UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI
Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA

Evoluzioni di insiemi secondo la curvatura

Candidato

Matteo Novaga

Relatore

Prof. Luigi Ambrosio

Controrelatore

Prof. Sergio Spagnolo

Anno Accademico 1995/1996

CVGMT Preprint Server - http://cvgmt.sns.it/papers/nov/

Indice

Introduzione **iii**

1 Teoria della viscosità **1**
1.1 Rilassamento 1
1.2 Γ-convergenza 3
1.3 Soluzioni viscose 5
1.4 Confronto nel caso parabolico 11

2 Teoria delle barriere **25**
2.1 Proprietà generali 25
2.2 Invarianza per traslazioni 30
2.3 Soprasoluzioni geometriche 34
2.4 Confronto tra Barriere e Viscosità 44
2.5 Applicazioni al moto per curvatura media 55

3 Proprietà della funzione distanza **59**
3.1 Proprietà generali 59
3.2 Regolarità del luogo di zeri 64
3.3 Curvature principali e funzione distanza 70
3.4 Equazioni di evoluzione nella distanza al quadrato 75

4 Esistenza per tempi piccoli **87**
4.1 Codimensione 1 88
4.2 Codimensione maggiore di 1 95

Introduzione

Lo studio del comportamento di ipersuperfici di $\mathbb{R}^n$, che si evolvono con velocità normale assegnata in ogni punto, è un problema classico in geometria differenziale e, per le numerose applicazioni, è stato affrontato da diversi autori con le tecniche più disparate. Queste evoluzioni sono spesso utili per dimostrare l'esistenza di varietà con particolari proprietà, ad esempio punti critici di certi funzionali geometrici. Inoltre, problemi di questo genere insorgono qualora si cerchi di modellizzare il comportamento asintotico di sistemi stocastici tipo reazione–diffusione, fenomeni di turbolenza, combustione, magnetizzazione e, in generale, transizioni di fase. Infine, vi sono state recenti applicazioni alla modellistica al calcolatore, si pensi ad esempio alla regolarizzazione di immagini in teoria della visione.
Un esempio particolarmente rappresentativo è lo studio dell'evoluzione di un'ipersuperficie con velocità normale in ogni punto uguale alla curvatura media in quel punto. Come modello fisico del problema si può pensare, in prima approssimazione, ad una superficie elastica che si muove in un fluido molto viscoso.
Una caratteristica peculiare di questi problemi è il possibile insorgere di singolarità in un tempo finito, a prescindere dalla regolarità della superficie di partenza. Un esempio, suggerito da Grayson [Gr], che illustra chiaramente questo comportamento nel caso del movimento per curvatura media, è quello di una superficie in $\mathbb{R}^3$ a forma di "osso di cane" molto allungato, la quale si "strozza" rapidamente nella parte centrale e si divide, in un tempo finito, in due componenti connesse. Al fine di studiare le proprietà qualitative di questi oggetti, è stato fatto un notevole sforzo, da parte di diversi autori, per dare una definizione debole di evoluzione definita anche dopo l'insorgere di singolarità e che coincida con l'evoluzione classica quando quest'ultima esiste.
Presenteremo qui due metodi che, nonostante l'apparente diversità, risultano comunque strettamente collegati. Al primo, detto degli "insiemi di livello", è interamente dedicato il primo capitolo. Questo metodo, che è attualmente il più diffuso e sviluppato, è stato introdotto inizialmente da Osher & Sethian

[OS] e Otha, Jasnow & Kawasaki [OJK] ed approfondito in seguito da numerosi studiosi tra cui Chen, Giga & Goto [CGG], Evans & Spruck [ES2], Soner [So], Barles & Souganidis [BS] e molti altri. Il metodo è stato inoltre recentemente esteso da Ambrosio & Soner [AS] ad evoluzioni per curvatura media di sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ di codimensione arbitraria.
L'idea fondamentale è quella di considerare l'ipersuperficie al tempo t come insieme di livello 0 di un'opportuna funzione ausiliaria $u(x,t)$ tale che tutti i suoi insiemi di livello seguano la stessa legge evolutiva e trasformare quindi l'evoluzione geometrica in un'equazione parabolica alle derivate parziali nella funzione $u(x,t)$.
Più precisamente, data una famiglia di ipersuperfici $\{\Gamma_t\}_{t\in[0,T)}$, con $\Gamma_t = \partial\Omega_t$, supponiamo che l'evoluzione sia regolata da una funzione F che lega la componente normale della velocità in ogni punto alla prima e alla seconda forma fondamentale dell'ipersuperficie in quel punto. Si ha quindi

$$v(x) = F(\nu, \nabla_T \nu) \qquad \forall x \in \Gamma_t \ , \tag{0.1}$$

dove ν è la normale esterna in x a Ω_t e ∇_T indica il gradiente tangenziale. Supponiamo ora che si abbia

$$x \in \Gamma_t \iff u(x,t) = 0 \qquad \forall t \in [0,T) \ ,$$

per qualche funzione regolare $u : \mathbb{R}^n \times [0,T) \to \mathbb{R}$ tale che $\nabla u(\cdot,t) \neq 0$ in un intorno di Γ_t per ogni $t \in [0,T)$.
Ricaviamo l'equazione differenziale soddisfatta da u. Per ogni $x \in \Gamma_t$ si ha

$$v(x) = \frac{u_t}{\mid \nabla u \mid} \ , \quad \nu = \frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid} \ , \quad \nabla_T \nu = \frac{X_{\nabla u} \circ \nabla^2 u \circ X_{\nabla u}}{\mid \nabla u \mid} \ ,$$

dove $X_{\nabla u} = Id - \dfrac{\nabla u \otimes \nabla u}{\mid \nabla u \mid^2}$ è la matrice di proiezione sull'iperpiano ortogonale al vettore ∇u. L'equazione (0.1), espressa in termini della funzione u, diventa quindi

$$u_t = \mid \nabla u \mid F\left(\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}, \frac{X_{\nabla u} \circ \nabla^2 u \circ X_{\nabla u}}{\mid \nabla u \mid}\right) \qquad \text{su } \{u = 0\} \ .$$

Imponendo la stessa legge evolutiva a a tutti gli insiemi di livello della funzione u, otteniamo l'equazione

$$u_t = \mid \nabla u \mid F\left(\frac{\nabla u}{\mid \nabla u \mid}, \frac{X_{\nabla u} \circ \nabla^2 u \circ X_{\nabla u}}{\mid \nabla u \mid}\right) \ . \tag{0.2}$$

Facendo il ragionamento inverso, ci si può aspettare che ad ogni soluzione sufficientemente regolare dell'equazione (0.2) con un opportuno dato iniziale u_0 (ad esempio $u_0 = dist_{\Gamma_0}$) corrisponda un'evoluzione di Γ_0 secondo la legge (0.1). Ad ogni modo, non è facile in generale studiare direttamente l'equazione (0.2), poiché questa è sempre degenere lungo la direzione ∇u e non è ben definita quando $\nabla u = 0$. Per superare queste difficoltà, alcuni autori (si veda in particolare [ES2] e [CGG]) hanno affrontato il problema utilizzando tecniche di teoria della viscosità, dimostrando che, sotto ipotesi piuttosto generali sulla funzione F, il problema ammette un'unica soluzione viscosa per ogni tempo $t > 0$. Inoltre Γ_t, vista come luogo di zeri di $u(x,t)$, dipende solo da Γ_0 e non dalla funzione ausiliaria u_0. Tale risultato implica che, per ogni dato iniziale Γ_0, esiste un'unica soluzione generalizzata Γ_t dell'equazione (0.1) definita per ogni $t > 0$.
Il secondo metodo, detto delle "barriere", viene presentato e discusso nel corso del secondo capitolo. Questo approccio, introdotto da De Giorgi in [DG], è in un certo senso il più naturale per affrontare la classe dei problemi geometrici che godono del principio del confronto, quel principio cioè secondo il quale, date due famiglie insiemi aperti $\{\Omega_t\}_{t\geq t_0}$ e $\{V_t\}_{t\geq t_0}$, le cui frontiere si evolvono secondo una certa legge, se si ha $\Omega_{\overline{t}} \subseteq V_{\overline{t}}$ in un certo istante $\overline{t} \geq t_0$, allora gli insiemi restano contenuti per ogni istante successivo $t > \overline{t}$, cioè:

$$\Omega_{\overline{t}} \subseteq V_{\overline{t}} \implies \Omega_t \subseteq V_t \qquad \forall t > \overline{t}\ .$$

Dato un qualsiasi sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$, l'idea è quella di definire evoluzione debole di A (o *minima barriera* di A) come la più piccola famiglia $\{A_t\}_{t\geq t_0}$ tale che $A_{t_0} = A$ e, per ogni evoluzione regolare $\{B_t\}_{t\in[a,b]}$ tale che $B_a \subseteq A_a$, si abbia $B_b \subseteq A_b$. Si noti che questa definizione, più intuitiva della precedente, evita il ricorso esplicito ad equazioni differenziali (è in effetti una definizione globale più che locale), la qual cosa rende però molti calcoli più difficoltosi. In compenso, come segue pressoché immediatamente dalla definizione, le minime barriere godono del principio di confronto, mentre la dimostrazione dello stesso fatto è molto tecnica e laboriosa nell'ambito della teoria della viscosità, si veda [CGG], [GGIS] e [CIL]. Forniremo una dimostrazione piuttosto dettagliata di questo fatto alla fine del primo capitolo. Nell'ultima parte del secondo capitolo, affrontiamo poi il problema del confronto tra la nozione di minima barriera e quella di soluzione viscosa, ottenendo che, sotto ipotesi piuttosto generali sull'evoluzione, le due definizioni coincidono. Quest'ultimo risultato era già stato stabilito, nel caso di ipersuperfici che si evolvono per curvatura media con un eventuale termine forzante, da Bellettini & Paolini in [BP], dove si utilizza un'ingegnosa osservazione fatta da Tom Ilmanen in [Il1].

Nel terzo capitolo studiamo più sistematicamente le funzioni distanza e distanza al quadrato da un insieme e le loro proprietà. In particolare studiamo la relazione che intercorre tra la regolarità di tali funzioni e la regolarità dell'insieme. Più precisamente, la funzione distanza al quadrato è regolare in un intorno del suo luogo di zeri se e solo se tale insieme è una varietà regolare, mentre la funzione distanza con segno dalla frontiera di un aperto Ω,

$$d_\Omega(x) = dist(x,\Omega) - dist(x,\mathbb{R}^n\setminus\Omega) \ ,$$

è regolare se e solo se tale frontiera è regolare. Sempre nel caso di un'ipersuperficie $\Gamma = \partial\Omega$, vi sono inoltre forti legami tra le derivate della funzione distanza con segno e la prima e la seconda forma fondamentale dell'ipersuperficie. Si possono fare ragionamenti analoghi nel caso di varietà di codimensione arbitraria, a patto di considerare invece della distanza con segno la funzione distanza al quadrato (noi utilizzeremo la funzione $\eta = \frac{1}{2}dist^2$), regolare anche sul luogo di zeri. Questo approccio, usato estensivamente, consente di riformulare molti problemi di geometria differenziale su varietà mediante equazioni nella funzione distanza, affrontabili con gli ordinari metodi dell'analisi, si veda a proposito [DZ]. In particolare, come era già stato osservato da De Giorgi in [DG], è possibile esprimere il vettore curvatura media in un punto di una varietà Γ in funzione delle derivate terze della funzione η, vale a dire

$$H(x) = -\nabla\Delta\eta(x) \qquad \forall x \in \Gamma \ .$$

Sempre nel terzo capitolo mostreremo che, per ogni varietà regolare Γ, esiste $\sigma > 0$ tale che la funzione $\eta(x) = \frac{1}{2}dist^2(x,\Gamma)$ è regolare in un opportuno intorno $I_\sigma(\Gamma) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ dist(x,\Gamma) < \sigma\}$ della varietà. Per ogni $y \in I_\sigma(\Gamma)$ esiste inoltre un unico punto $\pi(y) \in \Gamma$ tale che $\eta(y) = \frac{1}{2} \mid \pi(y) - y \mid^2$. In tale intorno possiamo caratterizzare il vettore curvatura media utilizzando le sole derivate seconde della funzione η, si ha infatti

$$\big\langle H\big(\pi(y)\big), \nabla\eta(y)\big\rangle = \sum_{\lambda_i<1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} \qquad \forall y \in I_\sigma(\Gamma) \ ,$$

dove i λ_i sono gli autovalori della matrice $\nabla^2\eta(y)$. Partendo da queste considerazioni è possibile esprimere l'evoluzione per curvatura media in codimensione arbitraria attraverso un'equazione alle derivate parziali nella funzione η:

$$\eta_t(y) = \sum_{\lambda_i<1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} \qquad \forall y \in I_\sigma(\Gamma) \ . \tag{0.3}$$

Un approccio simile era già stato adottato da Evans & Spruck in [ES2] al fine di studiare il moto per curvatura media in codimensione 1. Data un'ipersuperficie regolare Γ, essi considerano l'equazione, espressa nella distanza con segno da Γ:

$$d_t(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - d(y)\lambda_i} \qquad \forall y \in I_\sigma(\Gamma) \ . \tag{0.4}$$

dove i λ_i sono gli autovalori della matrice $\nabla^2 d(y)$. In particolare, essi ottengono un teorema di esistenza per tempi piccoli di una soluzione regolare della (0.4), a partire da un dato iniziale sufficientemente regolare. La loro dimostrazione è presentata nella prima parte del quarto capitolo. Quando si cerca di estendere tale dimostrazione al caso della codimensione maggiore di 1, il problema principale è dato dal fatto che l'equazione (0.3) è degenere lungo le direzioni normali alla varietà e pertanto non si ha automaticamente un teorema di esistenza locale della soluzione. Nella parte conclusiva del quarto capitolo, mostreremo che tale risultato implicherebbe un teorema di esistenza per tempi piccoli di un'evoluzione per curvatura media in codimensione arbitraria a partire da qualunque varietà sufficientemente regolare. A prescindere dal teorema di esistenza in sè, la cui dimostrazione si potrebbe cercare anche per altra via (per una rapida descrizione di un approccio alternativo si veda il quarto capitolo), l'interesse della (0.3) è dato dalla caratterizzione del moto per curvatura media in codimensione arbitraria mediante un'equazione chiara e piuttosto maneggevole, anche ai fini, ad esempio, di eventuali applicazioni numeriche.

Capitolo 1

Teoria della viscosità

1.1 Rilassamento

Un concetto importante per introdurre la teoria della viscosità è quello di inviluppo semicontinuo, o rilassato, di una funzione. Ci limiteremo, qui, a citare solo alcune proprietà fondamentali. Per le dimostrazioni vedere [Ma]. Questa nozione è vantaggiosa principalmente perché permette di utilizzare il seguente

Teorema 1.1 (Metodo diretto). *Sia X uno spazio metrico compatto e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione inferiormente semicontinua, allora f ha minimo su X.*

Vale un enunciato simmetrico quando f è superiormente semicontinua. Cominciamo con qualche definizione.

Definizione. *Sia X uno spazio metrico.*

- *Si dice che una funzione $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è* coerciva *se per ogni $t \in \mathbb{R}$ l'insieme*

$$\overline{\{x : F(x) \leq t\}}$$

  è compatto.

- *Una famiglia di funzioni $\{F_i\}_{i \in I} : X \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice* equicoerciva *se per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste un insieme K_t compatto tale che*

$$\bigcup_{i \in I} \{x : F_i(x) \leq t\} \subseteq K_t \ .$$

Definizione. *Sia X uno spazio metrico ed $F: X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Per ogni $F: X \to \overline{\mathbb{R}}$ poniamo*

$$\mathcal{S}_F = \left\{ G \middle|\ G: X \to \overline{\mathbb{R}},\ G \text{ s.c.i.},\ G \leq F \right.\ .\Big\}$$

Si definisce allora il rilassato inferiormente semicontinuo *di F, e si indica con F_*, la funzione*

$$F_*(x) = \sup_{G \in \mathcal{S}_F} G(x)\ .$$

Con le ovvie modifiche si definisce anche F^*, rilassato superiormente semicontinuo, per il quale valgono analoghi enunciati. Ciò premesso, quando, nel seguito, parleremo di rilassato intenderemo il rilassato inferiormente semicontinuo.

Osservazione 1.2. *Il rilassato di F è sempre s.c.i., visto che è inviluppo superiore di funzioni s.c.i.*

Proposizione 1.3. *Il rilassato di F, F_*, è caratterizzato dalle seguenti proprietà:*

- *per ogni successione $x_h \to x$ si ha*

$$F_*(x) \leq \liminf_{h \to \infty} F(x_h)\ ;$$

- *per ogni $x \in X$ esiste una successione $x_h \to x$ tale che*

$$F_*(x) = \lim_{h \to \infty} F(x_h)\ .$$

Proposizione 1.4. *Se $F: X \to \overline{\mathbb{R}}$ è coerciva, allora:*

- *F_* è coerciva e quindi, per il Teorema 1.1, ammette minimo ;*
- *$\inf F = \min F_*$;*
- *Se $x_h \to x$ è una successione minimizzante per F, allora x è un punto di minimo per F_*. Inoltre, per ogni x punto di minimo di F_*, esiste (x_h) successione minimizzante per F convergente a x .*

1.2 Γ-convergenza

Sia X uno spazio topologico ed $F_h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una successione di funzioni. Poniamo

$$\left(\Gamma^- \liminf_{h\to\infty} F_h\right)(x) = \sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{I}(x)} \liminf_{h\to\infty} \inf_{y\in\mathcal{U}} F_h(y) \ ,$$
$$\left(\Gamma^- \limsup_{h\to\infty} F_h\right)(x) = \sup_{\mathcal{U}\in\mathcal{I}(x)} \limsup_{h\to\infty} \inf_{y\in\mathcal{U}} F_h(y) \ ,$$
$$\left(\Gamma^+ \liminf_{h\to\infty} F_h\right)(x) = \inf_{\mathcal{U}\in\mathcal{I}(x)} \liminf_{h\to\infty} \sup_{y\in\mathcal{U}} F_h(y) \ ,$$
$$\left(\Gamma^+ \limsup_{h\to\infty} F_h\right)(x) = \inf_{\mathcal{U}\in\mathcal{I}(x)} \limsup_{h\to\infty} \sup_{y\in\mathcal{U}} F_h(y) \ .$$

Diremo che la successione F_h Γ^--converge in x se si ha

$$\left(\Gamma^- \liminf_{h\to\infty} F_h\right)(x) = \left(\Gamma^- \limsup_{h\to\infty} F_h\right)(x) \ ,$$

in tal caso il valore comune si indicherà con

$$\left(\Gamma^- \lim_{h\to\infty} F_h\right)(x) \ .$$

Si dà un'analoga definizione per il Γ^+-limite.
Osserviamo che

$$\Gamma^- \liminf_{h\to\infty} F_h = -\Gamma^+ \limsup_{h\to\infty}(-F_h) \ ,$$
$$\Gamma^- \limsup_{h\to\infty} F_h = -\Gamma^+ \liminf_{h\to\infty}(-F_h) \ ,$$

quindi, nel seguito, daremo tutti gli enunciati per i soli Γ^--limiti.

Proposizione 1.5. *Valgono le seguenti proprietà:*

- *Se F_h Γ^-converge a F, allora F è s.c.i. ;*
- *se per ogni h, $F_h = F$, allora $\Gamma^- \lim_{h\to\infty} F_h = F_*$;*
- *se $F_h \le G_h$ per ogni h, allora*

$$\Gamma^- \liminf_{h\to\infty} F_h \le \Gamma^- \liminf_{h\to\infty} G_h \ ,$$
$$\Gamma^- \limsup_{h\to\infty} F_h \le \Gamma^- \limsup_{h\to\infty} G_h \ ;$$

- *se* $F_h \to F$ *uniformemente su* X, *allora* $\Gamma^- \lim_{h\to\infty} F_h = F_*$;
- *se* F_h *è crescente in* h, *allora* $\Gamma^- \lim_{h\to\infty} F_h = \sup_h (F_h)_*$;
- *se* $F_h \downarrow F$, *allora* $\Gamma^- \lim_{h\to\infty} F_h = F_*$;
- $$\Gamma^- \liminf_{h\to\infty} F_h = \Gamma^- \liminf_{h\to\infty} (F_h)_* \ ,$$
$$\Gamma^- \limsup_{h\to\infty} F_h = \Gamma^- \limsup_{h\to\infty} (F_h)_* \ ;$$
- $$\Gamma^- \liminf_{h\to\infty} (F_h + G_h) \geq \Gamma^- \liminf_{h\to\infty} F_h + \Gamma^- \liminf_{h\to\infty} G_h \ ,$$
$$\Gamma^- \limsup_{h\to\infty} (F_h + G_h) \leq \Gamma^- \limsup_{h\to\infty} F_h + \Gamma^- \limsup_{h\to\infty} G_h \ .$$

Spesso risulta utile la seguente caratterizzazione sequenziale:

Proposizione 1.6. *Per ogni* $x \in X$ *si ha*

$$\left(\Gamma^- \liminf_{h\to\infty} F_h\right)(x) = \min\left\{ \liminf_{h\to\infty} F_h(x_h) : \ x_h \to x \right\} \ ,$$
$$\left(\Gamma^- \limsup_{h\to\infty} F_h\right)(x) = \min\left\{ \limsup_{h\to\infty} F_h(x_h) : \ x_h \to x \right\} \ .$$

Il seguente Teorema riguarda i valori di minimo di una successione di funzioni Γ^--convergenti (nel caso della Γ^+-convergenza saranno valori di massimo).

Teorema 1.7. *Supponiamo che esista un insieme compatto* $K \subseteq X$, *tale che*

$$\inf_{x\in X} F_h(x) = \inf_{x\in K} F_h(x) \tag{1.1}$$

per ogni $h \in \mathbb{N}$. *Allora, se* $F = \Gamma^- \liminf_{h\to\infty} F_h$, F *ha minimo in* X *e si ha*

$$\min_{x\in X} F(x) = \liminf_{h\to\infty} \inf_{x\in X} F_h(x) \ . \tag{1.2}$$

Se inoltre $F = \Gamma^- \lim_{h\to\infty} F_h$, *si ha*

$$\min_{x\in X} F = \lim_{h\to\infty} \inf_{x\in X} F_h(x) \ . \tag{1.3}$$

Il seguente Teorema riguarda invece i punti di minimo di una successione di funzioni Γ^--convergenti (nel caso della Γ^+-convergenza saranno punti di massimo).

Teorema 1.8. *Sia $F = \Gamma^- \lim_{h\to\infty} F_h$. Se, per ogni $h \in \mathbb{N}$, x_h è un punto di minimo di F_h in X e x è un punto di accumulazione per (x_h), allora x è un punto di minimo di F in X e si ha*

$$F(x) \le \limsup_{h\to\infty} F_h(x_h) \ . \tag{1.4}$$

Se inoltre (x_h) converge a x in X, allora x è un punto di minimo di F in X e si ha

$$F(x) = \lim_{h\to\infty} F_h(x_h) \ . \tag{1.5}$$

Quando il punto di minimo della funzione limite è unico, in ipotesi di equicoercività della successione di funzioni, il Teorema (1.8) può essere rafforzato, vale infatti

Teorema 1.9. *Supponiamo che (F_h) sia equicoerciva e che Γ^--converga ad una funzione F, avente un unico punto di minimo x_0 in X. Sia (x_h) una successione in X tale che x_h sia un punto di minimo di F_h in X per ogni $h \in \mathbb{N}$. Allora*

$$x_h \to x_0 \qquad e \qquad F_h(x_h) \to F(x_0) \ . \tag{1.6}$$

1.3 Soluzioni viscose

La teoria della viscosità è stata introdotta inizialmente da M.G.Crandall & P.L.Lions [CL], al fine di dare un metodo per ottenere soluzioni, generalmente solo continue, di una vasta classe di equazioni differenziali. Nel presentare questa teoria seguiremo qui, principalmente, gli articoli di Chen, Giga & Goto [CGG] e di Giga, Goto, Ishii & Sato [GGIS].
Nel seguito, data una funzione f, f_* e f^* indicheranno rispettivamente il rilassato inferiormente e superiormente semicontinuo di f.
Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$, definiamo $J(A) = A \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{S}^{n\times n}$. Sia W un sottoinsieme denso di $J(A)$ e sia $E = E(y, s, q, Y)$ una funzione da W in $\mathbb{R}$. Poiché W è denso in $J(A)$, E^* ed E_* sono definiti su tutto $J(A)$, a valori in $\overline{\mathbb{R}}$.

Definizione. *Data una funzione $u : A \to \mathbb{R}$, essa si dice* sottosoluzione viscosa *(risp.* soprasoluzione viscosa*) in A dell'equazione*

$$E(y, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0 \ , \tag{1.7}$$

se $u^* < +\infty$ *(risp.* $u_* > -\infty$*) in* A *e per ogni coppia* $(\phi, \hat{y})$*, con* $\phi \in \mathbf{C}^2(A)$ *e* $\hat{y} \in A$*, tali che* $max_A(u^* - \phi) = (u^* - \phi)(\hat{y})$ *(risp.* $min_A(u_* - \phi) = (u_* - \phi)(\hat{y})$*), allora vale*

$$E_*\big(\hat{y}, u^*(\hat{y}), \nabla\phi(\hat{y}), \nabla^2\phi(\hat{y})\big) \leq 0 \tag{1.8}$$

$$\big(\textit{risp. } E^*\big(\hat{y}, u_*(\hat{y}), \nabla\phi(\hat{y}), \nabla^2\phi(\hat{y})\big) \geq 0\big) \ .$$

Con $\phi \in \mathbf{C}^2(A)$ si intenda che ϕ ha un'estensione di classe $\mathbf{C}^2$ in un intorno aperto di A. Una funzione $u = u(y)$, che sia sottosoluzione e soprasoluzione viscosa di (1.7), si dice *soluzione viscosa* di (1.7).
In particolare, se u è $\mathbf{C}^2$ ed E è continuo, allora u soluzione viscosa di (1.7) implica che u è anche soluzione classica dello stesso problema. Si noti che, con questa definizione, una soluzione viscosa u non è necessariamente continua. D'ora in poi, quando si parlerà semplicemente di soluzione senza aggiungere altro, si intenderà sempre soluzione viscosa. In quanto segue si supporrà sempre A localmente compatto.
Seguendo [CIL], si può dare una definizione alternativa, seppure equivalente, di soprasoluzione e sottosoluzione viscosa, utilizzando i cosiddetti "sub-jets" e "super-jets".

Definizione. *Dati* $u : A \to \mathbb{R}$*,* $\hat{y} \in A$ *e* $(p, X) \in \mathbb{R}^n \times \mathbf{S}^{n\times n}$ *tali che, per* $y \to \hat{y}$ *con* $y \in A$*, si abbia*

$$u(y) \leq u(\hat{y}) + \langle p, y - \hat{y}\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y - \hat{y}), y - \hat{y}\rangle + o(\mid y - \hat{y} \mid^2) \ ; \tag{1.9}$$

si dice che la coppia (p, X) *appartiene al super-jet di* u *in* $\hat{y}$ *e si indica con* $u \in {J_A}^{2,+}u(\hat{y})$*. Ugualmente si può definire il "sub-jet"* ${J_A}^{2,-}u(\hat{y})$*.*

Definizione. *Siano* E *ed* A *come sopra, una funzione* $u : A \to \mathbb{R}$ *si dice sottosoluzione viscosa del problema (1.7), se vale*

$$E_*\big(y, u^*(y), p, X\big) \leq 0 \qquad \forall (p, X) \in {J_A}^{2,+}u^*(y) \ ;$$

ugualmente, u *viene detta soprasoluzione viscosa di (1.7), se*

$$E^*\big(y, u_*(y), p, X\big) \geq 0 \qquad \forall (p, X) \in {J_A}^{2,-}u_*(y) \ .$$

Infine, u *è una soluzione viscosa di (1.7) se è sia sottosoluzione che soprasoluzione.*

Osservazione 1.10. *È facile verificare che questa definizione è equivalente alla definizione precedente. Data, infatti, una* $\phi \in \mathbf{C}^2(A)$ *tale che* $max_A(u^* - \phi) = (u^* - \phi)(\hat{y})$*, si ha*

$$\big(\nabla\phi(\hat{y}), \nabla^2\phi(\hat{y})\big) \in {J_A}^{2,+}u^*(\hat{y}) \ .$$

Viceversa, si può dimostrare che, dato un elemento (p, X) del super-jet, si può sempre trovare una funzione ϕ tale che

$$\nabla\phi(\hat{y}) = p \ , \qquad \nabla^2\phi(\hat{y}) = X \ , \qquad \max_A(u^* - \phi) = (u^* - \phi)(\hat{y}) \ .$$

Siamo ora in grado di enunciare le tre Proposizioni fondamentali circa l'esistenza di soluzioni viscose.

Proposizione 1.11. *Sia $\mathcal{F}$ una famiglia non vuota di sottosoluzioni di (1.7) e sia $u : A \to \mathbb{R}$, così definita*

$$u(y) = \sup\{v(y) \mid \ v \in \mathcal{F}\} \ .$$

Se $u^*(y) < +\infty$ per ogni $y \in A$, allora u è una sottosoluzione di (1.7) (vale un enunciato simmetrico, con l' inf *al posto del* sup*, se $\mathcal{F}$ è una famiglia di soprasoluzioni).*

Dimostrazione.
Scegliamo una funzione $\phi \in \mathbf{C}^2(A)$ ed un punto $\hat{y} \in A$ tali che

$$\sup_A(u^* - \phi) = (u^* - \phi)(\hat{y}) \ .$$

Possiamo supporre $(u^* - \phi)(\hat{y}) = 0$, senza perdere in generalità. Ponendo $\psi(y) = \phi(y) + \mid y - \hat{y} \mid^4$, osserviamo che $(u^* - \psi)$ ha un punto di massimo stretto in $\hat{y}$. Infatti da $(u^* - \phi)(y) \leq 0$ si ricava

$$(u^* - \psi)(y) \leq - \mid y - \hat{y} \mid^4 \qquad \forall y \in A \ . \tag{1.10}$$

Per definizione di u^*, esiste $\{x_k\} \subseteq A$ tale che $x_k \to \hat{y}$ per $k \to \infty$ e

$$\lim_{k\to\infty} a_k = (u^* - \phi)(\hat{y}) = 0 \ ,$$

dove $a_k = (u - \phi)(x_k)$. Poiché $u = \sup\{v \mid v \in \mathcal{F}\}$, allora esiste una successione $\{v_k\} \subseteq \mathcal{F}$ tale che $v_k(x_k) \geq u(x_k) - \dfrac{1}{k}$ $(k \in \mathbb{N})$. Questo implica

$$(v_k^* - \phi)(x_k) \geq (v_k - \phi)(x_k) > a_k - \frac{1}{k} \ .$$

Grazie a (1.10), si ha inoltre

$$(v_k^* - \psi)(y) \leq - \mid y - \hat{y} \mid^4 \qquad \forall y \in A \ .$$

Sia B un intorno compatto di $\hat{y}$ in A. Poiché $(v_k^* - \phi)$ è superiormente semicontinua e superiormente limitata, assume massimo in B in $y_k \in B$. Si ottiene quindi

$$a_k - \frac{1}{k} < (v_k^* - \psi)(x_k) \leq (v_k^* - \psi)(y_k) \leq - \mid y_k - \hat{y} \mid^4 \tag{1.11}$$

e questo implica $y_k \to \hat{y}$ $(k \to \infty)$. Per (1.11) si ha $\lim_{k\to\infty}(v_k^* - \psi)(y_k) = 0$ e quindi

$$\lim_{k\to\infty} v_k^*(y_k) = \psi(\hat{y}) = u^*(\hat{y}) \ .$$

Dal fatto che v_k è una sottosoluzione si ottiene

$$E_*\big(y_k, v_k^*(y_k), \nabla\psi(y_k), \nabla^2\psi(y_k)\big) \leq 0 \ ,$$

che diventa, per $k \to \infty$, poiché E è inferiormente semicontinua, $\nabla\psi(\hat{y}) = \nabla\phi(\hat{y})$ e $\nabla^2\psi(\hat{y}) = \nabla^2\phi(\hat{y})$,

$$E_*\big(\hat{y}, u^*(\hat{y}), \nabla\phi(\hat{y}), \nabla^2\phi(\hat{y})\big) \leq 0 \ ,$$

come volevasi dimostrare.

□

Definizione. *Diciamo che E è* ellittico degenere *se vale*

$$E(y, s, q, Y) \leq E(y, s, q, Z) \quad \textit{in } W \textit{ se } Y \geq Z \ .$$

Lemma 1.12. *Se E è ellittico degenere ed u è una sottosoluzione (risp. soprasoluzione) classica (cioè di classe almeno $\mathbf{C}^2$) di (1.7), allora u è anche sottosoluzione (risp. soprasoluzione) viscosa dello stesso problema, quindi, in particolare, le soluzioni classiche sono un sottoinsieme delle soluzioni viscose.*

Dimostrazione.
Consideriamo u sottosoluzione classica di (1.7). Per poter concludere che u è anche sottosoluzione viscosa, grazie a (1.9), è sufficiente verificare che

$$E_*\big(y, u(y), p, X\big) \leq 0 \qquad \forall (p, X) \in J^{2,+}u(y) \ .$$

Questo segue subito dalla degenere ellitticità notando che, se $u \in \mathbf{C}^2$, si ha

$$J^{2,+}u(y) = \{(\nabla u(y), X) : \ X \geq \nabla^2 u(y)\} \qquad \forall y \in A \ .$$

□

Proposizione 1.13 (Esistenza). *Supponiamo E ellittico degenere e siano f e $g : A \to \mathbb{R}$, rispettivamente una sottosoluzione ed una soprasoluzione di (1.7) in A. Allora esiste una soluzione u di (1.7), non necessariamente continua, tale che $f \leq u \leq g$ in A.*

Premettiamo alla dimostrazione il seguente Lemma:

Lemma 1.14. *Supponiamo E ellittico degenere e sia $g : A \to \mathbb{R}$ una soprasoluzione di (1.7). Sia inoltre $\mathcal{S}$ la collezione di tutte le sottosoluzioni di (1.7) tali che $v \leq g$ in A. Se $v \in \mathcal{S}$ non è una soprasoluzione di (1.7), allora esistono $w \in \mathcal{S}$ e $z \in A$ tali che $v(z) < w(z)$.*

Dimostrazione (Lemma).
Poiché v non è una soprasoluzione, esiste $\phi \in \mathbf{C}^2(A)$ e $\hat{y} \in A$ tali che

$$\inf_A (v_* - \phi) = (v_* - \phi)(\hat{y}) = 0$$

e, inoltre,

$$E^*\big(\hat{y}, v_*(\hat{y}), \nabla\phi(\hat{y}), \nabla^2\phi(\hat{y})\big) = E^*\big(\hat{y}, \phi(\hat{y}), \nabla\phi(\hat{y}), \nabla^2\phi(\hat{y})\big) < 0 \ .$$

Ragionando come nella dimostrazione precedente, possiamo supporre

$$(v_* - \phi)(y) \geq \mid y - \hat{y} \mid^4 \quad \forall y \in A \ . \tag{1.12}$$

Si ha $v_* \leq g_*$ in A e, poiché g è una soprasoluzione, si ottiene $v_*(\hat{y}) = \phi(\hat{y}) < g_*(\hat{y})$. Poiché E^* è superiormente semicontinua, scegliendo un δ sufficientemente piccolo si ottiene

$$E^*(y, \phi(y) + \frac{\delta^4}{2}, \nabla\phi(y), \nabla^2\phi(y)) \leq 0 \ , \tag{1.13}$$

$$\phi(y) + \frac{\delta^4}{2} \leq g_*(y) \qquad \forall y \in B_{2\delta} = A \cap \overline{B(\hat{y}, 2\delta)} \ , \tag{1.14}$$

Poiché E è ellittico degenere, la disuguaglianza (1.13) mostra che $\phi + \dfrac{\delta^4}{2}$ è una sottosoluzione in $B_{2\delta}$. Per (1.12), si ha poi

$$v(y) \geq v_*(y) - \frac{\delta^4}{2} \geq \phi(y) + \frac{\delta^4}{2} \qquad \text{con } y \in B_{2\delta} \backslash B_\delta \ . \tag{1.15}$$

Sia ora $w(y)$ così definita:

$$w(y) = \begin{cases} \max\left\{\phi(y) + \dfrac{\delta^4}{2}, v(y)\right\} & y \in B_\delta \ , \\ \\ v(y) & y \in A \backslash B_\delta \ . \end{cases}$$

Da (1.15), segue

$$w(y) = \max\left\{\phi(y) + \frac{\delta^4}{2}, v(y)\right\} \qquad \forall y \in B_{2\delta} \ .$$

Per la Proposizione 1.11, poiché w è una sottosoluzione in $B_{2\delta}$ e in $A\backslash\overline{B_\delta}$, w è una sottosoluzione in tutto A, quindi, per (1.14), $w \in \mathcal{S}$.
D'altro canto, si ha

$$0 = (v_* - \phi)(\hat{y}) = \lim_{t\to 0} \inf_{|y-\hat{y}|\leq t} \{(v-\phi)(y) \mid \ y \in A\} \ .$$

Esiste pertanto un punto $z \in B_\delta$ tale che $v(z) - \phi(z) < \dfrac{\delta^4}{2}$, cioè $v(z) < w(z)$.

□

Dimostrazione (Proposizione 1.13).
Come nel Lemma 1.14, sia $\mathcal{S} = \{v \mid \ v$ è sottosoluzione di (1.7) e $v \leq g\}$. Si noti che, poiché $f \in \mathcal{S}$, si ha $\mathcal{S} \neq \emptyset$. Si applica ora un metodo tipo Perron; definiamo

$$u(y) = \sup\{v(y) \mid v \in \mathcal{S}\} \ .$$

Per la Proposizione 1.11, u è una sottosoluzione di (1.7), inoltre $u \leq g$, pertanto $u \in \mathcal{S}$. Se, per assurdo, u non fosse una soprasoluzione di (1.7), esisterebbe, per il Lemma 1.14, una $w \in \mathcal{S}$ tale che $u(z) < w(z)$ per qualche $z \in A$, contraddicendo la definizione di u. Possiamo quindi concludere che u è una soluzione di (1.7) e $f \leq u \leq g$.

□

Proposizione 1.15 (Stabilità). *Siano E_k, E: $W \to \mathbb{R}$, u_k, u: $A \to \mathbb{R}$ e u_k sottosoluzione di*

$$E_k(y, u_k, \nabla u_k, \nabla^2 u_k) = 0 \qquad \text{in } A \ ,$$

dove $k \in \mathbb{N}$.
Si supponga inoltre $\Gamma^- \liminf_{k\to\infty} E_k \geq E_*$ e $\Gamma^+ \lim_{k\to\infty} u_k = u$, allora u è una sottosoluzione per E di (1.7).

Dimostrazione.
Sia, come sopra, $\phi \in \mathbf{C}^2(A)$ e $\hat{y} \in A$ tali che

$$\sup_A (u^* - \phi) = (u^* - \phi)(\hat{y}) \ .$$

Ragionando come nella Proposizione 1.11, possiamo supporre che $\hat{y}$ sia l'unico punto di massimo di $u^* - \phi$.
Poiché A è localmente compatto e $u_k^* < +\infty$ in A, esiste B, intorno compatto di $\hat{y}$ in A, sul quale u_k è superiormente limitata. Si può quindi trovare una successione $\{y_k\} \in B$ $(k \in \mathbb{N})$ tale che

$$\max_A (u_k^* - \phi) = (u_k^* - \phi)(y_k) \ .$$

Poiché $\Gamma^+ \lim_{k\to\infty} u_k = u$, grazie al Teorema 1.9, si ha che $y_k \to \hat{y}$. Inoltre, da $\Gamma^- \liminf_{k\to\infty} E_k \geq E_*$, applicando la Proposizione 1.6, segue

$$\begin{aligned} E_*\big(\hat{y}, u^*(\hat{y}), \nabla\phi(\hat{y}), \nabla^2\phi(\hat{y})\big) &\leq \Gamma^- \liminf_{k\to\infty} E_k\big(\hat{y}, u^*(\hat{y}), \nabla\phi(\hat{y}), \nabla^2\phi(\hat{y})\big) \\ &= \Gamma^- \liminf_{k\to\infty} (E_k)_*\big(\hat{y}, u^*(\hat{y}), \nabla\phi(\hat{y}), \nabla^2\phi(\hat{y})\big) \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} (E_k)_*\big(y_k, u^*(y_k), \nabla\phi(y_k), \nabla^2\phi(y_k)\big) \ , \end{aligned}$$

da cui, osservando che u_k è una sottosoluzione di $E_k(y, u_k, \nabla u_k, \nabla^2 u_k) = 0$ e che $\max_B (u_k^* - \phi) = (u_k^* - \phi)(y_k)$, si ottiene, per $k \to \infty$,

$$E_*\big(\hat{y}, u^*(\hat{y}), \nabla\phi(\hat{y}), \nabla^2\phi(\hat{y})\big) \leq 0 \ ,$$

cioè u è una sottosoluzione di (1.7).

□

1.4 Confronto nel caso parabolico

Consideriamo ora una forma speciale dell'equazione (1.7), di tipo parabolico,

$$u_t + F(t, x, u, \nabla u, \nabla^2 u) = 0 \ , \tag{1.16}$$

dove ∇ rappresenta le derivate spaziali di u.
Lo scopo principale di questo paragrafo è stabilire un teorema di confronto per l'equazione (1.16) in ipotesi piuttosto generali su F. Nell'esposizione si seguiremo principalmente [GGIS].
Per semplicità, supporremo F dipendente solo da ∇u e $\nabla^2 u$, cioè studieremo l'equazione

$$u_t + F(\nabla u, \nabla^2 u) = 0 \qquad \text{in } Q = (0, T] \times \Omega \ , \tag{1.17}$$

dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$ non necessariamente limitato.
Elenchiamo dapprima le ipotesi su $F = F(p, X)$:

(F1) F: $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbf{S}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ è continua ;

(F2) F è ellittica degenere, cioè $F(p, X+Y) \leq F(p, X)\ \forall Y \geq 0$;

(F3) $-\infty < F_*(0,0) = F^*(0,0) < +\infty$;

(F4) F è limitata sui limitati, cioè per ogni $R > 0$

$$c_R = \sup\left\{ \mid F(p,X) \mid \text{, dove } \mid p \mid \leq R,\ \mid X \mid \leq R,\ p \neq 0 \right\} < +\infty \ .$$

Se vale l'ipotesi (F2), l'equazione (1.17) si dice *parabolica degenere*.
Come sopra, una funzione u: $Q \to \mathbb{R}$ si dice sottosoluzione viscosa di (1.17) in Q (la definizione di soprasoluzione si dà in maniera analoga), se $u^* < +\infty$ e vale

$$\tau + F_*(p,X) \leq 0 \qquad \forall (\tau, p, X) \in \mathcal{P}_Q^{2,+} u^*(t,x), \text{ con } (t,x) \in Q \ .$$

Qui $\mathcal{P}_Q^{2,+}$ indica il *super-jet parabolico* di u in Q, cioè, analogamente alla definizione precedente, è l'insieme dei $(\tau, p, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{S}^{n\times n}$ tali che

$$u(s,y) \leq u(t,x) + \tau(s-t) + \langle p, y-x\rangle + \frac{1}{2}\langle X(y-x), y-x\rangle + o(\mid s-t \mid + \mid y-x \mid^2) \ ,$$

con $(s,y) \to (t,x)$ in Q. Ugualmente si definisce $\mathcal{P}_Q^{2,-} u = -\mathcal{P}_Q^{2,+}(-u)$.

Osservazione 1.16. *Anche in questo caso si può dare una definizione alternativa di sottosoluzione e soprasoluzione viscosa utilizzando funzioni test ϕ che siano $\mathbf{C}^1$ nel tempo e $\mathbf{C}^2$ nello spazio e tali che, per qualche $(t,x) \in Q$,*

$$\max_Q (u^* - \phi) = (u^* - \phi)(t,x) \quad (risp.\ \min_Q (u_* - \phi) = (u_* - \phi)(t,x) \ .$$

Si osservi inoltre che se si prendono funzioni test $\mathbf{C}^\infty$, poichè come si verifica facilmente per approssimazione l'insieme

$$\bigcup_{(t,x),\phi} \left(\nabla\phi(t,x), \nabla^2\phi(t,x)\right) \quad \text{è denso in} \quad \bigcup_{(t,x)\in Q} \mathcal{P}_Q^{2,+} u^*(t,x) \ ,$$

si ottiene la stessa definizione di sottosoluzione viscosa (analogamente per la soprasoluzione).

Una funzione continua m: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ sarà detta un *modulo di continuità* se $m(0) = 0$ e m è non decrescente. Dato, infine, $U = (0,T] \times D$, dove D è un generico dominio di $\mathbb{R}^n$, chiamiamo *bordo parabolico* di U l'insieme

$$\partial_p U = \Big[\{0\} \times D\Big] \cup \Big[[0,T] \times \partial D\Big] \ .$$

Teorema 1.17 (Confronto). *Supponiamo che F soddisfi $(F1)-(F4)$; siano u e v rispettivamente una sottosoluzione e una soprasoluzione di (1.17) in Q tali che valgano*

(A1) $\exists\ K > 0$ *tale che* $u(t,x) \leq K(|\ x\ | +1)$ *e* $v(t,x) \geq -K(|\ x\ | +1)$ $\forall (t,x) \in Q$;

(A2) $\exists$ *un modulo di continuità* m_T *tale che*

$$u^*(t,x) - v_*(t,y) \leq m_T(|\ x-y\ |) \qquad \forall (t,x,y) \in \partial_p U\ ,$$

dove $U = (0,T] \times D$ *e* $D = \Omega \times \Omega$;

(A3) $\exists\ K > 0$ *tale che* $u^*(t,x) - v_*(t,y) \leq K(|\ x-y\ | +1)$ *per ogni* $(t,x,y) \in \partial_p U$.

Allora esiste un modulo m tale che

$$u^*(t,x) - v_*(t,y) \leq m(|\ x-y\ |) \qquad \text{in } U\ . \tag{1.18}$$

In particolare $u^* \leq v_*$ in Q.

La dimostrazione del Teorema verrà suddivisa in diverse Proposizioni.

Proposizione 1.18. *Supponiamo che F soddisfi $(F1)-(F4)$; siano u, v, come sopra, una sottosoluzione e una soprasoluzione di (1.17) in Q, tali che siano soddisfatte $(A1)-(A3)$ e u, $-v$ siano superiormente semicontinue in Q. Allora per ogni $K' > K$ esiste una costante $M = M(K',F) > 0$ tale che*

$$u(t,x) - v(t,y) \leq K'\ |\ x-y\ | + M(1+t) \qquad \text{in } U\ . \tag{1.19}$$

Dimostrazione.
Siano

$$w(s,t,x,y) = u(t,x) - v(s,y)$$

e

$$\psi(t,x,y) = K'(|\ x-y\ |^2 +1)^{\frac{1}{2}} + M'(1+t)\ ;$$

la tesi è equivalente a mostrare

$$w(t,t,x,y) \leq \psi(t,x,y) \qquad \forall (t,x,y) \in U\ , \tag{1.20}$$

scegliendo M' sufficientemente grande.
Sia $\{g_R\}_{R>0}$ una famiglia di funzioni di classe $\mathbf{C}^2$ da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ tale che

(a) $g_R(x) = 0$ per $\mid x \mid < R$;

(b) $\dfrac{g_R(x)}{\mid x \mid} \to 1$ quando $\mid x \mid \to \infty$;

(c) $G = \sup\{\mid \nabla g_R(x) \mid + \mid \nabla^2 g_R(x) \mid : \ x \in \mathbb{R}^n, R > 0\} < \infty$.

Cioè le g_R sono funzioni barriera all'infinito.
Sia ora $\phi(t,x,y) = \psi(t,x,y) + K'\big(g_R(x) + g_R(y)\big)$, in virtù di $(A1)$ e (b), si ha, per R_1 sufficientemente grande e $0 \le s,t \le T$,

$$w(s,t,x,y) - \phi(t,x,y) < 0 \qquad \forall (x,y) \text{ t. c. } \mid x \mid + \mid y \mid \ge R_1 \ . \tag{1.21}$$

Grazie a $(A3)$, se $M' > K$ e $(t,x,y) \in \partial_p U$, si ha

$$w(t,t,x,y) - \phi(t,x,y) < 0 \tag{1.22}$$

e, poiché w è superiormente semicontinua, da (1.21) e (1.22) si ricava, per (s,x,y) o $(t,x,y) \in \partial_p U$ e δ sufficientemente piccolo,

$$w(s,t,x,y) - \frac{(t-s)^2}{\delta} - \phi(t,x,y) < 0 \ . \tag{1.23}$$

Supponiamo ora, per assurdo, che (1.20) sia falsa, allora da (a) seguirebbe, posto $V = (0,T] \times U$ e $\Psi(s,t,x,y) = \phi(t,x,y) + \dfrac{(t-s)^2}{\delta}$,

$$\sup_V (w - \Psi) > 0 \ ,$$

se R è sufficientemente grande. Per (1.23), $w - \Psi$ ha massimo su V e sia $(\overline{s},\overline{t},\overline{x},\overline{y}) \in V$ un punto di massimo, questo implica

$$(\partial_t \Psi, \nabla_x \Psi, \nabla_x^2 \Psi)(\overline{s},\overline{t},\overline{x},\overline{y}) \in \mathcal{P}_Q^{2,+} u(\overline{t},\overline{x}) \ ,$$
$$(-\partial_s \Psi, -\nabla_y \Psi, -\nabla_y^2 \Psi)(\overline{s},\overline{t},\overline{x},\overline{y}) \in \mathcal{P}_Q^{2,-} v(\overline{s},\overline{y}) \ .$$

Poiché u e v sono rispettivamente una sottosoluzione e una soprasoluzione di (1.17), ne segue

$$\partial_t \Psi + F_*(\nabla_x \phi, \nabla_x^2 \phi) \le 0 \ , \tag{1.24}$$
$$-\partial_s \Psi + F^*(-\nabla_y \phi, -\nabla_y^2 \phi) \ge 0 \ , \tag{1.25}$$

dove le funzioni si intendono calcolate in $(\overline{s},\overline{t},\overline{x},\overline{y})$.
Per (c) e per definizione di ψ, esiste $N = N(K',G)$ tale che $\mid \nabla \phi \mid, \mid \nabla^2 \phi \mid \le N$.
Sottraendo (1.25) da (1.24), si ottiene, per $(F4)$,

$$\partial_t \Psi + \partial_s \Psi \le 2c_N \ .$$

Pertanto, dato che $\partial_t\Psi + \partial_s\Psi = \partial_t\phi + \partial_s\phi = M'$, se $M' > \max\{K, 2c_N\}$, si ha una contraddizione. Per una tale M', quindi, vale (1.20), mentre la stima (1.19) segue per $M = M' + K'$.

□

Fissati $\epsilon, \delta, \gamma > 0$ definiamo

$$\begin{aligned} \Phi(t,x,y) &= w(t,x,y) - \Psi(t,x,y) \ , \\ w(t,x,y) &= u(t,x) - v(t,y) \ , \\ \Psi(t,x,y) &= \frac{|\ x-y\ |^4}{4\epsilon} + B(t,x,y) \ , \\ B(t,x,y) &= \delta(|\ x\ |^2 + |\ y\ |^2) + \frac{\gamma}{T-t} \ , \end{aligned} \tag{1.26}$$

dove B funge da funzione barriera. Notiamo che, se u e v sono come nella Proposizione precedente, allora possiamo estendere w ad una funzione superiormente semicontinua su tutto $\overline{U}$ nel seguente modo

$$w(t,x,y) = \limsup_{(s,p,q)\to(t,x,y)} \{w(s,p,q) : \ (s,p,q) \in U\} \qquad \forall (t,x,y) \in \partial U \ .$$

Da (A1), si ha

$$|\ w(t,x,y)\ | \leq K(|\ x\ | + |\ y\ | + 2) \qquad \forall (t,x,y) \in \overline{U} \ .$$

Proposizione 1.19. *Supponiamo che per u e v valga (1.19) e che*

$$\alpha = \limsup_{\theta \downarrow 0} \{w(t,x,y) : |\ x-y\ | < \theta, (t,x,y) \in \overline{U}\} > 0 \ . \tag{1.27}$$

Allora si possono trovare δ_0 e γ_0 tali che

$$\sup_{\overline{U}} \Phi(t,x,y) > \frac{\alpha}{2} \tag{1.28}$$

per ogni $0 < \delta < \delta_0$, $0 < \gamma < \gamma_0$ ed $\epsilon > 0$.

Dimostrazione.
In virtù di (1.19), $\alpha < +\infty$. Per (1.27) si può trovare un punto (t_0, x_0, y_0) tale che $w(t_0,x_0,y_0) > \frac{3}{4}\alpha$ e $\frac{|\ x_0 - y_0\ |^4}{4\epsilon} < \frac{1}{4}\alpha$. A questo punto basta osservare che, se δ e γ sono sufficientemente piccoli, $\Phi(t_0,x_0,y_0) > \frac{1}{2}\alpha$.

□

Proposizione 1.20. *Siano u, v, δ_0 e γ_0 come nella Proposizione 1.19. Se w è superiormente semicontinua in $\overline{U}$, si ha*

1. *Φ ha massimo su $\overline{U}$ in $(\overline{t},\overline{x},\overline{y})$ con $\overline{t} < T$;*
2. *$|\,\overline{x}-\overline{y}\,|$, come funzione di (ϵ,δ,γ), è limitata per $0<\epsilon<1$, $0<\delta<\delta_0$, $0<\gamma<\gamma_0$;*
3. *$\delta\overline{x}$ e $\delta\overline{y}$ tendono a 0, per $\delta\to 0$, uniformemente in $0<\epsilon<1$ e $0<\gamma<\gamma_0$;*
4. *$|\,\overline{x}-\overline{y}\,|\to 0$, per $\epsilon\to 0$, uniformemente in $0<\delta<\delta_0$ e $0<\gamma<\gamma_0$.*

Dimostrazione.

1. Per (1.19) e per definizione di B, Φ è negativa fuori da un compatto $W\subseteq[0,T)\times\overline{D}$. Poiché, per (1.28), Φ è positiva in qualche punto ed è superiormente semicontinua, assume massimo in un punto di W.

2. Da (1.28) segue che $\Phi(\overline{t},\overline{x},\overline{y})>0$ per $0<\delta<\delta_0$, $0<\gamma<\gamma_0$ e $\epsilon>0$, ciò implica
$$w(\overline{t},\overline{x},\overline{y}) \geq \frac{|\,\overline{x}-\overline{y}\,|^4}{4\epsilon} + B(\overline{t},\overline{x},\overline{y}) \geq \frac{|\,\overline{x}-\overline{y}\,|^4}{4\epsilon}\ . \tag{1.29}$$
Da cui si conclude osservando che, posto $\epsilon<1$, da (1.19) segue
$$\frac{|\,\overline{x}-\overline{y}\,|^4}{4} \leq K'\,|\,\overline{x}-\overline{y}\,| + M(1+T)\ . \tag{1.30}$$

3. Da (1.29) segue
$$\delta(|\,\overline{x}\,|^2 + |\,\overline{y}\,|^2) \leq u(\overline{t},\overline{x}) - v(\overline{t},\overline{y})\ .$$
Detta c la limitazione su $|\,\overline{x}-\overline{y}\,|$ data da (2), si ottiene, applicando (1.19)
$$(\delta\,|\,\overline{x}\,|)^2 + (\delta\,|\,\overline{y}\,|)^2 \leq \delta C\ ,$$
con $C = K'c + M(1+T)$.
Mandando δ a zero, poiché C non dipende da ϵ, δ, γ, si ottiene la tesi.

4. Si ricava, come sopra,
$$\frac{|\,\overline{x}-\overline{y}\,|^4}{4\epsilon} \leq C\ ,$$
che dà la tesi per $\epsilon\to 0$.

□

Proposizione 1.21. *Nelle stesse ipotesi della Proposizione precedente, siano u e v tali che valga $(A2)$, allora esiste $\epsilon_0 > 0$ tale che Φ assume massimo su $\overline{U}$ in un punto interno di U. Cioè, se $(\overline{t}, \overline{x}, \overline{y})$ è un tale punto, si ha $(\overline{t}, \overline{x}, \overline{y}) \in (0,T) \times D$ per ogni $0 < \epsilon < \epsilon_0,\ 0 < \delta < \delta_0,\ 0 < \gamma < \gamma_0$.*

Dimostrazione.
Procediamo per assurdo. Grazie alla Proposizione 1.20, si ottiene $\overline{t} < T$, si può quindi trovare una successione $\{\epsilon_j\}$, con $\epsilon_j \to 0$, $\{\delta_j\} \subseteq (0, \delta_0)$ e $\{\gamma_j\} \subseteq (0, \gamma_0)$ tali che, per $\epsilon = \epsilon_j$, $\delta = \delta_j$, $\gamma = \gamma_j$, Φ ha massimo in $(\overline{t}_j, \overline{x}_j, \overline{y}_j) \in \partial_p U$.
Da (1.28) e $(A2)$ segue

$$\frac{\alpha}{2} \leq \Phi(\overline{t}_j, \overline{x}_j, \overline{y}_j) \leq w(\overline{t}_j, \overline{x}_j, \overline{y}_j) \leq m_T(\mid \overline{x}_j - \overline{y}_j \mid) \ .$$

Poiché $\epsilon_j \to 0$, applicando la Proposizione 1.20 (4), si ottiene $\mid \overline{x}_j - \overline{y}_j \mid \to 0$, che porta alla contraddizione $0 < \dfrac{\alpha}{2} \leq 0$.

□

Lemma 1.22. *Siano u_i funzioni superiormente semicontinue con $u_i < \infty$ in $(0,T) \times \mathbb{R}^{N_i}$, per $i = 1, 2, \ldots k$. Sia poi w in $(0,T) \times \mathbb{R}^N$ con*

$$w(t,x) = \sum_{i=1}^{k} u_i(t, x_i) \ ,$$

dove $N = N_1 + \ldots N_k,\ x = x_1 + \ldots x_k$.
Supponiamo $s \in (0,T),\ z = (z_1, \ldots z_k) \in \mathbb{R}^N,\ p = (p_1, \ldots p_k) \in \mathbb{R}^N$ tali che

$$(\tau, p, A) \in \mathcal{P}^{2,+} w(s,z) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbf{S}^{N \times N} \ .$$

Supponiamo inoltre che esista $\omega > 0$ tale che $\forall\ M > 0$ si abbia

$$\begin{cases} (\sigma_i, q_i, Y_i) \in \mathcal{P}^{2,+} u(t, x_i) \\ \mid x_i - z_i \mid + \mid s - t \mid < \omega \\ \mid u_i(t, x_i) \mid + \mid q_i \mid + \mid Y_i \mid \leq M \end{cases} \Rightarrow \quad \sigma_i \leq C(M) \ . \tag{1.31}$$

Allora $\forall\ \lambda > 0\ \exists\ (\tau_i, X_i) \in \mathbb{R} \times \mathbf{S}^{N_i \times N_i}$ tale che

$$(\tau_i, p_i, X_i) \in \overline{\mathcal{P}}^{2,+} u_i(s, z_i) \ ,$$

$$-\left(\frac{1}{\lambda} + \mid A \mid\right) I \leq \begin{pmatrix} X_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & X_k \end{pmatrix} \leq A + \lambda A^2$$

e

$$\tau_1 + \ldots + \tau_k = \tau \ ,$$

dove I indica la matrice identità.

Osservazione 1.23. *Questo Lemma, pur costituendo un passo importante nella dimostrazione del Teorema 1.17, ha una dimostrazione piuttosto elaborata. Per una trattazione esauriente si veda [CI].*

Osservazione 1.24. *Si vede facilmente che il Lemma precedente è locale, cioè la tesi continua a valere se si sostituisce a $\mathbb{R}^{N_i}$ un intorno aperto di z_i.*

Dimostrazione (Teorema 1.17).
Possiamo supporre u e $-v$ superiormente semicontinue, in modo che lo sia anche

$$w(t,x,y) = u(t,x) - v(t,y) \ .$$

Procedendo per assurdo, si avrebbe

$$\alpha = \lim_{\theta \downarrow 0} \sup\{w(t,x,y) \ : \mid x-y \mid < \theta, \ (t,x,y) \in \overline{U}\} > 0 \ .$$

Per la Proposizione 1.18 e per (1.27), per Φ definita come in (1.26) valgono tutte le tesi delle precedenti Proposizioni. In particolare, per la Proposizione 1.21 e per ϵ, δ, γ sufficientemente piccoli, Φ assume massimo su $\overline{U}$ in un punto $(\overline{t}, \overline{x}, \overline{y})$ interno ad U, da cui, in U

$$w(t,x,y) \leq w(\overline{t},\overline{x},\overline{y}) + \Psi(t,x,y) - \Psi(\overline{t},\overline{x},\overline{y}) \ ,$$

che, passando ai super-jets, diventa

$$(\overline{\Psi}_t, \nabla_{x,y}\overline{\Psi}, A) \in \mathcal{P}^{2,+} w(\overline{t},\overline{x},\overline{y}) \qquad \forall \ A \geq \nabla^2 \Psi(\overline{t},\overline{x},\overline{y}) \ , \tag{1.32}$$

dove $\overline{\Psi} = \Psi(\overline{t},\overline{x},\overline{y})$.
Poiché F soddisfa $(F4)$, l'ipotesi (1.31) del Lemma 1.22 è soddisfatta, inoltre $(\overline{t},\overline{x},\overline{y})$ è un punto interno di U. Tenuto conto dell'Osservazione 1.24, si può applicare il Lemma 1.22, pertanto per ogni $\lambda > 0$ esistono (τ_1, X) e (τ_2, Y) in $\mathbb{R} \times \mathbf{S}^{n\times n}$ tali che

$$\begin{array}{lcl} (\tau_1, \overline{\Psi}_x, X) & \in & \overline{\mathcal{P}}^{2,+} u(\overline{t},\overline{x}) \ , \\ (-\tau_2, -\overline{\Psi}_y, -Y) & \in & \overline{\mathcal{P}}^{2,-} v(\overline{t},\overline{y}) \ , \\ \tau_1 + \tau_2 & = & \overline{\Psi}_t \end{array} \tag{1.33}$$

e

$$-\left(\frac{1}{\lambda} + \mid A \mid\right) I \leq \begin{pmatrix} X & O \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq A + \lambda A^2 \ . \tag{1.34}$$

Poiché u e v sono rispettivamente una sottosoluzione e una soprasoluzione di (1.17), da (1.33) segue

$$\tau_1 + F_*(\overline{\Psi}_x, X) \leq 0 \ , \qquad -\tau_2 + F^*(-\overline{\Psi}_y, -Y) \geq 0 \ ,$$

da cui

$$\overline{\Psi}_t + F_*(\overline{\Psi}_x, X) - F^*(-\overline{\Psi}_y, -Y) \leq 0 \ . \tag{1.35}$$

Differenziando Ψ in (1.26), si ottiene, posto $\eta = \overline{x} - \overline{y}$,

$$\begin{gathered} \overline{\Psi}_x = \frac{|\ \eta\ |^2\ \eta}{\epsilon} + 2\delta\overline{x} \ , \qquad \overline{\Psi}_y = -\frac{|\ \eta\ |^2\ \eta}{\epsilon} + 2\delta\overline{y} \ , \\ \begin{pmatrix} \overline{\Psi}_{xx} & \overline{\Psi}_{xy} \\ \overline{\Psi}_{yx} & \overline{\Psi}_{yy} \end{pmatrix} \leq \frac{3}{\epsilon} |\ \eta\ |^2 \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + 2\delta \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = A \ . \end{gathered} \tag{1.36}$$

Con una tale A, (1.34) diventa

$$-\mu \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq \nu \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \ , \tag{1.37}$$

dove

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{1}{\lambda} + \frac{6\ |\ \eta\ |^2}{\epsilon} + 2\delta \ , \\ \nu &= (18\ |\ \eta\ |^2\ \lambda + 3\epsilon + 12\delta\epsilon\lambda)\frac{|\ \eta\ |^2}{\epsilon^2} \ , \\ \omega &= 4\delta^2\lambda + 2\delta \ . \end{aligned}$$

Prendendo $\lambda = 1$ in (1.37) e per $0 < \epsilon < \epsilon_0,\ 0 < \gamma < \gamma_0$, consideriamo (1.35) per $\delta \to 0$. A seconda del comportamento di η si presentano due possibili casi (ricordiamo che $\eta = \overline{x} - \overline{y}$):

(I) $\eta \to 0$ quando $\delta \to 0$. Da (1.37) si ricava, posto $\theta = 2\nu + \omega$,

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq \nu \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \theta \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \ .$$

Questo implica $X \leq \theta I$ e $-Y \geq -\theta I$. Da $(F2)$, segue inoltre

$$\begin{aligned} F_*(\overline{\Psi}_x, X) &\geq F_*(\overline{\Psi}_x, \theta I) \ , \\ F^*(-\overline{\Psi}_y, -Y) &\leq F^*(-\overline{\Psi}_y, -\theta I) \ . \end{aligned} \tag{1.38}$$

Per la Proposizione 1.20 $\delta\overline{x} \to 0$ e $\delta\overline{y} \to 0$ e ,quindi, anche $\overline{\Psi}_x$ e $\overline{\Psi}_y$ tendono a zero. Ciò premesso, da (1.38) si ottiene

$$\liminf_{\delta\to 0} F_*(\overline{\Psi}_x, X) \geq F_*(0,0) \ ,$$

$$\limsup_{\delta\to 0} F^*(-\overline{\psi}_y, -Y) \leq F^*(0,0) \ ,$$

poiché $\theta \to 0$. Applicando questo risultato all'equazione (1.35) e notando che

$$\Psi_t = \gamma(T-t)^{-2} \geq \gamma T^{-2} \ ,$$

si ricava

$$\gamma T^{-2} + F_*(0,0) - F^*(0,0) \leq 0 \ ,$$

che, per $(F3)$, porta a $\gamma T^{-2} \leq 0$, che contraddice $\gamma > 0$.

(II) Poiché, per la Proposizione 1.20 (2), $\mid \eta \mid$ è limitata, per $\delta \to 0$, possiamo supporre $\eta \to a \neq 0$ per qualche sottosuccessione $\delta_j \to 0$. Da (1.37) si ottiene

$$\langle Xp, p\rangle + \langle Yq, q\rangle \leq \nu(\mid p \mid^2 + \mid q \mid^2) - 2\nu\langle p, q\rangle + \omega(\mid p \mid^2 + \mid q \mid^2) \ ,$$

che, per $p = q$, dà

$$X + Y \leq 2\omega I \ .$$

Per $(F2)$ otteniamo

$$F^*(-\overline{\Psi}_y, -Y) \leq F^*(-\overline{\Psi}_y, X - 2\omega I) \ . \tag{1.39}$$

Poiché, per $\delta \to 0$, X e Y sono limitate grazie a (1.37), esiste una sottosuccessione $X_j = X(\delta_j)$ e $\overline{X}$ tali che $X_j \to \overline{X}$ quando $\delta_j \to 0$. Applicando, come sopra, il risultato (1.39) all'equazione (1.35), otteniamo

$$\gamma T^{-2} + F_*\left(\frac{\mid a \mid^2 a}{\epsilon}, \overline{X}\right) - F^*\left(\frac{\mid a \mid^2 a}{\epsilon}, \overline{X}\right) \leq 0 \ .$$

Poiché $a \neq 0$, F è continua in $\left(\dfrac{\mid a \mid^2 a}{\epsilon}, \overline{X}\right)$ e questo contraddice nuovamente $\gamma > 0$.

□

Osservazione 1.25. *Si noti che se si suppone che u e v soddisfino la stima (1.19), in particolare se u e v sono limitate, l'ipotesi $F(4)$ nel Teorema 1.17 non è più necessaria.*

Poiché siamo interessati a problemi di evoluzione geometrica di insiemi, considereremo nel seguito una forma particolare dell'equazione (1.16), dove F è tale che

$$F(\lambda p, \lambda X + \sigma p \otimes p) = \lambda F(p, X) \qquad \forall \lambda > 0, \sigma \in \mathbb{R} \ . \tag{1.40}$$

Diremo che una F siffatta è geometrica. Facile conseguenza della definizione è il seguente

Teorema 1.26 (Invarianza). *Sia $\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e non decrescente e sia u una sottosoluzione (risp. soprasoluzione) viscosa di (1.17) in $\Omega \times (0,T]$, con F che soddisfa $(F1)-(F4)$ e (1.40). Allora $\omega(u)$ è ancora una sottosoluzione (risp. soprasoluzione) viscosa di (1.17).*

Diamo una traccia della dimostrazione, per i dettagli si veda [CGG]. Nel caso in cui sia ω che u siano funzioni regolari, la tesi si ottiene mediante un calcolo formale delle derivate. Analogamente, nel caso in cui solo ω sia regolare, è sufficiente calcolare come cambiano i sub-jets e i super-jets di u per composizione con ω. Quando infine ω ed u sono generiche, la tesi si ottiene per approssimazione, sfruttando la Proposizione 1.15.

Quando consideriamo problemi geometrici, siamo interessati solo al comportamento del luogo di zeri della soluzione. Il Teorema seguente ci assicura che tale comportamento dipende solo dal luogo di zeri del dato iniziale. Useremo, nel seguito, $(a \wedge b)$ e $(a \vee b)$, per indicare rispettivamente $\min\{a,b\}$ e $\max\{a,b\}$.

Teorema 1.27. *Sia $\Gamma_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme chiuso, u_0 una funzione non negativa e uniformemente continua tale che $\Gamma_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \ u_0(x) = 0\}$ e u la soluzione viscosa di (1.17) con dato iniziale u_0. Allora gli insiemi*

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \ u(x,t) = 0\} \ ,$$

sono indipendenti dalla scelta di u_0.

Dimostrazione.
Sia $u'(x,t)$ la soluzione viscosa uniformemente continua di (1.17) tale che

$$u'(x,0) = dist(x, \Gamma_0) \ ,$$

e sia

$$\Gamma'_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \ u'(x,t) = 0\} \ .$$

Proveremo che $\Gamma_t = \Gamma'_t$ per ogni $t \geq 0$. Sia

$$\omega(t) = \sup\{u_0(x) : \ dist(x, \Gamma_0) \leq t\} \ .$$

Poiché u_0 è uniformemente continua, anche ω è uniformemente continua e non decrescente, inoltre

$$0 \leq u_0(x) \leq \omega\big(dist(x, \Gamma_0)\big) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ t \geq 0 \ .$$

Pertanto $u(x,t) \leq \omega\big(u'(x,t)\big)$ e quindi $\Gamma'_t \subseteq \Gamma_t$ per ogni $t \geq 0$.
Dimostriamo ora l'inclusione opposta. Sia $\chi(x,t)$ la funzione caratteristica di Γ_t e sia $w = 1 - \chi$, cioè

$$w(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{se } u(x,t) = 0 \ , \\ 1 & \text{altrimenti} \ . \end{cases}$$

Osserviamo che

$$w(x,t) = \liminf_{\substack{(y,s)\to(x,t) \\ \epsilon \to 0}} h^\epsilon\big(u(y,s)\big) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \ t \geq 0 \ ,$$

dove

$$h^\epsilon(r) = \begin{cases} 0 & \text{se } r \leq 0 \ , \\ \dfrac{r}{\epsilon} & \text{se } 0 \leq r \leq \epsilon \ , \\ 1 & \text{se } r \geq \epsilon \ . \end{cases}$$

Per il Teorema 1.26 e la Proposizione 1.15, w è una soprasoluzione viscosa di (1.17). Poiché u è continua, otteniamo

$$0 \leq u'(x,t) \wedge 1 \leq w(x,t) \ .$$

Ne segue che $\Gamma_t \subseteq \Gamma'_t$.

□

Un caso semplice ed interessante di funzione geometrica è

$$F(p, X) = -\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i(X_p) \ , \tag{1.41}$$

dove $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ sono gli autovalori corrispondenti ad autovettori ortogonali a p, ordinati in maniera crescente, della matrice

$$X_p = \left(Id - \frac{p \otimes p}{|\ p\ |^2}\right) \circ X \circ \left(Id - \frac{p \otimes p}{|\ p\ |^2}\right) \ .$$

Si noti che p è sempre un autovettore della matrice X_p, con autovalore corrispondente uguale a 0. Con questa funzione F, l'equazione (1.17) diventa

$$u_t - \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i\big(\overline{\nabla^2 u}\big) = 0 \qquad \text{in } \Omega \times (0,T] \ , \tag{1.42}$$

con

$$\overline{\nabla^2 u} = \left(Id - \frac{\nabla u \otimes \nabla u}{\mid \nabla u \mid^2}\right) \circ \nabla^2 u \circ \left(Id - \frac{\nabla u \otimes \nabla u}{\mid \nabla u \mid^2}\right) \ .$$

Vedremo nel terzo capitolo che tale equazione regola il moto per curvatura media di una varietà di codimensione k. L'esempio più semplice è la soluzione radiale, corrispondente al moto di ipersuperfici sferiche per la somma delle $n-k$ curvature principali più piccole

$$u(x,t) = \sqrt{\mid x - x_0 \mid^2 + 2(n-k)t} \ .$$

Per una tale F vale il seguente

Teorema 1.28 (Esistenza di soluzioni geometriche). *Data F come in (1.41) e $u_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uniformemente continua, esiste un'unica soluzione uniformemente continua $u(x,t)$ di (1.17), con $u(x,0) = u_0$, definita in tutto $\mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$.*

Dimostrazione.
Poiché u_0 è uniformemente continua, esiste un modulo di continuità m ed una costante $K > 0$ tali che

$$\mid u_0(x) - u_0(y) \mid \leq m\big(\mid x - y \mid\big) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \ ,$$

$$m(\rho) \leq K(1+\rho) \qquad \forall \rho > 0 \ .$$

Fissiamo ora $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e, per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$, poniamo

$$b(x_0,x,t) = u_0(x_0) + m\big(\sqrt{\mid x - x_0 \mid^2 + 2(n-k)t}\big) \ ,$$

$$b'(x_0,x,t) = u_0(x_0) - m\big(\sqrt{\mid x - x_0 \mid^2 + 2(n-k)t}\big) \ .$$

Per il Teorema 1.26, b e b' sono soluzioni viscose di (1.42) ed inoltre sono entrambe uniformemente continue in tutto $\mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$. Siano, per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$,

$$f(x,t) = \inf_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \ b(x_0,x,t) \ , \qquad g(x,t) = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \ b'(x_0,x,t) \ .$$

Si ha $f(x,t) \geq g(x,t)$, $f(x,0) = g(x,0) = u_0(x)$, inoltre, poiché le funzioni b e b' sono equicontinue al variare di x_0, f e g sono entrambe uniformemente continue. Per la Proposizione 1.13, esiste una soluzione viscosa $u(x,t)$ di (1.42) tale che

$$g(x,t) \leq u(x,t) \leq f(x,t) \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,+\infty) \ .$$

Poiché f e g sono continue, si ha

$$u^*(x,0) = u_*(x,0) = u_0(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

e, quindi, per il Teorema 1.17, $u^* = u_*$ ovunque, cioè u è continua. Il fatto che u sia unica discende sempre dal Teorema 1.17.
Dimostriamo ora che u è uniformemente continua. Poiché l'equazione è invariante per traslazioni spaziali, dall'uguaglianza

$$| \, u_0(x) - u_0(y) \, | \leq m\big(\, | \, x - y \, | \, \big) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \ ,$$

segue subito, applicando il Teorema 1.17,

$$| \, u(x,t) - u(y,t) \, | \leq m\big(\, | \, x - y \, | \, \big) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \ .$$

Fissiamo $x_0 \in \mathbb{R}^n$, applicando sempre il Teorema 1.17 a $u(x,t)$ e a $b(x_0,x,t)$, otteniamo $u(x,t) \leq b(x_0,x,t)$ per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$. In particolare, per $x = x_0$ si ha

$$u(x_0,t) - u(x_0,0) \leq \big(2(n-k)t\big) \qquad \forall t \geq 0 \ .$$

In maniera simile, considerando $b'(x_0,x,t)$, otteniamo la disuguaglianza opposta. Pertanto si ha

$$| \, u(x_0,t) - u(x_0,0) \, | \leq \big(2(n-k)t\big) \qquad \forall t \geq 0 \ .$$

A questo punto, applicando nuovamente il Teorema 1.17, poiché l'equazione è invariante per traslazioni temporali, si ottiene

$$| \, u(x_0,t) - u(x_0,s) \, | \leq m\big(2(n-k) \, | \, t - s \, | \, \big) \qquad \forall t, s \geq 0 \ ,$$

cioè u è uniformemente continua in tutto $\mathbb{R}^n \times [0,+\infty)$.

□

Capitolo 2

Teoria delle barriere

In questo capitolo illustreremo la nozione di barriera secondo De Giorgi, applicata a problemi di evoluzione di insiemi secondo le curvature.

2.1 Proprietà generali

Cominciamo con alcune definizioni:

Definizione (flusso liscio). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, e sia $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle parti di $\mathbb{R}^n$. Una funzione $f : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ appartiene alla famiglia $\mathcal{F}$ dei flussi lisci se valgono le seguenti condizioni:*

1. *l'insieme $f(t) \subseteq \mathbb{R}^n$ è chiuso con frontiera compatta per ogni $t \in [a,b]$;*

2. *se $d(x,t) = dist\big(x, f(t)\big) - dist\big(x, \mathbb{R}^n \setminus f(t)\big)$ indica la distanza con segno dall'insieme $\partial f(t)$ (che in seguito verrà anche indicata con $dist_{\partial f(t)}(x)$ o con $d_{f(t)}(x)$), allora esiste un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n \times [a,b]$ per la topologia indotta, tale che $d \in \mathbf{C}^\infty(A)$ e $\partial f(t) \times \{t\} \subseteq A$ per ogni $t \in [a,b]$.*

Nel seguito, indicheremo con I l'intervallo $[t_0, +\infty)$.

Definizione (Barriera). *Sia $\mathcal{F}_0$ una sottofamiglia di $\mathcal{F}$, diciamo che una generica funzione $\phi : I \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ è una barriera per $\mathcal{F}_0$ e scriveremo $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_0)$, se per ogni $f \in \mathcal{F}_0$ tale che*

$$f(a) \subseteq \phi(a) \qquad si\ ha \qquad f(b) \subseteq \phi(b)$$

Osservazione 2.1. *In particolare si noti che, secondo questa definizione, $\phi(t) \equiv \mathbb{R}^n$ è barriera per ogni famiglia $\mathcal{F}_0$.*

Definizione (Minima Barriera). *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ arbitrario, $\mathcal{F}_0$ una sottofamiglia dei flussi lisci, chiamiamo* minima barriera *per $\mathcal{F}_0$, contenente E al tempo t_0, la funzione da I nelle parti di $\mathbb{R}^n$ così definita:*

$$\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t) = \bigcap \{\phi(t) |\ \phi : I \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),\ \phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_0),\ E \subseteq \phi(t_0)\} \quad (2.1)$$

per ogni I.

Notiamo che la minima barriera esiste sempre ed è unica. Si potrebbe anche modificare la scelta della famiglia $\mathcal{F}$ dei flussi lisci (richiedendo, ad esempio, che siano solo di classe $\mathbf{C}^k$ o che siano convessi), ottenendo, a priori, una differente minima barriera.
Supporremo, d'ora in poi, che la famiglia $\mathcal{F}_0$ sia invariante per restrizioni temporali, cioè, dato $f : [a, b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),\ f \in \mathcal{F}_0$ e $t \in (a, b)$, si ha che $f\,|_{[a,t]}$ e $f\,|_{[t,b]}$ appartengono a $\mathcal{F}_0$.
Diamo ora alcune proprietà elementari della minima barriera:

Lemma 2.2. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, allora*

1. $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0) \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_0)$;
2. $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t_0) = E$;
3. *se $E_1, E_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, allora*

$$E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \mathcal{M}(E_1, \mathcal{F}_0, t_0)(t) \subseteq \mathcal{M}(E_2, \mathcal{F}_0, t_0)(t) \text{ per ogni } t \in I \ ;$$

4. *se E è tale che $\overset{\circ}{E} = \emptyset$ allora $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t) = \emptyset$ per ogni $t > t_0$* ;
5. *$\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)$ verifica la proprietà di semigruppo, cioè:*

$$\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t_2) = \mathcal{M}\big(\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t_1), \mathcal{F}_0, t_1\big)(t_2) \qquad \text{se } t_0 \le t_1 \le t_2 \ ;$$

6. $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{G}_0 \ \Rightarrow\ \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0) \subseteq \mathcal{M}(E, \mathcal{G}_0, t_0)$.

Dimostrazione.
I punti (1)-(4) sono una diretta conseguenza delle definizioni.
Dimostriamo (5). Sia $\phi : I \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ così definita:

$$\phi(t) = \begin{cases} \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t) & \text{se } t_0 \le t \le t_1 \ , \\ \\ \mathcal{M}\big(\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t_1), \mathcal{F}_0, t_1\big)(t) & \text{se } t > t_1 \ . \end{cases}$$

Allora, grazie al punto (3), $\phi(t_0) = E$ ed inoltre $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_0)$, infatti, dato $f : [a, b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),\ f \in \mathcal{F}_0,\ f(a) \subseteq \phi(a)$, si ha, quando $[a, b] \subseteq [t_0, t_1]$,

$f(b) \subseteq \phi(b)$ grazie a (1); quando $a \geq t_1$, si conclude, sempre per (1), notando che $\phi(t_1) = \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t_1)$. Se $a < t_1 < b$, grazie all'invarianza per restrizioni di $\mathcal{F}_0$, il ragionamento è simile. Dunque ϕ è una barriera su $[t_0, +\infty)$ e pertanto $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t_2) \subseteq \phi(t_2)$. Viceversa, sia $A = \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t_1)$, poiché $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t)$ è una barriera su $[t_1, +\infty)$ che coincide con A per $t = t_1$, possiamo concludere $\mathcal{M}(A, \mathcal{F}_0, t_0)(t_2) \subseteq \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t_2)$ e la proprietà (5) è così provata.
Infine, la proprietà (6) segue dal fatto che, se $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{G}_0$, allora $\mathcal{B}(\mathcal{F}_0) \supseteq \mathcal{B}(\mathcal{G}_0)$.

□

Analizzeremo ora in maggior dettaglio alcune proprietà topologiche elementari della minima barriera. Dato $E \subseteq \mathbb{R}^n$, definiamo

$$E^r = E \cap \overline{\overset{\circ}{E}} \ .$$

Lemma 2.3. *Sia $\phi : I \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_0)$ e sia ϕ^r l'applicazione definita da $\phi^r(t) = \phi(t)^r$ per ogni $t \in I$. Allora $\phi^r \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_0)$.*

Dimostrazione.
Sia $f : [a, b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $\underline{f \in \mathcal{F}_0}$, $f(a) \underline{\subseteq \phi^r}(a) \subseteq \phi(a)$. Poiché $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_0)$, si ha $f(b) \subseteq \phi(b)$ e quindi $\overset{\circ}{f}(b) = f(b) \subseteq \overset{\circ}{\phi}(b)$, da cui segue $f(b) \subseteq \phi^r(b)$.

□

Proposizione 2.4. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$; allora vale*

$$\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t) = \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t)^r = \mathcal{M}(E^r, \mathcal{F}_0, t_0)(t) \qquad \forall t > t_0 \ ; \tag{2.2}$$

2. *possiamo restringerci, nella definizione di minima barriera data in precedenza, alle funzioni $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_0)$ tali che $\phi(t) = \phi(t)^r$ per ogni $t > t_0$, senza che cambi la minima barriera risultante.*

Dimostrazione.
Dimostriamo (1). L'inclusione $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)^r \subseteq \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)$ è immediata. Viceversa, sia $\phi : I \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ così definita:

$$\phi(t) = \begin{cases} E & \text{se } t = t_0 \ , \\ \\ \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)^r(t) & \text{se } t > t_0 \ . \end{cases}$$

Sia ora $f : [a,b] \subseteq I \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{F}_0$, $f(a) \subseteq \phi(a)$. Se $a > t_0$, allora $f(b) \subseteq \phi(b)$ per il Lemma 2.3. Se $a = t_0$, allora $f(a) = f(\overset{\circ}{a}) \subseteq \overset{\circ}{E}$, da cui $f(a) \subseteq E^r = \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t_0)^r$ e quindi $f(b) \subseteq \phi(b)$. Abbiamo così ottenuto $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_0)$. Poiché $E \subseteq \phi(t_0)$, si ha $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0) \subseteq \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)^r$ ed è così dimostrata la prima uguaglianza in (2.2).
Per quanto riguarda la seconda uguaglianza, dal Lemma 2.3 si ottiene subito $\mathcal{M}(E^r, \mathcal{F}_0, t_0) \subseteq \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)^r$, mentre l'inclusione opposta segue facilmente, osservando che l'applicazione $\psi : I \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ definita da

$$\psi(t) = \begin{cases} E & \text{se } t = t_0 \ , \\ \\ \mathcal{M}(E^r, \mathcal{F}_0, t_0)(t) & \text{se } t > t_0 \end{cases}$$

appartiene a $\mathcal{B}(\mathcal{F}_0)$.
Dimostriamo (2). Imponendo la condizione aggiuntiva $\phi(t) = \phi^r(t)$ per ogni $t > t_0$, otteniamo necessariamente un insieme più grande di $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t)$. L'inclusione opposta segue dalla prima uguaglianza in (2.2).

□

Introdurremo ora le nozioni di minima barriera regolarizzata inferiore e superiore, la cui definizione è motivata dal fatto che la minima barriera è sensibile anche a piccolissime modifiche dell'insieme iniziale E. Questi concetti sono inoltre importanti per impostare un confronto tra la nozione di minima barriera e quella di soluzione viscosa.
Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$; per ogni $\rho > 0$ poniamo

$$E_\rho^- = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ dist(x, \mathbb{R}^n \backslash E) > \rho\} \ , \tag{2.3}$$

$$E_\rho^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ dist(x, E) < \rho\} \ . \tag{2.4}$$

Definizione (Minima Barriera Regolarizzata). *Sia $t \in I$, definiamo* minima barriera regolarizzata inferiore *e* superiore*, che indicheremo rispettivamente con $\mathcal{M}_*(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t)$ e $\mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t)$, i seguenti insiemi:*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_*(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t) &= \bigcup_{\rho > 0} \mathcal{M}(E_\rho^-, \mathcal{F}_0, t_0)(t) \ , \\ \mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t) &= \bigcap_{\rho > 0} \mathcal{M}(E_\rho^+, \mathcal{F}_0, t_0)(t) \ . \end{aligned} \tag{2.5}$$

È chiaro dalla definizione che si ha, per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{M}_*(E, \mathcal{F}_0, t_0) \subseteq \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_0, t_0) \subseteq \mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_0, t_0)$$

e

$$\mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_0, t_0) \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_0) \ .$$

Inoltre le seguenti proprietà sono diretta conseguenza delle definizioni.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_*(E, \mathcal{F}_0, t_0) &= \mathcal{M}_*\big(\overset{\circ}{E}, \mathcal{F}_0, t_0\big) \ , \\ \mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_0, t_0) &= \mathcal{M}^*\big(\overline{E}, \mathcal{F}_0, t_0\big) \ . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Osservazione 2.5. *L'equivalente della proprietà (1), nella Proposizione 2.4, non vale per $\mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_0, t_0)$, neppure nell'ipotesi che E sia compatto.*

Dimostrazione.
Consideriamo $n = 2$, $H = \mathrm{tr}(\nabla^2 d)$ e $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_H$ definito dalla disuguaglianza (2.15). Come vedremo nei Teoremi 3.18 e 3.20 del terzo capitolo, stiamo considerando l'evoluzione di curve nel piano secondo la curvarura media. È facile verificare che, posto

$$E = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in \mathbb{R}\} \ ,$$

si ha

$$\mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t) = E \qquad \forall t \geq t_0 \ ,$$

cioè,

$$E = \mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t) \neq \big(\mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t)\big)^r = \emptyset \qquad \forall t \geq t_0 \ .$$

Nel caso in cui si consideri E compatto, proponiamo il seguente esempio. Sia sempre $n = 2$, poniamo $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_H$ con $H = \arctan\big(\mathrm{tr}(\nabla^2 d)\big)$. Se scegliamo

$$E = \left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : \mid x \mid \leq \frac{\pi}{2}\right\} \ ,$$

ci apettiamo che si abbia

$$\mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t) = \begin{cases} \left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : \mid x \mid \leq \dfrac{\pi(t_0 + 1 - t)}{2}\right\} & \forall t \in [t_0, t_0 + 1] \ , \\ \emptyset & \forall t > t_0 + 1 \ , \end{cases}$$

cioè,

$$\mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t) \neq \big(\mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_0, t_0)(t)\big)^r \qquad \forall t \in [t_0, t_0 + 1] \ .$$

□

2.2 Invarianza per traslazioni

Consideriamo ora una famiglia $\mathcal{G}$ di flussi lisci, diremo che $\mathcal{G}$ è invariante per traslazioni spaziali se

$$f(t) \in \mathcal{G} \Longrightarrow f(t) + y \in \mathcal{G} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n \ ,$$

dove con $f(t) + y$ intendiamo l'insieme $\{x + y |\ x \in f(t)\}$.

Proposizione 2.6. *Sia $\mathcal{G}$ una sottofamiglia dei flussi lisci invariante per traslazioni spaziali, allora valgono le seguenti proprietà:*

1. *sia $y \in \mathbb{R}^n$, allora $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$ se e solo se $\phi + y \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$;*
2. *sia $y \in \mathbb{R}^n$, allora*
$$\mathcal{M}(E + y, \mathcal{G}, t_0)(t) = \mathcal{M}(E, \mathcal{G}, t_0) + y \ ;$$
3. *per ogni $\rho > 0$ si ha*
$$\big(\mathcal{M}(E, \mathcal{G}, t_0)(t)\big)^+_\rho \subseteq \mathcal{M}(E^+_\rho, \mathcal{G}, t_0)(t) \qquad \forall t \in I \ .$$

Dimostrazione.
Dimostriamo (1). Siano $y \in \mathbb{R}^n$, $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$, $f : [a, b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{G}$, $f(a) \subseteq \phi(a) + y$. Dall'inclusione $f(a) - y \subseteq \phi(a)$, segue, per l'invarianza per traslazioni di $\mathcal{G}$, $f(b) - y \subseteq \phi(b)$, cioè $f(b) \subseteq \phi(b) + y$.
Dimostriamo (2). Sia $\psi(t) = \phi(t) + y$, allora si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(E, \mathcal{G}, t_0)(t) &= \bigcap \{\phi(t) |\ \phi :\ I \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \phi \in \mathcal{B}(\mathcal{G}), \phi(t_0) \supseteq E\} \\
&= \bigcap \{\psi(t) - y |\ \psi :\ I \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \psi \in \mathcal{B}(\mathcal{G}), \psi(t_0) \supseteq E + y\} \\
&= \bigcap \{\psi(t) |\ \psi :\ I \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n), \psi \in \mathcal{B}(\mathcal{G}), \psi(t_0) \supseteq E + y\} \\
&= \mathcal{M}(E + y, \mathcal{G}, t_0)(t) \ .
\end{aligned}$$

Dimostriamo (3). Da quanto detto segue

$$\bigcup_{y \in B_\rho(0)} \mathcal{M}(E + y, \mathcal{G}, t_0)(t) = \mathcal{M}(E, \mathcal{G}, t_0)(t) + B_\rho(0) = \big(\mathcal{M}(E, \mathcal{G}, t_0)(t)\big)^+_\rho \ . \tag{2.7}$$

Notiamo ora che, per ogni $y \in B_\rho(0)$, abbiamo $E + y \subseteq E + B_\rho(0)$, da cui segue $\mathcal{M}(E + y, \mathcal{G}, t_0) \subseteq \mathcal{M}(E + B_\rho(0), \mathcal{G}, t_0)$. Pertanto, grazie a (2.7), si ottiene

$$\big(\mathcal{M}(E, \mathcal{G}, t_0)(t)\big)^+_\rho \subseteq \mathcal{M}(E + B_\rho(0), \mathcal{G}, t_0)(t) = \mathcal{M}(E^+_\rho, \mathcal{G}, t_0)(t) \ .$$

□

Proposizione 2.7. *Sia $\mathcal{G}$ una famiglia di flussi lisci invariante per traslazioni spaziali, allora*

$$\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{G}) \Longrightarrow \overset{\circ}{\phi} \in \mathcal{B}(\mathcal{G}) \ . \tag{2.8}$$

Dimostrazione.
Sia $f : [a, b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),\ f \in \mathcal{G},\ f(a) \subseteq \overset{\circ}{\phi}(a)$, allora, poiché $\partial f(a)$ è compatto, esiste $\rho > 0$ tale che $f(a) + B_\rho(0) \subseteq \phi(a)$, quindi, grazie all'invarianza per traslazioni di $\mathcal{G}$, $f(b) + B_\rho(0) \subseteq \phi(b)$, cioè $f(b) \subseteq \overset{\circ}{\phi}(b)$.

□

Proposizione 2.8. *Sia $\mathcal{G}$ una famiglia di flussi lisci invariante per traslazioni spaziali, $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{G}),\ E \subseteq \mathbb{R}^n$, allora*

$$d(t) = dist\big(\mathcal{M}(E, \mathcal{G}, t_0)(t), \mathbb{R}^n \setminus \phi(t)\big) \qquad \text{è non decrescente ,} \tag{2.9}$$

dove poniamo convenzionalmente $dist(A, B) = +\infty$ se $A = \emptyset$ o $B = \emptyset$.

Dimostrazione.
Supponiamo che, per un certo $\overline{t} \in I$, si abbia $d(\overline{t}) = \rho > 0$.
Questo implica

$$\mathcal{M}(E, \mathcal{G}, t_0)(\overline{t}) + B_\rho(0) \subseteq \phi(\overline{t}) \ ,$$

da cui segue, per l'invarianza per traslazioni di $\mathcal{G}$,

$$\mathcal{M}(E, \mathcal{G}, t_0)(t) + B_\rho(0) \subseteq \phi(t) \qquad \forall t \geq \overline{t} \ ,$$

cioè, in generale,

$$d(t) \geq d(s) \qquad \forall t \geq s \ .$$

□

Proposizione 2.9. *Sia $\mathcal{G}$ una famiglia di flussi lisci invariante per traslazioni spaziali e sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, allora, per ogni $\rho > 0$, si ha*

$$\big(\mathcal{M}(E, \mathcal{G}, t_0)\big)^-_\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{G}) \ .$$

Dimostrazione.
Fissiamo $\rho > 0$ e sia $\phi(t) = \big(\mathcal{M}(E, \mathcal{G}, t_0)\big)^-_\rho(t)$. Sia inoltre $f : [a, b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{G}$ tale che $f(a) \subseteq \phi(a)$, vogliamo dimostrare che $f(b) \subseteq \phi(b)$. Ragionando come nella dimostrazione della Proposizione precedente, si ottiene che $d(t) = dist\big(f(t), \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{M}(E, \mathcal{G}, t_0)(t)\big)$ è non decrescente in t e, poiché $d(a) > \rho$, si ha $d(b) > \rho$, cioè $f(b) \subseteq \phi(b)$.

□

Proposizione 2.10. *Sia $\mathcal{G}$, come sopra, una sottofamiglia dei flussi lisci invariante per traslazioni spaziali e sia $\mathbf{A}(\mathbb{R}^n)$ la famiglia degli aperti di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{C}(\mathbb{R}^n)$ quella dei chiusi, allora valgono le seguenti proprietà:*

1. *per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e per ogni $t \in I$, si ha*

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}_*(E, \mathcal{G}, t_0)(t) \in \mathbf{A}(\mathbb{R}^n) \ , \\ &\mathcal{M}^*(E, \mathcal{G}, t_0)(t) \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n) \ , \\ &\mathcal{M}_*(E, \mathcal{G}, t_0) \in \mathcal{B}(\mathcal{G}) \ ; \end{aligned} \tag{2.10}$$

2. *se $A \in \mathbf{A}(\mathbb{R}^n)$, allora*

$$\mathcal{M}_*(A, \mathcal{G}, t_0)(t) = \mathcal{M}(A, \mathcal{G}, t_0)(t) \in \mathbf{A}(\mathbb{R}^n) \ . \tag{2.11}$$

Dimostrazione.
Dimostriamo (2.10). Per la proprietà (3) della Proposizione 2.6, con $E^-_{\sigma+\rho}$ al posto di E e $\sigma > 0$, sfruttando il fatto che $E^-_\sigma \supseteq (E^-_{\sigma+\rho})^+_\rho$, otteniamo

$$\mathcal{M}(E^-_\sigma, \mathcal{G}, t_0)(t) \supseteq \bigcup_{\rho>0} \big(\mathcal{M}(E^-_{\sigma+\rho}, \mathcal{G}, t_0)(t)\big)^+_\rho \ , \tag{2.12}$$

cosicché, poiché il membro destro di (2.12) è aperto, abbiamo

$$\overbrace{\big(\mathcal{M}(E^-_\sigma, \mathcal{G}, t_0)\big)}^{\circ} \supseteq \bigcup_{\rho>0} \big(\mathcal{M}(E^-_{\sigma+\rho}, \mathcal{G}, t_0)\big)^+_\rho \supseteq \bigcup_{\rho>0} \mathcal{M}(E^-_{\sigma+\rho}, \mathcal{G}, t_0) \ .$$

Ne segue che

$$\bigcup_{\sigma>0} \overbrace{\left(\mathcal{M}(E_\sigma^-, \mathcal{G}, t_0)\right)}^{\circ} \supseteq \bigcup_{\sigma,\rho>0} \mathcal{M}(E_{\sigma+\rho}^-, \mathcal{G}, t_0) = \mathcal{M}_*(E, \mathcal{G}, t_0) \ ,$$

che porta a

$$\mathcal{M}_*(E, \mathcal{G}, t_0)(t) = \bigcup_{\rho>0} \overbrace{\left(\mathcal{M}(E_\rho^-, \mathcal{G}, t_0)(t)\right)}^{\circ} \in \mathbf{A}(\mathbb{R}^n) \tag{2.13}$$

per ogni $t \in I$.
Sempre per la proprietà (3) della Proposizione 2.6, abbiamo

$$\mathcal{M}(E_{2\rho}^+, \mathcal{G}, t_0)(t) \supseteq \overline{\left(\mathcal{M}(E_\rho^+, \mathcal{G}, t_0)(t)\right)_{\frac{\rho}{2}}^+} \supseteq \overline{\mathcal{M}(E_\rho^+, \mathcal{G}, t_0)(t)} \ ,$$

da cui segue

$$\mathcal{M}^*(E, \mathcal{G}, t_0)(t) = \bigcap_{\rho>0} \mathcal{M}(E_{2\rho}^+, \mathcal{G}, t_0)(t) \supseteq \bigcap_{\rho>0} \overline{\mathcal{M}(E_\rho^+, \mathcal{G}, t_0)(t)} \ ,$$

in modo da ottenere $\mathcal{M}^*(E, \mathcal{G}, t_0)(t) = \bigcap_{\rho>0} \overline{\mathcal{M}(E_\rho^+, \mathcal{G}, t_0)(t)} \in \mathbf{C}(\mathbb{R}^n)$ per ogni $t \in I$.
Dimostriamo ora che $\mathcal{M}_*(E, \mathcal{G}, t_0) \in \mathcal{B}(\mathcal{G})$. Sia $f : [a, b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{G}$, $f(a) \subseteq \mathcal{M}_*(E, \mathcal{G}, t_0)(a)$. Grazie a (2.13), abbiamo

$$f(a) \subseteq \bigcup_{\rho>0} \overbrace{\left(\mathcal{M}(E_\rho^-, \mathcal{G}, t_0)(a)\right)}^{\circ} \ ,$$

da cui segue, poiché $\partial f(a)$ è compatto,

$$f(a) \subseteq \overbrace{\left(\mathcal{M}(E_{\rho_1}^-, \mathcal{G}, t_0)(a)\right)}^{\circ} \subseteq \mathcal{M}(E_{\rho_1}^-, \mathcal{G}, t_0)(a)$$

per qualche $\rho_1 > 0$.
Pertanto $f(b) \subseteq \mathcal{M}(E_{\rho_1}^-, \mathcal{G}, t_0)(b) \subseteq \mathcal{M}_*(E, \mathcal{G}, t_0)(b)$, e (2.10) è così completamente dimostrata.
Resta da dimostrare (2.11). Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme aperto, allora $A = \bigcup_{\rho>0} A_\rho^-$ e quindi $A \subseteq \mathcal{M}_*(A, \mathcal{G}, t_0)(t_0)$. Pertanto, essendo $\mathcal{M}_*$ barriera, si ha $\mathcal{M}_*(A, \mathcal{G}, t_0) \supseteq \mathcal{M}(A, \mathcal{G}, t_0)$.

□

2.3 Soprasoluzioni geometriche

Indicheremo con $H(p, X)$ una funzione definita da $\mathbb{R}^n \times \mathbf{S}^{n\times n}$ in $\mathbb{R}$ che supporremo limitata sui limitati. Come in precedenza diremo che H è *ellittica degenere* se vale

$$H(p, X) \geq H(p, X + Y) \qquad \forall p \in \mathbb{R}^n,\ \forall Y \in \mathbf{S}^{n\times n}\ e\ Y \geq 0\ . \tag{2.14}$$

La funzione H descriverà certe evoluzioni geometriche di insiemi, dipendenti dalle curvature X e dal vettore normale p.

Definizione. *Diremo che H è* compatibile dall'alto *(risp.* dal basso*) se esiste una funzione H_1 limitata sui limitati, ellittica degenere, dispari e continua su $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^{n\times n}$ tale che*

$$H_1 \geq H \qquad (risp.\ H_1 \leq H)\ .$$

Osservazione 2.11. *Se H è compatibile dall'alto allora*

$$H(-p, -X) \leq H_1(-p, -X) = -H_1(p, X) \leq -H(p, X)\ .$$

Definizione. *Diremo che un flusso liscio $f \in \mathcal{F}$ appartiene alla sottofamiglia $\mathcal{F}_H$ se e solo se, detta, come sopra, $d(x, t)$ la distanza con segno da $\partial f(t)$, si ha:*

$$\frac{\partial d}{\partial t} + H(\nabla d, \nabla^2 d) \geq 0 \qquad \forall t \in [a, b],\ \forall x \in \partial f(t)\ . \tag{2.15}$$

Proposizione 2.12. *Per ogni funzione H limitata sui limitati, la famiglia $\mathcal{F}_H$ è non vuota, invariante per traslazioni spaziali e temporali e per restrizioni temporali.*

Dimostrazione
L'idea è quella di far evolvere una sferetta B_R linearmente nel tempo, scegliendo la velocità di contrazione in modo che, grazie al fatto che H è limitata sui limitati, l'evoluzione appartenga a $\mathcal{F}_H$. Per quanto riguarda l'invarianza per traslazioni di $\mathcal{F}_H$, essa segue dal fatto che H non dipende né da x né da t.

□

Si noti che, ragionando come nella dimostrazione precedente, se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un insieme con parte interna non vuota, allora esiste $\tau > 0$ tale che

$$\mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0)(t) \neq \emptyset \qquad \forall t \in [t_0, t_0 + \tau]\ .$$

Ricordiamo che, se, al contrario, $\overset{\circ}{A} = \emptyset$, dal Lemma 2.2 (4) segue

$$\mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0)(t) = \emptyset \qquad \forall t > t_0 \ .$$

La proprietà seguente è un'immediata conseguenza del Lemma 2.2 (6). Siano $H_1 \leq H_2$ limitate sui limitati ed $E \subseteq \mathbb{R}^n$, allora

$$\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_{H_1}, t_0) \subseteq \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_{H_2}, t_0) \ .$$

Mostreremo ora come una barriera $\phi \in \mathcal{F}_H$ non possa perdere istantaneamente insiemi aperti, cioè, in un certo senso, non possa "saltare" verso il basso (al contrario, non vi è alcun controllo verso l'alto, in quanto se si sostituisce una qualunque barriera, da un qualunque momento in poi, con $\mathbb{R}^n$, essa resta barriera).

Definizione. *Sia $C : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una qualunque funzione, per ogni $t \in [a,b]$ definiamo*

$$C^+(t) := \bigcap_{\epsilon \downarrow 0} \overline{\bigcup_{s \in [t, t+\epsilon] \cap [a,b]} C(s)} \ , \qquad C^-(t) := \bigcap_{\epsilon \downarrow 0} \overline{\bigcup_{s \in [t-\epsilon, t] \cap [a,b]} C(s)} \ ,$$

$$C_+(t) := \bigcup_{\epsilon \downarrow 0} \overbrace{\left(\bigcap_{s \in [t, t+\epsilon] \cap [a,b]} C(s) \right)}^{\circ} \ , \qquad C_-(t) := \bigcup_{\epsilon \downarrow 0} \overbrace{\left(\bigcap_{s \in [t-\epsilon, t] \cap [a,b]} C(s) \right)}^{\circ} \ . \tag{2.16}$$

Si noti che C^+ e C^- sono sempre chiusi, mentre C_+ e C_- sono sempre aperti. Inoltre si ha sempre

$$C_-(t) \subseteq C(t) \subseteq C^-(t) \ , \qquad C_+(t) \subseteq C(t) \subseteq C^+(t) \ .$$

Osservazione 2.13. *Sfruttando la Proposizione 2.7 e l'invarianza per traslazioni temporali della famiglia $\mathcal{F}_H$, non è difficile dimostrare che*

$$\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_H) \Longrightarrow \phi_+, \phi_- \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_H) \ .$$

Vale, inoltre, la seguente

Proposizione 2.14. *Sia $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_H)$ per qualche H limitata sui limitati, allora*

$$\overset{\circ}{\phi}(t) = \phi_+(t) \ , \qquad \overbrace{\left(\phi^-(t) \backslash \overline{\phi(t)}\right)}^{\circ} = \emptyset \ .$$

Dimostrazione.
Dimostriamo che

$$\overset{\circ}{\phi}(t) \subseteq \phi_+(t) \qquad \forall t \geq t_0 \ .$$

Sia $t \geq t_0$ e $x \in \overset{\circ}{\phi}(t)$, allora esiste $\rho_0 > 0$ tale che $\overline{B(x,\rho_0)} \subseteq \overset{\circ}{\phi}(t)$, pertanto, ragionando come nella Proposizione 2.12, possiamo trovare $\tau > 0$ e $\rho : [t, t+\tau] \to \mathbb{R}^+$ tale che $\rho(t) = \rho_0$ e $\overline{B\big(x,\rho(s)\big)} \in \mathcal{F}_H$. Da questo segue

$$x \in \overline{B\big(x,\rho(s)\big)} \subseteq \overset{\circ}{\phi}(s) \qquad \forall s \in [t, t+\tau] \ .$$

Cioè $x \in \phi_+(t)$. L'altra inclusione è ovvia.
La seconda uguaglianza si dimostra in maniera simile.

□

Passando al complementare si ha un enunciato analogo

Proposizione 2.15. *Sia $\mathbb{R}^n \setminus \phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_H)$ per qualche H limitata sui limitati, allora*

$$\overline{\phi(t)} = \phi^+(t) \ , \qquad \overbrace{\Big(\overset{\circ}{\phi}(t) \setminus \phi_-(t)\Big)}^{\circ} = \emptyset \ .$$

Corollario 2.16. *Dalle Proposizioni precedenti e dall'Osservazione 2.13, segue subito che, per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$, E aperto, si ha*

$$\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0) = \big(\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)\big)_+ = \big(\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)\big)_- \ .$$

Osservazione 2.17. *Un elemento della famiglia $\mathcal{F}_H$, $f : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, non è in generale una barriera su $[a,b]$, neppure se si ha l'uguaglianza in (2.15). Questo perché l'equazione*

$$\frac{\partial d}{\partial t} + H(\nabla d, \nabla^2 d) = 0$$

non gode del confronto tra le soluzioni, se H non è ellittica degenere.

Quando parleremo, nel seguito, di principio del confronto per H, o per l'equazione

$$u_t + H(\nabla u, \nabla^2 u) = 0 \ ,$$

intenderemo la seguente proprietà geometrica:

per ogni $f, g : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $f, g \in \mathcal{F}$ tali che

$$\frac{\partial d_f}{\partial t}(x,t) + H\big(\nabla d_f(x,t), \nabla^2 d_f(x,t)\big) \geq 0 \qquad \forall t \in [a,b], \forall x \in \partial f(t) \ ,$$

$$\frac{\partial d_g}{\partial t}(x,t) + H\big(\nabla d_g(x,t), \nabla^2 d_g(x,t)\big) \leq 0 \qquad \forall t \in [a,b], \forall x \in \partial g(t) \ ,$$

si ha

$$f(a) \subseteq g(a) \Longrightarrow f(b) \subseteq g(b) \ . \tag{2.17}$$

Proposizione 2.18. *Sia H una funzione ellittica degenere e continua su $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^{n \times n}$, allora l'equazione*

$$u_t + H(\nabla u, \nabla^2 u) = 0$$

gode del principio del confronto.

Dimostrazione.
Per il Teorema 1.28, esiste un'unica soluzione viscosa uniformemente continua $u_f(x,t) : \mathbb{R}^n \times [a, +\infty)$ del problema

$$\begin{cases} u_t + H_1(\nabla u, \nabla^2 u) = 0 \ , \\ \\ u(x,a) = d_{f(a)}(x) \ , \end{cases}$$

con

$$H_1(p, X) = \mid p \mid H\left(\frac{p}{\mid p \mid}, \frac{P_p \circ X \circ P_p}{\mid p \mid}\right) \ ,$$

dove con P_p indichiamo la matrice di proiezione sull'iperpiano ortogonale a p. Sia $u_g(x,t)$ la soluzione della stessa equazione con $u_g(x,a) = d_{g(a)}(x)$. Applicando il Teorema 1.17 alle funzioni u_f e u_g, si ottiene (2.17).

□

Definizione. *Diremo che un flusso liscio $f \in \mathcal{F}$ appartiene alla sottofamiglia $\mathcal{F}_H^=$ se e solo se, detta $d(x,t)$ la distanza con segno da $\partial f(t)$, si ha:*

$$\frac{\partial d}{\partial t} + H(\nabla d, \nabla^2 d) = 0 \qquad \forall t \in [a,b], \ \forall x \in \partial f(t) \ . \tag{2.18}$$

Ciò premesso, vale la seguente

Proposizione 2.19. *Sia H una funzione ellittica degenere e continua su $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^{n\times n}$ tale che, per ogni $\partial\Omega$ ipersuperficie compatta di classe $\mathbf{C}^\infty$, esiste $f : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{F}_H^=$ tale che $f(a) = \overline{\Omega}$ e che $(b-a)$ dipenda con continuità da $\partial\Omega$ in un intorno di quest'ultima in norma $\mathbf{C}^\infty$, allora, per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha*

$$\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H^=, t_0)(t) = \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t) \qquad \forall t \in I \ . \tag{2.19}$$

Inoltre, per ogni $f : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{F}_H^=$, si ha

$$\mathcal{M}\big(f(a), \mathcal{F}_H, t_0\big)(t) = f(t) \qquad \forall t \in [a,b] \ . \tag{2.20}$$

Dimostrazione.
Dimostriamo (2.19). Per il Lemma 2.2 (6), è sufficiente provare

$$\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0) \subseteq \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H^=, t_0) \ .$$

Sia $f : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{F}_H$, $f(a) \subseteq \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H^=, t_0)(a)$, dimostreremo che $f(b) \subseteq \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H^=, t_0)(b)$. L'insieme $\partial f(s)$ è un'ipersuperficie compatta e regolare per ogni $s \in [a,b]$, pertanto, per ipotesi, possiamo trovare $\tau(s) > 0$ tale che esiste un'evoluzione regolare secondo la (2.18) di $\partial f(s)$ in $[s, s+\tau(s)]$. Possiamo trovare $a = t_1 < \ldots < t_{m+1} = b$ tali che $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{m} [t_i, t_{i+1}]$ e $(t_{i+1} - t_i) \leq \tau(t_i)$ per ogni $i \in [1, \ldots, m]$. Indichiamo con $f^i(t)$ l'evoluzione di $f(t_i)$ secondo la (2.18); allora, usando il principio di confronto per H (vedi Proposizione 2.18), abbiamo che $f(t_{i+1}) \subseteq f^i(t_{i+1})$ per ogni $i \in [1, \ldots m]$. Ragionando per induzione su i, otteniamo $f^i(t_i) \subseteq \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H^=, t_0)(t_i)$, da cui segue $f(t_{i+1}) \subseteq \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H^=, t_0)(t_{i+1})$, per ogni i. In particolare, per $i = m$ si ottiene $f(b) \subseteq \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H^=, t_0)(b)$.
Resta da dimostrare (2.20). Grazie a (2.19) ed al Lemma 2.2, è sufficiente mostrare che, dato $f : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{F}_H^=$, si ha $f(t) \supseteq \mathcal{M}(f(a), \mathcal{F}_H^=, a)(t)$ per ogni $t \in [a,b]$, la qual cosa segue ancora dal principio di confronto tra soluzioni regolari.

□

Osservazione 2.20. *La Proposizione precedente è applicabile ad ogni funzione H strettamente ellittica degenere e $\mathbf{C}^\infty$ su $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^{n\times n}$.*

Dimostrazione.
È sufficiente osservare che, per una tale H e per ogni $\partial\Omega$ ipersuperficie compatta di classe $\mathbf{C}^\infty$, esiste $f : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{F}_H^=$ tale che $f(a) = \overline{\Omega}$. Sia

infatti V un intorno aperto di $\partial\Omega$ tale che d_Ω, distanza con segno da $\partial\Omega$, sia regolare in V e sia $u(x,t)$ l'unica soluzione regolare, in $V \times (a, a+\tau]$, di

$$\begin{cases} u_t + H_1\big(\nabla u, (Id - u\nabla^2 u)^{-1}\nabla^2 u\big) = 0 \ , \\ \\ u(x,a) = d_\Omega(x) \ , \end{cases} \tag{2.21}$$

con

$$H_1(p,X) = \mid p \mid H\left(\frac{p}{\mid p \mid}, \frac{P_p \circ X \circ P_p}{\mid p \mid}\right) \ ,$$

dove con P_p indichiamo la matrice di proiezione sull'iperpiano ortogonale a p. Sia infine $f(t) = \{x : \ u(x,t) \leq 0\}$. In [GG] viene dimostrato che esiste sempre un'unica soluzione di classe $\mathbf{C}^\infty$ di (2.21) e che tale soluzione coincide con d_f, distanza con segno da $f(t)$. Si ha quindi

$$\frac{\partial d_f}{\partial t} + H(\nabla d, \nabla^2 d) = \frac{\partial d_f}{\partial t} + H_1(\nabla d, \nabla^2 d)$$

$$= u_t + H_1(\nabla u, \nabla^2 u) = 0 \qquad \forall t \in [a, a+\tau], \ \forall x \in \partial f(t) \ ,$$

dove la prima uguaglianza discende dai Teoremi 3.4 e 3.14 del prossimo capitolo. Infine, τ dipende con continuità dal dato iniziale in un opportuno intorno in norma $\mathbf{C}^{2+\alpha}$, come è mostrato ad esempio in [Lu].

□

Sia ora $\delta(x) = \mid x \mid$, definiamo la funzione $h : \ (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ come segue:

$$h(\epsilon) = \sup_{|x|=\epsilon} \mid H(\nabla\delta, \nabla^2\delta) \mid \ . \tag{2.22}$$

Poiché H è limitata sui limitati, si ha $\limsup_{\epsilon\to\infty} h(\epsilon) < +\infty$.
Scegliamo ora una qualunque funzione $h^* : \ (0, +\infty) \to (0, +\infty)$ di classe $\mathbf{C}^1$, tale che $h^* \geq h$ e $\liminf_{\epsilon\to\infty} h^*(\epsilon) > 0$. Per ogni $\rho > 0$, esiste $t_\rho > 0$ e $f \in \mathbf{C}^1\big((0, t_\rho)\big)$ tale che

$$\begin{cases} \dot f(t) = -h^*\big(f(t)\big) \ , \\ \\ f(0) = \rho \ . \end{cases}$$

Se t_ρ è l'intervallo massimale di esistenza di $f(t)$, si ha

$$\lim_{t\to t_\rho} f(t) = 0 \ .$$

Poiché la funzione $t(\rho) = t_\rho$, definita su $(0, +\infty)$ è continua e strettamente crescente, possiamo trovare una funzione inversa, continua e strettamente crescente, $\rho_H(t) :\ (0, +\infty) \to (0, +\infty)$. Poiché

$$\lim_{\rho \to 0} t_\rho = 0 \ ,$$

possiamo estendere $\rho_H(t)$ per continuità in zero, ponendo $\rho_H(0) = 0$.

Lemma 2.21. *Siano $\phi, \psi :\ I \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ tali che*

$$\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_{H_1}) \ , \qquad \psi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_{H_2}) \tag{2.23}$$

e siano

$$T = \sup\{t \geq t_0 :\ \phi(t) \neq \emptyset,\ \phi(t) \neq \mathbb{R}^n,\ \psi(t) \neq \emptyset,\ \psi(t) \neq \mathbb{R}^n\} \ , \tag{2.24}$$

$$\eta(t) = dist\big(\mathbb{R}^n \backslash \phi(t), \mathbb{R}^n \backslash \psi(t)\big) \qquad \forall t \in [t_0, T) \ . \tag{2.25}$$

Allora, posto $\rho(t) = \rho_{H_1}(t) + \rho_{H_2}(t)$, si ha

$$\eta(s) \geq \eta(t) - \rho(s - t) \qquad \forall s \geq t,\ \ s, t \in [t_0, T) \ . \tag{2.26}$$

In particolare

$$\limsup_{\sigma \uparrow t} \eta(\sigma) \leq \eta(t) \leq \liminf_{s \downarrow t} \eta(s) \qquad \forall t \in [t_0, T) \ . \tag{2.27}$$

Se si ha, invece,

$$\mathbb{R}^n \backslash \phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_{H_3}) \ , \qquad \mathbb{R}^n \backslash \psi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_{H_4}) \tag{2.28}$$

ed inoltre

$$\mathbb{R}^n \backslash \phi = (\mathbb{R}^n \backslash \phi)^r \ , \qquad \mathbb{R}^n \backslash \psi = (\mathbb{R}^n \backslash \psi)^r \ ,$$

allora

$$\eta(t) \geq \limsup_{s \downarrow t} \eta(s) \qquad \forall t \in [t_0, T) \ . \tag{2.29}$$

In particolare, se valgono (2.23) e (2.28), da (2.27) e (2.29) otteniamo

$$\eta(t_0) = \lim_{s \downarrow t_0} \eta(s), \qquad \limsup_{\sigma \uparrow t} \eta(\sigma) \leq \eta(t) = \lim_{s \downarrow t} \eta(s) \qquad \forall t \in (t_0, T) \ . \tag{2.30}$$

Dimostrazione.
Data $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_{H_1})$, per ogni $t \in [t_0, T)$ e per ogni $s > t$ si ha

$$\big\{x \in \mathbb{R}^n : \ dist\big(x, \mathbb{R}^n \backslash \phi(t)\big) > \rho_{H_1}(s-t)\big\} \subseteq \overset{\circ}{\phi}(s) \ . \tag{2.31}$$

Sia ora $x \in \phi(t)$ tale che $dist\big(x, \mathbb{R}^n \backslash \phi(t)\big) > \overline{\rho} > \rho_{H_1}(s-t)$. Sia inoltre $B(\sigma)$ l'evoluzione di $B(x, \overline{\rho})$ secondo l'equazione $\dot{R} = -h^*(\frac{1}{R})$ al tempo $\sigma \in [t, s]$. Poiché l'applicazione $\sigma \to B(\sigma)$ appartiene a $\mathcal{F}_{H_1}$, ne segue $x \in B(s) \subseteq \phi(s)$ e, visto che $\overline{\rho} > \rho_{H_1}(s-t)$, si ha $x \in \overset{\circ}{\phi}(s)$.
Da (2.31) segue che, per ogni $s > t$, si ha

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^n \backslash \overset{\circ}{\phi}(s) \subseteq \big\{x \in \mathbb{R}^n : \ dist\big(x, \mathbb{R}^n \backslash \phi(t)\big) \leq \rho_{H_1}(s-t)\big\} \ , \\ &\mathbb{R}^n \backslash \overset{\circ}{\psi}(s) \subseteq \big\{x \in \mathbb{R}^n : \ dist\big(x, \mathbb{R}^n \backslash \psi(t)\big) \leq \rho_{H_2}(s-t)\big\} \ . \end{aligned} \tag{2.32}$$

Fissiamo ora un ϵ positivo e siano $y \in \mathbb{R}^n \backslash \overset{\circ}{\phi}(s)$ e $z \in \mathbb{R}^n \backslash \overset{\circ}{\psi}(s)$ tali che $\mid y - z \mid \leq \eta(s) + \epsilon$. Da (2.32) otteniamo

$$dist\big(y, \mathbb{R}^n \backslash \phi(t)\big) \leq \rho_{H_1}(s-t) \ , \qquad dist\big(z, \mathbb{R}^n \backslash \psi(t)\big) \leq \rho_{H_2}(s-t) \ .$$

Usando la proprietà triangolare della funzione distanza, si ha

$$\eta(t) \leq \eta(s) + \epsilon + dist\big(y, \mathbb{R}^n \backslash \phi(t)\big) + dist\big(z, \mathbb{R}^n \backslash \psi(t)\big) \leq \eta(s) + \rho(s-t) + \epsilon \ .$$

Mandando ϵ a 0, otteniamo (2.26), da cui segue (2.27).
Dimostriamo (2.29). Siano $t \in [t_0, T), \ \epsilon > 0, \ x_\epsilon \in \overline{\mathbb{R}^n \backslash \phi(t)}, \ y_\epsilon \in \overline{\mathbb{R}^n \backslash \psi(t)}$ tali che $\mid x_\epsilon - y_\epsilon \mid \leq \eta(t) + \epsilon$.
Possiamo supporre $x_\epsilon \in \partial\big(\mathbb{R}^n \backslash \phi(t)\big), \ y_\epsilon \in \partial\big(\mathbb{R}^n \backslash \psi(t)\big)$, da cui, ricordando che $\mathbb{R}^n \backslash \phi = (\mathbb{R}^n \backslash \phi)^r$ e $\mathbb{R}^n \backslash \psi = (\mathbb{R}^n \backslash \psi)^r$, si ottiene $x_\epsilon \in \overline{\mathbb{R}^n \backslash \overline{\phi(t)}}, \ y_\epsilon \in \overline{\mathbb{R}^n \backslash \overline{\psi(t)}}$.
Per ogni $\rho > 0$, l'insieme $B(x_\epsilon, \rho) \cap \big(\mathbb{R}^n \backslash \overline{\phi(t)}\big)$ $\big($risp. $B(y_\epsilon, \rho) \cap \big(\mathbb{R}^n \backslash \overline{\psi(t)}\big)\big)$ contiene quindi una palla B_1 (risp. B_2).
Poiché $\mathbb{R}^n \backslash \phi$ e $\mathbb{R}^n \backslash \psi$ sono barriere, possiamo trovare $s = s(\epsilon, x_\epsilon, y_\epsilon) \geq t$ tale che esista un'opportuna evoluzione $B_1(\sigma)$ (risp. $B_2(\sigma)$) di B_1 (risp. B_2), appartenente a $\mathcal{F}_{H_3}$ (risp. a $\mathcal{F}_{H_4}$), contenuta in $\overline{\mathbb{R}^n \backslash \overline{\phi(\sigma)}}$ (risp. $\overline{\mathbb{R}^n \backslash \overline{\psi(\sigma)}}$), per ogni $t \leq \sigma \leq s$. Una tale evoluzione può essere ottenuta ragionando come in precedenza. Siano ora $z_\sigma \in B_1(\sigma), \ w_\sigma \in B_2(\sigma)$. Per la proprietà triangolare di η si ha che, per ogni $t \leq \sigma \leq s$

$$\eta(\sigma) \leq \mid z_\sigma - w_\sigma \mid \leq \mid z_\sigma - x_\epsilon \mid + \eta(t) + \epsilon + \mid y_\epsilon - w_\sigma \mid \ .$$

Mandando $\sigma \downarrow t,\ \rho \to 0$ e $\epsilon \to 0$, si ottiene (2.29).

□

In particolare, il Lemma precedente si applica alla distanza tra minime barriere, vale infatti il seguente

Lemma 2.22. *Sia H compatibile dall'alto e siano $f, g : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, tali che $f, g \in \mathcal{F}_H$; allora*

$$f(a) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash g(a) \Longrightarrow f(b) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash g(b) \ . \tag{2.33}$$

Dimostrazione.
Sia $H_1 \geq H$ con H_1 ellittica degenere, dispari e continua su $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^{n \times n}$, allora (2.33) vale per H_1. Infatti, sia $\delta(x) = -dist_{\partial f(t)}(x)$, su $\partial f(t)$, si ha

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + H_1(\nabla \delta, \nabla^2 \delta) = -\frac{\partial dist_{\partial f}}{\partial t} - H_1(\nabla dist_{\partial f}, \nabla^2 dist_{\partial f}) \leq 0 \ .$$

Pertanto, grazie al principio del confronto applicato a $\delta(x)$ e a $dist_{\partial g(t)}(x)$, si ottiene la tesi. Sia ora $f_1(t) = \mathcal{M}\big(f(a), \mathcal{F}_{H_1}, t_0\big)(t)$, allora si ha

$$f(b) \subseteq \mathcal{M}\big(f(a), \mathcal{F}_H, t_0\big)(b) \subseteq f_1(b) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{M}\big(g(a), \mathcal{F}_{H_1}, t_0\big)(b)$$

$$\subseteq \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{M}\big(g(a), \mathcal{F}_H, t_0\big)(b) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash g(b) \ .$$

□

Teorema 2.23. *Sia H compatibile dall'alto e sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, allora*

$$\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0) \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_H) \ , \tag{2.34}$$

o, equivalentemente,

$$\mathcal{M}(\mathbb{R}^n \backslash E, \mathcal{F}_H, t_0) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0) \ .$$

Dimostrazione.
Dimostriamo che $\mathbb{R}^n \backslash \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0) \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_H)$. Procediamo per assurdo. Supponiamo che esista una funzione $f : [a,b] \subseteq I \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{F}_H$ e $f(a) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(a)$ tale che $f(b) \cap \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(b) \neq \emptyset$.
Definiamo

$$\phi(t) = \begin{cases} \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t) \cap \big(\mathbb{R}^n \backslash f(t)\big) & se\ t \in [a,b] \ , \\ \\ \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t) & se\ t \in I \backslash [a,b] \ . \end{cases}$$

Mostreremo che $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_H)$. Sia $h : [c,d] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),\ h \in \mathcal{F}_H$ e $h(c) \subseteq \phi(c)$, allora, in particolare, $h(d) \subseteq \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(d)$. Spezzando l'intervallo di definizione di h, possiamo supporre $[c,d] \subseteq [a,b]$, si ha quindi $h(c) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus f(c)$. Osservando che $\mathbb{R}^n \setminus f(t) \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_H)$, come è garantito dal Lemma 2.22, per la minimalità di $\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)$ si ha la tesi.

□

Corollario 2.24. *Sia H compatibile dall'alto, siano $E, F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, T come in (2.24) e sia*

$$\eta(t) = dist\big(\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t), \mathcal{M}(F, \mathcal{F}_H, t_0)(t)\big) \qquad \forall t \in [t_0, T)\ .$$

Allora si ha

$$\eta(t_0) \le \lim_{s \downarrow t_0} \eta(s)\ , \qquad \limsup_{s \uparrow t} \eta(s) \le \eta(t) = \lim_{s \downarrow t} \eta(s) \qquad \forall t \in (t_0, T)\ . \tag{2.35}$$

Inoltre

$$\eta(s) \ge \eta(t) \qquad \forall s \ge t\ . \tag{2.36}$$

Dimostrazione.
Poiché, per il Teorema precedente, il complementare di una minima barriera è barriera, la (2.35) segue dal Lemma 2.21 e dalla Proposizione 2.4 (1). Per quanto riguarda (2.36), segue dal Teorema precedente e dalla Proposizione 2.6 (2).

□

Abbiamo quindi ottenuto che, per H compatibile dall'alto, la distanza tra minime barriere è crescente e continua a destra per ogni $t \in (t_0, T)$.
Il seguente risultato generalizza il Teorema 2.23.

Proposizione 2.25. *Data una generica funzione H limitata sui limitati, supponiamo che esista una funzione $H_1 \ge H$ limitata sui limitati, ellittica degenere e continua su $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^{n \times n}$.*
Allora, per ogni funzione H_2 tale che

$$H_2(p, X) \le -H_1(-p, -X) \qquad \forall (p, X) \in \mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^{n \times n} \tag{2.37}$$

e per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0) \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_{H_2})\ , \\ &\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{M}_*(E, \mathcal{F}_H, t_0) \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_{H_2})\ , \\ &\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_H, t_0) \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_{H_2})\ . \end{aligned} \tag{2.38}$$

Dimostrazione.
È sufficiente dimostrare il Teorema quando $H_2 = -H_1$. Per far questo si ragiona come nella dimostrazione del Lemma 2.22 e la tesi si riduce a mostrare che, dati $f, h : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),\ f \in \mathcal{F}_{H_2},\ h \in \mathcal{F}_H$, si ha

$$h(a) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus f(a) \Longrightarrow h(b) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus f(b)\ .$$

Sia $g(t) = \mathbb{R}^n \setminus f(t)$; poiché $f \in \mathcal{F}_{H_2}$, abbiamo

$$\frac{\partial d_g}{\partial t} + H_1(\nabla d_g, \nabla^2 d_g) \leq 0\ .$$

Dal fatto che $h \in \mathcal{F}_H$ e $\mathcal{F}_H \subseteq \mathcal{F}_{H_1}$, ricaviamo invece

$$\frac{\partial d_h}{\partial t} + H_1(\nabla d_h, \nabla^2 d_h) \geq 0\ .$$

Poiché H_1 è ellittica degenere, possiamo applicare il principio del confronto a g e h, così da ottenere, essendo $h(a) \subseteq g(a)$, $h(b) \subseteq g(b) = \mathbb{R}^n \setminus f(b)$.

□

Dalla precedente Proposizione, tenendo presente il Lemma 2.21, si ottiene

Corollario 2.26. *Per ogni funzione H tale che esiste $H_1 \geq H$ limitata sui limitati, ellittica degenere e continua su $\mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^{n\times n}$ e per ogni $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$, la funzione*

$$t \to dist\big(\mathcal{M}(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t), \mathcal{M}(F, \mathcal{F}_H, t_0)(t)\big)$$

è continua a destra per ogni $t \in (t_0, T)$, dove T è definito come in (2.24).

2.4 Confronto tra Barriere e Viscosità

Lo scopo di questo paragrafo è stabilire un Teorema di confronto per equazioni geometriche tra la soluzione viscosa e la minima barriera $\mathcal{M}$. Per far questo avremo bisogno di alcuni Lemmi preliminari.

Lemma 2.27 (Esistenza di sottoevoluzioni regolari). *Sia H inferiormente semicontinua e siano $\overline{x} \in \mathbb{R}^n, \overline{p} \in \mathbf{S}^{n-1}, \overline{X} \in \mathbf{S}^{n\times n}, \alpha \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha + H(\overline{p}, \overline{X}) > 0$. Allora per ogni $R > 0$ esistono $\tau > 0$, $f : [a, a+\tau] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, tali che*

$$\overline{x} \in \partial f(a), \quad \overline{p} = \nabla d_f(\overline{x}, a), \quad \overline{X} = \nabla^2 d_f(\overline{x}, a), \quad \alpha = \frac{\partial d_f}{\partial t}(\overline{x}, a) \tag{2.39}$$

e

$$f \in \mathcal{F}_H, \qquad f(t) \subseteq B_R(\overline{x}) \qquad \forall t \in [a, a+\tau]\ . \tag{2.40}$$

Dimostrazione.
Fissiamo $R > 0$ ed un'ipersuperficie regolare e compatta, che indicheremo con $\partial f(a)$, tale che $f(a) \subseteq B_R(\overline{x})$, $\overline{x} \in \partial f(a)$, $\nabla d_{f(a)}(\overline{x}) = \overline{p}$, $\nabla^2 d_{f(a)}(\overline{x}) = \overline{X}$ e tale che $\overline{x}$ sia un punto di minimo stretto per $\nabla^2 d_{f(a)}(x)$ su $\partial f(a)$ rispetto all'ordinamento usuale delle matrici simmetriche (potremmo fissare una volta per tutte la scelta di $\partial f(a)$, considerando, ad esempio, un'opportuna famiglia di ellissoidi).
Scegliamo ora $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto tale che $\partial f(a) \subseteq \Omega$ e $d_{f(a)} \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})$. Sia quindi $\overline{H} : \mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ una funzione regolare e strettamente ellittica degenere tale che

$$\begin{aligned} &\alpha + \overline{H}(\overline{p}, \overline{X}) = 0 \ , \\ &\overline{H}(p, X) < H(p, X) \qquad \forall (p, X) \in \mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^{n\times n}, X \geq \overline{X} \ . \end{aligned} \tag{2.41}$$

Diamo una traccia di come è possibile costruire la funzione $\overline{H}$, almeno nel caso in cui H dipenda dalle sole curvature. Definiamo

$$\begin{aligned} K &= \{Y \in \mathbf{S}^{n\times n} : \ Y \geq \overline{X}\} \ , \\ \mathcal{H} &= \{H_1 \text{ ellittica degenere } : \ H_1 \leq H \text{ su } K\} \ . \end{aligned}$$

Sia quindi

$$\hat{H}(Y) = \begin{cases} \sup\limits_{H_1 \in \mathcal{H}} H_1(Y) & \text{se } Y \in K \ , \\ H(\overline{X}) & \text{altrimenti .} \end{cases}$$

Consideriamo la funzione $\tilde{H}(Y) = \hat{H}(Y) - H(\overline{X}) - \alpha$. Si ha

$$\begin{aligned} &\alpha + \tilde{H}(\overline{X}) = 0 \ , \\ &\tilde{H}(Y) < H(Y) \qquad \forall Y \in \mathbf{S}^{n\times n}, Y \geq \overline{X} \ . \end{aligned}$$

Inoltre $\tilde{H}$ è ellittica degenere; pertanto prendendone un'opportuna funzione regolarizzata, costruiamo $\overline{H}$. La dipendenza di H dalla prima variabile non introduce sostanziali modifiche in questo ragionamento.
Sia ora u l'unica soluzione regolare, in $\Omega \times (a, a+\tau]$, di

$$\begin{cases} u_t + H_1\big(\nabla u, (Id - u\nabla^2 u)^{-1}\nabla^2 u\big) = 0 \ , \\ u(x, a) = d_{f(a)}(x) \ , \end{cases} \tag{2.42}$$

con

$$H_1(p, X) = \mid p \mid \overline{H}\left(\frac{p}{\mid p \mid}, \frac{P_p \circ X \circ P_p}{\mid p \mid}\right) \ ,$$

dove P_p è, come nell'Osservazione 2.20, la matrice di proiezione sull'iperpiano ortogonale a p. Sia $f(t) = \{x : \ u(x,t) \leq 0\}$. Come già osservato esiste sempre un'unica soluzione di classe $\mathbf{C}^\infty$ di (2.42) e tale soluzione coincide con d_f distanza con segno da $f(t)$. Con questa definizione di f, le proprietà in (2.39) sono soddisfatte per costruzione, inoltre, al più riducendo τ, possiamo supporre $f(t) \subseteq B_R(\overline{x})$ per ogni $t \in [a, a+\tau]$.
Resta da dimostrare $f \in \mathcal{F}_H$. Sia U la componente connessa dell'insieme $\{(q,Y) \in \mathbf{S}^{n-1} \times \mathbf{S}^{n\times n} : \ \overline{H}(q,Y) < H(q,Y)\}$ contenente $(\overline{p}, \overline{X})$. Poiché H è inferiormente semicontinua, U è aperto ed inoltre, da (2.41) e dal fatto che $\overline{x}$ è un punto di minimo stretto per $\nabla^2 d_{f(a)}$, si ottiene

$$\big(\nabla d_f(x,a), \nabla^2 d_f(x,a)\big) \subseteq U \ , \tag{2.43}$$

per ogni $x \in \partial f(a)$. Poiché $u = d_f$ è regolare ed U è aperto, al più riducendo τ, otteniamo $\big(\nabla d_f(x,t), \nabla^2 d_f(x,t)\big) \in U$ per ogni $t \in [a, a+\tau]$ e per ogni $x \in \partial f(t)$. Pertanto, da (2.41) abbiamo che su $\partial f(t)$ vale

$$0 = \frac{\partial d_f}{\partial t} + \overline{H}(\nabla d_f, \nabla^2 d_f) < \frac{\partial d_f}{\partial t} + H(\nabla d_f, \nabla^2 d_f) \ .$$

□

Si noti che si può prendere l'insieme $f(a)$ strettamente convesso, così da avere $f(t)$ strettamente convesso per un piccolo intervallo di tempo.

Osservazione 2.28. *Il fatto che $\overline{x}$ sia un punto di minimo stretto per $\nabla^2 d_{f(a)}(x)$ ci è servito soltanto per avere la condizione (2.43). In effetti, senza modificare la dimostrazione, potremmo sostituire $\partial f(a)$ con un'ipersuperficie $\partial f'(a)$ che le sia sufficientemente vicina in norma $\mathbf{C}^2$, in modo che, poiché U è aperto, (2.43) resti verificata. Invece di (2.39) potremmo richiedere, ad esempio, che assegnata un'ipersuperficie $\partial\Omega$ tale che*

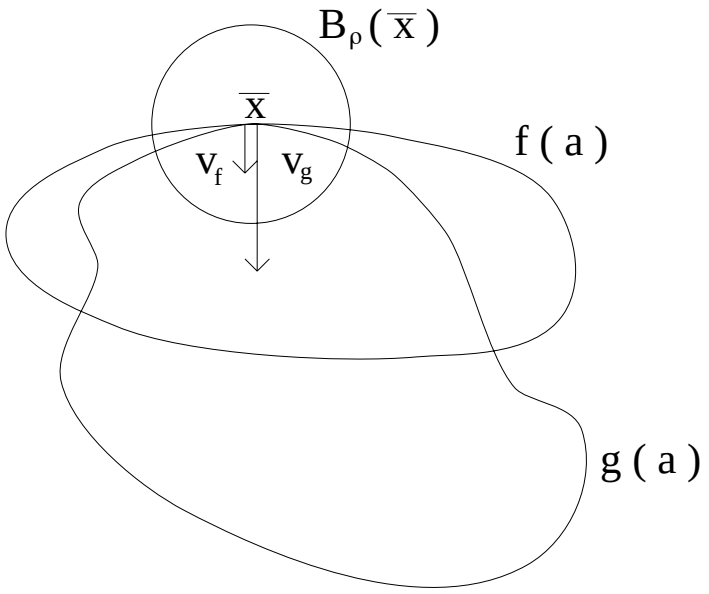
$$\overline{x} \in \partial\Omega \ , \quad \overline{p} = \nabla d_{\partial\Omega}(\overline{x}) \ , \quad \overline{X} = \nabla^2 d_{\partial\Omega}(\overline{x}) \ ,$$

$f(a)$ sia contenuto in Ω e $\partial f(a)$ coincida con $\partial\Omega$ in un opportuno intorno di $\overline{x}$.

Osservazione 2.29. *Dalla dimostrazione in [GG] segue che τ dipende con continuità da d_f in un opportuno intorno $\mathbf{C}^{2+\alpha}$ di $d_{f(a)}(x)$, per ogni $0 < \alpha < 1$.*

Nel seguito sarà utile il seguente Lemma, che permette di confrontare tra loro due flussi lisci tangenti in un punto.

Figura 2.1: posizione dei flussi lisci per $t = a$.



Lemma 2.30. *Siano* $f, g : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $f, g \in \mathcal{F}$, $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ *e* $\rho > 0$. *Supponiamo che valgano (si veda la figura 2.1)*

1. $\overline{x} = \partial f(a) \cap \partial g(a) \cap \overline{B_\rho(\overline{x})}$;
2. $(g(a) \backslash \{\overline{x}\}) \cap \overline{B_\rho(\overline{x})} \subseteq \overset{\circ}{f}(a)$;
3. $\dfrac{\partial d_f}{\partial t}(\overline{x}, a) < \dfrac{\partial d_g}{\partial t}(\overline{x}, a)$.

Allora esiste $0 < \tau \leq b - a$ *tale che*

$$g(t) \cap \overline{B_\rho(\overline{x})} \subseteq \overset{\circ}{f}(t) \qquad \forall t \in (a, a+\tau] \ . \tag{2.44}$$

Dimostrazione.

Sia $c = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial d_g}{\partial t}(\overline{x}, a) - \dfrac{\partial d_f}{\partial t}(\overline{x}, a)\right]$ e sia

$$D(t) = \inf\{|\ x - y\ |\colon\ x \in \partial g(t) \cap \overline{B_\rho(\overline{x})},\ y \in \partial f(t) \cap \overline{B_\rho(\overline{x})}\} \ .$$

Grazie alla continuità di $\dfrac{\partial d_g}{\partial t}$ e di $\dfrac{\partial d_f}{\partial t}$, possiamo trovare $0 < \sigma < \rho$ e $\tau > 0$ tali che si abbia

$$\frac{\partial d_g}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial d_f}{\partial t}(y,t) > c \tag{2.45}$$

$$\forall t \in [a, a+\tau],\ \forall x \in \partial g(t) \cap \overline{B_\sigma(\overline{x})},\ \forall y \in \partial f(t) \cap \overline{B_\sigma(\overline{x})}\ .$$

Inoltre, essendo f e g flussi lisci compatti, inizialmente ben separati fuori da un intorno di $\overline{x}$, essi restano ben separati per un piccolo intervallo di tempo. Pertanto, al più riducendo τ, possiamo supporre che per ogni $x \in \partial g(t) \cap \overline{B_\rho(\overline{x})}$, $y \in \partial f(t) \cap \overline{B_\rho(\overline{x})}$ si abbia anche

$$D(t) = \mid x - y \mid \quad \Longrightarrow \quad x, y \in B_\sigma(\overline{x})\ . \tag{2.46}$$

Combinando (2.45) con (2.46), si ottiene

$$D(t) \geq c(t-a) \qquad \forall t \in [a, a+\tau]\ , \tag{2.47}$$

cioè i due flussi lisci sono ben separati in $\overline{B_\rho(\overline{x})}$ per $t \in (a, a+\tau]$, come volevasi dimostrare.

□

Osservazione 2.31. *Dalla precedente dimostrazione segue che τ dipende con continuità da f e g, per piccole perturbazioni in norma $\mathbf{C}^2$ di questi ultimi, in modo che continuino a soddisfare (1)-(3).*

Ricordiamo che una funzione $H : \mathbb{R}^n \times \mathbf{S}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ si dice *geometrica*, se vale

$$H(\lambda p, \lambda X + \sigma p \otimes p) = \lambda H(p, X) \qquad \forall \lambda > 0, \sigma \in \mathbb{R}\ ,$$

D'ora in poi supporremo $H(p, X)$ limitata sui limitati, geometrica, ellittica degenere, continua su $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \times \mathbf{S}^{n\times n}$ e tale che $H_*(0,0) = H^*(0,0) = 0$.
Con queste ipotesi, come viene mostrato in [GGIS], per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ esiste un'unica soluzione viscosa uniformemente continua $u(x,t) : \mathbb{R}^n \times [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ del problema

$$\begin{cases} u_t + H(\nabla u, \nabla^2 u) = 0\ , \\ \\ u(x, t_0) = u_0(x)\ , \end{cases} \tag{2.48}$$

con $u_0(x) = d_E(x)$. Definiamo

$$V(E)(t) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ u(x,t) < 0\}\ ,$$
$$\overline{V}(E)(t) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ u(x,t) \leq 0\}\ .$$

Data $S(t) :\ [t_0, +\infty) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una collezione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, porremo nel seguito

$$S_\pm(t) = S_+(t) \cap S_-(t)\ , \qquad S^\pm(t) = S^+(t) \cup S^-(t)\ ,$$

dove $S_+(t), S_-(t), S^+(t), S^-(t)$ sono definiti come in (2.16).

Osservazione 2.32. *Sia $S(t) : [t_0, +\infty) \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ una collezione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ tali che le funzioni $d_{S_\pm}(t)$ e $d_{S^\pm}(t)$, che indicano le distanze con segno rispettivamente da $S_\pm(t)$ e $S^\pm(t)$, siano definite per ogni $t \geq t_0$ (cioè, $S_\pm \neq \emptyset$ e $S^\pm \neq \mathbb{R}^n$). Si ha*

$$d_{S^\pm} = (d_{S^\pm})_* \ , \qquad d_{S_\pm} = (d_{S_\pm})^* \ .$$

Dimostrazione.
Poiché entrambe le uguaglianze si dimostrano in maniera simile, dimostreremo qui soltanto la prima. Mostreremo preliminarmente che, data una successione $(x_n, t_n) \to (x, t)$, con $x_n \in S^\pm(t_n)$, si ha $x \in S^\pm(t)$. Infatti, poiché $x_n \in S^\pm(t_n)$ e $(x_n, t_n) \to (x, t)$, esiste una successione $(y_n, s_n) \to (x, t)$ con $y_n \in S(s_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Sia

$$\epsilon_k = \sup\{ \mid s_n - t \mid : \ n \geq k\} \ .$$

Si noti che

$$y_n \in S(s_n) \subseteq \bigcup_{\substack{|t-s| \leq \epsilon_k \\ s \geq t_0}} S(s) \qquad \forall n \geq k \ ,$$

da cui segue

$$x \in \overline{\bigcup_{\substack{|t-s| \leq \epsilon_k \\ s \geq t_0}} S(s)} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \ ,$$

cioè $x \in S^\pm(t)$.
Fissiamo ora $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, +\infty)$ e sia $\beta = d_{S^\pm}(x, t)$. Supponiamo $\beta \leq 0$, allora esiste una successione $y_n \notin S^\pm(t)$ tale che

$$\mid x - y_n \mid \to -\beta \ .$$

Per definizione di $S^\pm(t)$, esiste una successione $\epsilon_n > 0$ tale che

$$y_n \notin \overline{\bigcup_{\substack{|t-s| \leq \epsilon_n \\ s \geq t_0}} S(s)} \ .$$

Pertanto $y_n \notin S^\pm(s)$ per ogni $s \in \big((t - \epsilon_n) \vee t_0, t + \epsilon_n\big)$ e, quindi,

$$d_{S^\pm}(z, s) \geq - \mid z - y_n \mid \qquad \forall z \in \mathbb{R}^n, s \in \big((t - \epsilon_n) \vee t_0, t + \epsilon_n\big) \ .$$

Mandando $z \to x$, si ottiene

$$\liminf_{(z,s) \to (x,t)} d_{S^\pm}(z, s) \geq - \lim_{\substack{n \to \infty \\ z \to x}} \mid z - y_n \mid = \beta \ .$$

Supponiamo $\beta > 0$; si ha

$$\alpha = \liminf_{(z,s)\to(x,t)} d_{S^{\pm}}(z,s) > 0 \ .$$

Infatti, se così non fosse, esisterebbe una sottosuccessione $(\omega_n, t_n) \to (x,t)$ tale che $\omega_n \in S^{\pm}(t_n)$. In tal caso, come mostrato in precedenza, si avrebbe $x \in S^{\pm}(t)$, contro l'ipotesi $\beta > 0$. Scegliamo ora $(z_n, t_n) \to (x,t)$ tale che

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} d_{S^{\pm}}(z_n, t_n) \ .$$

Scegliamo un'ulteriore successione tale che

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \mid z_n - y_n \mid \ .$$

Poiché $\mid x - y_n \mid \leq \mid z_n - y_n \mid + \mid z_n - x \mid$, ne segue che $\mid y_n \mid$ è uniformemente limitata in n e, quindi, a meno di estrarre sottosuccessioni, possiamo supporre che esista $y = \lim y_n$. Allora $\alpha = \mid x - y \mid$ e, per quanto dimostrato in precedenza, $y \in S^{\pm}(t)$. Pertanto

$$\alpha = \mid x - y \mid \geq d_{S^{\pm}}(x,t) = \beta \ .$$

□

Proposizione 2.33. *Siano $\phi = \phi_{\pm} \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_H)$ e $f : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ un flusso liscio. Se esistono $\overline{t} \in (a,b)$ e $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ tali che*

$$\partial f(\overline{t}) \cap \partial\phi(\overline{t}) = \{\overline{x}\} \ ,$$

$$f(\overline{t}) \backslash \{\overline{x}\} \subseteq \overset{\circ}{\phi}(\overline{t}) \ , \tag{2.49}$$

$$f(t) \subseteq \overset{\circ}{\phi}(t) \qquad \forall t \in [a,b] \backslash \{\overline{t}\} \ ,$$

allora

$$\frac{\partial d_f}{\partial t}(\overline{x}, \overline{t}) + H\left(\nabla d_f(\overline{x}, \overline{t}), \nabla^2 d_f(\overline{x}, \overline{t})\right) \leq 0 \ . \tag{2.50}$$

Dimostrazione.
Supponiamo che valga, per assurdo,

$$\frac{\partial d_f}{\partial t}(\overline{x}, \overline{t}) + H\left(\nabla d_f(\overline{x}, \overline{t}), \nabla^2 d_f(\overline{x}, \overline{t})\right) = 2c > 0 \ .$$

Poiché f è un flusso liscio, esiste $\tau > 0$ tale che, per ogni $t \in [\overline{t}-\tau, \overline{t}+\tau]$, è ben definita una proiezione unica $\pi(\cdot,t) : \partial f(t) \to \partial f(\overline{t})$. D'ora in poi ci restringeremo a tale intervallo e indicheremo per semplicità con $x(t)$ la coppia $\big(\pi^{-1}(\overline{x}), t\big)$ (stiamo cioè parametrizzando $\partial f(t)$ con $\partial f(\overline{t})$).
Siano $p(t) = \nabla d_f\big(x(t)\big)$, $X(t) = \nabla^2 d_f\big(x(t)\big)$, $\alpha = c - H\big(p(\overline{t}), X(\overline{t})\big)$. Poiché $H(p,X)$ è continua per $p \neq 0$ e $\dfrac{\partial d_f}{\partial t}\big(x(t)\big)$ è continua in t, al più riducendo τ possiamo supporre

$$\frac{\partial d_f}{\partial t}\big(x(t)\big) > \alpha \qquad \text{e} \qquad \alpha + H\big(p(t), X(t)\big) > 0 \qquad \forall t \in [\overline{t}-\tau, \overline{t}+\tau] \ .$$

Poiché inoltre $\partial f(t)$ è un'ipersuperficie compatta di classe $\mathbf{C}^\infty$ e, grazie all'Osservazione 2.32, la funzione distanza da $\mathbb{R}^n \backslash \phi_\pm$ è inferiormente semicontinua, possiamo trovare un flusso liscio $f'(t) : [\overline{t}-\tau, \overline{t}+\tau] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, arbitrariamente vicino a f in norma $\mathbf{C}^3$, che soddisfi ancora (2.49) nell'intervallo di definizione e tale che

$$f(t) \subseteq f'(t) \ , \ \partial f(t) \cap \partial f'(t) = (\overline{x}, t) \ , \ \nabla^2 d_{f'}\big(x(t)\big) = X(t) \quad \forall t \in [\overline{t}-\tau, \overline{t}+\tau] \ . \tag{2.51}$$

Sia ora $t < \overline{t}$. Applicando il Lemma 2.27 a $\big(x(t), p(t), X(t), \alpha\big)$, grazie all'Osservazione 2.28, otteniamo $g_t(s) : [t, t+\sigma(t)] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ e $\rho > 0$ (si veda la figura 2.2) tali che

$$g_t \in \mathcal{F}_H \ , \qquad g_t(t) \subseteq f'(t) \subseteq \phi(t) \ , \qquad g_t(t) \cap \overline{B_\rho(\overline{x})} = f'(t) \cap \overline{B_\rho(\overline{x})} \ .$$

Dall'ultima uguaglianza e da (2.51) si ottiene

$$\big(f(t) \backslash \{x(t)\}\big) \cap \overline{B_\rho(\overline{x})} \subseteq \overset{\circ}{g_t}(t) \ .$$

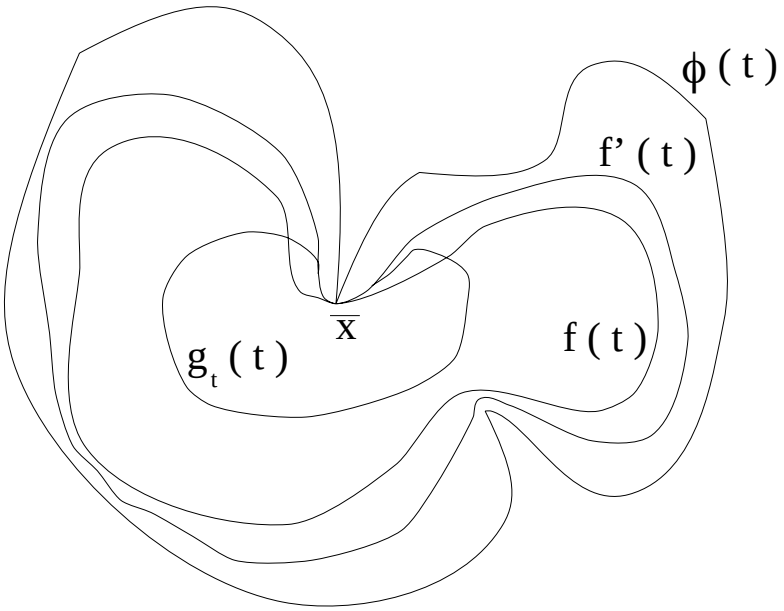
Poiché, per $t \to \overline{t}$, possiamo scegliere $\partial g_t(t)$ convergente a $\partial g_{\overline{t}}(\overline{t})$ in norma $\mathbf{C}^3$, grazie all'Osservazione 2.29 abbiamo che $\sigma(t) \to \sigma(\overline{t}) > 0$.
Scegliamo ora $t_1 < \overline{t}$ tale che $\overline{t} - t_1 < \sigma(t_1)$ e applichiamo alla coppia f, g_{t_1} il Lemma 2.30. Pertanto esiste $\sigma_1 > 0$ tale che

$$f(t) \cap \overline{B_\rho(\overline{x})} \subseteq \overset{\circ}{g_{t_1}}(t) \qquad \forall t \in (t_1, t_1+\sigma_1] \ . \tag{2.52}$$

Scegliendo t_1 ancor più vicino a $\overline{t}$, grazie all'Osservazione 2.31 possiamo supporre di nuovo $\overline{t} - t_1 < \sigma_1$.
In particolare, da (2.52) segue, per $t = \overline{t}$,

$$\overline{x} \in \overset{\circ}{g_{t_1}}(\overline{t}) \subseteq \overset{\circ}{\phi}(\overline{t}) \ ,$$

Figura 2.2: costruzione della soprasoluzione geometrica g_t .



contro l'ipotesi $\overline{x} \in \partial\phi(\overline{t})$.

□

Analogamente al Lemma 1.12, la seguente Proposizione stabilisce un legame tra le soprasoluzioni geometriche regolari e le soprasoluzioni viscose di (2.48).

Proposizione 2.34. *Sia $f \in \mathcal{F}_H$, allora $\big(d_f(x,t) \vee 0\big)$ è una soprasoluzione viscosa inferiormente semicontinua del problema (2.48) in $\mathbb{R}^n \times (a,b)$.*

Per una dimostrazione dettagliata, nel caso di un flusso f di codimensione arbitraria si veda il Lemma 3.19 ed il Corollario 3.21 del prossimo capitolo.

Siamo ora in grado di enunciare il Teorema di confronto tra la nozione di minima barriera e quella di soluzione viscosa.

Teorema 2.35. *Nelle ipotesi sopra enunciate su H, per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si ha*

$$\mathcal{M}_*(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t) = V(E)(t) \qquad \forall t \in [t_0, +\infty) \ , \tag{2.53}$$

$$\mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t) = \overline{V}(E)(t) \qquad \forall t \in [t_0, +\infty) \ . \tag{2.54}$$

Dimostrazione.
È sufficiente dimostrare che, per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A aperto, si ha

$$V(A)(t) = \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0)(t) \qquad \forall t \in [t_0, +\infty) \ . \tag{2.55}$$

Infatti, per $A = \overset{\circ}{E}$, si ottiene la prima uguaglianza, mentre la seconda si ottiene per $A = E_\rho^+$, mandando successivamente $\rho \to 0$.
Dimostriamo $V(A) \supseteq \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0)$, per far questo proveremo che $V(A)$ è una barriera per $\mathcal{F}_H$. Sia quindi $f \in \mathcal{F}_H$, $f(a) \subseteq V(A)(a)$, allora, grazie alla Proposizione 2.34, $d_f(x,t) \vee 0$ è una soprasoluzione viscosa di (2.48). D'altro canto, poiché $f(a) \subseteq V(A)(a)$, esiste una funzione $\omega(t)$, uniformemente continua e non decrescente, tale che $\omega(0) \leq 0$ e $\omega\big(d_f(\cdot, a) \vee 0\big) \geq u(\cdot, a)$, dove $u(x,t)$ è la soluzione viscosa di (2.48) tale che $V(A)(t) = \{u(x,t) < 0\}$ (per la costruzione di ω si veda la dimostrazione del Teorema 1.27). Pertanto, dai Teoremi 1.17 e 1.26 e dalla uniforme continuità di $d_f \vee 0$ e di u, si ottiene

$$\omega\big(d_f(\cdot, t) \vee 0\big) \geq u(\cdot, t) \qquad \forall t \in [a, b]$$

e, quindi,

$$f(t) \subseteq V(A)(t) \qquad \forall t \in [a, b] \ .$$

Dimostriamo ora $V(A) \subseteq \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0)$. Siano

$$T = \sup\{t \geq t_0 : \ \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0)(t) \neq \emptyset \text{ e } \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0)(t) \neq \mathbb{R}^n\}$$

e

$$d(x,t) = -dist\big(x, \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0)(t)\big) \ .$$

Poiché

$$\begin{array}{lll}
V(A)(\overline{t}) = \emptyset & \Longrightarrow \ V(A)(t) = \emptyset & \forall t \geq \overline{t} \ , \\
\mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0)(\overline{t}) = \emptyset & \Longrightarrow \ \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0)(t) = \emptyset & \forall t \geq \overline{t} \ , \\
\mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0)(\overline{t}) = \mathbb{R}^n & \Longrightarrow \ \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0)(t) = \mathbb{R}^n & \forall t \geq \overline{t} \ ,
\end{array}$$

è sufficiente dimostrare l'inclusione nell'intervallo $[t_0, T]$. Dimostreremo che d è una sottosoluzione viscosa di (2.48) in $(t_0, T]$. Mostrato ciò, poiché grazie al Corollario 2.16 e all'Osservazione 2.32

$$\begin{aligned}
d(x,t) &= -dist\big(x, \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{M}_\pm(A, \mathcal{F}_H, t_0)(t)\big) \\
&= -\Big(dist\big(x, \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{M}_\pm(A, \mathcal{F}_H, t_0)(t)\big)\Big)_* = d^*(x,t) \ ,
\end{aligned}$$

possiamo applicare il Teorema 1.17 a d e a u, ottenendo

$$d(x,t) \leq u(x,t) \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, T] \ ,$$

da cui si ottiene l'inclusione cercata.
Siano quindi $(\overline{x},\overline{t}) \in \mathbb{R}^n \times (t_0,T]$ e $(\tau,p,X) \in \mathcal{P}^{2,+}d(\overline{x},\overline{t})$, la tesi equivale a dimostrare $\tau + H_*(p,X) \leq 0$. Poiché la funzione H è geometrica, possiamo supporre $X \circ p = 0$.
Notiamo che, per ogni $x \in \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{M}(A,\mathcal{F}_H,t_0)(t)$, possiamo trovare una successione $(x_n,t_n) \to (x,t)$ tale che si abbia $t_n < t$ e $x_n \in \mathbb{R}^n \backslash \mathcal{M}(A,\mathcal{F}_H,t_0)(t_n)$, pertanto, ragionando come nel Lemma 3.19, possiamo supporre $d(\overline{x},\overline{t}) < 0$, cioè $\overline{x} \in \mathcal{M}(A,\mathcal{F}_H,t_0)(\overline{t})$. Supponiamo inoltre $\overline{t} < T$ (per $\overline{t} = T$ si procede in maniera analoga). Come mostreremo nel prossimo capitolo, da $d < 0$ segue $\mid p \mid = 1$, inoltre, grazie all'Osservazione 1.16, è sufficiente dimostrare la disuguaglianza quando

$$(\tau,p,X) = \left(\phi_t(\overline{x},\overline{t}), \nabla\phi(\overline{x},\overline{t}), \nabla^2\phi(\overline{x},\overline{t})\right) ,$$

per qualche funzione $\phi \in \mathbf{C}^\infty$ tale che $d - \phi$ ha massimo globale stretto in $(\overline{x},\overline{t})$, cioè

$$\max_{\mathbb{R}^n \times (t_0,T)} (d-\phi) = (d-\phi)(\overline{x},\overline{t}) = 0 .$$

Siano ora $\overline{y} \in \partial\mathcal{M}(A,\mathcal{F}_H,t_0)(\overline{t})$ tale che $\mid \overline{x} - \overline{y} \mid = -d(\overline{x} - \overline{y})$ e

$$\psi(x,t) = \phi(x + \overline{x} - \overline{y}, t) - \phi(\overline{x},\overline{t}) \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (t_0,T) .$$

Notiamo che, per la disuguaglianza triangolare della distanza, $d - \psi$ ha un massimo globale stretto in $(\overline{y},\overline{t})$, in particolare si ha

$$(\tau,p,X) = \left(\psi_t(\overline{y},\overline{t}), \nabla\psi(\overline{y},\overline{t}), \nabla^2\psi(\overline{y},\overline{t})\right) \in \mathcal{P}^{2,+}d(\overline{y},\overline{t}) .$$

Scegliamo $\sigma > 0$ ed una funzione $\chi : \mathbb{R}^n \times [\overline{t} - \sigma, \overline{t} + \sigma] \to \mathbb{R}$ tale che

- $\chi \in \mathbf{C}^\infty$;
- $\chi \geq \psi$ e $\chi(\overline{y},\overline{t}) = \psi(\overline{y},\overline{t})$;
- esiste $M > 0$ tale che $\mid x \mid > M \Rightarrow \chi(x,t) > 0$;
- $$(\tau,p,X) = \left(\chi_t(\overline{y},\overline{t}), \nabla\chi(\overline{y},\overline{t}), \nabla^2\chi(\overline{y},\overline{t})\right) ;$$
- $\chi^2 + \mid \nabla\chi \mid^2 > 0$.

Possiamo supporre che la funzione χ soddisfi l'ultima condizione, che è la più delicata, poiché abbiamo $p \neq 0$. Definiamo quindi, per $t \in [\overline{t} - \sigma, \overline{t} + \sigma]$,

$$f(t) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \chi(x,t) \leq 0\right\} .$$

Per la scelta di χ abbiamo che $f \in \mathcal{F}$ e

$$(\tau, p, X) = \left(\frac{\partial d_f}{\partial t}(\overline{y}, \overline{t}), \nabla d_f(\overline{y}, \overline{t}), \nabla^2 d_f(\overline{y}, \overline{t}) \right) \ .$$

Inoltre

$$\begin{aligned} &\partial f(\overline{t}) \cap \partial \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0)(\overline{t}) = \overline{y} \ , \\ &f(\overline{t}) \backslash \{\overline{y}\} \subseteq \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0)(\overline{t}) \ , \\ &f(s) \subseteq \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0)(s) \qquad \forall s \in [\overline{t} - \sigma, \overline{t} + \sigma] \backslash \{\overline{t}\} \ . \end{aligned}$$

Pertanto, applicando la Proposizione 2.33 a f e a $\mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0)$, otteniamo

$$\tau + H_*(p, X) = \frac{\partial d_f}{\partial t}(\overline{y}, \overline{t}) + H\big(\nabla d_f(\overline{y}, \overline{t}), \nabla^2 d_f(\overline{y}, \overline{t})\big) \leq 0 \ .$$

□

2.5 Applicazioni al moto per curvatura media

Consideriamo la seguente funzione

$$H(p, X) = -\sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \ , \tag{2.56}$$

dove $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ sono gli autovalori corrispondenti ad autovettori ortogonali a p, ordinati in maniera crescente, della matrice

$$X_p = \left(Id - \frac{p \otimes p}{\mid p \mid^2} \right) \circ X \circ \left(Id - \frac{p \otimes p}{\mid p \mid^2} \right) \ ,$$

che rappresenta la proiezione di X sull'iperspazio ortogonale a p.
Come abbiamo già osservato e come vedremo in maggior dettaglio nel prossimo capitolo, l'equazione corrispondente a questa funzione rappresenta il moto per curvatura media in codimensione k. Tale H è continua su $\mathbb{R}^n \backslash \{0\} \times \mathbf{S}^{n \times n}$, ellittica degenere e geometrica, pertanto ad H si applicano tutti i risultati dei paragrafi precedenti.
Analogamente a quanto fatto all'inizio di questo capitolo, introduciamo la nozione di flusso liscio di codimensione arbitraria.

Definizione. *Diremo che una funzione $f : [a, b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ appartiene alla famiglia $\mathcal{G}$ dei flussi lisci di dimensione $n-k$, se valgono le seguenti proprietà:*

1. *per ogni* $t \in [a,b]$, $f(t) = \Gamma_t$ *è una sottovarietà di classe* $\mathbf{C}^\infty$ *di* $\mathbb{R}^n$, *connessa, compatta, senza bordo, di dimensione* $n-k$;

2. *esiste un'applicazione di classe* $\mathbf{C}^\infty$, $\phi : \Gamma_a \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *tale che*

   - *per ogni* $t \in [a,b]$, $\phi(\cdot,t)$ *è biunivoca e la matrice Jacobiana tangenziale di* $\phi(\cdot,t)$ *ha, su tutto* Γ_a, *rango* $n-k$;
   - $\phi(\Gamma_a, t) = \Gamma_t$, *per ogni* $t \in [a,b]$;
   - $\phi(x,0) = x$, *per ogni* $x \in \Gamma_a$.

Accanto alla famiglia $\mathcal{F}_H$ introdotta in precedenza $\big($si veda (2.15)$\big)$, definiamo $\mathcal{G}_H$ come segue:

Definizione. *Diremo che una funzione* $f : [a,b] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, $f \in \mathcal{G}$ *appartiene alla famiglia* $\mathcal{G}_H$, *se*

$$\phi_t(x,t) = \overline{H}(\phi(x,t),t), \ \textit{per ogni } x \in \Gamma_a, \ t \in [a,b] \ .$$

Dove con $\overline{H}(x,t)$ si è indicato il vettore curvatura media di Γ_t in x (per una definizione precisa, si veda §3.3). Come in precedenza, è possibile definire una nozione di barriera e minima barriera anche per la famiglia $\mathcal{G}_H$. Citiamo, in proposito, la seguente

Congettura (De Giorgi). *Per ogni* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *aperto, si ha*

$$\mathcal{M}(A, \mathcal{G}_H, t_0) = \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0) \ .$$

Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 2.35, l'uguaglianza delle minime barriere sugli aperti implica l'uguaglianza delle minime barriere regolarizzate su tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$.

Corollario 2.36. *Se vale la Congettura precedente, si ha*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_*(E, \mathcal{G}_H, t_0)(t) &= \mathcal{M}_*(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t) \qquad \forall t \in [t_0, +\infty) \ , \\ \mathcal{M}^*(E, \mathcal{G}_H, t_0)(t) &= \mathcal{M}^*(E, \mathcal{F}_H, t_0)(t) \qquad \forall t \in [t_0, +\infty) \ , \end{aligned}$$

per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Osservazione 2.37. *Non è difficile dimostrare*

$$\mathcal{M}(A, \mathcal{G}_H, t_0) \subseteq \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_H, t_0) \ .$$

Dimostrazione.
Sia $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_H)$, dimostreremo che $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{G}_H)$.
Sia $\{\Gamma_t\}_{t\in[a,b]}$ una funzione in $\mathcal{G}_H$ tale che $\Gamma_a \subseteq \phi(a)$. Scegliamo $\sigma > 0$ tale che $\eta(x,t) = \dfrac{1}{2} dist^2(x,\Gamma_t)$ sia di classe $\mathbf{C}^\infty$ in

$$Q = \{(x,t) : \ a \le t \le b, \ \eta'(x,t) \le 2\sigma^2\}$$

(vedremo che questo è sempre possibile grazie al Teorema 3.12 del prossimo capitolo).
Sia inoltre, per $t \in [a,b]$, $\Omega_t = \{\eta(\cdot,t) < \sigma^2\}$. Allora, grazie ai Teoremi 3.11 e 3.20 del prossimo capitolo, $\{\Omega_t\}_{t\in[a,b]} \in \mathcal{F}_H$. In effetti, in un intorno di $\partial\Omega_t$, si ha

$$d_{\Omega_t}(x) = dist(x,\Gamma_t) - \sigma \ .$$

Eventualmente riducendo σ, possiamo supporre

$$\Omega_a \subseteq \overset{\circ}{\phi}(a) \ .$$

Poiché $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{F}_H)$, grazie alla Proposizione 2.7, otteniamo

$$\Gamma_t \subseteq \Omega_t \subseteq \overset{\circ}{\phi}(t) \subseteq \phi(t) \qquad \forall t \in [a,b] \ ,$$

da cui segue $\phi \in \mathcal{B}(\mathcal{G}_H)$.

□

Se la precedente congettura risultasse verificata, avremmo che, per ogni insieme aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{M}(A,\mathcal{G}_H,t_0) = \mathcal{M}(A,\mathcal{F}_H,t_0) = V(A) \ .$$

Capitolo 3

Proprietà della funzione distanza

3.1 Proprietà generali

Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$, definiamo distanza con segno da ∂E

$$d_E(x,t) = \inf_{y \in E} \mid x - y \mid - \inf_{y \in \mathbb{R}^n \setminus E} \mid x - y \mid \ . \tag{3.1}$$

Considereremo anche la distanza al quadrato da E, così definita

$$\eta_E(x) = \frac{1}{2} \inf_{y \in E} \mid x - y \mid^2 \ . \tag{3.2}$$

Si noti che

$$d_E(x) = d_{\overline{E}}(x) \qquad \text{e} \qquad \eta_E(x) = \eta_{\overline{E}}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \ .$$

Pertanto possiamo supporre, nel seguito, $E = \overline{E}$.

Definizione. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia $u : \Omega \to \mathbb{R}$, diciamo che u è* semiconcava *in Ω se, per ogni palla B tale che $\overline{B} \subseteq \Omega$, esiste $c(B) > 0$ tale che*

$$u - c(B) \mid x \mid^2 \qquad \textit{è concava in } B \ .$$

Indicheremo con $S(\Omega)$ lo spazio vettoriale delle funzioni semiconcave in Ω. Vale il seguente

Teorema 3.1. *Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$, η_E è semiconcava con costante $c = \frac{1}{2}$.*

Dimostrazione.

$$\eta_E(x) - \frac{1}{2} \mid x \mid^2 = \inf_{y\in E} \frac{1}{2}\left(\mid x-y \mid^2 - \mid x \mid^2 \right) = \inf_{y\in E} \left(-\langle x, y\rangle + \frac{\mid y \mid^2}{2} \right) \ .$$

□

Osservazione 3.2. *Allo stesso modo si può dimostrare che d_E è semiconcava in $\Omega = \{x : \ d_E(x) > 0\}$, con costante $c(B) = \sup_{x\in B} \big(d_E(x)\big)^{-1}$.*

Per ogni $u \in S(\Omega)$ e $x \in \Omega$, definiamo

$$\partial^+ u(x) = \big\{ p \in \mathbb{R}^n : \ u(y) - u(x) - \langle p, y-x\rangle \le o\big(\mid y-x \mid \big) \big\} \ ,$$
$$\partial^- u(x) = \big\{ p \in \mathbb{R}^n : \ u(y) - u(x) - \langle p, y-x\rangle \ge o\big(\mid y-x \mid \big) \big\} \ .$$

Questi non sono altro che i super-jets e sub-jets del primo ordine di u in x (si veda §1.1 (1.9)). Inoltre, $\partial^+ u(x)$ è sempre compatto, convesso e non vuoto.
Se u è differenziabile in x, $\partial^+ u(x) = \big\{\nabla u(x)\big\}$; in generale, posto

$$\partial_* u(x) = \big\{ p \in \mathbb{R}^n : \ p = \lim_{x_h \to x} \nabla u(x_h) \big\} \ ,$$

si ha

1. $\partial^+ u(x) \neq \emptyset$;
2. $\partial^+ u(x) = \{p\}$ se e solo se u è differenziabile in x e $\nabla u(x) = p$;
3. $$\partial^+ u(x) = \overline{Co}\big(\partial_* u(x)\big) = \left\{ \bigcap_V \overline{V} : \ V \text{convesso}, \ V \supseteq \partial_* u(x) \right\} \ ;$$
4. $\partial^- u(x) \neq \emptyset$ se e solo se u è differenziabile in x e $\nabla u(x) = p$;

come è mostrato, ad esempio, in [PLL]. Come facile conseguenze delle proprietà sopra elencate, data un'equazione del tipo

$$E(u, \nabla u) = 0 \ , \tag{3.3}$$

con E continua e convessa nella seconda variabile, si ha

Proposizione 3.3. *Per ogni $u \in S(\Omega)$,*

$$u \text{ è sol. viscosa di (3.3)} \iff u \text{ è sol. quasi ovunque di (3.3)} ,$$

Dimostrazione.
Dimostriamo ($\Rightarrow$). Segue facilmente da (2) e (4), notando che una funzione semiconcava è localmente lipschitziana e quindi, per il Teorema di Rademacher, è differenziabile quasi ovunque.
Dimostriamo ($\Leftarrow$). L'unica cosa da verificare è che u sia soluzione viscosa nei punti in cui non è differenziabile. Per (4), in tali punti si ha $\partial^- u = \emptyset$, pertanto la tesi si riduce a mostrare

$$E\big(u(x), p\big) \leq 0 \qquad \forall p \in \partial^+ u(x) \ . \tag{3.4}$$

Sia quindi $p \in \partial^+ u(x)$; distinguiamo due casi:

(a) Sia $p \in \partial_* u(x)$; allora possiamo trovare una successione $x_h \to x$ tale che $p = \lim_{x_h \to x} \nabla u(x_h)$, il ché implica, sfruttando la continuità di E e di u,
$$E\big(u(x), p\big) = \lim_{h \to \infty} E\big(u(x_h), \nabla u(x_h)\big) = 0 \ .$$

(b) Sia $p \notin \partial_* u(x)$; in tal caso, grazie a (3), si ha $p \in \overline{Co}\big(\partial_* u(x)\big)$. La tesi segue quindi dall'osservare che, poiché E è convessa nella seconda variabile, da (a) si ottiene
$$E\big(u(x), q\big) \leq 0 \qquad \forall q \in Co\big(\partial_* u(x)\big)$$
e, quindi, poiché E è continua, $E\big(u(x), p\big) \leq 0$.

□

Il seguente Teorema mostra come l'unicità del punto di minima distanza sia strettamente connessa con la differenziabilità della funzione distanza.

Teorema 3.4. *Sia $x \in \mathbb{R}^n \backslash E$, allora*

$$\exists\, !\ y \in E \ t.c. \ \mid x - y \mid = d_E(x) \iff \exists\ \nabla d_E(x) \ e \ \nabla d_E(x) = \frac{x - y}{d_E(x)} \ .$$

In particolare, essendo d_E 1-lipschitziana, per il Teorema di Rademacher, $\mid \nabla d_E \mid^2 = 1$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n \backslash E$.

Dimostrazione.
Dimostriamo ($\Leftarrow$). Sia y un punto di minimo della distanza; per ogni $z \in \mathbb{R}$ si ha

$$d_E^2(x+\epsilon z) \geq d_E^2(x) + 2\epsilon d_E(x)\langle \nabla d_E(x), z\rangle + o(\epsilon) \ ,$$

$$d_E^2(x+\epsilon z) \leq \mid x+\epsilon z - y \mid^2 = d_E^2(x) + 2\epsilon\langle z, x-y\rangle + o(\epsilon) \ .$$

Da questo segue $x-y = d_E(x)\nabla d_E(x)$, quindi y è univocamente determinato.
Dimostriamo ($\Rightarrow$). Se non esiste $\nabla d_E(x)$, possiamo trovare $p_1, p_2 \in \partial_* u(x)$, con $p_1 \neq p_2$, tali che $p_i = \lim_{h\to\infty} \nabla d_E(x_h^i)$ $(i \in \{1,2\})$ per opportune successioni x_h^i convergenti a x. Allora, posto $y_h^i = x_h^i - d_E(x_h^i)\nabla d_E(x_h^i)$, abbiamo che $\lim_{h\to\infty} y_h^i = x - d_E(x)p_i$ e otteniamo due punti di minimo distinti.

□

Osservazione 3.5. *Si noti che $\partial_* d_E(x) \subseteq \mathbf{S}^{n-1}$, pertanto ogni elemento di $\partial_* d_E(x)$ è un punto di frontiera di $\partial^+ d_E(x)$.*

Mostreremo nei prossimi Teoremi che la norma unitaria del gradiente caratterizza le funzioni distanza da un insieme.

Teorema 3.6. *Si ha, posto sempre $\Omega = \{x : \ d_E(x) > 0\}$,*

$$\mid \nabla d_E \mid^2 = 1 \qquad \text{in } \Omega \ , \tag{3.5}$$

in senso viscoso.

Dimostrazione.
Dimostriamo che vale, in senso viscoso,

$$\mid \nabla d_E \mid^2 - 1 \leq 0 \ ,$$

utilizzando la definizione di sottosoluzione viscosa data in (1.8).
Se $d_E - \phi$ ha un massimo relativo in x_0, allora, poiché d_E è 1-lipschitziana, si ha $\mid \nabla\phi(x_0) \mid^2 \leq 1$.
Mostriamo ora che vale

$$\mid \nabla d_E \mid^2 - 1 \geq 0 \ .$$

Se $d_E - \phi$ ha un minimo relativo in x_0, allora, per ogni $p \in \partial^+ d_E(x_0)$, si ha

$$\phi(x) - \phi(x_0) - \langle p, x-x_0\rangle \leq d_E(x) - d_E(x_0) - \langle p, x-x_0\rangle \leq o\big(\mid x - x_0 \mid\big) \ .$$

Da questo segue

$$\partial^+ d_E(x_0) = \left\{\nabla\phi(x_0)\right\} ,$$

che implica $\mid \phi(x_0) \mid = 1$.

□

Richiamiamo ora un ben noto Teorema di Pierre-Louis Lions (cfr. [PLL]).

Teorema 3.7. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, connesso e regolare, e sia, per ogni $x, y \in \overline{A}$,*

$$L_A(x,y) = \min\left\{ \int_0^1 \mid \gamma' \mid \ dt \ : \ \gamma \in \mathcal{L}ip_1\big([0,1], \overline{A}\big),\ \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y \right\} .$$

Per ogni funzione $v \in \mathbf{C}(\partial A)$ tale che

$$\mid v(x) - v(y) \mid \leq L_A(x,y) \qquad \forall x, y \in \partial A , \tag{3.6}$$

esiste unica $u \in \mathbf{C}(\overline{A})$ tale che $u\big|_{\partial A} = v$ e

$$\mid \nabla u \mid^2 = 1 \qquad \text{in } A ,$$

nel senso della viscosità. Inoltre,

$$u(x) = \inf_{y \in \partial A} \big(v(y) + L_A(x,y) \big) \qquad \forall x \in A . \tag{3.7}$$

Osserviamo che la condizione (3.6) consente facilmente di eliminare L_A nella definizione di u, cioè

$$u(x) = \inf\left\{ u(y) + \mid x - y \mid \ : \ y \in \partial A,\ [x,y) \subseteq A \right\} , \tag{3.8}$$

dove con $[x,y)$ si è indicato l'insieme $\left\{(1-t)x + ty \ : \ t \in [0,1)\right\}$. Infatti, nella (3.7), l'estremo inferiore è in realtà un minimo, pertanto, per ogni $x \in A$, esiste un punto $\overline{y} \in \overline{A}$ ed una curva $\overline{\gamma}$ tali che

$$u(x) = v(\overline{y}) + L_A(x,\overline{y}) = v(\overline{y}) + \int_0^1 \mid \overline{\gamma}' \mid \ \mathrm{dt} .$$

Se $\overline{\gamma}\big([0,1)\big) \in A$, si ha evidentemente $L_A(x,\overline{y}) = \mid x - \overline{y} \mid$, in caso contrario sia $\overline{t}$ il minimo $t \in [0,1)$ tale che $\overline{\gamma}(t) \in \partial A$. Si ha allora

$$\begin{aligned} u(x) &= v(\overline{y}) + L_A(x,\overline{y}) \\ &= v(\overline{y}) + L_A\big(x, \overline{\gamma}(\overline{t})\big) + L_A\big(\overline{\gamma}(\overline{t}), \overline{y}\big) \\ &\geq v\big(\overline{\gamma}(\overline{t})\big) + L_A\big(x, \overline{\gamma}(\overline{t})\big) \\ &\geq \inf\left\{ u(y) + \mid x - y \mid \ : \ y \in \partial A,\ [x,y) \subseteq A \right\} . \end{aligned}$$

Per la funzione η_E valgono enunciati simili a quelli dei Teoremi 3.4, 3.6 e 3.7, a patto di sostituire $\mid \nabla d_E \mid^2 = 1$ con la condizione

$$\mid \nabla \eta_E \mid^2 - 2\eta_E = 0 \ ,$$

più precisamente, si ha

Teorema 3.8. *Sia $x \in \mathbb{R}^n$, allora*

$$\exists \ ! \ y \in E \ t.c. \ \frac{1}{2} \mid x - y \mid^2 = \eta_E(x) \Longleftrightarrow \exists \ \nabla \eta_E(x) \ e \ \nabla \eta_E(x) = (x - y) \ .$$

In particolare, $\mid \nabla \eta_E \mid^2 = 2\eta_E$ quasi ovunque in $\mathbb{R}^n$.

Inoltre, analogamente ai Teoremi 3.6 e 3.7, vale il seguente

Teorema 3.9. *Si ha*

$$\mid \nabla \eta_E \mid^2 = 2\eta_E \qquad in \ \mathbb{R}^n \ in \ senso \ viscoso \ .$$

Viceversa, sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, connesso, regolare e sia $u \in \mathbf{C}(\overline{\Omega})$ una soluzione viscosa in Ω di

$$\mid \nabla u \mid^2 = 2u \ ,$$

tale che

$$\mid \sqrt{2u(x)} - \sqrt{2u(y)} \mid \leq L_\Omega(x, y) \qquad \forall x, y \in \partial\Omega \ .$$

Allora,

$$u(x) = \frac{1}{2} \Big(\inf \big\{ u(y) + \mid x - y \mid : \ y \in \partial\Omega, \ [x, y) \subseteq \Omega \big\} \Big)^2 \ .$$

3.2 Regolarità del luogo di zeri

Ci si può chiedere quale sia, più in generale, il legame tra la regolarità di un insieme e quella della sua funzione distanza. In effetti, tali nozioni sono strettamente collegate, come mostrano i seguenti Teoremi. Per le dimostrazioni si veda ad esempio [DZ].

Teorema 3.10. *Sia $x \in \partial E$, $V(x)$ un intorno aperto connesso di x, $k \geq 1$ e $0 \leq \lambda \leq 1$; allora*

$$d_E \in \mathbf{C}^{k,\lambda}\big(V(x)\big) \Longrightarrow \partial E \cap V(x) \ \grave{e} \ una \ varietà \ \mathbf{C}^{k,\lambda} \ . \tag{3.9}$$

La dimostrazione di questo Teorema, così come del prossimo, è basata sul fatto che la distanza è 1-lipschitziana e sull'applicazione del Teorema delle funzioni implicite. Rafforzando un poco le ipotesi, vale anche il viceversa del Teorema 3.10.

Teorema 3.11. *Distinguiamo due casi:*

1. *Sia ∂E un'ipersuperficie di classe $\mathbf{C}^{1,1}$; allora per ogni $x \in \partial E$ esiste un aperto $V(x)$ contenente x, tale che $d_E \in \mathbf{C}^{1,1}\big(V(x)\big)$.*
2. *Sia $k \geq 2$, $0 \leq \lambda \leq 1$, ∂E un'ipersuperficie di classe $\mathbf{C}^{k,\lambda}$; allora per ogni $x \in \partial E$ esiste un aperto $V(x)$ contenente x, tale che $d_E \in \mathbf{C}^{k,\lambda}\big(V(x)\big)$.*

Se, invece di ipersuperfici, si considerano sottovarietà di $\mathbb{R}^n$ arbitrarie, la funzione distanza non è più derivabile ed i risultati precedenti non sono più applicabili. Passando però alla funzione $\eta = \dfrac{1}{2}d_E^2$, si ha il seguente

Teorema 3.12. *Sia Γ un sottoinsieme chiuso di $\mathbb{R}^n$, $x \in \Gamma$, $V(x)$ un intorno aperto connesso di x e $k \geq 2$, allora*

$$\eta_\Gamma \in \mathbf{C}^k\big(V(x)\big) \Longrightarrow \Gamma \cap V(x) \text{ è una varietà } \mathbf{C}^{k-1} \ . \tag{3.10}$$

Dati, invece, $k \geq 2$ e Γ una sottovarietà di classe $\mathbf{C}^k$ di $\mathbb{R}^n$, per ogni $x \in \Gamma$ esiste un aperto $V(x)$ contenente x, tale che $\eta_\Gamma \in \mathbf{C}^{k-1}\big(V(x)\big)$.

Dimostrazione.
Dimostramo (3.10). Grazie al Teorema 3.8, al più restringendo l'aperto $V(x)$, possiamo supporre che ogni punto di $V(x)$ abbia un unico punto in $\Gamma \cap V(x)$ di minima distanza. Sia $K = \Gamma \cap V(x)$, mostriamo che K è connesso. Siano $K_1,\ K_2$ due componenti connesse di K, scegliamo $x_1 \in K_1,\ x_2 \in K_2$ e sia γ un cammino in $V(x)$ che congiunge x_1 a x_2. Su γ esisterà un punto $\overline{y}$ che ha due punti di minima distanza da K, contro quanto affermato. Poiché $\mid \nabla\eta_\Gamma \mid^2 -2\eta_\Gamma = 0$, si ha

$$K = \{y \in V(x) :\ \eta_\Gamma(y) = 0\} = \{y \in V(x) :\ \nabla\eta_\Gamma(y) = 0\} \ .$$

Mostriamo ora che la matrice $\nabla^2\eta_\Gamma(y)$ ha, su K, solo autovalori 0 o 1. Per ogni $y \in K$ definiamo cono tangente su y il seguente insieme

$$C_T(y) = \left\{ \alpha\nu :\ \alpha \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\},\ \nu \in \mathbf{S}^{n-1} \text{ e } \nu = \lim_{\substack{z \to y \\ z \in K}} \frac{(z-y)}{\mid z - y \mid} \right\} \ .$$

Sia inoltre $T(y)$ il più piccolo sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ contenente $C_T(y)$ e sia $N(y) = T(y)^\perp$. Osserviamo che, per ogni $y \in K$ valgono

1. $\nabla^2\eta_\Gamma(y)\mid_{T(y)}\equiv 0$;
2. $\nabla^2\eta_\Gamma(y)\mid_{N(y)}\equiv Id$.

Infatti, sia $\nu\in\mathbf{S}^{n-1}$, poiché $\nabla\eta_\Gamma(y)=0$, abbiamo

$$\eta_\Gamma(y+t\nu)=\frac{1}{2}\lambda(\nu)t^2+o(t^2)\leq\frac{1}{2}t^2\ , \tag{3.11}$$

con $\lambda(\nu)=\langle\nu,\nabla^2\eta_\Gamma(y)\circ\nu\rangle$. Da questo segue

$$\lambda(\nu)\leq 1\qquad\forall\nu\in\mathbf{S}^{n-1}\Longrightarrow\nabla^2\eta_\Gamma(y)\leq Id\qquad\forall y\in K\ .$$

Sia ora $\nu\in\ C_T(y)\cap\mathbf{S}^{n-1}$, e sia y_t il punto di minima distanza di $y+t\nu$ da K. Da (3.11) otteniamo

$$\frac{2}{t^2}\eta_\Gamma(y+t\nu)=\left|\frac{y-y_t}{t}+\nu\right|^2\underset{t\to 0}{\longrightarrow}\lambda(\nu)\ .$$

In particolare, scegliendo $y_n\in K$, $\dfrac{y_n-y}{\mid y_n-y\mid}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\nu$ e $t_n=\mid y_n-y\mid$ si ha

$$0\leq\lambda(\nu)=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{y-y_{t_n}}{t_n}+\nu\right|^2\leq\left|\frac{y-y_n}{t_n}+\nu\right|^2=0\ ,$$

cioè $\lambda(\nu)=0$ per ogni $\nu\in C_T(y)$, da cui segue $\lambda(\nu)=0$ per ogni $\nu\in T(y)$. Consideriamo ora il caso $\nu\in N(y)\cap\mathbf{S}^{n-1}$. Da (3.11) segue che, per ogni $\epsilon>0$, esiste $\delta>0$ tale che

$$\left|\frac{y-y_t}{t}\right|^2<1+\mid\nu\mid^2+\epsilon\qquad\forall t<\delta\ .$$

Pertanto, a meno di passare a sottosuccessioni, possiamo supporre che $\dfrac{y-y_t}{t}$ converga ad un vettore $w\in T(y)$. Quindi

$$1\geq\lambda(\nu)=\lim_{t\to 0}\left|\frac{y-y_t}{t}+\nu\right|^2=\mid\nu\mid^2+\mid w\mid^2\geq 1\ ,$$

cioè $\lambda(\nu)=1$ per ogni $\nu\in N(y)$. Notiamo ora che, dati $x\in V(x)$ e $y\in K$ tali che $\eta_\Gamma(x)=\dfrac{1}{2}\mid x-y\mid^2$ si ha

$$\nabla\eta_\Gamma(x)\in N_K(y)\ . \tag{3.12}$$

Infatti, posto $y_t = (1-t)y + tx$ con $t \in [0,1]$, si ha

$$\lambda\left(\frac{\nabla\eta_\Gamma(x)}{\mid \nabla\eta_\Gamma(x) \mid}\right) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\frac{1}{2} \mid y_t - x \mid^2 \Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dt}^2}\frac{1}{2}t^2\Big|_{t=0} = 1 \ .$$

Dal fatto che la traccia di $\nabla^2\eta_\Gamma(y)$ è continua nella variabile y e coincide con la dimensione di $N(y)$ per $y \in K$, segue che le dimensioni di $N(y)$ e di $T(y)$ sono costanti in K.
Sia ora $q = \dim\big\{T(y)\big\}$, con $y \in K$; dimostreremo che, per ogni $\overline{y} \in K$, esistono $\sigma > 0$ e $M(\overline{y})$, varietà di classe $\mathbf{C}^{k-1}$ di dimensione q, tali che $K \cap B_\sigma(\overline{y}) \subseteq M(\overline{y}) \subseteq V(x)$. Siano quindi $\overline{y} \in K$ e $\nu^1, \ldots, \nu^{n-q}$ una base di $N(\overline{y})$, scegliamo inoltre $\sigma > 0$ tale che la funzione di classe $\mathbf{C}^{k-1}$

$$F(y) = \big(F^1(y), \ldots, F^{n-q}(y)\big) : \quad B_\sigma\big(\overline{y}\big) \longrightarrow \mathbb{R}^{n-q} \ ,$$

con $F^i(y) = \langle \nabla\eta_\Gamma(y) \cdot \nu^i \rangle$, abbia Jacobiano di rango massimo in ogni punto di $B_\sigma(\overline{y})$. Ciò è possibile, per σ sufficientemente piccolo, poiché, grazie a quanto detto in precedenza, $\mathrm{rank}\big(\nabla F(\overline{y})\big) = n-q$. In tali ipotesi su F si può applicare il Teorema delle funzioni implicite, così da ottenere che l'insieme $B_\sigma(\overline{y}) \cap \{F(y) = 0\}$ è una sottovarietà di classe $\mathbf{C}^{k-1}$ di dimensione q.
Posto $d_\Gamma(y) = \sqrt{2\eta_\Gamma}$, si ha $d_\Gamma(y) \in \mathbf{C}^k\big(V(x)\backslash K\big)$ e, grazie al Teorema 3.4, $\mid \nabla d_\Gamma(y) \mid = 1$. Consideriamo ora gli insiemi

$$K_\epsilon = \{y \in V(x) : \ \eta_\Gamma(y) = \frac{1}{2}\epsilon^2\} \subseteq V(x)\backslash K \ .$$

Poiché, su K_ϵ, $d_\Gamma = \epsilon$ e $\mid \nabla d_\Gamma \mid = 1$, si ha, sempre per il Teorema delle funzioni implicite,

$$K_\epsilon \neq \emptyset \implies K_\epsilon \text{ è una varietà di classe } \mathbf{C}^k \ .$$

Inoltre è definita una proiezione $\pi_\epsilon : \ K_\epsilon \to K$ con

$$\pi_\epsilon(z) = z - \nabla\eta_\Gamma(z) \ \in \mathbf{C}^{k-1}(K_\epsilon) \ .$$

Dato $y \in K$, scegliamo $\epsilon < dist\big(y, \partial V(x)\big)$, cosicché esiste $z \in K_\epsilon$ tale che $\pi_\epsilon(z) = y$. Siano poi $\mu^1, \ldots, \mu^q$ una base di $T(y)$ e $L = \langle \mu^1, \ldots, \mu^q, \nabla d_\Gamma(z) \rangle$ lo spazio generato da $T(y)$ e dalla normale a K_ϵ in z. Da (3.12) segue che $T(y) \subseteq T_{K_\epsilon}(z)$ e, quindi, $K' = K_\epsilon \cap (L + z)$ è una varietà di classe $\mathbf{C}^k$ di dimensione q in un intorno di z. In tale intorno, consideriamo l'applicazione

$$\pi' = \pi_\epsilon|_{K'} : \ K' \to K \subseteq M(y) \ ,$$

vista come applicazione tra le varietà regolari K' e $M(y)$, entrambe di dimensione q.

Poiché $k \geq 2$ e il determinante Jacobiano di π' in z tende a 1 per $\epsilon \to 0$, possiamo supporre

$$\det J(\pi')(z) \neq 0$$

e possiamo, quindi, applicare il Teorema della funzione inversa su varietà, che garantisce che π' è un omeomorfismo locale tra K' e $M(y)$. Poiché π' è a valori in K, ciò implica che K è relativamente aperto in $M(y)$, e quindi, essendo K chiuso in $V(x)$, $K \supseteq M(y)$, cioè K è una varietà di classe $\mathbf{C}^{k-1}$.
Dimostriamo il viceversa. Sia q la dimensione di Γ, poiché Γ è una varietà di classe $\mathbf{C}^1$, esiste un intorno $A(x)$ di x e un campo continuo di vettori ortonormali

$$(\nu^1, \ldots, \nu^q) : \ \Gamma \cap A(x) \to \mathbb{R}^{qn} \ ,$$

che forma una base dello spazio normale a Γ in x.
Sia ora

$$\Phi(z, \alpha) = z + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j \nu^j(z) \qquad \forall z \in \Gamma \cap A(x), \alpha_j \in \mathbb{R} \ ,$$

con $\Phi \in \mathbf{C}^{k-1}(\Gamma \cap A(x) \times \mathbb{R}^q)$. Usando coordinate locali è facile verificare che, se $k \geq 2$, la matrice Jacobiana di Φ in $(x, 0)$ è l'identità, pertanto si può applicare il teorema delle funzioni implicite. In un intorno $W \subseteq \mathbb{R}^n$ di x esiste quindi un'inversa di Φ di classe $\mathbf{C}^{k-1}$,

$$\Psi(y) = \big(z(y), \alpha(y)\big) \qquad \forall y \in W \ .$$

Scegliamo $\sigma > 0$ tale che, per ogni $z \in V(x) = B_\sigma(x) \subseteq A(x) \cap W$, il punto di Γ che minimizza la distanza da z, che denoteremo con $x(z)$, appartenga a $W \cap \Gamma$. Allora, da $\mid x(z) - z \mid = \mid \alpha(z) \mid$ segue

$$\eta_\Gamma(z) = \frac{1}{2} \mid \alpha(z) \mid^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{q} \alpha_j^2(z) \qquad \forall z \in V(x) \ .$$

Pertanto $\eta_\Gamma \in \mathbf{C}^{k-1}\big(V(x)\big)$.

□

Possiamo ora dimostrare il seguente

Teorema 3.13. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto limitato, connesso, con frontiera regolare e sia $u \in \mathbf{C}^k(\overline{\Omega})$ ($k \geq 3$) strettamente positiva su $\partial\Omega$ e tale che*

$$\mid \nabla u(x) \mid^2 - 2u(x) = 0 \qquad \forall x \in \Omega \ . \tag{3.13}$$

Allora, detto $K = \{x \in \Omega : \ u(x) = 0\}$, si ha

$$K \neq \emptyset \Longrightarrow u\big|_\Omega = \eta_K \ . \tag{3.14}$$

Inoltre K è una sottovarietà di classe $\mathbf{C}^{k-1}$ di $\mathbb{R}^n$, compatta e senza bordo, di dimensione $dim\{K\} = dim\{ker(\nabla^2\eta_K(x))\}$, per $x \in K$.

Dimostrazione.
Sia ϵ_h una successione infinitesima di livelli non critici di u e siano

$$A_h = \{x \in \Omega : \ u(x) > \epsilon_h\} \ .$$

Applicheremo il Teorema 3.7 alla funzione $d = \sqrt{2u}$ negli aperti A_h. Sia B una componente connessa di A_h, la condizione (3.6) è soddisfatta su B (con $L = L_B$), poiché $d \in \mathbf{C}^3(\overline{B})$ e $\mid \nabla d \mid = 1$. Per ogni componente connessa B, abbiamo quindi

$$d(x) = \inf_{\substack{y\in\partial B \\ [x,y)\subseteq B}} \big(d(y) + \mid x - y \mid\big) \qquad \forall x \in B \ ,$$

cioè

$$d(x) = \inf_{\substack{y\in\partial A_h \\ [x,y)\subseteq A_h}} \big(d(y) + \mid x - y \mid\big) \qquad \forall x \in A_h \ .$$

Essendo $\partial A_h = \partial\Omega \cup \{u = \epsilon_h\}$, un semplice passaggio al limite mostra che

$$d(x) = \inf_{\substack{y\in\partial\Omega\cup K \\ [x,y)\subseteq\Omega\setminus K}} \big(d(y) + \mid x - y \mid\big) \qquad \forall x \in \Omega\setminus K \ . \tag{3.15}$$

Infine, la formula è banalmente vera per $x \in K$.
Dall'uguaglianza (3.15) segue che esiste un aperto massimale $A \subseteq \Omega$ tale che $u\big|_A = \eta_K$. Poiché inoltre u è di classe $\mathbf{C}^1$, dal Teorema 3.8 segue che $A = \Omega$, infatti, se così non fosse, per ogni $x \in \partial A\setminus\partial\Omega$ esisterebbero almeno due minimizzatori distinti di (3.15) ed u non sarebbe differenziabile in x. A questo punto, per la prima parte del Teorema 3.12, si ha che K è una varietà di classe $\mathbf{C}^{k-1}$ e

$$\dim\{K\} = \dim\{T_K(x)\} \qquad \forall x \in K \ .$$

D'altro canto, come è mostrato sempre nel Teorema 3.12,

$$\dim\{T_K(x)\} = \sharp\{\lambda = 1 : \ \lambda \text{ autovalore di } \nabla^2\eta_K(x)\} = \dim\{\ker(\nabla^2\eta_K(x))\} \ .$$

□

3.3 Curvature principali e funzione distanza

Per poter esprimere le proprietà geometriche di una varietà mediante la sua funzione distanza, o distanza al quadrato, è necessario trovare una relazione tra la prima e la seconda forma fondamentale della varietà e le derivate della funzione distanza.
Sia $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ una varietà regolare di dimensione $n-k$. Fissiamo $x \in \Gamma$ e scegliamo $\nu^1, \dots, \nu^k$ una base ortonormale di $N_\Gamma(x)$. Si dice *seconda forma fondamentale di* Γ in x l'applicazione bilineare $B : T_\Gamma(x) \times T_\Gamma(x) \to N_\Gamma(x)$ così definita:

$$B(\xi,\eta) = -\sum_{i=1}^{k} \big(\xi \cdot D_\eta \nu^i\big)\nu^i \qquad \forall \xi,\eta \in T_\Gamma(x) \ ,$$

dove con $D_\eta \nu$ indichiamo la derivata covariante di ν lungo η, cioè

$$D_\eta \nu = \Pi_{T_\Gamma} \circ \nabla\nu \circ \eta \ ,$$

dove Π_{T_Γ} è la matrice di proiezione sullo spazio tangente a Γ.
Sia ora $e^1, \dots, e^{n-k}$ una base di $T_\Gamma(x)$, definiamo il *vettore curvatura media* di Γ in x, che indicheremo con $H(x)$, come segue

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n-k} B(e^i, e^i) \ .$$

Si noti che si ha sempre $H(x) \in N_\Gamma(x)$. Dato infine $\nu \in N_\Gamma(x)$, $\nu \neq 0$, chiameremo nel seguito *curvature principali* di Γ in x lungo la direzione ν, gli autovalori $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-k}$ della forma bilineare $A : T_\Gamma(x) \times T_\Gamma(x) \to \mathbb{R}$ definita da:

$$A(\xi,\eta) = -\langle B(\xi,\eta), \frac{\nu}{|\nu|}\rangle \qquad \forall \xi,\eta \in T_\Gamma(x) \ .$$

Nel caso di ipersuperfici vale il seguente

Teorema 3.14. *Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, con $\partial\Omega$ ipersuperficie di classe $\mathbf{C}^2$; per ogni $x \in \partial\Omega$, esiste un intorno $V(x)$ di x dove è ben definita la proiezione $\pi : V(x) \to \partial\Omega$ e, ponendo $d = d_\Omega$, si ha*

$$\begin{aligned} &\pi(y) = y - d\nabla d(y) \ , \\ &\nabla d(y) = \nabla d\big(\pi(y)\big) \in N_{\partial\Omega}\big(\pi(y)\big) \ , \\ &\nabla^2 d\big(\pi(y)\big) = \big(Id - d\nabla^2 d(y)\big)^{-1} \circ \nabla^2 d(y) \end{aligned} \tag{3.16}$$

per ogni $y \in V(x)$.
Inoltre, detti $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ *gli autovalori di* $\nabla^2 d(y)$, *ordinati in maniera crescente,* $\kappa_1 \leq \ldots \leq \kappa_{n-1}$ *le curvature principali di* $\partial\Omega$ *in* $\pi(y)$, *da (3.16) si ottiene*

$$\lambda_i = \begin{cases} 0 & se\ i = 1\ , \\ \dfrac{\kappa_i}{1 + d\kappa_i} & se\ i > 1\ . \end{cases} \tag{3.17}$$

In particolare, il nucleo dell'applicazione $\nabla^2 d(x)$ *è lo spazio normale* $N_{\partial\Omega}(x)$ *per ogni* $x \in \partial\Omega$.

Dimostrazione.
L'uguaglianza $\pi(y) = y - d\nabla d(y)$, così come $\nabla d\big(\pi(y)\big) = \nabla d(y)$, segue facilmente dal Teorema 3.4.
Dimostriamo le restanti uguaglianze. Sia $d_{ij}(y)$ l'elemento $(i,j)^o$ della matrice $\nabla^2 d(y)$, per $y \in V(x)$. Sia inoltre $y_0 = \pi(y)$ e $p = \nabla d\big(\pi(y)\big) = \nabla d(y)$. Posto $d_{ij}(t) = d_{ij}(y_0 + tp)$, per $t \in (-\tau, \tau)$ abbiamo

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} d_{ij}(t) = d_{ijk}(y_0 + tp)p_k = -d_{ij}(t)d_{ik}(t)\ , \tag{3.18}$$

dove l'ultima uguaglianza si ottiene derivando due volte $\mid \nabla d \mid = 1$. Sia ora $z_1, \ldots, z_n$ una base di $\mathbb{R}^n$ tale che $\nabla^2 d(y_0)$ sia in forma diagonale e, per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, sia $\mu_i(t)$ l'unica soluzione di

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \mu_i(t) = -\mu_i^2(t) \qquad \forall t \in (-\tau, \tau)\ ,$$

$$\mu_i(0) = d_{z_i z_i}(0) = \lambda_i(0)\ ,$$

dove i $\lambda_i(t)$ sono gli autovalori della matrice $\nabla^2 d(y_0 + tp)$.
La matrice

$$A(t) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) z_i \otimes z_i\ ,$$

risolve l'equazione differenziale (3.18) e quindi, poiché la soluzione è unica, $A(t) = \nabla^2 d(y_0 + tp)$. Da questo segue che gli autovettori di $\nabla^2 d(y_0 + tp)$ sono uguali a z_i per ogni t, mentre gli autovalori $\lambda_i(t)$ risolvono l'equazione

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \lambda_i(t) = -\lambda_i^2(t) \qquad \forall t \in (-\tau, \tau)\ ,$$

cioè, poiché $d = d(y_0 + tp) = t$,

$$\lambda_i(t) = \frac{\lambda_i(0)}{1 + d\lambda_i(0)}\ .$$

Si conclude notando che, per $d = 0$,

$$\left(\nabla^2 d \mid_{T_\Gamma}\right)_{ij} = \left(D_i^T \nu^j\right) ,$$

cioè la restrizione di $(-\nabla^2 d)$ allo spazio tangente a Γ in y_0 coincide con la matrice della seconda forma fondamentale di Γ in y_0, i cui autovalori sono, per definizione, le curvature principali di Γ cambiate si segno, pertanto

$$\lambda_i = \frac{\kappa_i}{1 + d\kappa_i} \qquad \text{per } i \geq 1 .$$

Il fatto che $\lambda_1 = 0$ segue dalla seconda uguaglianza in (3.16).

□

Consideremo nel seguito una varietà Γ, di classe almeno $\mathbf{C}^3$, di codimensione k.

Teorema 3.15. *Per ogni $x \in \Gamma$ esiste un intorno $V(x)$ di x dove è ben definita la proiezione $\pi : V(x) \to \Gamma$ e, ponendo $\eta = \frac{1}{2} d^2$ con $d(x) = dist(x, \Gamma)$, si ha*

$$\begin{aligned} \pi(y) &= y - \nabla\eta(y) , \\ \nabla\eta(y) &\in N_\Gamma\big(\pi(y)\big) , \end{aligned} \tag{3.19}$$

per ogni $y \in V(x)$.
Inoltre, detti $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ gli autovalori di $\nabla^2\eta(y)$, ordinati in maniera crescente, e dette $\kappa_1 \leq \ldots \leq \kappa_{n-k}$ le curvature principali di Γ in $\pi(y)$ lungo la direzione $\nabla\eta(y)$, da (3.19) si ottiene

$$\lambda_i = \begin{cases} \dfrac{d\kappa_i}{1 + d\kappa_i} & \text{se } i \leq n - k , \\ 1 & \text{se } i > n - k . \end{cases} \tag{3.20}$$

In particolare, $\nabla^2\eta(x)$ rappresenta, per $x \in \Gamma$, la proiezione sullo spazio normale $N_\Gamma(x)$.

Dimostrazione.
La dimostrazione è molto simile a quella del Teorema 3.14. Notiamo preliminarmente che si ha

$$\nabla\eta = d\nabla d , \qquad \nabla^2\eta = d\nabla^2 d + \nabla d \otimes \nabla d . \tag{3.21}$$

La prima uguaglianza in (3.19) segue facilmente dal Teorema 3.8, mentre la seconda inclusione è la (3.12) del Teorema 3.12.
Dimostriamo quindi (3.20). Procedendo come nella dimostrazione del Teorema 3.14, sia $y \in V(x)$ e $\eta_{ij}(y)$ l'elemento $(i,j)^o$ della matrice $\nabla^2\eta(y)$. Mettiamoci ora nella base $z_1, \dots, z_n$ che diagonalizza $\nabla^2 d(y)$ e, detti $\lambda_1 \le \dots \le \lambda_n$ gli autovalori di tale matrice, da (3.21) si ottiene

$$\eta_{ij} = \delta_{ij} d\lambda_i + d_i d_j \ . \tag{3.22}$$

Ragionando sempre come nel Teorema 3.14, posto $y_t = \pi(y) + t\big(y - \pi(y)\big)$, si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\lambda_i(y_t) = -\lambda_i^2(y_t)$$

e quindi, osservando che

$$\lim_{t\to 0^+} \lambda_i(y_t) = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 1 \ , \\ -\langle B(z_i,z_i), \nabla d(y)\rangle & \text{se } 2 \le i \le n-k+1 \ , \\ +\infty & \text{se } i > n-k \ , \end{cases} \tag{3.23}$$

ponendo $\kappa_i = -\langle B(z_i,z_i), \nabla d(y)\rangle$, si ha

$$\lambda_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i = 1 \ , \\ \dfrac{\kappa_i}{1+d\kappa_i} & \text{se } 2 \le i \le n-k+1 \ , \\ \dfrac{1}{d} & \text{se } i > n-k \ . \end{cases} \tag{3.24}$$

Mettendo insieme (3.22) e (3.24) otteniamo la tesi.

□

Utilizzando questo Teorema, è possibile trovare una relazione tra il vettore curvatura media di Γ e la funzione η_Γ.

Proposizione 3.16. *Sia Γ una varietà regolare di dimensione $n-k$, per ogni $x \in \Gamma$ e per ogni $y \in V(x)$, si ha*

$$\begin{aligned} \big\langle H\big(\pi(y)\big), \nabla\eta(y)\big\rangle &= -\sum_{i=1}^{n-k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} \\ &= tr\Big(\big(Id + \nabla^2\eta\big(\pi(y)\big) - \nabla^2\eta(y)\big)^{-1}\Big) \circ \nabla^2\eta(y) \ , \end{aligned} \tag{3.25}$$

dove, come sopra, $\lambda_1 \le \dots \le \lambda_n$ sono gli autovalori della matrice $\nabla^2\eta(y)$.

Dimostrazione.
Da $\nabla\eta(y) = d(y)\nabla d(y)$ segue

$$\big\langle H\big(\pi(y)\big), \nabla\eta(y)\big\rangle = d(y)\big\langle H\big(\pi(y)\big), \nabla d(y)\big\rangle = d(y)\sum_{i=1}^{n-k} -\kappa_i \ ,$$

dove i κ_i sono, come nel Teorema 3.15, le curvature principali di Γ in $\pi(y)$ lungo la direzione $\nabla d(y)$.
Grazie sempre al Teorema 3.15, otteniamo

$$\sum_{i=1}^{n-k} d(y)\kappa_i = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} \ .$$

□

A patto di considerare le derivate terze della funzione η_Γ, è possibile esprimere direttamente il vettore curvatura media di Γ in x.

Teorema 3.17. *Sia Γ una sottovarietà compatta di $\mathbb{R}^n$. Allora, detto $H(x)$ il vettore curvatura media di Γ in x, si ha*

$$H(x) = -\nabla\Delta\eta(x) \qquad \forall x \in \Gamma \ . \tag{3.26}$$

Dimostrazione.
Grazie al Teorema 3.12, esiste $\sigma > 0$ tale che η è regolare in $I_\sigma(\Gamma)$; sia inoltre $y \in I_\sigma(\Gamma)$ tale che $\pi(y) = x$. Osserviamo che

$$\langle \nabla\Delta\eta(x), \nabla\eta(y)\rangle = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} \ .$$

Infatti, posto $d(y) = \sqrt{2\eta(y)}$ e $y_t = x + t\nabla d(y)$, si ha

$$\begin{aligned}\langle \nabla\Delta\eta(x), \nabla\eta(y)\rangle = d(y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\Delta\eta(y_t)\Big|_{t=0} &= d(y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\sum_{i=1}^{n-k}\frac{t\kappa_i}{1+t\kappa_i}\Big|_{t=0} \\ &= \sum_{i=1}^{n-k} d(y)\kappa_i = \sum_{i=1}^{n-k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} \ .\end{aligned}$$

Dalla Proposizione 3.16 segue quindi

$$\langle H(x) + \nabla\Delta\eta(x), \nabla\eta(y)\rangle = 0 \qquad \forall y \in I_\sigma(\Gamma) \text{ t.c. } \pi(y) = x \ .$$

Pertanto, detto $\nu(x) = H(x)+\nabla\Delta\eta(x)$, per il Teorema 3.15 $\nu(x) \in T_\Gamma(x)$ per ogni $x \in \Gamma$. Poiché il vettore curvatura media è sempre ortogonale alla varietà, è sufficiente mostrare $\nabla\Delta\eta(x) \in N_\Gamma(x)$, ovvero, sempre per il Teorema 3.15, $\big(Id - \nabla^2\eta(x)\big) \circ \nabla\Delta\eta(x) = 0$. Si ha, infatti, derivando tre volte la relazione $|\nabla\eta|^2 = 2\eta$,

$$\eta_{kj}\eta_{iij} = \eta_{iik} + 2\eta_{ij}\eta_{ijk} = \eta_{iik} + \frac{1}{2}(\eta_{ij}^2)_k = \eta_{iik} + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right)_k = \eta_{iik} \ ,$$

poiché la somma dei quadrati degli autovalori di $\nabla^2\eta$ è uguale, vicino a Γ, a $k + o(d)$ ed ha, quindi, derivate nulle su Γ. Pertanto

$$\nabla\Delta\eta(x) \in N_\Gamma(x) \Longrightarrow H(x) = -\nabla\Delta\eta(x) \quad \forall x \in \Gamma \ .$$

□

3.4 Equazioni di evoluzione nella distanza al quadrato

La Proposizione 3.16, insieme al Teorema 3.17, ci permette di caratterizzare il moto per curvatura media in codimensione arbitraria mediante la funzione η. Vale infatti, in generale, il seguente Teorema.

Teorema 3.18. *Sia $\{\Gamma_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{G}$ un flusso liscio di dimensione $n-k$, allora esiste $\sigma > 0$ tale che la funzione*

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2}dist^2(x,\Gamma_t)$$

è di classe $\mathbf{C}^\infty$ in $I_\sigma(\Gamma_t) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T] : \ \eta(x,t) \le \sigma\}$. Inoltre, si ha

$$\phi_t(x,t) = -\nabla\eta_t(\phi(x,t),t) \qquad \forall t \in [0,T], \ x \in \Gamma_0 \ . \tag{3.27}$$

In particolare $\{\Gamma_t\}_{t\in[0,T]}$ è un'evoluzione per curvatura media di Γ_0 se e solo se

$$\nabla\eta_t(x,t) = \nabla\Delta\eta\big(x - \nabla\eta(x,t),t\big) \qquad \forall t \in [0,T], \ x \in I_\sigma(\Gamma_t) \ , \tag{3.28}$$

o, equivalentemente,

$$\eta_t(x,t) = \sum_{i=1}^{n-k}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} \qquad \forall t \in [0,T], \ x \in I_\sigma(\Gamma_t) \ , \tag{3.29}$$

dove i λ_i sono come nel Teorema 3.15.

Dimostrazione.
Poiché la matrice Jacobiana di $\phi(\cdot,t)$ ha rango $n-k$ su Γ_0, la regolarità di η può essere provata come nel Teorema 3.12.
Fissiamo ora $y_0 \in \Gamma_t$ e sia x_0 l'unico punto di Γ_0 tale che $y_0 = \phi(x_0,t)$. Poiché $\phi(x_0,t+h) \in \Gamma_{t+h}$, si ha

$$\eta\big(\phi(x_0,t+h),t+h\big) = 0 \ .$$

Differenziando la precedente uguaglianza due volte rispetto a h e ponendo $h=0$, da $\phi(x_0,t)=y_0$ e $\nabla\eta(y_0,t)=0$, otteniamo

$$\eta_{tt}(y_0,t) + \langle \nabla^2\eta(y_0,t)\circ\phi_t(x_0,t),\phi_t(x_0,t)\rangle + 2\langle\nabla\eta_t(y_0,t),\phi_t(x_0,t)\rangle = 0 \ . \tag{3.30}$$

Per definizione di flusso liscio, $\phi_t(x_0,t)$ è ortogonale a Γ_t in y_0, pertanto

$$\eta\big(\phi(x_0,t+h) - h\phi_t(x_0,t+h),t+h\big) = \frac{1}{2}h^2 \mid \phi_t(x_0,t+h) \mid^2 \ ,$$

per h sufficientemente piccolo. Si noti che

$$\mid \phi(x_0,t+h) - h\phi_t(x_0,t+h) - y_0 \mid \leq Ch^2 \ ,$$

per qualche costante $C>0$. Poiché $\nabla\eta(y_0,t)=0$, si ha

$$\eta(y_0,t+h) = \frac{1}{2}h^2 \mid \phi_t(x_0,t) \mid^2 + o(h^2) \ ,$$

da cui si ricava

$$\eta_{tt}(y_0,t) = \mid \phi_t(x_0,t) \mid^2 \ .$$

Combinando questa equazione con la (3.30), otteniamo

$$\mid \phi_t(x_0,t) \mid^2 + \langle \nabla^2\eta(y_0,t)\circ\phi_t(x_0,t),\phi_t(x_0,t)\rangle + 2\langle\nabla\eta_t(y_0,t),\phi_t(x_0,t)\rangle = 0 \ .$$

Ricordando che $\phi_t(x_0,t)$ è ortogonale a Γ_t in y_0 e che $\nabla^2\eta(y_0,t)$ è la proiezione ortogonale sullo spazio normale a Γ_t in y_0, si ha

$$\langle \nabla^2\eta(y_0,t)\circ\phi_t(x_0,t),\phi_t(x_0,t)\rangle = \mid \phi_t(x_0,t) \mid^2$$

e

$$\mid \phi_t(x_0,t) \mid^2 + \langle\nabla\eta_t(y_0,t),\phi_t(x_0,t)\rangle = 0 \ .$$

Pertanto, se dimostriamo che $\mid \nabla\eta_t(y_0,t) \mid \leq \mid \phi_t(x_0,t) \mid$, si ottiene subito

$$\phi_t(x_0,t) = -\nabla\eta_t(y_0,t) \ ,$$

che, grazie al Teorema 3.17 e al fatto che le varietà Γ_t si evolvono per curvatura media, porta a

$$\nabla\eta_t(y_0,t) = \nabla\Delta\eta(y_0,t) \ ,$$

come era stato congetturato da De Giorgi già in [DG].
Sia quindi $y \in \mathbb{R}^n$ e $\epsilon > 0$, allora, se $\phi(z,t) \in \Gamma_t$ è il punto di minima distanza di $y_0 + y$ da Γ_t , possiamo trovare $\rho > 0$ sufficientemente piccolo affinché $\mid y \mid < \rho$ implichi $\mid z - x_0 \mid < \epsilon$. Per ogni $y \in B_\rho(0)$, posto $d(x,t) = dist(x,\Gamma_t)$, si ha

$$d(y_0 + y, t + \tau) \leq \mid y_0 + y - \phi(z,t) \mid + \tau \mid \phi_t(z,t) \mid + o(\tau) \ ,$$

da cui segue

$$d(y_0 + y, t + \tau) \leq d(y_0 + y, t) + \tau \mid \phi_t(z,t) \mid + o(\tau)$$

e

$$\eta(y_0 + y, t + \tau) \leq \eta(y_0 + y, t) + \tau d(y_0 + y, t) \mid \phi_t(z,t) \mid + o(\tau) \ .$$

Mandando $\tau \downarrow 0$, grazie alla scelta di ρ, otteniamo

$$\eta_t(y_0 + y, t) \leq \mid y \mid \sup_{z \in B_\epsilon(x_0)} \mid \phi_t(z,t) \mid$$

e

$$\mid \nabla\eta_t(y_0,t) \mid \leq \sup_{z \in B_\epsilon(x_0)} \mid \phi_t(z,t) \mid \ .$$

Mandando $\epsilon \downarrow 0$ si ottiene la disuguaglianza cercata, che implica (3.27).
Dimostriamo (3.29). Fissiamo $y \in I_\sigma(\Gamma_t)$ e sia $y_0 = y - \nabla\eta(y) = \phi(x_0,t)$. Notiamo che, poiché $\eta(y,t) = \dfrac{1}{2} dist^2(y,\Gamma_t)$, si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\eta\big(\phi(x_0,t) + \nu, t\big) = 0 \qquad \forall t \in [0,T], \nu \in N_\Gamma(y_0), \ \mid \nu \mid^2 < 2\sigma \ ,$$

cioè, posto $\nu = y - y_0$,

$$\eta_t(y,t) = -\langle \phi_t(x_0,t), \nabla\eta(y) \rangle \qquad \forall t \in [0,T], y \in I_\sigma(\Gamma_t) \ . \tag{3.31}$$

Applicando la Proposizione 3.16, si ottiene (3.29).
Resta da dimostrare (3.28). Differenziando (3.31), per ogni $y \in I_\sigma(\Gamma_t)$ otteniamo

$$\begin{aligned}
&\nabla\eta_t(y,t) = -\nabla\langle H(y_0,t), \nabla\eta(y,t)\rangle = \nabla\big\langle \nabla\Delta\eta\big(y - \nabla\eta(y,t), t\big), \nabla\eta(y,t)\big\rangle \\
&= \nabla^2\Delta\eta(y_0,t) \circ \big(Id - \nabla^2\eta(y,t)\big) \circ \nabla(y,t) + \nabla\Delta\eta\big(y - \nabla\eta(y,t), t\big) \circ \nabla^2\eta(y,t) \\
&= \nabla\Delta\eta\big(y - \nabla\eta(y,t), t\big) \ ,
\end{aligned}$$

poiché, per il Teorema 3.17, si ha

$$H(y_0,t) = -\nabla\Delta\eta(y_0,t) \ \in N_{\Gamma_t}(y_0) \qquad \forall y_0 \in \Gamma_t \ .$$

□

Da questo Teorema segue, piuttosto inaspettatamente, che il moto per curvatura media in codimensione arbitraria è descritto da un'unica equazione differenziale del secondo ordine in η.
Come è già stato osservato in [AS], tale evoluzione si può equivalentemente descrivere con una disequazione differenziale nella funzione distanza. Premettiamo il seguente Lemma.

Lemma 3.19. *Siano F una funzione geometrica che soddisfa $(F1)-(F4)$ e $w:\ \mathbb{R}^n \times [0,T] \to [0,+\infty)$ una funzione inferiormente semicontinua tale che*

1. *per ogni $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$ con $w(x,t)=0$, esiste una successione $(x_n,t_n) \to (x,t)$ tale che $w(x_n,t_n)=0$ e $t_n < t$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;*

2. *w è una soprasoluzione viscosa di (1.17) in*

$$\{(x,t):\ w(x,t)>0,\ (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)\} \ ;$$

3. *$\mid w(x,t)-w(y,t) \mid \leq L \mid x-y \mid$ per qualche costante $L>0$.*

Allora w è una soprasoluzione viscosa di (1.17) in tutto $\mathbb{R}^n \times (0,T)$.

Dimostrazione.
Fissiamo $\epsilon > 0$ e sia $h_\epsilon(r) = (r-\epsilon) \vee 0$. Vogliamo dimostrare che $h_\epsilon(w)$ è una soprasoluzione di (1.17) in $\mathbb{R}^n \times (0,T)$. Supponiamo quindi che, per qualche funzione test Ψ, $h_\epsilon(w) - \Psi$ abbia un minimo in $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$. A meno di aggiungere a Ψ una perturbazione del quarto ordine, come già fatto in precedenza, possiamo supporre che il minimo sia stretto.
Consideriamo il caso $w(x_0,t_0) > 0$. Sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni strettamente crescenti che convergono a h_ϵ su $\mathbb{R}$. Poiché (x_0,t_0) è un punto di minimo stretto, si può trovare una successione (x_n,t_n) di minimi locali per $f_n(w) - \Psi$, che converge a (x_0,t_0). Grazie alla inferiore semicontinuità di w, $w(x_n,t_n)$ è definitivamente maggiore di 0. Inoltre, per il Teorema 1.26, $f_n(w)$ è una soprasoluzione in $\{w>0\}$ e, quindi,

$$\Psi_t(x_n,t_n) + F^*\big(\nabla\Psi(x_n,t_n), \nabla^2\Psi(x_n,t_n)\big) \geq 0 \ .$$

Mandando $n \to +\infty$, si ottiene la precedente disuguaglianza in (x_0, t_0).
Supponiamo ora $w(x_0, t_0) = 0$. Grazie a (1), possiamo trovare una successione $(x_n, t_n) \to (x_0, t_0)$ con $w(x_n, t_n) = 0$ e $t_n < t_0$. Per n sufficientemente grande, da (3) si ottiene $h_\epsilon\big(w(x_0, t_n)\big) = 0$ e, dal fatto che $t_n \uparrow t_0$, possiamo concludere $\Psi_t(x_0, t_0) \geq 0$. Inoltre, $h_\epsilon\big(w(x, t_0)\big) \equiv 0$ per x in un intorno di x_0. Pertanto $\nabla\Psi(x_0, t_0) = 0$, $\nabla^2\Psi(x_0, t_0) \leq 0$ e quindi

$$\Psi_t(x_0, t_0) + F^*\big(\nabla\Psi(x_0, t_0), \nabla^2\Psi(x_0, t_0)\big) \geq 0 \ .$$

Mandando $\epsilon \downarrow 0$ ed utilizzando la Proposizione 1.15, si ha che w è una soprasoluzione viscosa di (1.17) in tutto $\mathbb{R}^n \times (0, T)$.

□

Teorema 3.20. *Sia, come sopra, $\{\Gamma_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{G}$ un flusso liscio di dimensione $n - k$ e sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times (0, T)$ il più grande aperto su cui η è di classe $\mathbf{C}^\infty$. Allora, le varietà Γ_t si evolvono per curvatura media se e solo se*

$$d_t(x, t) \geq -F\big(\nabla d(x, t), \nabla^2 d(x, t)\big) = \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i \qquad \forall (x, t) \in \Omega, \ x \notin \Gamma_t \ . \quad (3.32)$$

dove $d(x, t) = dist(x, \Gamma_t)$ e $F(p, X)$ è definita come in (1.41).

Dimostrazione.
Supponiamo che le Γ_t si evolvano per curvatura media e poniamo

$$\Omega' = \{(x, t) \in \Omega : \ x \notin \Gamma_t\} \ .$$

In Ω' si ha

$$\eta_{it} = (dd_i)_t = d_t d_i + d d_{it} \ , \qquad d_i\eta_{it} = d_t + d d_i d_{it} = d_t + \frac{1}{2} d(d_i d_i)_t = d_t \ . \quad (3.33)$$

In maniera simile si ottiene

$$\Delta\eta_i = d_i\Delta d + 2 d_j d_{ij} + d\Delta d_i = d_i\Delta d + d\Delta d_i$$

e

$$d_i\Delta\eta_i = \Delta d + d d_i\Delta d_i \qquad \text{in } \Omega' \ . \quad (3.34)$$

Poniamo $\alpha_i = \eta_{it} - \Delta\eta_i$.
Allora da (3.33) e (3.34) si ricava

$$\alpha_i d_i = d - \Delta d + d \parallel \nabla^2 d \parallel^2 \ ,$$

dove $\|\cdot\|$ indica la norma usuale in $\mathbf{S}^{n\times n}$. Poiché $\nabla^2 d$ è una matrice simmetrica, la sua norma è uguale alla somma dei quadrati degli autovalori, pertanto

$$\alpha_i d_i = d_t - \sum_{i=1}^{n} \beta_i + d \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2 \qquad \text{in } \Omega' \ ,$$

dove $\beta_1 \leq \ldots \leq \beta_n$ sono gli autovalori di $\nabla^2 d$. Grazie al Teorema 3.14, gli ultimi $k-1$ autovalori sono uguali a $\dfrac{1}{d}$, uno è nullo e i restanti $n-k$ sono limitati in un intorno

$$I_\sigma = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T] : \ d(x,t) \leq \sigma\} \ .$$

Pertanto otteniamo

$$\alpha_i d_i = d_t - \sum_{i=1}^{n-k+1} \beta_i + d \sum_{i=1}^{n-k+1} \beta_i^2 + d \sum_{i=n-k+2}^{n} \beta_i(d\beta_i - 1) \tag{3.35}$$

$$= d_t + F(\nabla d, \nabla^2 d) + dC(x,t) \qquad \text{in } I_\sigma \cap \Omega' \ , \tag{3.36}$$

per qualche funzione limitata $C(x,t)$.
Poiché $\{\Gamma_t\}$ rappresenta un flusso liscio che si evolve per curvatura media, $\alpha_i = 0$ per ogni i, quindi abbiamo

$$\lim_{x\to x_0} d_t(x,t) + F\big(\nabla d(x,t), \nabla^2 d(x,t)\big) = 0 \qquad \forall x_0 \in \Gamma_t, \ t \in (0,T) \ . \tag{3.37}$$

Fissiamo ora $x \in \Omega'$ e $t \in [0,T]$. Indicheremo con x_0 l'unico punto di Γ_t tale che $d(x,t) = \mid x_0 - x \mid$. Allora, posto $p = \dfrac{x_0 - x}{\mid x_0 - x \mid}$, si ha

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} d_t(x_0 + sp, t) = \langle \nabla d_t(x_0 + sp, t), p\rangle = \langle \nabla d_t(x_0 + sp, t), \nabla d(x_0 + sp, t)\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \mid \nabla d(x_0 + sp, t) \mid^2 = 0 \ , \tag{3.38}$$

per ogni $s \in (0, d(x,t)]$.
Sempre dal Teorema 3.14 segue che l'applicazione

$$s \to d_t(x_0 + sp, t) + F\big(\nabla d(x_0 + sp, t), \nabla^2 d(x_0 + sp, t)\big)$$

è non decrescente in $(0, d(x,t)]$. Otteniamo quindi (3.32) da (3.37), mandando $s \downarrow 0$.
Supponiamo viceversa che (3.32) sia verificata su tutto Ω'. Sia

$$\gamma(x,t) = \nabla \eta_t - \Delta \nabla \eta(x,t) = \big(\alpha_1(x,t), \ldots, \alpha_n(x,t)\big) \ . \tag{3.39}$$

Per continuità è sufficiente dimostrare che $\gamma(y,t) = 0$ per ogni $y \in \Gamma_t$ e per ogni $t \in (0,T)$. Grazie al Teorema 3.18, $\nabla\eta_t(y,t)$ è ortogonale a Γ_t in y, pertanto è sufficiente dimostrare che per ogni vettore unitario p, ortogonale a Γ_t in y, si ha

$$\langle p, \gamma(y,t)\rangle \geq 0 \ .$$

Sia $\sigma > 0$ tale che η è regolare in $I_\sigma(\Gamma_t)$ e, per $s \in (0,\sigma]$, sia $x_s = y + sp$. Moltiplicando (3.39) per p e procedendo come in precedenza, otteniamo

$$\begin{aligned}\langle p, \gamma(x_s,t)\rangle &= d_t(x_s,t) - \Delta d(x_s,t) \parallel \nabla^2 d(x_s,t) \parallel^2 \\ &= d_t(x_s,t) + F\big(\nabla d(x_s,t), \nabla^2 d(x_s,t)\big) + O\big(d(x_s,t)\big) \ .\end{aligned}$$

Poiché, per ipotesi, d è una soprasoluzione classica di (1.17) in Ω', mandando $s \downarrow 0$, otteniamo

$$\langle p, \gamma(y,t)\rangle \geq 0 \ .$$

□

Osserviamo ora che, anche in codimensione maggiore di 1, le evoluzioni generalizzate, definite per mezzo di soluzioni viscose, coincidono con le evoluzioni regolari quando queste ultime esistono.

Corollario 3.21. *Sia $\{\Gamma_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{G}$ come nel Teorema 3.20 e sia $u(x,t)$ l'unica soluzione viscosa di (1.17), con F come in (1.41) e con dato iniziale $u(x,0) = dist(x,\Gamma_0)$. Allora*

$$\Gamma_t = \{x \in \mathbb{R}^n : \ u(x,t) = 0\}$$

per ogni $t \in [0,T]$. Inoltre $d(x,t) = dist(x,\Gamma_t)$ è una soprasoluzione viscosa di (1.17) in tutto $\mathbb{R}^n \times (0,T)$.

Dimostrazione.
Scegliamo $\sigma > 0$ tale che η sia regolare su

$$Q_\sigma = \{(x,t) : \ 0 \leq t \leq T, d(x,t) \leq \sigma\} \ .$$

Fissiamo $(x,t) \in Q_\sigma, \ x \notin \Gamma_t$. Sia $y \in \Gamma_t$ tale che $d(x,t) = \mid y - x \mid$; per ogni $s \in [0, d(x,t)]$, poniamo

$$x_s = y + s\frac{x-y}{\mid x - y \mid} \ .$$

Se indichiamo con $\beta_1(s) \leq \ldots \leq \beta_n(s)$ gli autovalori di $\nabla^2 d(x_s,t)$, dal Teorema 3.14 segue, per $s \in (0,\sigma]$,

$$\beta_i(s) = \begin{cases} \dfrac{\beta_i}{1+s\beta_i} & i \leq n-k+1 \ , \\ \dfrac{1}{s} & i > n-k+1 \ . \end{cases} \tag{3.40}$$

Dove $\beta_1 = 0$ e le altre costanti β_i sono, a meno del segno, le curvature di Γ_t lungo la direzione $\nabla d(x,t)$. Pertanto esiste una costante reale $C > 0$, indipendente da $(x,t) \in Q_\sigma$, tale che

$$| \beta_i |^2 \leq C \qquad \forall i \leq n-k+1,\ \forall s \in (0,\sigma] .$$

Come è mostrato nel Teorema 3.20, $d_t(x_s,t)$ è costante in s e, per (3.37),

$$\lim_{s \downarrow 0} d_t(x_s,t) + F\big(\nabla d(x_s,t), \nabla^2 d(x_s,t)\big) = 0 .$$

Al più riducendo σ, possiamo supporre $\sigma C < \dfrac{1}{2}$. Per $0 < s' < s \leq \sigma$, si ha

$$d_t(x_s,t) + F\big(\nabla d(x_s,t), \nabla^2 d(x_s,t)\big) = \sum_{i=1}^{n-k+1} \left(\frac{\beta_i}{1+s'\beta_i} - \frac{\beta_i}{1+s\beta_i} \right) + O(s') .$$

Mandando $s' \downarrow 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} d_t(x_s,t) + F\big(\nabla d(x_s,t), \nabla^2 d(x_s,t)\big) &\leq (n-k+1)\frac{sC^2}{1-sC} \\ &\leq 2C^2(n-k+1)d(x_s,t) . \end{aligned}$$

Poniamo $C^* = 2C^2(n-k+1)$. Abbiamo quindi dimostrato che

$$d_t + F(\nabla d, \nabla^2 d) \leq C^* d , \tag{3.41}$$

in

$$Q'_\sigma = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) :\ 0 < d(x,t) < \sigma\} .$$

Sia $W(x,t) = e^{-C^* t}\big(d(x,t) \wedge \dfrac{\sigma}{2}\big)$. Vogliamo dimostrare che $W(x,t)$ è una sottosoluzione viscosa di (1.17) in $\mathbb{R}^n \times (0,T)$. Infatti, sia

$$H_\sigma(r) = r \wedge \frac{\sigma}{2} , \qquad w(x,t) = H_\sigma\big(d(x,t)\big) .$$

È sufficiente dimostrare che $w(x,t)$ è una sottosoluzione viscosa di (3.41) in $\mathbb{R}^n \times (0,T)$. Supponiamo che, per qualche funzione test ψ, $w - \psi$ assuma massimo in $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$. Poiché $\{\Gamma_t\}$ è regolare, si ha $x_0 \notin \Gamma_{t_0}$. Supponiamo che $d(x_0,t_0) > \dfrac{\sigma}{2}$, allora, poiché d è continua, $H \equiv \dfrac{\sigma}{2}$ in un intorno di (x_0,t_0). Pertanto

$$\psi_t(x_0,t_0) = 0 , \quad \nabla\psi(x_0,t_0) = 0 , \quad \nabla^2\psi(x_0,t_0) \geq 0 .$$

Da cui segue

$$0 = \psi_t(x_0,t_0) + F^*\big(\nabla\psi(x_0,t_0), \nabla^2\psi(x_0,t_0)\big) \le C^* d(x_0,t_0) \ . \tag{3.42}$$

Supponiamo ora che $d(x_0,t_0) \le \dfrac{\sigma}{2}$, poiché $x_0 \notin \Gamma_{t_0}$, si ha $(x_0,t_0) \in Q'_\sigma$ e, quindi, da (3.41) segue

$$d_t(x_0,t_0) + F\big(\nabla d(x_0,t_0), \nabla^2 d(x_0,t_0)\big) \le C^* d(x_0,t_0) \ ,$$

e, grazie al fatto che d è regolare in un intorno di (x_0,t_0), si ottiene nuovamente (3.42).
Per il Teorema di confronto 1.17, si ha $0 \le W \le u$ in $\mathbb{R}^n \times [0,T]$, pertanto il luogo di zeri di u è contenuto nel luogo di zeri di W per ogni $t \in [0,T]$. Si noti che il luogo di zeri di W è uguale a Γ_t.
Per dimostrare l'inclusione opposta, poniamo $V(x,t) = H_\sigma\big(d(x,t)\big)$. Grazie ai Teoremi 3.20 e 1.26, è facile vedere che V è una soprasoluzione viscosa di (1.17) in $\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T) : \ V(x,t) > 0\}$. Pertanto, per il Lemma 3.19, V è una soprasoluzione viscosa in tutto $\mathbb{R}^n \times (0,T)$. Per il Teorema 1.17, si ha

$$0 \le u \wedge \frac{\sigma}{2} \le V = d \wedge \frac{\sigma}{2} \ ,$$

da cui segue che Γ_t è contenuta nel luogo di zeri di u.
Mostreremo ora che d è una soprasoluzione viscosa di (1.17) in $\mathbb{R}^n \times (0,T)$. Sia, come sopra, ψ una funzione test regolare e $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$ sia un punto di minimo per $d - \psi$. Scegliamo $y_0 \in \Gamma_{t_0}$ tale che $d(x_0,t_0) = \mid x_0 - y_0 \mid$ e poniamo

$$\phi(y,t) = \psi(y + x_0 - y_0, t) \ .$$

Allora, dalla subadditività di d, segue facilmente che (y_0,t_0) è un punto di minimo per $d - \phi$. Sia ora V definita come in precedenza, poiché $y_0 \in \Gamma_{t_0}$, (y_0,t_0) è un punto di minimo anche per $V - \phi$. Poiché V è una soprasoluzione viscosa di (1.17), si ha

$$\phi_t(y_0,t_0) + F_*\big(\nabla\phi(y_0,t_0), \nabla^2\phi(y_0,t_0)\big) \ge 0 \ ,$$

da cui segue

$$\psi_t(x_0,t_0) + F_*\big(\nabla\psi(x_0,t_0), \nabla^2\psi(x_0,t_0)\big) \ge 0 \ ,$$

e, quindi, d è una soprasoluzione viscosa di (1.17) in tutto $\mathbb{R}^n \times (0,T)$.

□

Analogamente a quanto fatto nel Teorema 3.18, sempre sfruttando il Teorema 3.15, è possibile caratterizzare, mediante un' equazione nella distanza al quadrato, evoluzioni geometriche più generali della curvatura media.
Consideriamo infatti $\{\Gamma_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{G}$ un flusso liscio di dimensione $n-k$ e siano $t \in [0,T]$, $x_0 \in \Gamma_0$. Supponiamo che, per ogni vettore unitario $\nu \in N_{\Gamma_t}\big(\phi(x_0,t)\big)$, si abbia

$$\langle \phi_t(x_0,t), \nu\rangle = \sum_{i=1}^{n-k} f_i(\kappa_i) \ ,$$

dove le κ_i sono, come in precedenza, le curvature principali di Γ_t in $\phi(x_0,t)$ lungo la direzione ν, mentre le $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono assegnate funzioni regolari di classe $\mathbf{C}^\infty$.
Se questa condizione è verificata per ogni (x_0,t) come sopra, diremo che le Γ_t si evolvono secondo $(f_1,\dots,f_{n-k})$. Notiamo che, nel caso in cui $f_i(x) = x$ per ogni $1 \le i \le n-k$, si ha evoluzione per curvatura media.
Scegliamo ora $\sigma > 0$ tale che η_{Γ_t} sia regolare in un intorno di Γ_t di ampiezza σ per ogni $t \in [0,T]$. Applicando il Teorema 3.15, si ottiene

$$\kappa_i(x) = -\frac{\lambda_i(x+s\nu)}{\big(1-\lambda_i(x+s\nu)\big)\sqrt{2\eta_{\Gamma_t}}} \qquad \forall t\in[0,T],\ x\in\Gamma_t,\ \nu\in N_{\Gamma_t}(x),\ s\le\sigma \ ,$$

dove i λ_i sono, come sempre, gli autovalori della matrice $\nabla^2\eta_{\Gamma_t}(x+s\nu)$.
Procedendo allo stesso modo, si ha una generalizzazione dell'ultima equazione del Teorema 3.18.

Teorema 3.22. *Sia $\{\Gamma_t\}_{t\in[0,T]} \in \mathcal{G}$ un flusso liscio di dimensione $n-k$, allora esiste $\sigma > 0$ tale che la funzione*

$$\eta(x,t) = \frac{1}{2} dist^2(x,\Gamma_t)$$

è di classe $\mathbf{C}^\infty$ in $I_\sigma(\Gamma_t) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T] :\ \eta(x,t) \le \sigma\}$.
Inoltre, $\{\Gamma_t\}_{t\in[0,T]}$ è un'evoluzione secondo $(f_1,\dots,f_{n-k})$ di Γ_0 se e solo se

$$\eta_t(x,t) = \sum_{i=1}^{n-k} \sqrt{2\eta(x,t)} f_i\left(\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_i)\sqrt{2\eta(x,t)}}\right) \qquad \forall t\in[0,T],\ x\in I_\sigma(\Gamma_t) \ . \tag{3.43}$$

Poiché un flusso liscio di dimensione $n-k$ si può vedere come un'ipersuperficie limite con le $k-1$ curvature più grandi uguali a $+\infty$, si ha la seguente

Osservazione 3.23. *Sia $\{\Gamma_t\}_{t\in[0,T]}$ un flusso liscio di dimensione $n-k$ che si evolve secondo $(f_1,\dots,f_{n-k})$ e sia, come sopra,*

$$\eta(x,t)=\frac{1}{2}dist^2(x,\Gamma_t)$$

e $\sigma>0$ tale che $\eta\in\mathbf{C}^\infty\big(I_\sigma(\Gamma_t)\big)$. Allora, date $g_1,\dots,g_n:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g_i\in\mathbf{C}^\infty$ per ogni i, vale

$$\eta_t(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2\eta(x,t)}g_i\left(\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_i)\sqrt{2\eta(x,t)}}\right)\qquad\forall t\in[0,T],\ x\in I_\sigma(\Gamma_t)\ , \tag{3.44}$$

se e solo se

$$g_i(x)=f_i(x)\qquad\forall i\le n-k\ ,$$

$$\lim_{|x|\to\infty}g_i(x)=0\quad\forall i>n-k\ .$$

In particolare, si ha evoluzione per curvatura media se e solo se

$$g_i(x)=x\qquad\forall i\le n-k\ ,$$

$$\lim_{|x|\to\infty}g_i(x)=0\quad\forall i>n-k\ .$$

Osservazione 3.24. *In effetti non è necessario richiedere che le g_i siano regolari su tutta la retta reale, in quanto è rilevante solo il loro comportamento in un intorno dell'infinito. Potremmo addirittura considerare le funzioni g_i definite fuori da un compatto. Un esempio del genere, che utilizzeremo in seguito, è*

$$g_i(x)=\frac{1}{x}\qquad\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}\ .$$

Capitolo 4

Esistenza per tempi piccoli

Quando si cercano soluzioni deboli di qualche problema, si vorrebbe che tali soluzioni coincidessero con quelle regolari quando queste ultime esistono. Abbiamo visto che per le minime barriere e per la viscosità questo si verifica sotto opportune ipotesi sull'equazione (sostanzialmente la degenere ellitticità della funzione H), comunque il problema di cercare definizioni più generali di soluzione perderebbe significato in assenza di soluzioni regolari. È inoltre importante poter disporre di soluzioni regolari, ad esempio per dimostrare "per densità" alcune proprietà qualitative delle soluzioni. In quest'ottica è interessante cercare teoremi di esistenza e regolarità, almeno per tempi piccoli. Per quanto riguarda l'evoluzione secondo la curvatura media in codimensione 1, questo è stato fatto da diversi autori, utilizzando principalmente due metodi piuttosto diversi:

- l'approccio parametrico, che consiste nello studiare l'evoluzione della varietà Γ_t al tempo t, parametrizzata da una funzione $\phi : \Gamma_0 \to \mathbb{R}^n$. Più precisamente, scrivendo l'equazione di evoluzione in coordinate locali, si ottiene un sistema parabolico non lineare. In generale, per avere l'uniforme parabolicità, è necessario aggiungere al sistema opportune componenti tangenziali, che influiscono solo sulla parametrizzazione di Γ_t, lasciandola invariata come sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. A questo punto si linearizza il sistema al tempo $t = 0$ e si applica la teoria dei sistemi parabolici lineari su varietà. Questo metodo, per quanto comporti calcoli laboriosi ed equazioni alle derivate parziali su varietà, ha il vantaggio di essere apparentemente estendibile senza troppe modifiche alla codimensione maggiore di 1 ;

- l'approccio cosiddetto della *distanza*, più nello spirito di questo lavoro, che consiste nel carcare un'equazione parabolica soddisfatta dalla

funzione distanza con segno dagli insiemi Γ_t e nell'usare tale equazione per dimostrare l'esistenza del moto. Questo metodo è più elegante e rapido del precedente, anche se sembra più difficilmente estendibile alla codimensione maggiore di 1, poiché la distanza non è più regolare ed è necessario passare alla distanza al quadrato. Come vedremo, questo porta, però, ad equazioni paraboliche degeneri, la cui teoria non è altrettanto ben sviluppata .

4.1 Codimensione 1

Forniremo qui una dimostrazione, secondo l'approccio della distanza, data da Evans e Spruck in [ES2], e ne valuteremo la possibile estensione a codimensione maggiore.
Come prima cosa, ci proponiamo di ricavare euristicamente quale equazione differenziale soddisfi la distanza con segno da una ipersuperficie di classe $\mathbf{C}^\infty$ che si evolve per curvatura media.
Sia Γ_t l'ipersuperficie al tempo t, con $t \in [0, t_0]$, e sia U_t l'aperto di $\mathbb{R}^n$ con bordo Γ_t, diffeomorfo a U_0. Definiamo

$$d(x,t) = \begin{cases} dist(x, \Gamma_t) & se\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{U_t}\ , \\ -dist(x, \Gamma_t) & se\ x \in U_t \end{cases} \tag{4.1}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n,\ t \in [0, t_0]$.
Per ipotesi $\Gamma \equiv \bigcup_{0 \le t \le t_0} \Gamma_t \times \{t\}$ è una varietà regolare e quindi, con un ragionamento analogo a quello del Teorema 3.11, si dimostra che d è di classe $\mathbf{C}^\infty$ in

$$Q = \{(x,t) :\ 0 < t < t_0, -\delta_0 < d(x,t) < \delta_0\}$$

per qualche δ_0 positivo sufficientemente piccolo.
In Q è ben definita una proiezione π su Γ con $\pi(x,t) = (y,t)$, dove y è l'unico punto di minima distanza di x da Γ_t. Come mostrato nel Teorema 3.14, vale la seguente uguaglianza:

$$\nabla^2 d(y,t) = \nabla^2 d(x,t) \circ \left(Id - d\ \nabla^2 d(x,t)\right)^{-1}, \tag{4.2}$$

da cui segue, notando che gli autovalori di $\nabla^2 d(y,t)$ sono le curvature principali κ_i di Γ_t (tranne uno che è nullo) e indicando con $\{\lambda_i(x,t)\}$ $(i = 1 \dots n)$ gli autovalori di $\nabla^2 d(x,t)$,

$$\frac{\partial d}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial d}{\partial t}(y,t) = \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(y,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(x,t)}{1 - d\lambda_i(x,t)}\ , \tag{4.3}$$

dove la prima uguaglianza si dimostra come nel Teorema 3.20 (3.38). In questa forma il problema parabolico è del tipo

$$d_t = F(d, \nabla^2 d) \tag{4.4}$$

e, poiché F, scritta nelle variabili $\lambda_1, \dots \lambda_n$, è simmetrica, F è di classe $\mathbf{C}^\infty$ quando d è di classe $\mathbf{C}^\infty$.
L'idea è ora quella di studiare direttamente l'equazione (4.3). Per far questo supponiamo che Γ_0 sia un'ipersuperficie in $\mathbb{R}^n$ regolare, connessa e compatta, e sia d_0 la sua distanza con segno. Sia inoltre δ_0 tale che $d_0 \in \mathbf{C}^\infty(\overline{\Omega})$ con

$$\overline{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d_0(x) \in [-\delta_0, \delta_0]\} ,$$

e sia

$$Q = \overline{\Omega} \times (0, t_0) , \qquad \Sigma = \partial\Omega \times [0, t_0] .$$

Si cerca una soluzione regolare per tempi piccoli di

$$\begin{cases} v_t = F(v, \nabla^2 v) & in\ Q , \\ \mid \nabla v \mid^2 = 1 & su\ \Sigma , \\ v = d_0 & su\ \overline{\Omega} \times \{0\} . \end{cases} \tag{4.5}$$

Sia ora $M = \max_{\overline{\Omega}} \parallel \nabla^2 d_0 \parallel$ e δ_0 abbastanza piccolo da avere $M\delta_0 \leq \frac{1}{4}$. Sia inoltre

$$G = \{(z, R) \in \mathbb{R} \times \mathbf{S}^{n\times n} : \ z \in (-\delta_0, \delta_0), \mid R \mid < 2M\} .$$

La scelta di δ_0 implica che, per ogni indice i,

$$\mid z\lambda_i(R) \mid \leq \mid z \mid \cdot \parallel R \parallel \leq \frac{1}{2} \tag{4.6}$$

e, se $(z, R) \in G$, allora

$$F(z, R) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i(R)}{1 - z\lambda_i(R)} \tag{4.7}$$

è definita e regolare su G. Estendiamo F in modo che sia di classe $\mathbf{C}^\infty$ fuori da G, cosicché $\mid F \mid$, $\mid \nabla F \mid$, $\parallel \nabla^2 F \parallel$ restino limitate. Poiché, in G,

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}(z, R) = \frac{1}{(1 - z\lambda_i)^2} > 0 \qquad \forall i \in [1, \dots, n] , \tag{4.8}$$

ci si può aspettare che l'equazione (4.4) sia uniformemente parabolica; in effetti vale il seguente

Lemma 4.1. *Esiste una costante $\theta > 0$ tale che, per ogni $(z, R) \in G$,*

$$\sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(z, R)\ \xi_i \xi_j \geq \theta \mid \xi \mid^2 \qquad \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n\ , \tag{4.9}$$

dove con r_{ij} indichiamo la matrice simmetrica

$$r_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_i \otimes e_j + e_j \otimes e_i)\ .$$

Dimostrazione.

Qui $\dfrac{\partial F}{\partial r_{ij}}$ indicano le derivate di Frechét di F rispetto alla base $\langle \dots, r_{ij}, \dots \rangle$ di $\mathbf{S}^{n\times n}$. Fissiamo $\xi \in \mathbb{R}^n$ e $t > 0$ tale che $(z, R + t\ \xi \otimes \xi) \in G$. Per la formula di Courant possiamo ordinare gli autovalori di R in modo tale che, posto $R_t = R + t\ \xi \otimes \xi$, si abbia

$$\lambda_i(R_t) \geq \lambda_i(R) \qquad (i = 1, \dots n)\ .$$

Da questo segue, grazie a (4.6) ed a (4.8),

$$\begin{aligned} & F(z, R_t) - F(z, R) \\ & = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}\big(z, \dots s\lambda_i(R_t) + (1-s)\lambda_i(R), \dots\big)\big(\lambda_i(R_t) - \lambda_i(R)\big)\ \mathrm{ds} \\ & \geq \theta\ \mathrm{tr}(R_t - R) \geq \frac{4}{9}\ \mathrm{tr}(R_t - R)\ . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Dividendo per t e mandando t a 0, si ottiene (4.9).

□

A questo punto è sufficiente applicare i risultati di [Lu], per ottenere una soluzione regolare per tempi piccoli di (4.5).
Vale infatti il seguente risultato generale.
Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$; consideriamo il problema

$$\begin{cases} v_t(t,x) = f\big(t, x, v(t,x), \nabla v(t,x), \nabla^2 v(t,x)\big) & t > 0,\ x \in \overline{\Omega}\ , \\ v(0,x) = v_0(x) & x \in \overline{\Omega}\ , \\ g\big(t, x, v(t,x), \nabla v(t,x)\big) = 0 & t \geq 0,\ x \in \partial\Omega\ , \end{cases} \tag{4.11}$$

dove f, v_0, g sono assegnate funzioni regolari. Faremo nel seguito le seguenti ipotesi:

- la funzione f è uniformemente parabolica, cioè

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_{ij}}(t,x,v,p,q)\xi_i,\xi_j > 0,\ \forall (t,x,v,p,q) \in Q, \xi = (\xi_1,\dots\xi_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}\ , \tag{4.12}$$

  dove $Q = [0,T] \times \overline{\Omega} \times B\big((\overline{v},\overline{p},\overline{q}), R_0\big)$ e $(\overline{v},\overline{p},\overline{q}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbf{S}^{n\times n}$;

- la funzione g soddisfa una condizione di trasversalità del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial p_i}(t,x,v,p)\nu_i(x) \neq 0,\ \forall (t,x,v,p) \in S, x \in \partial\Omega\ , \tag{4.13}$$

  dove $S = [0,T] \times \overline{\Omega} \times B\big((\overline{v},\overline{p}), R_0\big)$ e ν_i indica la componente i^a della normale esterna a $\partial\Omega$.

Richiediamo inoltre che valgano certe ipotesi di regolarità su f, g e $\partial\Omega$. Introduciamo gli spazi

$\big(k \in \mathbb{N},\ \alpha \in (0,1)\big)$

$$\mathbf{C}^{k+\alpha}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big) = \big\{ f \in \mathbf{C}^k\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big) :\ \nabla^{(k)} f \in \mathbf{C}^{\alpha}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big)\big\}\ ,$$

$$\| f \|_{\mathbf{C}^{k+\alpha}} = \| f \|_{\mathbf{C}^k} + \max_{|\beta|=k} \| \nabla^{\beta} f \|_{\mathbf{C}^{\alpha}}\ ;$$

$(\alpha > 0)$

$$\mathbf{C}^{\alpha,0}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big) =$$

$$\big\{ f \in \mathbf{C}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big) :\ f(\cdot,x) \in \mathbf{C}^{\alpha}\big([0,T]\big)\ \forall x \in \overline{\Omega} \text{ e } \| f \|_{\mathbf{C}^{\alpha,0}} < +\infty\big\}\ ,$$

dove $\| f \|_{\mathbf{C}^{\alpha,0}} = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \| f(\cdot,x) \|_{\mathbf{C}^{\alpha}([0,T])}$;

$$\mathbf{C}^{0,\alpha}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big) =$$

$$\big\{f\in\mathbf{C}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big):\ f(t,\cdot)\in\mathbf{C}^{\alpha}\big(\overline{\Omega}\big)\ \forall t\in[0,T]\ \text{e}\ \parallel f\parallel_{\mathbf{C}^{0,\alpha}}<+\infty\big\}\ ,$$

$$\text{dove}\ \parallel f\parallel_{\mathbf{C}^{0,\alpha}}=\sup_{t\in[0,T]}\parallel f(t,\cdot)\parallel_{\mathbf{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})}\ ;$$

$$\mathbf{C}^{1,2}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big) =$$

$$\big\{f\in\mathbf{C}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big):\ \nabla_t f,\nabla_{ij}f\in\mathbf{C}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big),\ \forall i,j\in[1,\dots,n]\big\}\ ,$$

$$\parallel f\parallel_{\mathbf{C}^{1,2}}=\parallel f\parallel_{\infty}+\sum_{i=1}^{n}\parallel\nabla_i f\parallel_{\infty}+\parallel\nabla_t f\parallel_{\infty}+\sum_{i,j=1}^{n}\parallel\nabla_{ij}f\parallel_{\infty}\ .$$

Inoltre, fissato $0<\alpha<2$, definiamo gli spazi di Hölder "parabolici".

$$\mathbf{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big)=\mathbf{C}^{\frac{\alpha}{2},0}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big)\cap\mathbf{C}^{0,\alpha}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big)\ ,$$

$$\parallel f\parallel_{\mathbf{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}}=\parallel f\parallel_{\mathbf{C}^{\frac{\alpha}{2},0}}+\parallel f\parallel_{\mathbf{C}^{0,\alpha}}\ ;$$

$$\mathbf{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big) =$$

$$\big\{f\in\mathbf{C}^{1,2}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big):\ \nabla_t f,\nabla_{ij}f\in\mathbf{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}\big([0,T]\times\overline{\Omega}\big),\ \forall i,j\in[1,\dots,n]\big\}\ ,$$

$$\parallel f\parallel_{\mathbf{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}}=\parallel f\parallel_{\infty}+\sum_{i=1}^{n}\parallel\nabla_i f\parallel_{\infty}+\parallel\nabla_t f\parallel_{\mathbf{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}}+\sum_{i,j=1}^{n}\parallel\nabla_{ij}f\parallel_{\mathbf{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}}\ .$$

Nel seguito, supporremo che

1. esiste $\alpha\in(0,1)$ tale che $\partial\Omega$ è uniformemente $\mathbf{C}^{2+\alpha}$;

2. $f:\ Q\to\mathbb{R}$ è differenziabile rispetto a (v,p,q), inoltre $f, f_{p_i}, f_{q_{ij}}$ sono localmente lipschitziane rispetto a (v,p,q) e localmente $\mathbf{C}^{\frac{\alpha}{2},\alpha}$ rispetto a (t,x), uniformemente rispetto alle altre variabili ;

3. $g : S \to \mathbb{R}$ è due volte differenziabile rispetto a (v,p) e ogni derivata fino al secondo ordine è localmente lipschitziana rispetto a (v,p) e localmente $\mathbf{C}^{\frac{1+\alpha}{2},1+\alpha}$ rispetto a (t,x), uniformemente rispetto alle altre variabili .

In particolare la condizione (2) è verificata se f è di classe $\mathbf{C}^2$ rispetto a tutte le sue variabili, mentre la condizione (3) se g è di classe $\mathbf{C}^3$ rispetto a tutte le sue variabili.
Possiamo ora enunciare il Teorema di esistenza locale ed unicità.

Teorema 4.2. *Supponiamo che f e g soddisfino (4.12) e (4.13) e che siano verificate (1)-(3). Se inoltre $v_0 \in \mathbf{C}^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ verifica la condizione di compatibilità*

$$g\big(t_0, x, v_0(x), \nabla v_0(x)\big) = 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega \tag{4.14}$$

e l'immagine di $(v_0, \nabla v_0, \nabla^2 v_0)$ è contenuta in $B\left((\overline{v},\overline{p},\overline{q}), \dfrac{R_0}{2}\right)$, allora esiste $\delta > 0$ tale che il problema (4.11) ha un'unica soluzione $v \in \mathbf{C}^{1+\frac{\alpha}{2},2+\alpha}\big([0,\delta]\times\overline{\Omega}\big)$ in $[0,\delta]\times\overline{\Omega}$.

A questo punto è necessario dimostrare che gli insiemi

$$\Gamma_t \equiv \{x \in \overline{\Omega} : \ v(t,x) = 0\} \qquad t \in [0,t_0] \tag{4.15}$$

sono, in effetti, ipersuperfici di classe $\mathbf{C}^\infty$ che si evolvono per curvatura media. Abbiamo il seguente

Teorema 4.3.

$$|\ \nabla v\ |^2 \equiv 1 \qquad \text{in } Q\ . \tag{4.16}$$

Dimostrazione.
Sia $w = |\ \nabla v\ |^2 - 1 \in \mathbf{C}^1(\overline{Q}) \cap \mathbf{C}^\infty(Q)$; da (4.5) segue

$$\begin{aligned} &w = 0 \quad su\ \Sigma\ , \\ &w = 0 \quad su\ \overline{\Omega}\times\{t=0\}\ . \end{aligned} \tag{4.17}$$

Differenziando (4.5) otteniamo

$$v_{x_k t} = \frac{\partial F}{\partial z}(v,\nabla^2 v)v_{x_k} + \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(v,\nabla^2 v)v_{x_i x_j x_k} \qquad (k = 1,\dots n)\ .$$

Pertanto

$$w_t = 2v_{x_k}v_{x_kt} = 2\frac{\partial F}{\partial z}(v,\nabla^2 v) \mid \nabla v \mid^2 + \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(v,\nabla^2 v)(w_{x_ix_j} - 2v_{x_kx_i}v_{x_kx_j}) \ . \tag{4.18}$$

Ora, in Q, vale

$$\frac{\partial F}{\partial z}(v,\nabla^2 v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\big(\lambda_i(\nabla^2 v)\big)^2}{\big(1 - v\lambda_i(\nabla^2 v)\big)^2} \ ,$$

da cui segue, grazie a (4.8),

$$\frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(v,\nabla^2 v)v_{x_kx_i}v_{x_kx_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}(v,\nabla^2 v)\big(\lambda_i(\nabla^2 v)\big)^2 = \frac{\partial F}{\partial z}(v,\nabla^2 v) \ .$$

Di conseguenza (4.18) diviene

$$w_t = 2\frac{\partial F}{\partial z}(v,\nabla^2 v)w + \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(v,\nabla^2 v)w_{x_ix_j} \qquad in\ Q \ . \tag{4.19}$$

Per il Lemma 4.9, questa equazione è uniformemente parabolica, quindi si può applicare il principio del confronto. Poiché, grazie a (4.17), si ha $w = 0$ sul bordo parabolico di Q, possiamo concludere che $w \equiv 0$ in Q.

□

Da questo Teorema e dai Teoremi 3.6 e 3.10, deduciamo che Γ_t è un'ipersuperficie di classe $\mathbf{C}^\infty$ per ogni $0 \le t \le t_0$ ed inoltre $v(x,t)$ è la distanza con segno da Γ_t in $\overline{\Omega} \times \{t\}$. La Proposizione seguente ci permette di concludere che si ha evoluzione per curvatura media.

Proposizione 4.4. *Le ipersuperfici $\{\Gamma_t\}_{0\le t\le t_0}$ sono evoluzioni di Γ_0 per curvatura media.*

Dimostrazione.
Per ogni fissato $t \in [0,t_0]$, $\nu = \nabla v$ è un vettore unitario normale a Γ_t.
Da (4.5), si ricava

$$v_t = \Delta v = \mathrm{div}(\nu) \qquad su\ \Gamma_t \ .$$

Inoltre si ha sempre

$$\mathrm{div}(\nu) = -H = \sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i \ ,$$

dove le κ_i sono le curvature principali di Γ_t e

$$H = -\sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i$$

è la curvatura media scalare.
Fissiamo ora $x \in \Gamma_t$ e poniamo nel seguito $\nu_s = \nu\big(x(s), s\big)$. Consideriamo l'evoluzione del punto x secondo l'equazione

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = -\mathrm{div}(\nu_s)\nu_s \qquad \text{per } s > t \ , \\ \\ x(t) = x \ . \end{cases}$$

Allora

$$\frac{d}{ds} v\big(x(s), s\big) = -\mathrm{div}(\nu_s) + v_t\big(x(s), s\big) = 0 \ ,$$

e quindi

$$v\big(x(s), s\big) = 0 \qquad per \ s > t \ ,$$

cioè $\{\Gamma_t\}_{0 \le t \le t_0}$ si evolve per curvatura media.

□

4.2 Codimensione maggiore di 1

Quando si cerca di estendere questo metodo alla codimensione maggiore di 1, ci si accorge che non è più possibile utilizzare la funzione distanza con segno (né la funzione distanza) poiché, in generale, tale funzione non è derivabile sui punti della varietà, a meno che questa non sia un'ipersuperficie. Come possibile soluzione si può utilizzare la funzione $\eta = \frac{1}{2} dist^2$, che, grazie al Teorema 3.12, è sempre derivabile in un intorno di una varietà regolare. Per il Teorema 3.18, l'equazione nella η corrispondente al moto per curvatura media è

$$\eta_t = F(\nabla^2 \eta) = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_i} \ .$$

Sfortunatamente non è possibile applicare direttamente a tale equazione il Teorema 4.2 o tecniche analoghe, poiché l'equazione non è uniformemente parabolica, infatti si ha

$$\frac{\partial F}{\partial (p \otimes p)} = 0 \qquad \forall p \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \quad \text{tale che} \quad \nabla^2 \eta \circ p = p \ .$$

Come si è notato in precedenza, l'equazione è però parabolica degenere, cioè si ha

$$\sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} \xi_i \xi_j \geq 0 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \ .$$

Vale tuttavia il seguente

Teorema 4.5. *Sia Γ_0 una sottovarietà di classe $\mathbf{C}^k$ di $\mathbb{R}^n$ $(k \geq 4)$, e sia $\sigma > 0$ tale che $\eta_0(x) = \frac{1}{2} dist^2(x, \Gamma_0)$ sia almeno di classe $\mathbf{C}^{k-1}$ in $I_\sigma(\Gamma_0)$. Supponiamo inoltre che esistano $t_0 > 0$ e $\eta(x,t) \in \mathbf{C}^{k-1}\big(I_\sigma(\Gamma_0) \times (0,t_0)\big)$ tali che*

$$\begin{cases} \eta_t(x,t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} & \forall (x,t) \in I_\sigma(\Gamma_0) \times (0,t_0) \ ; \\ \\ \mid \nabla \eta(x,t) \mid^2 - 2\eta(x,t) = 0 & \forall (x,t) \in \Sigma \ ; \\ \\ \eta(x,0) = \eta_0(x) & \forall x \in I_\sigma(\Gamma_0) \ . \end{cases} \tag{4.20}$$

dove i λ_i sono, come in precedenza, gli autovalori di $\nabla^2 \eta(x,t)$, ordinati in maniera crescente e $\Sigma = \partial\big(I_\sigma(\Gamma_0)\big) \times [0,t_0]$.
Allora, posto $\Gamma_t = \{x \in I_\sigma(\Gamma_0) : \ \eta(x,t) = 0\}$, si ha che $\{\Gamma_t\}_{t \in (0,t_0)}$ è un flusso liscio di classe almeno $\mathbf{C}^{k-2}$ e di dimensione $n-k$, che si evolve per curvatura media.

Dimostrazione.
Dimostriamo che

$$\mid \nabla \eta \mid^2 - 2\eta = 0 \qquad \text{in } I_\sigma(\Gamma_0) \times (0,t_0) \ .$$

Poniamo

$$w = \mid \nabla \eta \mid^2 - 2\eta \ . \tag{4.21}$$

Da (4.20) segue

$$w = 0 \qquad \text{in } \Sigma \cup \big(I_\sigma(\Gamma_0) \times \{t = 0\}\big) \ .$$

Procediamo come nella dimostrazione del Teorema 4.3. Considereremo più in generale un'equazione del tipo

$$\eta_t(x,t) = \hat{F}(\eta, \nabla^2 \eta) = \sqrt{2\eta} \sum_{i=1}^{n} g_i \left(\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_i)\sqrt{2\eta}} \right) \tag{4.22}$$
$$\forall (x,t) \in I_\sigma(\Gamma_0) \times (0,t_0) \ ,$$

dove le g_i sono come nelle Osservazioni 3.23 e 3.24.
Differenziando (4.21), si ha

$$w_{x_i x_j} = 2\eta_{x_k}\eta_{x_k x_i x_j} + 2\eta_{x_k x_i}\eta_{x_k x_j} - 2\eta_{x_i x_j} \ . \tag{4.23}$$

Da (4.22), sempre per derivazione, ottieniamo

$$\eta_{x_k t} = \hat{F}_\eta \eta_{x_k} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial r_{ij}} \eta_{x_i x_j x_k} \ ,$$

da cui segue

$$w_t = 2\eta_{x_k}(\hat{F}_\eta \eta_{x_k} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial r_{ij}} \eta_{x_i x_j x_k}) - 2\eta_t \ ,$$

che, combinata con (4.23), diventa

$$w_t = 2\hat{F}_\eta w + \frac{\partial \hat{F}}{\partial r_{ij}} w_{x_i x_j} + 4\hat{F}_\eta \eta + 2\frac{\partial \hat{F}}{\partial r_{ij}}(\eta_{x_i x_j} - \eta_{x_k x_i}\eta_{x_k x_j}) - 2\hat{F} \ .$$

Si ha, inoltre,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{F}}{\partial r_{ij}}(\eta_{x_i x_j} - \eta_{x_k x_i}\eta_{x_k x_j}) &= \sum_{i=1}^{n} g_i' \left(\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_i)\sqrt{2\eta}} \right) \frac{\lambda_i - \lambda_i^2}{(1-\lambda_i)^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} g_i' \left(\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_i)\sqrt{2\eta}} \right) \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 4\hat{F}_\eta \eta &= 2\sqrt{2\eta} \sum_{i=1}^{n} g_i \left(\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_i)\sqrt{2\eta}} \right) - 2\sum_{i=1}^{n} g_i' \left(\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_i)\sqrt{2\eta}} \right) \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} \\ &= 2\hat{F} - 2\frac{\partial \hat{F}}{\partial r_{ij}}(\eta_{x_i x_j} - \eta_{x_k x_i}\eta_{x_k x_j}) \ . \end{aligned}$$

Sostituendo queste due espressioni nell'equazione per w, si ottiene

$$w_t = 2\hat{F}_\eta w + \frac{\partial \hat{F}}{\partial r_{ij}} w_{x_i x_j} \ . \tag{4.24}$$

Se $g_i' \geq 0$ per ogni i, le equazioni (4.22) e (4.24) sono paraboliche degeneri. Poiché, inoltre, (4.24) è lineare in w, possiamo applicare il Teorema di confronto 1.17 e concludere che, se $w = 0$ su Σ, allora $w \equiv 0$ in tutto l'aperto $I_\sigma(\Gamma_0) \times (0, t_0)$. Per concludere la dimostrazione del Teorema, notiamo che, al più riducendo t_0, la funzione $\eta(x,t)$ ha punti di minimo interni a $I_\sigma(\Gamma_0) \times \{t\}$

per ogni $t \in [0, t_0]$. In tali punti abbiamo $\nabla\eta(x,t) = 0$, la qual cosa implica, poiché $w = 0$, $\eta(x,t) = 0$ e quindi $\Gamma_t \neq \emptyset$. Applicando i Teoremi 3.13 e 3.18 si ha la tesi.

□

Grazie alle Osservazioni 3.23 e 3.24, con la stessa dimostrazione del Teorema precedente, si ha il seguente

Teorema 4.6. *Sia Γ_0 una sottovarietà di classe $\mathbf{C}^k$ di $\mathbb{R}^n$ $(k \geq 4)$, e sia $\sigma > 0$ tale che $\eta_0(x) = \frac{1}{2} dist^2(x, \Gamma_0)$ sia almeno di classe $\mathbf{C}^{k-1}$ in $I_\sigma(\Gamma_0)$. Supponiamo inoltre che esistano $t_0 > 0$ e $\eta(x,t) \in \mathbf{C}^{k-1}\big(I_\sigma(\Gamma_0) \times (0, t_0)\big)$ tali che*

$$\begin{cases} \eta_t(x,t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-k} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} - \eta(x,t) \sum_{i=n-k+1}^{n} \frac{1-\lambda_i}{\lambda_i} & \forall (x,t) \in I_\sigma(\Gamma_0) \times (0,t_0) \ ; \\ \\ \mid \nabla\eta(x,t) \mid^2 - 2\eta(x,t) = 0 & \forall (x,t) \in \Sigma \ ; \\ \\ \eta(x,0) = \eta_0(x) & \forall x \in I_\sigma(\Gamma_0) \ . \end{cases} \tag{4.25}$$

dove i λ_i sono, come in precedenza, gli autovalori di $\nabla^2\eta(x,t)$, ordinati in maniera crescente e $\Sigma = \partial\big(I_\sigma(\Gamma_0)\big) \times [0, t_0]$.
Allora, posto $\Gamma_t = \{x \in I_\sigma(\Gamma_0) : \ \eta(x,t) = 0\}$, si ha che $\{\Gamma_t\}_{t \in (0,t_0)}$ è un flusso liscio, di classe almeno $\mathbf{C}^{k-2}$, di dimensione $n-k$, che si evolve per curvatura media.

Il vantaggio che si trae dall'esprimere l'equazione nella forma (4.25) è costituito dal fatto che, mentre l'equazione (4.20) è degenere in tutto lo spazio, la (4.25) degenera solo sui punti della varietà. Questo implica che è possibile risolvere l'equazione su ogni insieme del tipo $I_\sigma(\Gamma_0) \backslash I_\rho(\Gamma_0)$, con $0 < \rho < \sigma$. Non è ancora chiaro se un tale risultato possa portare ad una soluzione per tempi piccoli di (4.25) definita su tutto $I_\sigma(\Gamma_0)$. Ci aspettiamo, comunque, che per entrambe le equazioni, pur non essendo applicabile la teoria sviluppatata in [Lu], valga un Teorema di esistenza regolare per tempi piccoli a partire da un dato iniziale sufficientemente regolare.

Bibliografia

[AAG] S. Altschuler, S. Angenent & Y. Giga, *Mean curvature flow through the singularities for surfaces of rotation*, J. Geom. Analysis, **5** (1995).

[AG] S. Altschuler & M. Grayson, *Shortening space curves and flow through singularities*, J. Diff. Geom., **35** (1992), 283–298.

[AS] L. Ambrosio & H. M. Soner, *Level set approach to mean curvature flow in arbitrary codimension*, Preprint Sc. Nor. Sup. Pisa, **34** (1994), in corso di stampa sul J. Diff. Geom.

[BP] G. Bellettini & M. Paolini, *Some results on minimal barriers in the sense of De Giorgi applied to motion by mean curvature*, Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (1994).

[BS] G. Barles & P. E. Souganidis, *A new approach to front propagation: Theory and Applications*, in corso di stampa.

[CGG] Y. G. Chen, Y. Giga & S. Goto, *Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations*, J. Diff. Geom., **33** (1991), 749–786.

[CI] M. G. Crandall & H. Ishii, *The maximum principle for semicontinuous functions*, Diff. and Integral Equations, **3** (1990), 1001–1014.

[CIL] M. G. Crandall, H. Ishii & P. L. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations*, Bull. AMS, **27/1** (1992), 1–67.

[CL] M. G. Crandall & P. L. Lions, *Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations*, Trans. AMS, **277** (1983), 1–43.

[DG] E. De Giorgi, *Barriers, boundaries, motion of manifolds*, Lectures held in Pavia, (1994).

[DZ] M. C. Delfour & J. P. Zolésio, *Shape analysis via distance functions*, J. Functional Analysis, **123** (1994), 129–201.

[ES1] L. C. Evans & J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature*, J. Diff. Geom., **33** (1991), 635–681.

[ES2] L. C. Evans & J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature II*, Trans. AMS, **330** (1992), 635–681.

[ES3] L. C. Evans & J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature III*, J. Geom. Analysis, **2** (1992), 121–150.

[ES4] L. C. Evans & J. Spruck, *Motion of level sets by mean curvature IV*, J. Geom. Analysis, in corso di stampa.

[GG] Y. Giga & S. Goto, *Geometric evolution of phase–boundaries*, eds. M. Gurtin & G. McFadden, IMA Volumes in Mathematics and its Applications, vol. **43**, 51–66, New York: Springer–Verlag 1992.

[GGIS] Y. Giga, S. Goto, H. Ishii & M. H. Sato, *Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations on unbounded domains*, Indiana Math. J., **40/2** (1991), 443–470.

[GH] M. Gage & R. S. Hamilton, *The heat equation shrinking convex plane curves*, J. Diff. Geom., **23** (1986), 69–95.

[Gr] M. A. Grayson, *A short note on the evolution of surfaces via mean curvature*, Duke Math. J., **58** (1989), 555–558.

[Hu] G. Huisken, *Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres*, J. Diff. Geom., **20** (1984), 237–266.

[Il1] T. Ilmanen, *The level–set flow on a manifold*, Proc. of Symposia in Pure Math. AMS, **54** (1993), 193–204.

[Il2] T. Ilmanen, *Generalized motion of sets by mean curvature on a manifold*, Indiana Math. J., **41** (1992), 671–705.

[Lu] A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Basel: Birkäuser 1995.

[Ma] G. Dal Maso, *An Introduction to* Γ*–Convergence*, Boston: Birkäuser 1993.

[OJK] T. Otha, D. Jasnow & K. Kawasaki, *Universal scaling in the motion of a random interface*, Physics Review Letters, **49** (1982), 1223–1226.

[OS] S. Osher & J. Sethian, *Fronts propagating with curvature dependent speed*, J. Comp. Phys., **79** (1988), 12–49.

[PLL] P. L. Lions, *Generalized Solutions of Hamilton–Jacobi Equations*, Research Notes in Mathematics **69**, London: Pitman 1982.

[So] H. M. Soner, *Motion of a set by the curvature of its boundary*, J. Diff. Equations, **101/2** (1993), 313–372.

[SS] H. M. Soner & P. E. Souganidis, *Uniqueness and singularities of rotationally symmetric surfaces moving by mean curvature*, Comm. in PDE., **18** (1993), 859–894.