del problema (1.2):

$$H = L^2(0,\pi) \ , \qquad A = -\frac{d^2}{dx^2} \ , \qquad H_2 = H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi) \ . \tag{3.19}$$

Gli autovalori di A sono $\alpha_n = n^2$, con autovettori $e_n(x) = \sin(nx)$.
È necessario un lemma preliminare (che ricalca [2, Lemma 6.2]).

Lemma 3.5. *Sia μ un nucleo a scala non risonante rispetto all'operatore introdotto in* (3.19). *Per ogni $m \in \mathbb{N}$, sia*

$$c_m = m\hat{\mu}\big(m\sqrt{\kappa}\big) \ .$$

Allora, $c_m \neq 0$ per ogni m, ed esiste una successione $\{m_j\} \subset \mathbb{N}$ tale che

$$\lim_{j\to\infty} c_{m_j} = 0 \ .$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$c_m = \frac{1}{i\sqrt{\kappa}} \sum_n \gamma_n \Big(e^{-is_{n-1}\, m\sqrt{\kappa}} - e^{-is_n m\sqrt{\kappa}} \Big) \ .$$

Tenendo conto del fatto che $\gamma_n \downarrow \gamma_\infty$,

$$c_m = \frac{1}{i\sqrt{\kappa}} \Big(\gamma_1 - \sum_n (\gamma_n - \gamma_{n+1}) e^{-is_n m\sqrt{\kappa}} - \gamma_\infty e^{-is_\infty m\sqrt{\kappa}} \Big) \ ,$$

dove l'ultimo termine al secondo membro si annulla se $\gamma_\infty = 0$.
Supponiamo ora che $c_m = 0$ per qualche $m \in \mathbb{N}$. Allora,

$$\gamma_1 = \sum_n (\gamma_n - \gamma_{n+1}) e^{-is_n m\sqrt{\kappa}} + \gamma_\infty e^{-is_\infty m\sqrt{\kappa}} \ .$$

D'altra parte è anche

$$\gamma_1 = \sum_n (\gamma_n - \gamma_{n+1}) + \gamma_\infty \ .$$

Poiché $\gamma_n - \gamma_{n+1} \geq 0$ and $\gamma_\infty \geq 0$, le ultime due espressioni sono uguali solo se i numeri $s_n m\sqrt{\kappa}$ e (eventualmente) $s_\infty m\sqrt{\kappa}$ sono tutti multipli interi 2π, ma ciò contraddice l'ipotesi secondo cui μ non è risonante.
Sfruttando tale espressione per γ_1, riscriviamo c_m in maniera più conveniente come

$$c_m = \frac{1}{i\sqrt{\kappa}} \left(\sum_n (\gamma_n - \gamma_{n+1}) \left(1 - e^{-is_n m\sqrt{\kappa}}\right) + \gamma_\infty \left(1 - e^{-is_\infty m\sqrt{\kappa}}\right) \right) .$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, e scegliamo $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ grande abbastanza affinché

$$\gamma_N - \gamma_\infty = \sum_{n \geq N} (\gamma_n - \gamma_{n+1}) \leq \frac{\sqrt{\kappa}}{4} \varepsilon \ .$$

Allora,

$$|c_m| \leq \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \left(\gamma_\infty \left| 1 - e^{-is_\infty m\sqrt{\kappa}} \right| + \sum_{n=1}^{N-1} (\gamma_n - \gamma_{n+1}) \left| e^{-is_n m\sqrt{\kappa}} - 1 \right| + \frac{\sqrt{\kappa}}{2} \varepsilon \right) \ .$$

Inoltre, grazie al Lemma B.9 (si veda l'Appendice B) è possibile trovare $m = m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $p_n = p_n(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$ e $p_\infty = p_\infty(\varepsilon) \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\left| s_n m\sqrt{\kappa} - 2p_n\pi \right| \leq \frac{\sqrt{\kappa}}{4\gamma_1} \varepsilon \ ,$$

per ogni $n = \infty, 1, \ldots, N-1$. Per questo particolare m,

$$\left| e^{-is_n m\sqrt{\kappa}} - 1 \right| = \left| e^{-i(s_n m\sqrt{\kappa} - 2p_n\pi)} - 1 \right| \leq \left| s_n m\sqrt{\kappa} - 2p_n\pi \right| \leq \frac{\sqrt{\kappa}}{4\gamma_1} \varepsilon \ ,$$

dove abbiamo usato la disuguaglianza elementare $|e^{i\vartheta} - 1| \leq |\vartheta|$, for $\vartheta \in \mathbb{R}$. Pertanto

$$|c_m| \leq \frac{\varepsilon\gamma_\infty}{4\gamma_1} + \frac{\varepsilon}{4\gamma_1} \sum_{n=1}^{N} (\gamma_n - \gamma_{n+1}) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \ ,$$

come desiderato. $\square$

Teorema 3.6. *Relativamente alla situazione* (3.19)*, se il nucleo μ è una funzione a scala, allora $S(t)$ non è esponenzialmente stabile.*

Dimostrazione. Ragionando come in [2], utilizziamo la condizione (3.2), che è necessaria e sufficiente per il decadimento esponenziale (si veda anche l'Appendice B). Nel corso di questa dimostrazione, i domini degli operatori e gli spazi $\mathcal{M}$, $\mathcal{H}$ vanno intesi come i rispettivi complessificati.
Se esistono delle successioni

$$\lambda_n \in \mathbb{R} \ , \qquad z_n = (u_n, \eta_n) \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$$

tali che per ogni n

$$\begin{cases} i\lambda_n u_n + \displaystyle\int_0^\infty \mu(s) A \eta_n(s)\, ds = a_n & \text{in } H \\ i\lambda_n \eta_n - u_n - T\eta_n = b_n & \text{in } \mathcal{M} \ , \end{cases} \tag{3.20}$$

allora

$$||(i\lambda_n \mathbb{I} - \mathbb{L}) z_n||_{\mathcal{H}}^2 = ||a_n||^2 + |||b_n|||^2 \ .$$

Se questo è vero per $||z_n||_{\mathcal{H}} \to \infty$ e con $||(a_n, b_n)||_{\mathcal{H}}$ limitata, allora si viola la (3.2). Dunque la procedura è simile a quella utilizzata nella dimostrazione del Teorema 3.4.
Poniamo

$$u_n = \rho_n e_n \qquad \eta_n = \phi_n(s) e_n \ ,$$

dove $\rho_n \in \mathbb{C}$, mentre $\phi_n \in L^2_\mu(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ (questa coppia è in $\mathcal{D}(\mathbb{L})$). Siano inoltre $b_n = \widetilde{b}_n e_n$ e $a_n \equiv 0$, dove $\widetilde{b}_n$ è una successione complessa.
Dalla seconda equazione in (3.20) otteniamo

$$\phi_n(s) = \frac{1}{i\lambda_n} (\widetilde{b}_n + \rho_n)(1 - e^{-i\lambda_n s}) e_n \ ,$$

e sostituendo nella prima equazione di (3.20) si ha, usando $Ae_n = n^2 e_n$,

$$i\lambda_n \rho_n e_n + \frac{1}{i\lambda_n} (\widetilde{b}_n + \rho_n) \kappa n^2 e_n - \frac{1}{i\lambda_n} (\widetilde{b}_n + \rho_n) \widehat{\mu}(\lambda_n) n^2 e_n = 0 \ ,$$

da cui

$$\rho_n = \frac{\widetilde{b}_n \widehat{\mu}(\lambda_n) n^2 - \widetilde{b}_n \kappa n^2}{\kappa n^2 - \lambda_n^2 - \widehat{\mu}(\lambda_n) n^2} \ .$$

Poniamo a questo punto $\lambda_n = n\sqrt{\kappa}$, e dunque

$$\rho_n = \frac{\widetilde{b}_n \widehat{\mu}(n\sqrt{\kappa}) n - \widetilde{b}_n \kappa n}{-\widehat{\mu}(\lambda_n) n} \ . \tag{3.21}$$

La scelta $\widetilde{b}_n = 1/n$ produce

$$||(a_n, b_n)||_{\mathcal{H}}^2 = |||b_n|||^2 = \int_0^\infty \mu(s) ||\frac{1}{n} A^{1/2} e_n||^2\, ds = \sqrt{\kappa} \qquad \forall n \ ,$$

garantendo quindi la limitatezza della successione (a_n, b_n) in $\mathcal{H}$; d'altra parte la (3.21) diventa

$$\rho_n = \frac{\kappa - \widehat{\mu}(n\sqrt{\kappa})}{n\widehat{\mu}(n\sqrt{\kappa})} \ . \tag{3.22}$$

Sfruttiamo ora il Lemma 3.5: se il nucleo non è risonante (caso in cui non si ha nemmeno stabilità), la successione $n\widehat{\mu}(n\sqrt{\kappa})$, ammette un estratta convergente a zero per $n \to \infty$. In corrispondenza di tale sottosuccessione, dalla (3.22) deduciamo che $|\rho_n| \to \infty$, ossia

$$||z_n||_{\mathcal{H}} \to \infty \ .$$

Pertanto la condizione (3.2) è violata. □

3.4 Il vincolo di piattezza

Di fronte alla non sufficienza della condizione (3.1), non rimane altro che cercare una nuova condizione sufficiente per il decadimento esponenziale del semigruppo $S(t)$.
Riportiamo alcune definizioni, tratte da [30]: sia $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^+$ un insieme misurabile, e introduciamo la seguente misura

$$m_\mu(\mathcal{P}) = \frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{P}} \mu(s)\, ds \ ;$$

definiamo l'insieme di piattezza di μ:

$$\mathcal{F}_\mu = \{ s \in \mathbb{R}^+ \ : \ \mu(s) > 0 \ , \ \mu'(s) = 0 \} \ ;$$

infine il rapporto di piattezza del nucleo di integrazione μ:

$$\mathcal{R}_\mu = m_\mu(\mathcal{F}_\mu) \ .$$

Raggiungeremo il risultato attraverso un vincolo sul rapporto di piattezza del nucleo; nel seguito, non sarà necessario assumere la compattezza dell'operatore A^{-1}, e sarà sufficiente la continuità dell'inclusione $H_1 \subset H$; con λ indicheremo la corrispondente costante di Poincaré:

$$\lambda ||v||^2 \leq ||v||_1^2 \qquad \forall v \in H_1 \ .$$

Enunciamo il risultato principale della sezione.

Teorema 3.7. *Assumiamo che sia valida la condizione* (3.1)*. Se $\beta = 0$, assumiamo anche $\mathcal{R}_\mu < 1/2$. Allora $S(t)$ è esponenzialmente stabile.*

Per giungere alla dimostrazione introduciamo alcuni strumenti preliminari. Il lemma seguente è una versione semplificata del famoso risultato di Datko [12].

Lemma 3.8. *Se esiste una costante $c \geq 0$ tale che*

$$\int_0^\infty ||S(t)z_0||^2_{\mathcal{H}}\, dt \leq c$$

per ogni z_0 sulla sfera unitaria di $\mathcal{H}$, allora $S(t)$ è esponenzialmente stabile.

Dimostrazione. Grazie all'uguaglianza (2.1), se $z_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$ e $||z_0||_{\mathcal{H}} = 1$ si ha

$$||S(\tau)z_0||^2_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\tau}\int_0^\tau ||S(t)z_0||^2_{\mathcal{H}}\, dt \leq \frac{c}{\tau} \qquad \forall \tau > 0\ ;$$

passando al limite per $\tau \to \infty$, e con la densità di $\mathcal{D}(\mathbb{L})$ in $\mathcal{H}$ otteniamo la tesi. □

Dati $z_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$ (si noti che in questo modo è anche $U(t) \in H_1$) e $\nu \in (0,1)$, introduciamo i seguenti funzionali, incominciando con la stessa energia del sistema (si tratta di opportune modifiche dei funzionali utilizzati in [7] e in [30]; si veda anche [17]):

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(t) &= ||S(t)z_0||^2_{\mathcal{H}}\ ,\\
\Phi(t) &= -\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi(s)\langle u(t), \eta^t(s)\rangle\, ds\ ,\\
\Psi_1(t) &= \frac{1}{2}\langle U(t), u(t)\rangle\ ,\\
\Psi_2(t) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty k(s)\|\eta^t(s) - U(t)\|^2_1\, ds\ ,\\
\Upsilon(t) &= \int_0^\infty k(s)||\eta^t(s)||^2_1\, ds\ ,
\end{aligned}$$

dove

$$\psi(s) = \mu(s_\nu)\chi_{(0,s_\nu]}(s) + \mu(s)\chi_{(s_\nu,\infty]}(s);,$$

con $s_\nu \geq 0$ fissato.
Definiamo $\mathcal{A} = \mathbb{R}^+ \backslash \mathcal{P}$, e inoltre

$$|||\eta^t|||^2_{\mathcal{P}} = \int_{\mathcal{P}} \mu(s)||\eta^t(s)||^2_1\, ds\ , \qquad |||\eta^t|||^2_{\mathcal{A}} = \int_{\mathcal{A}} \mu(s)||\eta^t(s)||^2_1\, ds\ .$$

Lemma 3.9. *Sia $\beta = 0$. Per ogni $\nu \in (0,1)$, esiste $c_\nu > 0$, dipendente soltanto da ν (eventualmente illimitata per $\nu \to 0$), tale che, per ogni insieme misurabile $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^+$,*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Phi(t) \leq{}& -(1-\nu)\|u(t)\|^2 + (1+\nu)m_\mu(\mathcal{P})|||\eta^t|||^2_{\mathcal{P}} + \frac{1+\nu}{\nu}|||\eta^t|||^2_{\mathcal{A}} \\
&- \frac{\mu(s_\nu)}{\kappa^2\lambda\nu}\Big(\int_0^\infty \mu'(s)\|\eta^t(s)\|^2_1 ds - J[\eta^t]\Big).
\end{aligned} \qquad (3.23)$$

Dimostrazione. Se $\lim_{s\to 0}\mu(s) < \infty$, Poniamo semplicemente $s_\nu = 0$. Altrimenti, scegliamo $s_\nu \in (0, s_1)$ (se μ non ha salti, $s_\nu \in \mathbb{R}^+$) tale che

$$\int_0^{s_\nu} \mu(s)ds \leq \frac{\kappa\nu}{2}. \tag{3.24}$$

La derivata in tempo di Φ è data da

$$\frac{d}{dt}\Phi = -\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi(s)\langle u(t), \dot\eta^t(s)\rangle\, ds - \frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi(s)\langle \dot u(t), \eta^t(s)\rangle\, ds\ . \tag{3.25}$$

Procediamo con la stima dei due termini al secondo membro della (3.25).

$\diamond$ Primo Termine. Dalla seconda equazione di (1.2), abbiamo

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi(s)\langle u(t), \dot\eta^t(s)\rangle\, ds \\ &= -\frac{1}{\kappa}\|u(t)\|^2\int_0^\infty \psi(s)ds - \frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi(s)\langle u(t), T\eta^t(s)\rangle\, ds\ . \end{aligned}$$

Poiché $\psi(s) \leq \mu(s)$ e vale l'uguaglianza per $s \geq s_\nu$, dalla (3.24) otteniamo

$$-\frac{1}{\kappa}\|u(t)\|^2\int_0^\infty \psi(s)ds \leq -\Big(1-\frac{\nu}{2}\Big)\|u(t)\|^2\ .$$

Integrando per parti rispetto a s, il termine di bordo che otteniamo è

$$\frac{1}{\kappa}\left[\langle u(t), \psi(s)\eta^t(s)\rangle\right]_0^\infty\ ;$$

esso si annulla poiché $\eta^t \in \mathcal{D}(T)$ e, argomentando come nel Teorema 1.5,

$$\lim_{s\to\infty}\mu(s)||\eta^t(s)|| = 0\ .$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi(s)\langle u(t), T\eta^t(s)\rangle\, ds &= \frac{1}{\kappa}\int_0^\infty -\psi'(s)\langle u(t), \eta^t(s)\rangle\, ds + \frac{1}{\kappa}\sum_n \mu_n\langle u(t), \eta^t(s_n)\rangle \\ &\leq \frac{1}{\kappa}\|u(t)\|\bigg(\int_0^\infty -\psi'(s)\|\eta^t(s)\|\, ds + \sum_n \mu_n\|\eta^t(s_n)\|\bigg)\ . \end{aligned}$$

Osserviamo che ψ è continua in s_ν, e

$$\psi'(s) = \chi_{(s_\nu,\infty)}(s)\mu'(s)\ .$$

Inoltre, poiché $s_\nu < s_1$ (se μ ha salti),

$$\sum_n \mu_n \leq \mu(s_\nu)\ .$$

Otteniamo la stima

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty -\psi'(s)\|\eta^t(s)\|\,ds + \sum_n \mu_n \|\eta^t(s_n)\| \\
&= \int_{s_\nu}^\infty -\mu'(s)\|\eta^t(s)\|\,ds + \sum_n \mu_n \|\eta^t(s_n)\| \\
&\le \left(\int_{s_\nu}^\infty -\mu'(s)\,ds \int_{s_\nu}^\infty -\mu'(s)\|\eta^t(s)\|^2\,ds\right)^{1/2} + \left(\sum_n \mu_n \sum_n \mu_n \|\eta^t(s_n)\|^2\right)^{1/2} \\
&\le \frac{\mu(s_\nu)^{1/2}}{\lambda^{1/2}}\left[\left(\int_0^\infty -\mu'(s)\|\eta^t(s)\|_1^2\,ds\right)^{1/2} + J[\eta^t]^{1/2}\right] \\
&\le \frac{\sqrt{2}\,\mu(s_\nu)^{1/2}}{\lambda^{1/2}}\left(\int_0^\infty -\mu'(s)\|\eta^t(s)\|_1^2\,ds + J[\eta^t]\right)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Dunque,

$$
-\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi(s)\langle u(t), T\eta^t(s)\rangle\,ds \le \frac{\nu}{2}\|u(t)\|^2 + \frac{\mu(s_\nu)}{\kappa^2\lambda\nu}\left(\int_0^\infty -\mu'(s)\|\eta^t(s)\|_1^2\,ds + J[\eta^t]\right).
$$

Riassumendo le disuguaglianze si ha

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi(s)\langle u(t), \dot\eta^t(s)\rangle\,ds \\
&\le -(1-\nu)\|u(t)\|^2 + \frac{\mu(s_\nu)}{\kappa^2\lambda\nu}\left(\int_0^\infty -\mu'(s)\|\eta^t(s)\|_1^2\,ds + J[\eta^t]\right).
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

$\diamond$ Secondo Termine. Dalla prima equazione di (1.2) si ha

$$
-\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi(s)\langle \dot u(t), \eta^t(s)\rangle\,ds = \frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi(s)\left(\int_0^\infty \mu(\zeta)\langle \eta^t(s), \eta^t(\zeta)\rangle_1\,d\zeta\right)ds\,.
$$

Per tale termine abbiamo il seguente controllo:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\kappa}\int_0^\infty \psi(s)\left(\int_0^\infty \mu(\zeta)\langle \eta^t(s), \eta^t(\zeta)\rangle_1\,d\zeta\right)ds \\
&\le \frac{1}{\kappa}\left(\int_{\mathcal{A}} \mu(s)\|\eta^t(s)\|_1\,ds + \int_{\mathcal{P}} \mu(s)\|\eta^t(s)\|_1\,ds\right)^2 \\
&\le \left(|||\eta^t|||_{\mathcal{A}} + m_\mu(\mathcal{P})^{1/2}|||\eta^t|||_{\mathcal{P}}\right)^2 \\
&\le \frac{1+\nu}{\nu}|||\eta^t|||_{\mathcal{A}}^2 + (1+\nu)m_\mu(\mathcal{P})|||\eta^t|||_{\mathcal{P}}^2\,.
\end{aligned}
$$

Sommando le stime per i due termini si ha la tesi. □

Lemma 3.10. *Il funzionale*

$$\Psi(t) = 2\Psi_1(t) + \Psi_2(t)$$

soddisfa

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) = -\frac{1}{2}|||\eta^t|||^2 + ||u(t)||^2$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Psi_1(t) &= \langle \dot{U}(t), u(t)\rangle + \langle U(t), \dot{u}(t)\rangle = ||u(t)||^2 - \left\langle A^{1/2}U(t), \int_0^\infty \mu(s) A^{1/2}\eta^t(s)\, ds \right\rangle \\
&= ||u(t)||^2 - \int_0^\infty \mu(s)\langle A^{1/2}U(t), A^{1/2}\eta^t(s)\rangle\, ds \\
&= ||u(t)||^2 - \int_0^\infty \mu(s)\langle U(t), \eta^t(s)\rangle_1\, ds\ .
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda Ψ_2 abbiamo invece

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}||\eta^t(s) - U(t)||_1^2 &= 2\langle \eta^t(s) - U(t), \dot{\eta}^t(s) - \dot{U}(t)\rangle_1 \\
&= -2\langle \eta^t(s) - U(t), (\eta^t)'(s)\rangle_1 \\
&= -2\frac{d}{ds}\langle \eta^t(s) - U(t), \eta^t(s)\rangle_1 + 2\langle (\eta^t)'(s), \eta^t(s)\rangle_1 \\
&= -2\frac{d}{ds}\langle \eta^t(s), \eta^t(s)\rangle_1 + 2\frac{d}{ds}\langle U(t), \eta^t(s)\rangle_1 + \frac{d}{ds}\langle \eta^t(s), \eta^t(s)\rangle_1 \\
&= 2\frac{d}{ds}\langle U(t), \eta^t(s)\rangle_1 - \frac{d}{ds}||\eta^t(s)||_1^2\ .
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Psi_2(t) = &\int_0^\infty k(s)\frac{d}{ds}\left(2\langle U(t), \eta^t(s)\rangle_1 - ||\eta^t(s)||_1^2\right)\, ds \\
=&\left[k(s)\left(2\langle U(t), \eta^t(s)\rangle_1 - ||\eta^t(s)||_1^2\right)\right]_0^\infty \\
&+ \int_0^\infty \mu(s)\left(2\langle U(t), \eta^t(s)\rangle_1 - ||\eta^t(s)||_1^2\right)\, ds \\
=&2\int_0^\infty \mu(s)\langle U(t), \eta^t(s)\rangle_1\, ds - |||\eta^t|||^2\ ,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato l'annullamento in H_1 di $\eta^t(0)$. Sommando le disuguaglianze ottenute per Ψ_1 e Ψ_2, segue la tesi. □

Evidenziamo ora il modo in cui utilizzeremo la condizione necessaria di decadimento esponenziale.

Lemma 3.11. *Sia valida la* (3.1). *Allora*

$$k(s) \leq \frac{C}{\delta}\mu(s) \ .$$

Dimostrazione. Partendo dalla definizione di $k(s)$,

$$k(s) = \int_s^\infty \mu(t)\, dt \leq \int_0^\infty \mu(t+s)\, dt \leq \int_0^\infty Ce^{-\delta t}\mu(s)\, dt = \frac{C}{\delta}\mu(s) \ .$$

□

Con il prossimo lemma forniamo una limitazione su $U(t)$.

Lemma 3.12. *Esiste* $K > 0$ *tale che, per ogni* $z_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{L})$,

$$||U(t)||^2 \leq K\left[\Psi_2(t) + |||\eta^t|||^2\right] \ .$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\int_0^\infty k(s)\, ds\right)||U(t)||^2 &\leq \int_0^\infty k(s)||U(t)||_1^2\, ds \\
&= \int_0^\infty k(s)||U(t) - \eta^t(s) + \eta^t(s)||_1^2\, ds \\
&\leq 2\int_0^\infty k(s)||\eta^t(s) - U(t)||_1^2\, ds + 2\int_0^\infty k(s)||\eta^t(s)||_1^2\, ds \\
&\leq 4\Psi_2(t) + 2\int_0^\infty \frac{C}{\delta}\mu(s)||\eta^t(s)||_1^2\, ds \\
&= 4\Psi_2(t) + \frac{2C}{\delta}|||\eta^t|||^2 \ ,
\end{aligned}$$

Ponendo

$$K = \lambda^{-1}\left(\int_0^\infty k(s)\, ds\right)^{-1} \max\left\{4, \frac{2C}{\delta}\right\}$$

si ha la tesi. □

Attraverso i funzionali si cercherà di costruire delle disuguaglianze per l'energia che possano portare al risultato di decadimento esponenziale per esempio tramite l'applicazione del Lemma 3.8. Per farlo, definiremo un nuovo funzionale $\mathcal{L}(t)$ in modo tale che, per qualche $\varepsilon > 0$, valga

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) + \varepsilon\mathcal{E}(t) \leq 0 \ . \tag{3.27}$$

Dimostrazione del Teorema 3.7 [caso $\boldsymbol{\beta = 0}$]

Definiamo

$$\mathcal{L}(t) = M\mathcal{E}(t) + \Phi(t) + a\Psi(t) \ ,$$

essendo a un paramentro positivo da determinarsi. Definiamo inoltre gli insiemi

$$\mathcal{P}_n = \{s \in \mathbb{R}^+ \ : \ n\mu'(s) + \mu(s) > 0\} \ , \qquad \mathcal{A}_n = \mathbb{R}^+ \backslash \mathcal{P}_n \ ;$$

notiamo che

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_3 \subset \dots \ , \qquad \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n = \mathbb{R}^+ \backslash \mathcal{F}_\mu \ ; \tag{3.28}$$

dunque

$$\lim_{n\to\infty} m_\mu(\mathcal{A}_n) = 1 - \mathcal{R}_\mu \ . \tag{3.29}$$

Grazie al Lemma 3.9 e al Lemma 3.10, abbiamo, per $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\Phi(t) + a\Psi(t)\right] \le (\nu - 1 + a)\,||u(t)||^2 + \left(\nu m_\mu(\mathcal{P}) + m_\mu\mathcal{P} - \frac{a}{2}\right)|||\eta^t|||^2_{\mathcal{P}} \\ + \left(\frac{1+\nu}{\nu} - \frac{a}{2}\right)|||\eta^t|||^2_{\mathcal{A}} - \frac{\mu(s_\nu)}{\kappa^2\lambda\nu}\left(\int_0^\infty \mu'(s)||\eta^t(s)||_1^2\,ds - J[\eta^t]\right) \ . \end{aligned}$$

Per giungere alla (3.27), è necessario che i primi due termini siano minori di zero, ossia

$$\begin{cases} \nu - 1 + a < 0 \\ \nu m_\mu(\mathcal{P}) + m_\mu(\mathcal{P}) - \dfrac{a}{2} < 0 \ . \end{cases}$$

Affinché le due equazioni siano verificate per qualche $\nu \in (0,1)$, deve essere

$$2m_\mu(\mathcal{P}) < a < 1 \ , \tag{3.30}$$

il che è possibile solo se

$$m_\mu(\mathcal{P}) < \frac{1}{2} \ . \tag{3.31}$$

Valga dunque la (3.31); scegliamo a come nella (3.30) e ν sufficientemente vicino a zero. Allora, con l'uguaglianza dell'energia, per qualche $\varepsilon > 0$ vale

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) + \varepsilon\mathcal{E}(t) \le \left(\varepsilon - \frac{a}{2} + \frac{1+\nu}{\nu}\right)|||\eta^t|||^2_{\mathcal{A}} \\ + \left(M - \frac{\mu(s_\nu)}{\kappa^2\lambda\nu}\right)\left(\int_0^\infty \mu'(s)||\eta^t(s)||_1^2\,ds - J[\eta^t]\right) \ . \end{aligned} \tag{3.32}$$

Dobbiamo garantire che la quantità a destra sia non positiva; procediamo nel modo seguente: fissiamo $\mathcal{A} = \mathcal{A}_n$ (e $\mathcal{P} = \mathbb{R}^+ \backslash \mathcal{A}$) per un n opportuno sufficientemente grande; in questo modo, per quasi ogni $s \in \mathcal{A}$ si ha

$$n\mu'(s) + \mu(s) \le 0 \ .$$

Ricordiamo però che questo insieme è contenuto nel complementare di $\mathcal{F}_\mu$ (grazie alla (3.28)). D'altra parte $\mathcal{A}$ è il complementare di $\mathcal{P}$, dunque dalla (3.31) la sua misura m_μ deve essere maggiore di 1/2. Chiaramente, poiché vale la (3.29), è possibile fissare n abbastanza grande in modo da avere $m_\mu(\mathcal{A}_n) > 1/2$ solo se $m_\mu(\mathbb{R}^+ \backslash \mathcal{F}_\mu) > 1/2$, ovvero solo se

$$\mathcal{R}_\mu < \frac{1}{2} \, .$$

Ecco dunque la comparsa del vincolo di piattezza sul nucleo di integrazione; con tale vincolo imposto e la suddetta scelta dell'insieme $\mathcal{A}$ abbiamo

$$\int_0^\infty \mu'(s)||\eta^t(s)||_1^2 \, ds - J[\eta^t] \leq \int_0^\infty \mu'(s)||\eta^t(s)||_1^2 \, ds \leq \int_{\mathcal{A}} \mu'(s)||\eta^t(s)||_1^2 \, ds \leq -\frac{1}{n}|||\eta^t|||_{\mathcal{A}}^2 \, .$$

Allora dalla (3.32) segue

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) + \varepsilon\mathcal{E}(t) \leq \left(\varepsilon - \frac{a}{2} + \frac{1+\nu}{\nu}\right) |||\eta^t|||_{\mathcal{A}}^2 - \frac{1}{n}\left(M - \frac{\mu(s_\nu)}{\kappa^2\lambda\nu}\right) |||\eta^t|||_{\mathcal{A}}^2 \, .$$

Fissato M con la richiesta

$$M \geq \frac{\mu(s_\nu)}{\kappa^2\lambda\nu} + n\left(\varepsilon - \frac{a}{2} + \frac{1+\nu}{\nu}\right) \; ,$$

si ottiene la (3.27).
A questo punto notiamo anche che

$$\begin{aligned} |\Phi(t)| &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}\kappa}||u(t)|| \int_0^\infty \mu(s)||\eta^t(s)||_1 \, ds \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}\kappa}||u(t)|| \; |||\eta^t||| \\ &\leq \frac{1}{2\lambda^2\kappa}||u(t)||^2 + \frac{1}{2}|||\eta^t|||^2 \\ &\leq \widetilde{K}\mathcal{E}(t) \qquad \forall t \geq 0 \, , \end{aligned}$$

dove $\widetilde{K}$ è una opportuna costante; inoltre, con il Lemma 3.11

$$\Psi_2(0) = \frac{1}{2}\int_0^\infty k(s)||\eta_0(s)||_1^2 \, ds \leq \frac{C}{2\delta}|||\eta_0|||^2 \leq \frac{C}{2\delta}\mathcal{E}(0) \, .$$

Di conseguenza possiamo scegliere M abbastanza grande in modo da avere

$$M\mathcal{E}(t) + \Phi(t) \geq 0 \, , \tag{3.33}$$

ed anche $Q > 0$ tale che

$$\mathcal{L}(0) \leq Q\mathcal{E}(0) \, .$$

Se ora $||z_0||_{\mathcal{H}} = 1$, integrando su $[0, \tau]$ la (3.27) si ha

$$\mathcal{L}(\tau) + \varepsilon \int_0^\tau \mathcal{E}(t)\, dt \leq Q\mathcal{E}(0) \ ,$$

e grazie alla (3.33)

$$a\Psi(\tau) + \varepsilon \int_0^\tau \mathcal{E}(t)\, dt \quad \leq \quad Q\mathcal{E}(0) \ ,$$

dunque, essendo $\mathcal{E}(0) \leq 1$,

$$a\Psi_2(\tau) + \varepsilon \int_0^\tau \mathcal{E}(t)\, dt \leq Q\mathcal{E}(0) - a\langle U(\tau), u(\tau)\rangle \leq Q + a||U(\tau)|| \ . \tag{3.34}$$

In virtù del Lemma 3.12

$$a||U(\tau)|| \leq \frac{aK}{4} + \frac{a}{K}||U(\tau)||^2 \leq 1 + \frac{K}{4} + a\Psi_2(\tau) \ ,$$

e in questo modo la (3.34) si riscrive come

$$\varepsilon \int_0^\tau \mathcal{E}(t)\, dt \leq Q + 1 + \frac{K}{4} \ .$$

Per l'arbitrarietà di τ, con il Lemma 3.8 si ottiene il decadimento esponenziale. □

Dimostrazione del Teorema 3.7 [caso $\boldsymbol{\beta > 0}$]

La dimostrazione è notevolmente semplificata rispetto alla precedente. Consideriamo il funzionale $\Upsilon(t)$; esso soddisfa, grazie al Lemma 3.11

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Upsilon(t) &= 2\int_0^\infty k(s)\langle \dot{\eta}^t(s), \eta^t(s)\rangle_1\, ds \\
&= 2\int_0^\infty k(s)\langle T\eta^t(s) + u(t), \eta^t(s)\rangle_1\, ds \\
&= 2\int_0^\infty k(s)\langle u(t), \eta^t(s)\rangle_1\, ds - \int_0^\infty k(s)\frac{d}{ds}||\eta^t(s)||_1^2\, ds \\
&= 2\int_0^\infty k(s)\langle u(t), \eta^t(s)\rangle_1\, ds - \left[k(s)||\eta^t(s)||_1^2\right]_0^\infty - \int_0^\infty \mu(s)||\eta^t(s)||_1^2\, ds \\
&= -|||\eta^t|||^2 + 2\int_0^\infty k(s)\langle u(t), \eta^t(s)\rangle_1\, ds \\
&\leq -|||\eta^t|||^2 + \frac{2C}{\delta}||u(t)||_1 \int_0^\infty \mu(s)||\eta^t(s)||_1\, ds \\
&\leq -|||\eta^t|||^2 + \frac{2C^2\kappa}{\delta^2}||u(t)||_1^2 + \frac{1}{2}|||\eta^t|||^2 \\
&= -\frac{1}{2}|||\eta^t|||^2 + \widetilde{c}||u(t)||_1^2 \ ,
\end{aligned}$$

con $\widetilde{c} > 0$ costante fissata. Inoltre, $\Upsilon(t)$ controlla ed è controllato dall'energia; infatti, ancora con il Lemma 3.11

$$|\Upsilon(t)| \leq \frac{C}{\delta} \int_0^\infty \mu(s) ||\eta^t(s)||_1^2 \, ds \leq \frac{C}{\delta} \mathcal{E}(t) \ . \tag{3.35}$$

Introduciamo il nuovo funzionale

$$\widetilde{\mathcal{L}}(t) = M\mathcal{E}(t) + \Upsilon(t) \ ;$$

si ha, usando l'uguaglianza dell'energia che in questo caso contiene anche il termine in $||u(t)||_1^2$,

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\mathcal{L}}(t) \leq M \left(\int_0^\infty \mu'(s) ||\eta^t(s)||_1^2 \, ds - J[\eta^t] \right) - 2M\beta ||u(t)||_1^2 - \frac{1}{2} |||\eta^t|||^2 + \widetilde{c} ||u(t)||_1^2 \ ,$$

pertanto, scelto M sufficientemente grande, ε sufficientemente piccolo, con la disuguaglianza di Poincaré otteniamo

$$\frac{d}{dt}\widetilde{\mathcal{L}}(t) + \varepsilon \mathcal{E}(t) \leq 0 \ ,$$

e la tesi segue utilizzando il lemma di Gronwall. $\square$

Appendice A

Il modello fisico

In questa appendice accenniamo ad alcune applicazioni del modello astratto introdotto nel primo capitolo, in particolare facendo riferimento a fenomeni fisici che possono essere modellati attraverso alcune sue particolari versioni.
Come abbiamo già avuto modo di notare, di particolare importanza è il caso in cui nel problema (1.1) si scelga come operatore autoaggiunto il laplaciano (con segno negativo) con condizioni di Dirichlet omogenee sul bordo di un opportuno dominio Ω di $\mathbb{R}^n$ (nei casi concreti $n = 1, 2, 3$). In queste condizioni abbiamo $\mathcal{D}(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, con la tripletta hilbertiana $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$. In particolare $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H_0^1(\Omega)$.
L'equazione di riferimento sarà dunque la seguente:

$$\partial_t u - \beta \Delta u - \int_0^\infty k(s) \Delta u(t-s) ds = 0 \qquad \beta \geq 0 \, . \tag{A.1}$$

Nel corso del lavoro si è resa ripetutamente necessaria una distinzione tra i due casi $\beta = 0$ e $\beta > 0$; vedremo ora come anche dal punto di vista fisico nei due casi si presenti un diverso significato.
I contesti nei quali analizzeremo l'emergere di un modello come (A.1) sono sostanzialmente due: la conduzione del calore e la viscoelasticità lineare.

Conduzione del calore. Il punto di partenza è l'equazione di bilancio energetico per un mezzo continuo (ovvero il primo principio della termodinamica), valido per una generica regione di spazio occupata dal mezzo stesso:

$$\frac{d}{dt}(T + E) = P + Q \, , \tag{A.2}$$

dove T ed E denotano l'energia cinetica ed interna, P e Q la potenza meccanica e calorica. Scritta per esteso, l'equazione (A.2) diventa:

$$\frac{d}{dt} \int_{S_t} \rho \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{v}^2 + e \right) d\Omega = \int_{S_t} \rho \, \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} \, d\Omega + \int_{\partial S_t} (\boldsymbol{T}\boldsymbol{n}) \boldsymbol{v} \, d\sigma + \int_{S_t} \rho r \, d\Omega - \int_{\partial S_t} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma \, ;$$

S_t rappresenta la regione spaziale che al tempo t è occupata dalla generica regione materiale $\mathcal{S}$ del mezzo, e $\boldsymbol{n}$ è la sua normale esterna, mentre abbiamo introdotto le quantità:

- ρ: densità di massa,
- $\boldsymbol{v}$: velocità,
- e: energia interna specifica,
- $\boldsymbol{f}$: forza di volume specifica,
- $\boldsymbol{T}$: tensore degli sforzi di Cauchy,
- r: termine di produzione di calore (sorgente di calore),
- $\boldsymbol{q}$: flusso di calore;

è sottointeso l'utilizzo dei teoremi di Cauchy per gli sforzi interni e per il flusso di calore. Ricorriamo anche al teorema dell'energia cinetica (o teorema delle forze vive):

$$\frac{dT}{dt} = P + W \ , \tag{A.3}$$

dove

$$W(S_t) = \int_{S_t} w \, d\Omega$$

è la potenza delle forze interne; inoltre, se $\boldsymbol{D}$ è il tensore velocità di deformazione, la potenza specifica delle forze interne ha la seguente espressione:

$$w = -\mathrm{tr}(\boldsymbol{TD}) \ .$$

Inserendo la (A.3) nella (A.2) si ottiene l'equazione di bilancio dell'energia interna:

$$\frac{dE}{dt} = Q - W \ ;$$

per esteso:

$$\frac{d}{dt}\int_{S_t} \rho e \, d\Omega = -\int_{\partial S_t} \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} \, d\Omega + \int_{S_t} \rho r \, d\Omega + \int_{S_t} \mathrm{tr}(\boldsymbol{TD}) \, d\Omega$$

Ora utilizziamo il teorema della divergenza per l'integrale di bordo e il teorema del trasporto di Reynolds per il primo termine; sfruttiamo anche l'equazione di continuità

$$\partial_t \rho + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 \ ;$$

per l'arbitrarietà della regione d'integrazione, otteniamo la forma indefinita dell'equazione di conservazione dell'energia interna:

$$\rho\frac{de}{dt} = -\nabla\cdot\boldsymbol{q} + \rho r - w \ . \tag{A.4}$$

Supponendo che le deformazioni siano trascurabili, come accade nei corpi rigidi, poniamo $w = 0$; poniamo anche ρ costante uguale a 1. Utilizziamo i seguenti modelli per l'energia interna e per il flusso di calore :

$$e = e_0 + c_v\vartheta \quad \text{(legge di Dulong e Petit)} \; , \tag{A.5}$$

$$\boldsymbol{q} = -k\nabla\vartheta \qquad \text{(legge di Fourier)} \; , \tag{A.6}$$

dove ϑ rappresenta la temperatura assoluta, c_v il calore specifico per unità di massa a volume costante, k la conducibilità termica. Allora la (A.4) diviene:

$$\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{k}{\rho c_v}\Delta\vartheta = \frac{r}{c_v} \; . \tag{A.7}$$

Nella formulazione lagrangiana la derivata totale d/dt coincide con la derivata parziale ∂_t rispetto al tempo, pertanto la classica equazione del calore ottenuta in (A.7) è la stessa equazione (A.1) nel caso in cui si abbia $k \equiv 0$, a meno della non omogeneità.
Per capire in quali contesti essa sia appicabile è necessario analizzare gli ambiti di validità delle rappresentazioni date da (A.5) e (A.6). In particolare, assumere una dipendenza lineare dell'energia interna specifica dalla temperatura è sensato solo per certi valori di quest'ultima. In generale il calore specifico presenta dipendenza dalla temperatura; al di sopra di una certa soglia, la temperatura di Debye, si può assumere che il calore specifico sia costante (la temperatura di Debye ϑ_D dipende dal mezzo considerato, in particolare dalla velocità del suono in esso). Se per i gas perfetti la temperatura di Debye non raggiunge i 100 Kelvin, nel caso di altri elementi essa è in genere più alta, in particolare per i metalli (per esempio per il cromo si ha $\vartheta_D = 630K$).
Il calore specifico C_v si ottiene come la derivata dell'energia interna rispetto alla temperatura; nella teoria di Debye, l'energia interna in un solido (occupante un volume V) è data da

$$E = \frac{9Nk_B\vartheta^4}{\vartheta_D^3}\int_0^{\vartheta_D/\vartheta} \frac{x^3}{e^x - 1}\, dx \; ;$$

dove N è il numero di atomi nel volume V, k_B è la costante di Boltzmann, ϑ_D è la temperatura di Debye. Questa espressione è ottenuta considerando dal punto di vista quantistico i modi di vibrazione degli atomi nel reticolo del solido: le energie associate ai modi sono quantizzate, analogamente al caso dell'oscillatore armonico, e i quanti di energia corrispondenti al passaggio tra due livelli energetici sono detti "fononi".
Derivando l'espressione rispetto alla temperatura si ha:

$$C_v = 9Nk_B\left(\frac{\vartheta}{\vartheta_D}\right)^3\int_0^{\vartheta_D/\vartheta} \frac{x^4e^x}{(e^x - 1)^2}\, dx \; .$$

Nel caso di alte temperature ($\vartheta \gg \vartheta_D$), le approssimazioni asintotiche mostrano che

$$C_v = 3Nk_B \; , \tag{A.8}$$

mentre se $\vartheta \ll \vartheta_D$ si ha

$$C_v = \frac{12\pi^4 N k_B}{5\vartheta_D^3}\,\vartheta^3 .$$

Nel caso della (A.8), che è la classica legge di Dulong-Petit per i solidi, abbiamo effettivamente l'indipendenza del calore specifico dalla temperatura; la relazione (A.5) è significativa soltanto al di sopra della temperatura di Debye, mentre alle basse temperature si dovrebbe avere una dipendenza quartica dell'energia interna dalla temperatura.
Alle basse temperature si potrebbe anche considerare il contributo degli elettroni al calore specifico, il quale fornirebbe un andamento quadratico dell'energia interna con la temperatura, secondo il modello di Einstein-Debye:

$$C_v = \frac{\pi^2 N k^2}{2E_F}\,\vartheta + \frac{12\pi^4 N k}{5\vartheta_D^3}\,\vartheta^3 ,$$

dove E_F denota il livello energetico di Fermi. Supponiamo ora di trovarci al di sopra della temperatura di Debye, e riprendiamo le espressioni (A.5) e (A.6), per considerarne delle generalizzazioni, ovvero i modelli con memoria termica:

$$e = e_0 + c_0\vartheta + \int_0^\infty c(s)\vartheta(t-s)\,ds , \tag{A.9}$$

$$\boldsymbol{q} = -k_0\nabla\vartheta - \int_0^\infty k(s)\nabla\vartheta(t-s)\,ds . \tag{A.10}$$

Modelli di questo tipo sono stati proposti da Coleman e Gurtin [4] nel caso $k_0 > 0$ e da Gurtin e Pipkin [22] nel caso $k_0 = 0$. Si veda anche [14, 20, 27, 29]. I modelli a memoria termica hanno trovato riscontro, in particolare, nella descrizione del comportamento termico dei liquidi ad alta viscosità, come il glicerolo liquido, a temperature di poco superiori alla "temperatura di transizione vetrosa", la quale si trova al di sopra della temperatura di Debye (vedi [24]). Il modello corrispondente a $k_0 = 0$ e $c \equiv 0$, che conduce alla (A.1) con $\beta = 0$, è stato studiato in relazione al fenomeno del secondo suono nei metalli, in quanto ammette onde con velocità di propagazione finita. Nel caso particolare di un nucleo di memoria k esponenziale, esso si riduce al modello di Maxwell-Cattaneo [1]

$$\alpha\partial_t\boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} - k_0\nabla\vartheta = \boldsymbol{0} ,$$

che è stato ripreso e generalizzato in forma non lineare negli anni Ottanta (si vedano [3, 5, 6, 28, 38]). Il fenomeno del secondo suono, tuttavia, si verifica a temperature molto basse e la forma (A.9) dell'energia interna non sembra quella corretta in base alla teoria di Debye.

Viscoelasticità lineare. Sappiamo che nel caso dell'elasticità lineare il legame tra sforzo $\boldsymbol{T}$ e deformazione $\boldsymbol{E}$ è espresso mediante un tensore del quarto ordine $\mathbb{C}$, detto tensore di elasticità: $\boldsymbol{T} = \mathbb{C}\boldsymbol{E}$. Nel caso viscoelastico possiamo invece assumere per il tensore degli sforzi una forma come la seguente:

$$\boldsymbol{T}(t) = \mathbb{G}_0\boldsymbol{E}(t) + \int_0^\infty \mathbb{G}'(s)\boldsymbol{E}(t-s)\,ds\ . \tag{A.11}$$

È possibile definire anche in questo caso un tensore di elasticità. Se consideriamo un processo ciclico, cioè poniamo $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}e^{i\omega t}$, e poniamo anche $\mathbb{G}' \equiv 0$ se $t < 0$, abbiamo:

$$\boldsymbol{T}(t) = \mathbb{G}_0\boldsymbol{E}\,e^{i\omega t} + \left(\int_{-\infty}^\infty \mathbb{G}'(s)e^{i\omega(t-s)}\,ds\right)\boldsymbol{E}\ ,$$

e dunque

$$\boldsymbol{T}(t) = \left(\mathbb{G}_0 + \int_{-\infty}^\infty \mathbb{G}'(s)e^{-i\omega s}\,ds\right)\boldsymbol{E}\,e^{i\omega t}\ .$$

Pertanto abbiamo

$$\boldsymbol{T}(t) = \mathbb{C}(\omega)\boldsymbol{E}(t)\ ,$$

dove $\mathbb{C}(\omega)$ è il tensore di elasticità complesso, che dipende dalla frequenza del processo ciclico. La dipendenza dei coefficienti di elasticità dalla frequenza è rivelatrice della natura viscoelastica del materiale.

Notiamo per inciso che, analogamente ai modelli (A.9) e (A.10), gli effetti di memoria termica sono rivelati eseguendo dei processi ciclici, sia nella temperatura, sia nel suo gradiente, e osservando la presenza anche in questo caso di fattori $c(\omega)$ e $k(\omega)$, che assumono il significato di calore specifico e conducibilità termica (dipendenti in questo caso dalla frequenza).

Concentriamoci ora sull'ambito dei mezzi viscoelastici; abbiamo già avuto modo di incontrare un legame costitutivo con memoria tramite la (A.11). Una delle vie più classiche per introdurre la viscoelasticità lineare è l'analogia con i modelli reologici, grazie alla quale è possibile individuare una dipendenza dello sforzo non soltanto dalla deformazione nel medesimo istante, ma anche da quella presente negli istanti di tempo precedenti (ovvero dalla "storia" della deformazione); in particolare, tale dipendenza si esprime mediante un termine convolutivo con un nucleo che decade esponenzialmente.

Generalizzazioni di questo punto di vista e teorie rigorose della viscoelasticità lineare (in forma scalare) sono dovute a Boltzmann e Volterra. Boltzmann considera una storia di deformazione (scalare) $\varepsilon(t)$ continua a tratti su un intervallo di tempo che va da t_0 fino all'istante corrente t; approssimando tale storia con una funzione a scala $\overline{\varepsilon}(t)$ su una partizione uniforme di $[t_0, t]$; nel modello di Boltzmann lo sforzo (scalare) σ all'istante t è dato dalla somma degli incrementi ottenuti nei vari intervalli di tempo nei quali la deformazione assumeva valore costante:

$$\sigma(t) = \sigma(0) + \sum_{i=1}^n \triangle\sigma_i\ ;$$

d'altra parte tali variazioni di sforzo sono proporzionali alla variazione $\triangle\varepsilon_i$ tramite una funzione peso $g(t, t_i)$, dunque

$$\sigma(t) = g(t, t_0)\varepsilon_0 + \sum_{i=1}^{n} g(t, t_i)\triangle\varepsilon_i \ ,$$

e passando al limite otteniamo

$$\sigma(t) = g(t, t)\varepsilon(t) - \int_{t_0}^{t} \partial_s g(t, s)\varepsilon(s)\, ds$$

La funzione g è detta funzione di memoria, e grazie alle teorie di Volterra essa si esprime in termini della sola differenza dei tempi corrente e passato: $g(t, s) = g(t - s)$, e

$$\sigma(t) = g(0)\varepsilon(t) + \int_{t_0}^{t} g'(t - s)\varepsilon(s)\, ds$$

Nel caso vettoriale, seguendo lo schema presentato in [16], il legame costitutivo della viscoelasticità lineare si ottiene nel seguente modo. Anzitutto abbiamo l'ipotesi di piccole deformazioni e si utilizza il tensore simmetrico di deformazione infinitesima ($\boldsymbol{u}$ è il campo di spostamento):

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

è indifferente in questo caso considerare la dipendenza dalla coordinata x nella configurazione attuale piuttosto che dalla coordinata della configurazione di riferimento. Si introduce, rispetto ad un'opportuna funzione reale positiva $k \in L^1(\mathbb{R}^+)$, decadente all'infinito, lo spazio delle "memorie evanescenti":

$$\mathcal{F} = \left\{ \boldsymbol{E}^t : \int_0^{\infty} |\boldsymbol{E}^t(s)|^2 k(s)\, ds < \infty \right\} ,$$

dove $\boldsymbol{E}^t$ indica la storia di $\boldsymbol{E}$, ossia $\boldsymbol{E}^t(s) = \boldsymbol{E}(t - s)$, mentre $|\cdot|$ indica la norma nello spazio dei tensori, corrispondente al prodotto scalare indicato con il punto. $\mathcal{F}$ è uno spazio di Hilbert con il prodotto interno

$$\langle \boldsymbol{E}_1^{t_1}, \boldsymbol{E}_2^{t_2} \rangle_{\mathcal{F}} = \boldsymbol{E}_1(t_1) \cdot \boldsymbol{E}_2(t_2) + \int_0^{\infty} \boldsymbol{E}_1^{t_1}(s) \cdot \boldsymbol{E}_2^{t_2}(s) k(s)\, ds \ .$$

Lo sforzo è visto come un funzionale lineare e continuo su $\mathcal{F}$ (a valori nello spazio dei tensori del secondo ordine), e grazie al teorema di rappresentazione di Riesz si esprime esattamente come nella (A.11), tramite un tensore $\mathbb{G}$ del quarto ordine. In particolare

$$|\mathbb{G}(0)| < \infty \ , \qquad |\mathbb{G}'|^2 k^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^+) \ , \qquad \mathbb{G}' \in L^1(\mathbb{R}^+) \ .$$

Il tensore $\mathbb{G}_0 = \mathbb{G}(0)$ è detto modulo elastico istantaneo, mentre si suppone esista il limite

$$\mathbb{G}_\infty = \lim_{s\to\infty} \mathbb{G}(s) ,$$

che è detto modulo elastico d'equilibrio (tensore di rilassamento).
In un solido una deformazione costante induce uno sforzo non nullo, perciò $\mathbb{G}_\infty > 0$; nel caso dei fluidi invece $\mathbb{G}_\infty = 0$.
Le leggi della termodinamica impongono delle restrizioni su $\mathbb{G}$; in particolare, considerando una variazione ciclica del tensore di deformazione,

$$\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_1 \cos\omega t + \boldsymbol{E}_2 \sin\omega t ,$$

si può dimostrare che la seconda legge è soddisfatta solo se, per ogni coppia di tensori simmetrici $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ e per ogni $\omega > 0$, si ha (indicando con l'apice ^{T} il trasposto)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_1 \cdot [\mathbb{G}_0^T - \mathbb{G}_0]\boldsymbol{E}_2 - \int_0^\infty [\boldsymbol{E}_1 \cdot \mathbb{G}'(s)\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathbb{G}'(s)\boldsymbol{E}_2] \sin\omega s \, ds \\ - \int_0^\infty \boldsymbol{E}_1 \cdot [\mathbb{G}'(s) - \mathbb{G}'^T(s)]\boldsymbol{E}_2 \cos\omega s \, ds \geq 0 .\end{aligned} \tag{A.12}$$

I casi $\omega \to 0$ e $\omega \to \infty$ implicano la simmetria di $\mathbb{G}_0$ e $\mathbb{G}_\infty$. Dalla (A.12) si può inoltre dimostrare che $\mathbb{G}_0 - \mathbb{G}(s) > 0$ e $\mathbb{G}'(0) \leq 0$.
Grazie alla relazione costitutiva (e supponendo $\rho = 1$), con l'equazione del moto siamo in grado di scrivere il seguente problema di Cauchy per la viscoelasticità lineare ($\boldsymbol{f}$ indica una generica forzante)

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \nabla \cdot \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},t) & \boldsymbol{x} \in \Omega , t > 0 \\ \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x},t) = \mathbb{G}_0(\boldsymbol{x})\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) + \displaystyle\int_0^\infty \mathbb{G}'(\boldsymbol{x},s)\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t-s)\, ds & \boldsymbol{x} \in \Omega , t > 0 \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = 0 & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega , t \geq 0 \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{x},t) & \boldsymbol{x} \in \Omega , t \leq 0 . \end{cases} \tag{A.13}$$

In generale anche il tensore $\mathbb{G}$ può dipendere da $\boldsymbol{x}$. Nel caso non sia presente questa dipendenza, e il problema sia riducibile ad uno monodimensionale (si tratta del caso omogeneo ed isotropo), abbiamo l'equazione

$$\partial_t u - G_0 \Delta u - \int_0^\infty G'(s)\Delta u(t-s)\, ds = f , \tag{A.14}$$

dove questa volta il tensore $\mathbb{G}$ è sostituito dallo scalare G, ed f è una forzante scalare a sua volta. Le proprietà asintotiche di questa equazione sono analizzate in molti dei lavori citati in bibliografia, spesso anche con un ulteriore termine proporzionale a $\partial_t u$, che discende dalla presenza di un termine di smorzamento nell'equazione del moto (e fornisce un contributo alla dissipazione): in particolare

$$\partial_t u + \gamma \partial_t u + \nabla \cdot \boldsymbol{T} = f \qquad \gamma > 0 ,$$

è l'equazione del moto (scalare) corrispondente. Il termine di smorzamento rappresenta l'azione di resistenza del mezzo in cui cui avvengono le vibrazioni del corpo viscoelastico. Si noti che in questa equazione, come in (A.13), non compare il termine convettivo $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$, ovvero la derivata totale rispetto al tempo è sostituita dalla derivata parziale poiché utilizziamo la descrizione lagrangiana. L'approssimazione lineare ci permette di utilizzare il tensore degli sforzi di Cauchy al posto di quello di Piola-Kirchhoff.
Ritornando al legame costitutivo, possiamo riscrivere il tensore degli sforzi come

$$\boldsymbol{T}(t) = \mathbb{G}_\infty \boldsymbol{E}(t) - \int_0^\infty \mathbb{G}'(s)\left(\boldsymbol{E}(t) - \boldsymbol{E}(t-s)\right)\, ds \ , \tag{A.15}$$

e ricordiamo che

$$\mathbb{G}_\infty = \mathbb{G}(\infty) = \mathbb{G}_0 + \int_0^\infty \mathbb{G}'(s) ds$$

nel caso dei solidi $\mathbb{G}_\infty$ è definito positivo, mentre nel caso dei fluidi $\mathbb{G}_\infty = 0$. Limitiamoci al caso omogeneo e isotropo: il tensore $\mathbb{G}(t)$ è sostituito dalla funzione $G(t)$, mentre per il tensore $\boldsymbol{E}$ rimane semplicemente ∇u. Utilizziamo l'equazione del moto senza smorzamento

$$\partial_t u - \nabla \cdot \boldsymbol{T} = f \ ;$$

si ottiene dunque la (A.14), che possiamo riscrivere in forma analoga alla (A.15):

$$\partial_t u - G_\infty \Delta u - \int_0^\infty G'(s) \Delta[u(t) - u(t-s)]\, ds = f \ ;$$

integrando per parti:

$$u_{tt} - G_\infty \Delta u - [G(s)\Delta(u(t) - u(t-s))]_0^\infty + \int_0^\infty G(s)\, \partial_s[\Delta(u(t) - u(t-s))]\, ds = f \ ,$$

dunque

$$u_{tt} - G_\infty \Delta u - [G(s)\Delta(u(t) - u(t-s))]_0^\infty - \int_0^\infty G(s) \Delta u_t(t-s)\, ds = f \ .$$

A questo punto ci restringiamo al caso dei fluidi, e dunque abbiamo $G_\infty = 0$; possiamo allora riscrivere l'equazione in termini della velocità $v = u_t$ (ricordando che siamo in descrizione lagrangiana):

$$\partial_t v - \int_0^\infty g(s) \Delta v(t-s)\, ds = f \ . \tag{A.16}$$

Per $f = 0$, la (A.16) è l'equazione (A.1) nel caso $\beta = 0$. Dunque nel caso $\beta = 0$ la (A.1) è adatta alla descrizione lagrangiana dei piccoli moti nei fluidi viscoelastici.
La (A.16), con le opportune condizioni, è una versione del seguente problema di Cauchy

(nel quale è però presente anche il vincolo $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$) per i fluidi viscoelastici (si veda [16, 35, 36, 37]): dato il dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, trovare $\boldsymbol{v}$, Π tali che

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = 0 & \boldsymbol{x} \in \Omega \, , t > 0 \\ \boldsymbol{v}_t(\boldsymbol{x}, t) = -\nabla \Pi(\boldsymbol{x}, t) + \displaystyle\int_0^\infty \mu(s) \Delta \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t-s) \, ds + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) & \boldsymbol{x} \in \Omega \, , t > 0 \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = 0 & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \, , t \geq 0 \\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{v}_0(\boldsymbol{x}, t) & \boldsymbol{x} \in \Omega \, , t \leq 0 \, ; \end{cases}$$

In questo caso il nucleo di integrazione μ rappresenta la viscosità di taglio e Π è il campo di pressione.

Appendice B

Strumenti matematici

B.1 Semigruppi di contrazioni

Riportiamo alcuni dei risultati della teoria dei semigruppi sui quali poggia l'analisi svolta. Nel seguito, sia X uno spazio di Hilbert reale. Una famiglia a un parametro di operatori lineari limitati $G(t) : X \to X$, $t \geq 0$, si dice semigruppo (lineare) fortemente continuo su X se

(i) $G(0) = \mathbb{I}$;

(ii) $G(t+\tau) = G(t)G(\tau)$ per ogni $t, \tau \geq 0$;

(iii) $\lim_{t\downarrow 0} G(t)x = x$, per ogni $x \in X$.

Il generatore infinitesimale di $G(t)$ è l'operatore lineare Λ definito da

$$\mathcal{D}(\Lambda) = \left\{ x \in X \ : \ \exists \lim_{t\downarrow 0} \frac{G(t)x - x}{t} \right\} ,$$

$$\Lambda x = \lim_{t\downarrow 0} \frac{G(t)x - x}{t} , \qquad x \in \mathcal{D}(\Lambda) .$$

Infine $G(t)$ si dice semigruppo di contrazioni se

$$||G(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq 1 \qquad \forall t \geq 0 .$$

Per quanto riguarda il problema della generazione di semigruppi di contrazioni abbiamo il seguente teorema (si veda [32]).

Teorema B.1 (Lumer-Phillips). *Sia Λ un operatore lineare dissipativo su X (ovvero $\langle \Lambda x, x\rangle_X \leq 0$ per ogni $x \in \mathcal{D}(\Lambda)$) con dominio $\mathcal{D}(\Lambda)$ denso in X. Se* $\mathrm{Range}(\mathbb{I} - \Lambda) = X$*, allora Λ è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo di contrazioni su X.*

D'ora innanzi $G(t)$ indicherà un semigruppo fortemente continuo di contrazioni su X. Per il decadimento esponenziale, abbiamo la seguente condizione necessaria e sufficiente (si veda [8, 19, 33]).

Teorema B.2. *G(t) è esponenzialmente stabile se e solo se, per qualche $\varepsilon > 0$, vale*

$$\inf_{\lambda\in\mathbb{R}} \|(i\lambda\mathbb{I} - \Lambda)z\|_X \geq \varepsilon\|z\|_X \qquad \forall z \in \mathcal{D}(\Lambda) \ ,$$

essendo Λ il suo generatore infinitesimale. Lo spazio X e gli operatori che su di esso agiscono vanno intesi come i rispettivi complessificati.

Infine abbiamo un risultato di stabilità.

Lemma B.3. *Sia Y uno spazio di Banach riflessivo immerso con continuità e densità in X. Per ogni $x \in Y$ valgano:*
(i) $||G(t)x||_X = ||x||_X$ *per ogni $t > 0$ implica $x = 0$;*
(ii) *per qualche $t_0 \geq 0$, l'insieme $\bigcup_{t\geq t_0} G(t)x$ è relativamente compatto in X e limitato in Y;*
allora $G(t)$ è stabile.

Dimostrazione. Sia $x \in Y$. Da (ii), l'insieme ω-limite di x, definito come

$$\omega(x) = \bigcap_{t\geq 0} \overline{\bigcup_{\tau\geq t} G(\tau)x} \ ,$$

è non vuoto. Scegliendo allora un arbitrario $\zeta \in \omega(x)$, esiste una successione $t_n \to \infty$ tale che $G(t_n)x \to \zeta$ in X. Mostriamo ora che $\zeta \in Y$. Poiché $G(t_n)x$ è limitata in Y (almeno per n abbastanza grande), esiste una sottosuccessione t_{n_j} tale che $G(t_{n_j})x \to \xi \in Y$ debolmente in Y. Ma ciò implica che $G(t_{n_j})x \to \xi$ debolmente in X, pertanto $\xi = \zeta$. Dal momento che $G(t)$ è un semigruppo di contrazioni, $\|G(t)x\|_X$ è una funzione non crescente di t. In particolare,

$$\|\zeta\|_X = \lim_{n\to\infty} \|G(t_n)x\|_X = \lim_{n\to\infty} \|G(t+t_n)x\|_X = \lim_{n\to\infty} \|G(t)G(t_n)x\|_X = \|G(t)\zeta\|_X \ ,$$

per ogni $t \geq 0$. Grazie a (i), concludiamo che $\zeta = 0$, e di conseguenza $\omega(x) = \{0\}$. Questo forza la convergenza $G(t)x \to 0$ per $t \to \infty$.
Sia ora $x \in X$. Per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $x_* \in Y$ tale che $\|x - x_*\|_X \leq \varepsilon/2$. Inoltre, esiste $t_* = t_*(x_*)$ tale che $\|G(t)x_*\|_X \leq \varepsilon/2$, per ogni $t \geq t_*$. Dunque, essendo $G(t)$ una contrazione,

$$\|G(t)x\|_X \leq \|G(t)(x - x_*)\|_X + \|G(t)x_*\|_X \leq \|x - x_*\|_X + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon \ ,$$

per ogni $t \geq t_*$, ovvero $G(t)x \to 0$ per $t \to \infty$, per ogni $x \in X$. $\square$

B.2 Altri risultati

Un lemma di compattezza

Lemma B.4. *Sia $\mu \in L^1(\mathbb{R}^+)$ una funzione positiva e decrescente, e siano B_0, B, B_1 tre spazi di Banach tali che*

$$B_0 \Subset B \hookrightarrow B_1 \ .$$

Sia $\mathcal{C} \subset L^2_\mu(\mathbb{R}^+, B)$, tale che

(i) *$\mathcal{C}$ limitato in $L^2_\mu(\mathbb{R}^+, B_0) \cap H^1_\mu(\mathbb{R}^+, B_1)$,*

(ii) $\lim_{y\to\infty}[\sup_{\eta\in\mathcal{C}} \int_{(0\,,\,1/y)\cup(y\,,\,\infty)} \mu(s)||\eta(s)||^2_B\, ds] = 0$.

Allora $\mathcal{C}$ è relativamente compatto in $L^2_\mu(\mathbb{R}^+, B)$.

Dimostrazione. Poniamo $S_\infty = \sup\{s : \mu(s) > 0\}$. Grazie a (i), per ogni intervallo $[S_0, S_1]$, con $0 < S_0 < S_1 < S_\infty$, $\mathcal{C}$ è limitato in $L^2_\mu([S_0, S_1], B_0) \cap H^1_\mu([S_0, S_1], B_1)$, uniformemente rispetto alla scelta dell'intervallo. Introduciamo

$$\phi(s) = \int_0^s \mu(y)\, dy \qquad s \in [0, S_\infty) \ .$$

Sia $\psi = \phi^{-1}$, funzione definita su $[0, ||\mu||_{L^1(\mathbb{R}^+)})$, e consideriamo l'insieme

$$\mathcal{C}_\psi = \{\eta \circ \psi \ : \ \eta \in \mathcal{C}\} \ .$$

Selezioniamo un qualunque $\eta \circ \psi \in \mathcal{C}_\psi$; allora

$$||\eta \circ \psi||^2_{L^2([\phi(S_0),\phi(S_1)],\, B_0)} = \int_{S_0}^{S_1} \mu(s)||\eta(s)||^2_{B_0}\, ds$$

e

$$\begin{aligned} ||(\eta \circ \psi)'||^2_{L^2([\phi(S_0),\, \phi(S_1)],\, B_1)} &= \int_{\phi(S_0)}^{\phi(s_1)} |\phi'(s)|^2 ||\eta'(\psi(s))||^2_{B_1}\, ds \\ &\le \left(\max_{s\in[S_0,\, S_1]} \frac{1}{\mu(s)^2}\right) \int_{S_0}^{S_1} \mu(s)||\eta'(s)||^2_{B_1}\, ds \ . \end{aligned}$$

Dunque $\mathcal{C}_\psi$ è limitato in

$$L^2([\phi(S_0), \phi(S_1)], B_0) \cap H^1([\phi(S_0), \phi(S_1)], B_1) \hookrightarrow L^2([\phi(S_0), \phi(S_1)], B) \ ,$$

e in questo caso l'immersione è compatta, grazie al teorema di compattezza di Aubin-Simon (si veda [34]; si veda anche [26]). Pertanto esistono $\xi \in L^2([\phi(S_0), \phi(S_1)], B)$ ed una successione $\eta_k \circ \psi \in \mathcal{C}_\psi$ tali che

$$\eta_k \circ \psi \to \xi \quad \text{in } L^2([\phi(S_0), \phi(S_1)], B) \ .$$

E inoltre la funzione $\eta = \xi \circ \phi$ appartiene a $L^2([S_0, S_1], B)$, e la suddetta convergenza implica che

$$\eta_k \to \eta \quad \text{in } L^2([S_0, S_1], B) \ .$$

Utilizzando il metodo di diagonalizzazione è possibile trovare un'estratta (indicata sempre con η_k) di elementi di $\mathcal{C}$ convergente a qualche η in $L^2_\mu([S_0, S_1], B)$ per ogni intervallo $[S_0, S_1]$ con $0 < S_0 < S_1 < S_\infty$. Poiché $\mathcal{C}$ è limitato in $L^2_\mu(\mathbb{R}^+, B)$, concludiamo che $\eta \in L^2_\mu(\mathbb{R}^+, B)$. Rimane da dimostrare che $\eta_k \to \eta$ in $L^2_\mu(\mathbb{R}^+, B)$. Ciò segue dall'ipotesi (ii), poiché

$$\lim_{S_0 \to 0\, , S_1 \to S_\infty} \left[\sup_k \left(\int_0^{S_0} \mu(s) ||\eta_k(s)||^2_B \, ds + \int_{S_1}^{S_\infty} \mu(s) ||\eta_k(s)||^2_B \, ds \right) \right] = 0 \ .$$

□

Prodotti di convoluzione in $\mathbb{R}^+$

Richiamiamo alcune proprietà del prodotto di convoluzione in $\mathbb{R}^+$.

Lemma B.5. *Date due funzioni reali ϕ, ψ di $L^1(\mathbb{R}^+)$, la funzione $y \in (0, x) \mapsto \phi(x-y)\psi(y)$ è in $L^1((0, x))$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^+$ e il prodotto di convoluzione su $\mathbb{R}^+$, definito da*

$$(\phi * \psi)(x) = \int_0^x \phi(x - y)\psi(y) \, dy \ ,$$

appartiene a $L^1(\mathbb{R}^+)$; inoltre vale

$$||\phi * \psi||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \le ||\phi||_{L^1(\mathbb{R}^+)} ||\psi||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \ .$$

La dimostrazione si basa sul teorema di Fubini-Tonelli.

Teorema B.6. *Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, $g \in L^2(\mathbb{R}^+)$; allora $f * g \in L^2(\mathbb{R}^+)$ e vale*

$$||f * g||_{L^2(\mathbb{R}^+)} \le ||f||_{L^1(\mathbb{R}^+)} ||g||_{L^2(\mathbb{R}^+)} \ .$$

Dimostrazione. Grazie al risultato precedente, la convoluzione è ben definita quasi ovunque, in particolare $y \in (0, x) \mapsto |f(x - y)||g(y)|^2 \in L^1((0, x))$ per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^+$; abbiamo

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &= \left| \int_0^x f(x - y) g(y) \, dy \right| \\ &\le \int_0^x |f(x - y) g(y)| \, dy \\ &= \int_0^x |f(x - y)|^{1/2} |f(x - y)|^{1/2} |g(y)| \, dy \ . \end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza di Hölder

$$\begin{aligned} |(f * g)(x)| &\le \left(\int_0^x |f(x - y)| \, dy \right)^{1/2} \left(\int_0^x |f(x - y)||g(y)|^2 \, dy \right)^{1/2} \\ &\le ||f||^{1/2}_{L^1(\mathbb{R}^+)} \left(|f| * |g|^2 \right)^{1/2} \ ; \end{aligned}$$

sempre grazie al risultato precedente, $|f| * |g|^2 \in L^1(\mathbb{R}^+)$, dunque $f * g \in L^2(\mathbb{R}^+)$, e allora

$$||f * g||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \int_{\mathbb{R}^+} |(f * g)(x)|^2 \, dx \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^+)} || \, |f| * |g|^2 \, ||_{L^1(\mathbb{R}^+)} \; ;$$

ancora con il Lemma B.5 concludiamo che

$$||f * g||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq ||f||_{L^1(\mathbb{R}^+)} ||f||_{L^1(\mathbb{R}^+)} || \, |g|^2 ||_{L^1(\mathbb{R}^+)} = ||f||^2_{L^1(\mathbb{R}^+)} ||g||^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \; .$$

□

Funzioni con periodi arbitrariamente piccoli

Riportiamo i seguenti risultati classici di analisi.

Lemma B.7. *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile; se f ammette periodi arbitrariamente piccoli, allora è (uguale quasi ovunque a una) costante.*

Dimostrazione. Sia τ_n una successione di periodi arbitrariamente piccoli.
Supponiamo che f sia limitata: essendo misurabile è localmente sommabile, e pertanto quasi ogni punto è punto di Lebesgue, ovvero, vale l'uguaglianza

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\tau_n} \int_x^{x+\tau_n} f(y) \, dy$$

per quasi ogni x. D'altro canto, il secondo membro è indipendente da x, da cui segue la tesi.
Se f non fosse limitata, si potrebbe considerare $\arctan(f)$, che è limitata, concludendo che è costante, e dunque deve esserlo anche f. □

Il risultato si estende per funzioni a valori in uno spazio di Banach:

Teorema B.8. *Sia $f : \mathbb{R} \to X$ una funzione misurabile, con X spazio di Banach; se f ammette periodi arbitrariamente piccoli, allora è (uguale quasi ovunque a una) costante.*

Dimostrazione. Per assurdo esistano due valori distinti x_1, x_2 assunti dalla funzione; per il teorema di Hahn-Banach esiste $\phi \in X^*$ tale che $\phi(x_1) \neq \phi(x_2)$. Consideriamo però la funzione reale $\phi \circ f$; essa ammette gli stessi periodi di f, allora è costante per il Lemma B.7. Assurdo. □

Lemma B.9. *Siano $a_1, \ldots, a_N$ dei numeri reali. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esistono $m \in \mathbb{N}$ e $r_n \in \mathbb{Z}$, con $m \geq 1/\varepsilon$, tali che*

$$|a_n m - r_n| \leq \varepsilon \; ,$$

per ogni $n = 1, \ldots, N$.

Dimostrazione. Scegliamo $M \in \mathbb{N}$ tale che $M \geq 1/\varepsilon$. Suddividiamo il cubo unitario $[0,1]^N \subset \mathbb{R}^N$ in M^N cubi di lato $1/M$. Ponendo $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_N)$, consideriamo $M^N + 1$ "gabbie di piccioni"

$$\{j\bar{a}\} = (\{ja_1\}, \ldots, \{ja_N\}) , \qquad j = M, 2M, \ldots, (M^N + 1)M ,$$

dove $\{x\} = x - [x]$ è la mantissa di x. Allora necessariamente due tra tali elementi, diciamo $\{j_1\bar{a}\}$ e $\{j_2\bar{a}\}$, con $j_1 > j_2$, devono trovarsi nella stessa gabbia. Pertanto, con $m = j_1 - j_2$ e $r_n = [j_1 a_n] - [j_2 a_n]$, si ha la tesi. $\square$

Corollario B.10. *Dato un numero irrazionale α, esistono due successioni di interi $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ tali che $p_n\alpha - q_n \to 0$. Inoltre se α, β sono numeri reali razionalmente indipendenti (ovvero hanno rapporto irrazionale) allora esistono due successioni di interi $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ tali che $p_n\alpha - q_n\beta \to 0$.*

Corollario B.11. *Sia $f : \mathbb{R} \to X$ una funzione misurabile, con X spazio di Banach; se f ammette due periodi razionalmente indipendenti, allora è costante.*

Dimostrazione. Siano α, β i due periodi razionalmente indipendenti. Ogni combinazione lineare a coefficienti interi di periodi costituisce nuovamente un periodo per f. Grazie al Corollario B.10, scegliamo due successioni di interi $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ in modo tale che $\tau_n = p_n\alpha - q_n\beta$ sia una quantità infinitesima; dunque f ammette una successione τ_n di periodi arbitrariamente piccoli. La tesi segue allora dal Teorema B.8 $\square$

Conclusioni

In questo lavoro si è cercato innanzitutto di impostare in modo rigoroso e di ambientare opportunamente un problema di evoluzione integro-differenziale, introducendo lo spazio delle storie e la relativa formulazione, la quale si rivela utile in quanto permette una rilettura del problema stesso in chiave più generale, e soprattutto consente di trattarlo in maniera sistematica attraverso la teoria dei semigruppi di operatori lineari; l'adeguatezza del passaggio a tale formuazione è evidenziata dal modo in cui si riescono ad ottenere tutti i risultati relativi al comportamento asintotico. Per quanto riguarda questi ultimi, possono essere divisi in due parti. I risultati relativi alla stabilità riportati nel secondo capitolo, per i quali il quadro generale si rivela essere sostanzialmente completo, in quanto siamo stati in grado di dimostrare la presenza di stabilità sotto ipotesi assolutamente generali sul nucleo di integrazione dell'equazione, mettendo in evidenza come essa venga meno nei soli e ben confinati casi risonanti, dove le uniche zone dissipative del nucleo sono rese invisibili dalla particolare struttura spettrale dell'operatore autoaggiunto.
In secondo luogo abbiamo i risultati riguardanti il problema del decadimento esponenziale; stabilita la condizione necessaria sul nucleo di integrazione, abbiamo presentato un quadro completo dei fenomeni questa volta per il solo caso finito dimensionale, relativamente al quale il risultato è ottimale, poiché la suddetta condizione di decadimento è in tale contesto anche sufficiente, ed anzi se verificata porta all'equivalenza tra stabilità e stabilità esponenziale, che viene messa in evidenza ottenendo alla fine delle dimostrazioni come unico vincolo esattamente la stessa condizione di risonanza espressa come in precedenza in termini di annullamento di integrali di Fourier. Per quanto riguarda il caso infinito dimensionale, abbiamo un risultato di decadimento nell'ipotesi che il nucleo non sia troppo piatto (precisamente, $\mathcal{R}_\mu < 1/2$). Tale vincolo di piattezza emerge anche per l'equazione del secondo ordine. Se da un lato il vincolo, ed il modo in cui viene ottenuto, sembra suggerire la necessità di avere una prevalenza di dissipatività nella forma del nucleo di integrazione, dall'altro non è in effetti possibile escludere che non sia superabile attraverso un raffinamento delle tecniche utilizzate. Certamente che cosa si verifichi nell'intervallo di piattezza $\mathcal{R}_\mu \in [\frac{1}{2}, 1)$ è il più importante problema aperto emerso in questo lavoro di tesi. D'altra parte quando $\mathcal{R}_\mu = 1$ abbiamo mostrato che nel caso infinito dimensionale non si ha il decadimento esponenziale, sfruttando un controesempio con l'operatore di Laplace in dimensione uno. Nel caso generale, un approfondimento richiederebbe l'analisi di diversi operatori particolari, per precisare di volta in volta in maniera più specifica l'analogo risultato; naturalmente, una tale analisi si scontrerebbe con lo studio degli spettri e del-

l'andamento asintotico degli autovalori (problema difficile anche solo per il laplaciano su domini relativamente semplici).
Ulteriori estensioni possono essere lo studio delle connesse equazioni integro-differenziali di tipo Volterra, per le quali pure la stessa problematica sembra presentarsi, oppure l'approfondimento delle prospettive e del significato fisico delle equazioni studiate e l'interpretazione degli stessi vincoli imposti, o infine l'analisi di alcuni problemi di tipo non lineare.

Bibliografia

[1] C. Cattaneo, *Sulla conduzione del calore*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena **3** (1949), 83–101.

[2] V.V. Chepyzhov, V. Pata, *Some remarks on stability of semigroups arising from linear viscoelasticity*, Asymptot. Anal. **46** (2006), 251–273.

[3] B.D. Coleman, M. Fabrizio, D.R. Owen, *On the thermodynamics of second sound in dielectric crystals*, Arch. Rational Mech. Anal. **80** (1982), 135–158.

[4] B.D. Coleman, M.E. Gurtin, *Equipresence and constitutive equations for rigid heat conductors*, Z. Angew. Math. Phys. **18** (1967), 199–208.

[5] B.D. Coleman, W.J. Hrusa, D.R. Owen , *Stability of equilibrium for a nonlinear hyperbolic system describing heat propagation by second sound in solids*, Arch. Rational Mech. Anal. **94** (1986), 267–289.

[6] B.D. Coleman, D.C. Newman, *Implications of a nonlinearity in the theory of second sound in solids*, Phys. Rev. B **37** (1988), 1492–1498.

[7] M. Conti, S. Gatti, V. Pata, *Uniform decay properties of linear Volterra integro-differential equations*, preprint.

[8] R.F. Curtain and H.J. Zwart, *An introduction to infinite-dimensional linear system theory*, Springer, New York, 1995.

[9] C.M. Dafermos, *An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity*, J. Differential Equations **7** (1970), 297–308.

[10] C.M. Dafermos, *Asymptotic stability in viscoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. **37** (1970), 554–569.

[11] C.M. Dafermos, *Contraction semigroups and trend to equilibrium in continuum mechanics*, in “Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics” (P. Germain and B. Nayroles, Eds.), pp.295–306, Lecture Notes in Mathematics no.503, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[12] R. Datko, *Extending a theorem of A.M. Liapunov to Hilbert space*, J. Math. Anal. Appl. **32** (1970), 610–616.

[13] L.C. Evans, *Partial differential equations* American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[14] M. Fabrizio, G. Gentili and D.W. Reynolds, *On a rigid linear heat conductor with memory*, Int. J. Engng. Sci., **36** (1998), 765–782.

[15] M. Fabrizio, B. Lazzari, *On the existence and asymptotic stability of solutions for linear viscoelastic solids*, Arch. Rational Mech. Anal. **116** (1991), 139–152.

[16] M. Fabrizio, A. Morro, *Mathematical problems in linear viscoelasticity*, SIAM Studies in Applied Mathematics no.12, SIAM, Philadelphia, 1992.

[17] S. Gatti, A. Miranville, V. Pata, S. Zelik, *Attractors for semilinear equations of viscoelasticity with very low dissipation*, Rocky Mountain J. Math. (in stampa).

[18] G. Gentili and C. Giorgi, *Thermodynamic properties and stability for the heat flux equation with linear memory*, Quart. Appl. Math. **51** (1993), 342–362.

[19] C. Giorgi, M.G. Naso, V. Pata, *Exponential stability in linear heat conduction with memory: a semigroup approach*, Comm. Appl. Anal. **5** (121–134), 2001.

[20] H. Grabmüller, *On linear theory of heat conduction in materials with memory*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, **A-76** (1976-77), 119–137.

[21] M. Grasselli, V. Pata, *Uniform attractors of nonautonomous systems with memory*, in "Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis" (A. Lorenzi and B. Ruf, Eds.), pp.155–178, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. no.50, Birkhäuser, Boston, 2002.

[22] M.E. Gurtin and A.C. Pipkin, *A general theory of heat conduction with finite wave speeds*, Arch. Rational Mech. Anal. **31** (1968), 113–126.

[23] E. Hewitt and K. Stromberg, *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, New York, 1965.

[24] J. Jackle, *Heat conduction and relaxation in liquids of high viscosity*, Phys. A **162** (1990), 377–404.

[25] Z. Liu, S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative systems*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics no.398, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.

[26] J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolutions des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[27] R.K. Miller, *An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory*, J. Math. Anal. Appl., **66** (1978), 331–332.

[28] A. Morro, T. Ruggeri, *Non-equilibrium properties of solids obtained from second-sound measurements*, J. Phys. C, **21** (1988) 1743–1752.

[29] J.W. Nunziato, *On heat conduction in materials with memory*, Quart. Appl. Math., **29** (1971), 187–204.

[30] V. Pata, *Exponential stability in linear viscoelasticity*, Quart. Appl. Math. (in stampa).

[31] V. Pata, A. Zucchi, *Attractors for a damped hyperbolic equation with linear memory*, Adv. Math. Sci. Appl. **11** (2001), 505–529.

[32] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[33] J. Prüss, *On the spectrum of C_0-semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), 847–857.

[34] J. Simon, *Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$*, Ann. Mat. Pura Appl. **146** (1987), 65–96.

[35] M. Slemrod, *Existence, uniqueness, stability for a simple fluid with fading memory*, Bull. Amer. Math. Soc. **4** (1976), 581–583.

[36] M. Slemrod, *A hereditary partial differential equation with applications in the theory of simple fluids*, Arch. Rational Mech. Anal. **66** (1976), 303–321.

[37] M. Slemrod, *An energy stability method for simple fluids*, Arch. Rational Mech. Anal. **68** (1978), 1–18.

[38] G.M. Tarkenton, M.S. Cramer, *Nonlinear 2nd sound in solids*, Phys. Rev. B **49** (1994), 11794–11798.