Indice

Introduzione

I problemi di ottimizzazione di forma sono problemi di controllo ottimo, ossia problemi di minimo della forma

$$\min \{J(\Omega, u) \, : (\Omega, u) \in E\} \,, \tag{0.0.1}$$

dove l'insieme delle coppie ammissibili E è un sottoinsieme del prodotto cartesiano di due insiemi $\mathcal{A}$ e U detti rispettivamente *insieme dei controlli* e *spazio degli stati*. Lo spazio degli stati è, in genere, uno spazio topologico con una topologia data a priori (nelle applicazioni si suppone che sia uno spazio metrico separabile), mentre l'insieme dei controlli non ha una struttura topologica ma è soltanto un insieme (nelle applicazioni più interessanti dei problemi di ottimizzazione di forma $\mathcal{A}$ è la famiglia di tutti i sottoinsiemi aperti di un aperto limitato fissato di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$). Il funzionale $J : \mathcal{A} \times U \to \overline{\mathbb{R}}$ da minimizzare è detto *funzionale costo* e le soluzioni di (0.0.1) sono dette *coppie ottime*.

Ponendo $\chi_E(\Omega, u) = G(\Omega, u)$ il problema (0.0.1) si scrive nella forma equivalente

$$\min \{J(\Omega, u) : u \in \operatorname{argmin} G(\Omega, \cdot)\} \,, \tag{0.0.2}$$

dove $G : \mathcal{A} \times U \to \overline{\mathbb{R}}$ è il *funzionale di stato*,

$$\operatorname{argmin} G(\Omega, \cdot) = \left\{ u \in U \, : \, G(\Omega, u) = \min_{v \in U} G(\Omega, v) \right\}$$

e dove l'espressione $u \in \operatorname{argmin} G(\Omega, \cdot)$ è detta *equazione di stato*.

Un metodo ben noto per provare l'esistenza di soluzioni per il problema (0.0.1) è il cosiddetto metodo diretto del calcolo delle variazioni, che consiste nel determinare una topologia τ su U e una topologia γ su $\mathcal{A}$ in modo che il funzionale $J(\Omega, u) + \chi_E(\Omega, u)$ sia $\gamma \times \tau$ semicontinuo inferiormente e $\gamma \times \tau$ coercivo. Poichè, in generale, la topologia τ è data a priori sullo spazio U, il problema è ricondotto a determinare una topologia opportuna su $\mathcal{A}$ che consenta di applicare il metodo diretto del calcolo delle variazioni. La topologia naturale su $\mathcal{A}$ è quella che tiene conto della convergenza dei punti di minimo del funzionale G, ossia quella legata alla Γ-convergenza dei funzionali di stato $G(\Omega, \cdot)$: in altri termini, se muniamo $\mathcal{A}$ della convergenza definita da

$$\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega \Longleftrightarrow \Gamma\text{-}\lim G(\Omega_n, \cdot) = G(\Omega, \cdot),$$

sotto condizioni di semicontinuità inferiore e di coercività su J, si ottiene l'esistenza della soluzione del problema (0.0.1).

L'esistenza della soluzione del problema (0.0.1) è quindi legata alla continuità dell'applicazione

$$\Omega \mapsto u_\Omega \in \text{argmin } G(\Omega, \cdot) \tag{0.0.3}$$

quando i domini "variano" in qualche senso. È noto che se si considera come funzionale di stato

$$G(\Omega, u) = \int_B |Du|^2 dx - 2\int_B f u \, dx + \chi_{H_0^1(\Omega)}(u),$$

dove B è la palla di $I\!R^N$, $N \geq 2$ e $f \in H^{-1}(B)$ è fissata e, come insieme dei domini ammissibili la famiglia

$$\mathcal{A} = \{\Omega \subseteq B, \ \Omega \, \text{aperto}\},$$

presa su $\mathcal{A}$ la topologia di Hausdorff dei complementari e sull'insieme delle funzioni la topologia debole di $H_0^1(B)$, allora se $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$, in generale, non si ha $u_{\Omega_n} \rightharpoonup u_\Omega$. Infatti, se non si fanno ipotesi ulteriori sulla classe dei domini ammissibili, si verifica la seguente situazione

$$u_{\Omega_n} \rightharpoonup u,$$

dove u è la soluzione di un nuovo problema, cosiddetto *problema rilassato*. Le soluzioni rilassate descrivono il comportamento asintotico delle soluzione del problema originario e consentono di ottenere delle informazioni sul problema di partenza.

In questa tesi non ci si è occupati della caratterizzazione del problema rilassato, ma delle condizioni opportune sotto le quali si recupera l'esistenza. I metodi per ottenere l'esistenza sono essenzialmente due:

- restringere la classe $\mathcal{A}$ dei domini ammissibili mediante vincoli di natura geometrica (vedi per esempio Bucur e Zolésio [22], [23], [24], Chenais [38], [39], [40], Henrot [56], Pironneau [61]);

- forzare il funzionale costo (vedi Buttazzo e Dal Maso [35], Bucur, Buttazzo e Henrot [17], Bucur Buttazzo e Trebeschi [18]).

In questa tesi sono stati analizzati entrambi i due procedimenti. Per quanto riguarda il primo, per recuperare l'esistenza del dominio ottimo, ci si è posti il problema di determinare delle condizioni opportune da mettere sull'insieme dei domini ammissibili $\mathcal{A} = \{\Omega \subseteq B, \ \Omega \, \text{aperto}\}$. Tali condizioni consentono di recuperare l'esistenza, nella convergenza di Hausdorff dei complementari, per certe classi di problemi di ottimizzazione di forma governati da equazioni di stato non lineari con condizioni al bordo di Dirichlet. Per quanto riguarda il secondo si è invece studiato il problema specifico *dell'ostacolo ottimo* sotto condizioni di monotonia del funzionale costo.

Più nei dettagli, nel capitolo 3 viene studiata la continuità dell'applicazione (0.0.3) quando $G : \mathcal{A} \times H_0^{1,p}(B) \to \overline{I\!R}$ (con $p \in I\!R$ tale che $1 < p < +\infty$) è un funzionale generale della forma

$$G(\Omega, u) = F(u) + \chi_{\{u=0 \text{ a.e. su } B\setminus\Omega\}}(u),$$

dove $F : H_0^{1,p}(B) \to \overline{I\!R}$ soddisfa le seguenti ipotesi:

(F1) F sia semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole di $H_0^{1,p}(B)$;

(F2) F sia continuo fortemente su $H_0^{1,p}(B)$;

(F3) F sia coercivo rispetto alla topologia debole di $H_0^{1,p}(B)$;

(F4) $F(0) < +\infty$.

Il risultato ottenuto è che, se $p > N$, allora la continuità dell'applicazione (0.0.3), rispetto alla sola convergenza di Hausdorff dei complementari sui domini, si ottiene come diretta conseguenza della Γ-convergenza in $H_0^{1,p}(B)$ (rispetto alla topologia debole) dei funzionali di stato $G(\Omega, \cdot)$. In altri termini

$$\Omega_n, \Omega \in \mathcal{A},\ \Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega,\ p > N \ \Rightarrow\ u_{\Omega_n} \rightharpoonup u_\Omega.$$

Se $p \leq N$ la sola convergenza di Hausdorff dei complementari non è sufficiente a garantire la continuità dell'applicazione (0.0.3) che, anzi, viene a mancare. Essa si recupera restringendo la classe $\mathcal{A}$ mediante condizioni di stabilità (vedi Pironneau [61] per il caso lineare): denotata con $\tilde{\mathcal{A}}$ la sottoclasse di $\mathcal{A}$ costituita dagli aperti $\Omega \subseteq B$ tali che se $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$, allora

1. $1_{B\setminus\Omega_n} \rightharpoonup l$ debolmente* in $L^\infty(B)$, $l > 0$ a.e. in $B \setminus \Omega$,

2. $u \in H_0^{1,p}(B), u \cdot 1_{B\setminus\Omega} = 0$ a.e. $\Rightarrow u|_\Omega \in H_0^{1,p}(B)$,

si ottiene che

$$\Omega_n, \Omega \in \tilde{\mathcal{A}},\ \Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega,\ p \leq N \Rightarrow u_{\Omega_n} \rightharpoonup u_\Omega.$$

Come applicazione del risultato di continuità generale, viene studiato un problema di ottimizzazione di forma con funzionale costo di tipo integrale e con funzionale di stato anch'esso integrale che rientra nella classe astratta introdotta sopra. Si ottiene per esso un risultato di esistenza per $p > N$ nella classe $\mathcal{A}$, mentre per $p \leq N$, nella classe $\tilde{\mathcal{A}}$.

Nel capitolo 4 si studia invece la continuità dell'applicazione (0.0.3) quando G è il funzionale di stato

$$G(\Omega, u) = \frac{1}{p}\int_B |Du|^p dx - \int_B f u\, dx + \chi_{H_0^{1,p}(\Omega)}(u),$$

con f fissata in $H^{-1,q}(B)$ (dove $q \in I\!R$, $1 < q < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). L'equazione di stato $u_\Omega \in \operatorname{argmin} G(\Omega, \cdot)$ si scrive allora nella forma equivalente

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{in } \Omega \\ u \in H_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \tag{0.0.4}$$

dove $-\Delta_p$ è il p-Laplaciano. La forma particolare dell'equazione (0.0.4) consente di ottenere la continuità dell'applicazione (0.0.3) sotto vincoli più deboli, rispetto al caso astratto del capitolo 3, che sono legati a questioni di tipo capacitario e sono suggeriti dalla teoria generale dei funzionali monotoni e delle funzioni armoniche.

Sia $\mathcal{W}_w(B)$ la classe dei domini ammissibili così definita:

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_w(B) \;=\; & \Big\{\Omega \subseteq B : \forall\, x \in \partial\Omega, \forall\, 0 < r < R < 1 \\ & \int_r^R \Big(\frac{p\text{-}cap\,(\Omega^c \cap \overline{B}_{x,t}; B_{x,2t})}{p\text{-}cap\,(\overline{B}_{x,t}; B_{x,2t})}\Big)^{\frac{1}{p-1}} \frac{dt}{t} \geq w(r,R,x)\Big\},\end{aligned}$$

dove $B_{x,t}$ è la palla con centro in x e raggio t, e

$$w : (0,1) \times (0,1) \times B \to \mathbb{R}^+$$

è tale che:

1. $\lim_{r\to 0} w(r,R,x) = +\infty$, localmente uniformemente in x, cioè per ogni $R \in (0,1)$ e per ogni $x \in B$ esiste un intorno U di x tale che, per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $|r| < \delta$ si ha $w(r,R,y) > M$ per ogni $y \in U$;

2. w sia semicontinua nella terza variabile.

Introduciamo sull'insieme $\mathcal{A}$ la seguente nozione di γ-convergenza (che risulta equivalente alla Γ-convergenza dei funzionali di stato), denotata con γ_p, espressa solo in funzione della convergenza delle soluzioni dell'equazione di stato (0.0.4). Si dice che *una successione* (Ω_n) *di sottoinsiemi aperti della palla fissa* B γ_p*-converge a* Ω se, per ogni $f \in H^{-1,q}(B)$, le soluzioni del problema di Dirichlet:

$$-\Delta_p u_n = f \quad \text{in} \quad \Omega_n, \quad u_n \in H_0^{1,p}(\Omega_n)$$

convergono fortemente in $H_0^{1,p}(B)$, per $n \to +\infty$, alla soluzione del problema corrispondente in Ω (vedi Dal Maso [43], Dal Maso e De Franceschi [48]).

Allora il risultato ottenuto è il seguente:

- se $p > N$, la classe $\mathcal{A}$ è γ_p compatta (grazie alle immersioni di Sobolev),
- se $p \leq N$, la classe $\mathcal{W}_w(B)$ è γ_p compatta.

In più, se $N-1 < p \leq N$, vale una condizione di tipo "topologico" che generalizza il risultato ottenuto da Sverak in [64] e [65] per il caso lineare. Sia l un numero intero fissato. Posto

$$\mathcal{O}_l(B) = \{\Omega \subseteq B,\ \Omega \,\text{aperto}, \qquad \sharp\Omega^c \leq l\},$$

dove $\sharp$ denota il numero di componenti connesse, si è dimostrato che

- se $N-1 < p \leq N$, la classe $\mathcal{O}_l(B)$ è γ_p compatta.

I risultati ottenuti per il p-Laplaciano valgono più in generale per operatori monotoni in forma di divergenza del tipo $Au = -\text{div}\,(a(x,Du))$ dove A ha un comportamento del tutto simile a quello del p-Laplaciano.

Per quanto riguarda il secondo metodo per determinare l'esistenza del dominio ottimo, un risultato recente è stato ottenuto da Buttazzo e Dal Maso [35] per problemi di ottimizzazione di forma governati da equazioni di stato lineari con condizioni al bordo di Dirichlet. Sotto ipotesi opportune di monotonia sul funzionale costo l'esistenza è ottenuta nella classe dei sottoinsiemi quasi aperti di B. Questa classe di problemi può essere vista, utilmente, anche come un caso particolare del problema studiato nel capitolo 5.

Il problema studiato nel capitolo 5 è il cosiddetto *problema dell'ostacolo ottimo*, ossia

$$\min\left\{F(g)\ : g \in X_\psi(\Omega),\ \int_\Omega g\,dx = c\right\}, \tag{0.0.5}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, c è una costante di $\mathbb{R}$, $F : X_\psi(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ è un funzionale monotono crescente (cioè se $g_1 \leq g_2$, allora $F(g_1) \leq F(g_2)$) e $X_\psi(\Omega)$ è la classe degli ostacoli ammissibili

$$X_\psi(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}\ \ u \leq \psi,\ \ u\,\text{quasi semicontinuo superiormente}\right\},$$

con $\psi \in H_0^{1,p}(\Omega)$ fissata.

Il problema dell'ostacolo ottimo è un problema di controllo che, in generale, senza ipotesi aggiuntive sul costo o sulla classe degli ostacoli ammissibili, non ha soluzione. La monotonia del costo gioca, in questo caso, un ruolo essenziale nella dimostrazione dell'esistenza, che sfrutta, inoltre, i risultati del capitolo 4 relativi alla γ_p-convergenza. Infatti, la topologia naturale γ da definire sull'insieme degli ostacoli ammissibili per cui si ottiene l'esistenza, risulta equivalente alla γ_p-convergenza dei sottolivelli degli ostacoli ammissibili. Precisamente, se definiamo in maniera naturale la topologia γ sugli ostacoli in funzione della Γ- convergenza dei funzionali di stato associati, cioè posto

$$F_n(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |Du|^p dx + \chi_{\{u \geq g_n\}}(u),$$

allora

$$g_n \xrightarrow{\gamma} g \Longleftrightarrow F_n \xrightarrow{\Gamma} F \text{ nella topologia debole di } H_0^{1,p}(\Omega),$$

si ha che $g_n \xrightarrow{\gamma} g$ se e solo se esiste un insieme D, denso in $\mathbb{R}$, tale che

$$\{g_n < t\} \xrightarrow{\gamma_p} \{g < t\}\ \ \forall\, t \in D.$$

In questo modo il problema dell'ostacolo ottimo può essere considerato in un ambito astratto particolare in cui la γ_p-convergenza dei sottolivelli gioca un ruolo essenziale. Il risultato ottenuto è il seguente: *se F è monotono crescente e γ semicontinuo inferiormente su $X_\psi(\Omega)$, allora, per ogni costante c in $\mathbb{R}$, il problema (0.0.5) ammette minimo.*

Il risultato ottenuto per la classe di ostacoli dominati "dall'alto" vale, in modo del tutto simmetrico, anche per quelli dominati "dal basso" e si generalizza al caso di ostacoli bilaterali, fra cui rientra, in particolare, il problema di ottimizzazione di forma studiato da Buttazzo e Dal Maso in [35].

Nel capitolo 1 vengono introdotte le nozioni di base relative alla Γ-convergenza di funzionali, alla capacità, alla convergenza di Mosco di insiemi, che costituiscono gli strumenti principali utilizzati nei capitoli successivi.

Nel capitolo 2 viene invece presentata la "storia" dei problemi di ottimizzazione di forma governati da equazioni di stato lineare con condizioni al bordo di Dirichlet: sono riportati i principali risultati noti in letteratura e le relazioni esistenti fra le varie nozioni introdotte nel capitolo 1.

Per quanto riguarda le dimostrazioni si è seguito il principio generale secondo cui vengono riportate solo quelle in cui si è dato un contributo personale, rinviando per le altre ai lavori citati in bibliografia.

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Semicontinuità, coercività e metodi diretti del calcolo delle variazioni

Introduciamo in questa sezione la nozione di semicontinuità e coercività di un funzionale e il metodo diretto del calcolo delle variazioni. Quest'ultimo, senza utilizzare l'equazione di Eulero-Lagrange, consente di dimostrare l'esistenza dei minimi di un funzionale, cercando sull'insieme delle funzioni una topologia rispetto alla quale si abbia contemporaneamente la compattezza delle successioni minimizzanti e la semicontinuità del funzionale. Per le dimostrazioni si rimanda a Dal Maso [45] e Buttazzo [27].

Sia X uno spazio topologico. Per ogni $x \in X$ denotiamo con $N(x)$ l'insieme di tutti gli intorni aperti di x in X.

Definizione 1.1.1 *Una funzione $F : X \to \overline{I\!R}$ è semicontinua inferiormente (s.c.i.) in un punto $x \in X$ se per ogni $t \in I\!R$, con $t < F(x)$, esiste $U \in N(x)$ tale che $t < F(y)$ per ogni $y \in U$. Si dice che F è semicontinua su X se F è semicontinua in ogni punto $x \in X$.*

Definizione 1.1.2 *Una funzione $F : X \to \overline{I\!R}$ è sequenzialmente semicontinua inferiormente in un punto $x \in X$ se*

$$F(x) \leq \liminf_{h\to+\infty} F(x_h)$$

per ogni successione (x_h) convergente a x in X. Si dice che F è sequenzialmente semicontinua inferiormente su X se F è sequenzialmente semicontinua inferiormente in ogni punto $x \in X$.

Dalla definizione 1.1.1 segue immediatamente che una funzione semicontinua inferiormente è sequenzialmente semicontinua. Il viceversa è in generale falso (vedi Dal Maso [45] esempio 1.6) ma risulta vero sotto ipotesi aggiuntive opportune sullo spazio X. Infatti, se X soddisfa il primo assioma di numerabilità, cioè, se ogni punto x di X ha un sistema fondamentale di intorni numerabile, allora vale la seguente caratterizzazione della semicontinuità inferiore:

Proposizione 1.1.3 *Supponiamo che X soddisfi il primo assioma di numerabilità. Sia $F : X \to \overline{I\!R}$ e sia $x \in X$. Allora sono equivalenti:*

(a) F *è semicontinua inferiormente in* x*;*

(b) $F(x) \leq \liminf_{h \to +\infty} F(x_h)$ *per ogni successione* (x_h) *convergente a* x *in* X*;*

(c) $F(x) \leq \lim_{h \to +\infty} F(x_h)$ *per ogni successione* (x_h) *convergente a* x *in* X *tale che* $\lim_{h \to +\infty} F(x_h)$ *esista e sia finito.*

Proposizione 1.1.4 *Sia* $F : X \to \overline{I\!R}$*. Allora*

(a) F *è semicontinua inferiormente (risp. sequenzialmente semicontinua inferiormente) se e solo se l'epigrafico di* F

$$epi(F) = \{(x,t) \in X \times I\!R \ : \ F(x) \leq t\}$$

è chiuso (risp. sequenzialmente chiuso) in $X \times I\!R$*;*

(b) F *è semicontinua inferiormente (risp. sequenzialmente semicontinua inferiormente) se e solo se per ogni* $t \in I\!R$ *l'insieme* $\{F \leq t\}$ *è chiuso (risp. sequenzialmente chiuso) in* X*; oppure se e solo se per ogni* $t \in I\!R$ *l'insieme* $\{F > t\}$ *è aperto (risp. sequenzialmente aperto) in* X*;*

(c) se $(F_i)_i \in I$ *è una famiglia di funzioni semicontinue inferiormente (risp. sequenzialmente semicontinue inferiormente) su* X*, allora la funzione*

$$F(x) = \sup\{F_i(x) : \ i \in I\}$$

è semicontinua inferiormente (risp. sequenzialmente semicontinua inferiormente) su X*. Se* I *è finito, allora la funzione* $G(x) = \inf\{F_i(x) \ : \ i \in I\}$ *è semicontinua inferiormente (risp. sequenzialmente semicontinua inferiormente) su* X*;*

(d) se F *e* G *sono semicontinue inferiormente (risp. sequenzialmente semicontinue inferiormente) su* X*, allora* $F + G$ *è semicontinua inferiormente (risp. sequenzialmente semicontinua inferiormente) su* X *se* $F + G$ *è ben definita su* X *(cioè* $(-\infty, +\infty) \neq (F(x), G(x)) \neq (+\infty, -\infty)$*, per ogni* $x \in X$*).*

Definizione 1.1.5 *Una funzione* $F : X \to \overline{I\!R}$ *è coerciva (risp. coerciva per successioni) se per ogni* $t \in I\!R$ *esiste un insieme* K_t *compatto e chiuso (risp. compatto e chiuso per successioni) tale che*

$$\{x : F(x) \leq t\} \subseteq K_t.$$

Teorema 1.1.6 (Metodo Diretto del Calcolo delle Variazioni) *Sia* X *uno spazio topologico e sia* $F : X \to \overline{I\!R}$ *una funzione semicontinua inferiormente e coerciva (risp. sequenzialmente semicontinua inferiormente e coerciva per successioni). Allora*

(a) F *ha un punto di minimo in* X*;*

(b) *se (x_h) è una successione minimizzante di F in X e x è un punto di accumulazione di (x_h) (risp. x è il limite di una sottosuccessione di (x_h)), allora x è un punto di minimo di F in X;*

(c) *se F non è identicamente $+\infty$, allora ogni successione minimizzante di F ha un punto di accumulazione (risp. una sottosuccessione convergente).*

1.2 Rilassamento

Molti problemi di minimo sono del tipo

$$\min\{F(x): \quad x \in X\}, \tag{1.2.1}$$

dove X è un insieme senza alcuna topologia (soprattutto nei problemi di ottimizzazione di forma) e $F : X \to \overline{I\!R}$. Se si munisce X di una topolgia τ per la quale F risulti allo stesso tempo τ-coercivo e τ-semicontinuo inferiormente, allora il metodo diretto del calcolo delle variazioni fornisce l'esistenza di almeno una soluzione del problema (1.2.1).

Se F non è τ-semicontinuo inferiormente è molto spesso utile (soprattutto per le topologie τ per cui F è τ-coercivo) considerare il cosiddetto funzionale *τ-rilassato* associato a F, la cui conoscenza aiuta nella descrizione delle successioni minimizzanti di funzionali che non sono semicontinui inferiormente, in termini di punti di minimo di opportuni funzionali semicontinui inferiormente.

Sia (X,τ) uno spazio topologico.

Definizione 1.2.1 *Per ogni funzione $F : X \to \overline{I\!R}$ il funzionale τ-rilassato di F è definito per ogni $x \in X$ da*

$$\overline{F}(x) = \sup\{G : X \to \overline{I\!R}, \quad G \ \tau\text{-}s.c.i., \quad G(y) \le F(y) \quad \forall\, y \in X\}. \tag{1.2.2}$$

Essendo l'estremo superiore di funzioni semicontinue inferiormente ancora semicontinuo inferiormente, si ha che l'estremo superiore in (1.2.2) è un massimo e il rilassato di F è dunque il più grande funzionale semicontinuo inferiormente minore o uguale a F. Osserviamo che la definizione del rilassato $\overline{F}$ sfrutta il comportamento di F su tutto lo spazio topologico e, inoltre, ricordiamo il carattere locale del rilassato: se F e G sono due funzioni che coincidono in un intorno aperto di un punto x di X, allora $\overline{F}(x) = \overline{G}(x)$.

Proposizione 1.2.2 *Valgono le seguenti proprietà:*

(a) *se X soddisfa il primo assioma di numerabilità, allora $\overline{F}(x)$ è caratterizzato dalle seguenti proprietà:*

1. *per ogni successione (x_h) convergente a x in X si ha*

$$\overline{F}(x) \le \liminf_{h\to+\infty} F(x_h);$$

2. *esiste una successione (x_h) convergente a x in X tale che*

$$\overline{F}(x) \geq \limsup_{h\to+\infty} F(x_h);$$

(b) $\overline{F+G} \geq \overline{F} + \overline{G}$ *(se entrambe le somme sono ben definite);*

(c) se G è τ-continua e finita, si ha $\overline{F+G} = \overline{F} + G$;

(d) se $F : X \to \overline{I\!R}$ è convessa con X spazio di Banach (o localmente convesso di Hausdorff), allora i rilassati nelle topologie forte e debole coincidono;

(e) se $F_1 \leq F_2$, allora $\overline{F}_1 \leq \overline{F}_2$;

(f) se τ_1 e τ_2 sono due topologie su X, con τ_1 meno fine di τ_2 ($\tau_1 \leq \tau_2$), allora $\overline{F}^{\tau_1} \leq \overline{F}^{\tau_2}$.

Il seguente teorema riassume le proprietà del rilassato di un funzionale coercivo e, in particolare, descrive il comportamento delle successioni minimizzanti di F in termini dei minimi di $\overline{F}$.

Proposizione 1.2.3 *Sia (X, τ) uno spazio topologico e sia $F : X \to \overline{I\!R}$ una funzione coerciva. Allora*

(a) $\overline{F}$ è una funzione coerciva e semicontinua inferiormente, pertanto ha minimo in X per il metodo diretto del calcolo delle variazioni;

(b) $\min_{x\in X} \overline{F}(x) = \inf_{x\in X} F(x)$;

(c) se $x_h \to x$ è una successione minimizzante per F, allora x è un punto di minimo per $\overline{F}$; viceversa se X verifica il primo assioma di numerabilità, oppure se X è uno spazio di Banach e τ è la topologia debole su X, oppure, se $X = V'$ con V' spazio di Banach separabile e τ è la topologia debole su X, allora per ogni punto x di minimo per $\overline{F}$ esiste $x_h \to x$ successione minimizzante per F.*

1.3 Γ-convergenza: definizioni e proprietà generali

In questa sezione vengono brevemente introdotte le nozioni di Γ-limite e Γ-limite sequenziale di una successione di funzionali definiti su uno spazio topologico. Trattandosi di un argomento ormai classico, i teoremi verranno solo enunciati, rimandando per le dimostrazioni a Dal Maso [45], in cui si ha una trattazione sistematica ed approfondita della Γ-convergenza.

Sia X uno spazio topologico. Come nella sezione 1.1 denotiamo con $N(x)$ l'insieme degli intorni aperti di x in X. Sia (F_h) una successione di funzioni da X in $\overline{I\!R}$.

Definizione 1.3.1 *I Γ-limiti inferiore e superiore di una successione (F_h) sono le funzioni da X in $\overline{I\!R}$ definite da*

$$(\Gamma\text{-}\liminf_{h\to+\infty} F_h)(x) = \sup_{U\in N(x)} \liminf_{h\to+\infty} \inf_{y\in U} F_h(y),$$

$$(\Gamma\text{-}\limsup_{h\to+\infty} F_h)(x) = \sup_{U\in N(x)} \limsup_{h\to+\infty} \inf_{y\in U} F_h(y).$$

Si dice che (F_h) Γ*-converge a* F *in* x *se si ha*

$$(\Gamma\text{-}\liminf_{h\to+\infty} F_h)(x) = (\Gamma\text{-}\limsup_{h\to+\infty} F_h)(x);$$

il comune valore si indicherà in tal caso con

$$(\Gamma\text{-}\lim_{h\to+\infty} F_h)(x).$$

Osservazione 1.3.2 La definizione di Γ-limite non cambia se la famiglia $N(x)$ di intorni aperti di x viene sostituita con un sistema fondamentale $B(x)$ di intorni aperti di x. Questo fatto esprime il carattere locale del Γ-limite: se due successioni (F_h) e (G_h) coincidono su un sottoinsieme aperto A di X, allora i loro Γ-limiti coincidono su tutto A.

Ricordiamo le principali proprietà dei Γ-limiti (per le dimostrazioni rimandiamo a Dal Maso [45]).

Proposizione 1.3.3 *Valgono le seguenti proprietà:*

(a) *i* Γ*-limiti sono semicontinui inferiormente;*

(b) *se* (F_h) *è la successione costante, cioè esiste* $F : X \to \overline{I\!R}$ *tale che* $F_h = F$ *per ogni* $h \in I\!N$, *allora*
$$\Gamma\text{-}\lim_{h\to+\infty} F_h = \overline{F};$$

(c) *se* τ_1 *e* τ_2 *sono due topologie su* X, *con* τ_1 *meno fine di* τ_2 $(\tau_1 \leq \tau_2)$, *allora*

$$\Gamma_{\tau_1}\text{-}\liminf_{h\to+\infty} F_h \leq \Gamma_{\tau_2}\text{-}\liminf_{h\to+\infty} F_h,$$

$$\Gamma_{\tau_1}\text{-}\limsup_{h\to+\infty} F_h \leq \Gamma_{\tau_2}\text{-}\limsup_{h\to+\infty} F_h.$$

In particolare, se (F_h) Γ*-converge a* F_{τ_1} *in* (X,τ_1) *e a* F_{τ_2} *in* (X,τ_2), *allora* $F_{\tau_1} \leq F_{\tau_2}$;

(d) $\Gamma\text{-}\liminf_{h\to+\infty} F_h = \Gamma\text{-}\liminf_{h\to+\infty} \overline{F}_h, \qquad \Gamma\text{-}\limsup_{h\to+\infty} F_h = \Gamma\text{-}\limsup_{h\to+\infty} \overline{F}_h;$

(e) *se* (F_h) *e* (G_h) *sono due successioni di funzioni definite da* X *in* $\overline{I\!R}$ *tali che* $F_h \leq G_h$ *su* X *per ogni* $h \in I\!N$, *allora*

$$\Gamma\text{-}\liminf_{h\to+\infty} F_h \leq \Gamma\text{-}\liminf_{h\to+\infty} G_h, \quad \Gamma\text{-}\limsup_{h\to+\infty} F_h \leq \Gamma\text{-}\limsup_{h\to+\infty} G_h.$$

In particolare, se (F_h) Γ*-converge a* F *e* (G_h) Γ*-converge a* G, *allora* $F \leq G$.

(f) *se* (F_h) *e* $G_h)$ *sono due successioni di funzioni da* X *in* $\overline{\mathbb{R}}$, *allora*

$$\Gamma\text{-}\liminf_{h\to+\infty}(F_h+G_h) \geq \Gamma\text{-}\liminf_{h\to+\infty} F_h + \Gamma\text{-}\liminf_{h\to+\infty} G_h,$$

$$\Gamma\text{-}\limsup_{h\to+\infty}(F_h+G_h) \geq \Gamma\text{-}\liminf_{h\to+\infty} F_h + \Gamma\text{-}\limsup_{h\to+\infty} G_h.$$

In particolare, se (F_h) Γ*-converge a* F, (G_h) Γ*-converge a* G *e la somma* (F_h+G_h) Γ*-converge a* H, *allora* $F+G \leq H$, *supponendo che le funzioni* F_h+G_h *e* $F+G$ *siano ben definite in* X;

(g) *se* (F_h) Γ*-converge a* F *e* G *è continua, allora* (F_h+G) Γ*- converge a* $F+G$; *più in generale* (F_h+G_h) Γ*-converge a* $F+G$ *se* (G_h) *converge a* G *nella convergenza continua (cioè, in spazi topologici: per ogni* $x\in X$, *per ogni* V *intorno di* $G(x)$, *esiste* $k\in\mathbb{N}$, *esiste* U *intorno di* x *tale che* $G_h(y)\in V$, *per ogni* $h\geq k$ *e per ogni* $y\in U$; *mentre in spazi che soddisfano il primo assioma di numerabilità: se* $x_h\to x$ *allora* $G_h(x_h)\to G(x)$).

In generale la Γ-convergenza e la convergenza puntuale sono fra loro indipendenti, come è facile vedere da numerosi esempi in Dal Maso [45] capitolo 4. Nella proprietà seguente sono riportate le principali relazioni fra i Γ-limiti e i limiti puntuali e alcune condizioni sotto cui la Γ-convergenza e la convergenza puntuale risultano essere equivalenti.

Definizione 1.3.4 *Una successione di funzioni* (F_h), $F_h : X \to \overline{\mathbb{R}}$, *si dice equi-semicontinua inferiormente in un punto* $x\in X$ *se per ogni* $\varepsilon>0$ *esiste* $U\in N(x)$ *tale che* $F_h(y)\geq F_h(x)-\varepsilon$ *per ogni* $y\in U$ *e per ogni* $h\in\mathbb{N}$. *Si dice che* (F_h) *è equi-semicontinua inferiormente in* X *se è equi-semicontinua inferiormente in ogni punto* $x\in X$.

Proposizione 1.3.5 *Sia* (F_h) *una successione di funzioni da* X *in* $\overline{\mathbb{R}}$. *Allora*

(a) *se* (F_h) Γ*-converge a* F *e converge puntualmente a* G, *allora* $F\leq G$;

(b) *se* (F_h) *converge a* F *uniformemente, allora* (F_h) Γ*-converge a* $\overline{F}$ *(rilassato di* F*)(in particolare se in più ogni* F_h *è semicontinua inferiormente , allora* (F_h) Γ*-converge a* F*)*;

(c) *se* (F_h) *è crescente in* h, *allora* $\Gamma\text{-}\lim_{h\to+\infty} F_h = \sup_h \overline{F}_h$;

(d) *se* (F_h) *è decrescente in* h *e converge puntualmente a* F, *allora* $\Gamma\text{-}\lim_{h\to+\infty} F_h = \overline{F}$;

(e) *se* (F_h) *è una successione equi-semicontinua inferiormente in un punto* $x\in X$, *allora*

$$\Gamma\text{-}\liminf_{h\to+\infty} F_h(x) = \liminf_{h\to+\infty} F_h(x), \quad \Gamma\text{-}\limsup_{h\to+\infty} F_h(x) = \limsup_{h\to+\infty} F_h(x).$$

In particolare per le successioni di funzioni equi-semicontinue inferiormente su X *la* Γ*-convergenza è equivalente alla convergenza puntuale.*

Gli spazi topologici che verificano il primo assioma di numerabilità sono particolarmente importanti nelle applicazioni per la possibilità di caratterizzare sequenzialmente i Γ-limiti.

Proposizione 1.3.6 *Se X è uno spazio topologico che verifica il primo assioma di numerabilità e (F_h) è una successione di funzioni da X in $\overline{I\!R}$, allora*

$$\left\{\Gamma\text{-}\liminf_{h\to+\infty} F_h\right\}(x) = \min\left\{\liminf_{h\to+\infty} F_h(x_h)\ : x_h \to x\right\},$$

$$\left\{\Gamma\text{-}\limsup_{h\to+\infty} F_h\right\}(x) = \min\left\{\limsup_{h\to+\infty} F_h(x_h)\ : x_h \to x\right\},$$

quindi (F_h) Γ-converge a F se e solo se

(i) $\forall\, x \in X,\ \forall\, x_n \to x$ *si ha* $F(x) \leq \liminf_{h\to+\infty} F_h(x_h)$;

(ii) $\forall\, x \in X,\ \exists\, x_n \to x$ *tale che* $F(x) = \lim_{h\to+\infty} F_h(x_h)$.

Gli spazi topologici che verificano il primo assioma di numerabilità sono inoltre importanti perchè su essi la Γ-convergenza gode di proprietà di compattezza. La medesima proprietà sussiste per gli spazi che verificano il secondo assioma di numerabilità e, sotto ipotesi di equicoercività della successione (F_h), anche per spazi di Banach con duale separabile muniti della topologia debole, o, per duali di spazi di Banach separabili dotati della topologia debole*. Sussistono infatti i seguenti risultati:

Teorema 1.3.7 *Sia X uno spazio topologico verificante il primo oppure il secondo assioma di numerabilità. Allora da ogni successione (F_h) di funzioni da X in $\overline{I\!R}$ si può estrarre una sottosuccessione Γ-convergente.*

Definizione 1.3.8 *Una successione di funzioni (F_h), $F_h : X \to \overline{I\!R}$, si dice equicoerciva (risp. sequenzialmente equicoerciva) se per ogni $t \in I\!R$ esiste un insieme K_t compatto e chiuso (risp. compatto e chiuso per successioni) tale che*

$$\bigcup_{h\in I\!N} \{x \in X\ : F_h(x) \leq t\} \subseteq K_t,$$

o, equivalentemente, se esiste una funzione $\psi : X \to \overline{I\!R}$ semicontinua inferiormente e coerciva (risp. sequenzialmente semicontinua inferiormente e coerciva per successioni) tale che $F_h(x) \geq \psi(x)$ (vedi Dal Maso [45], Proposition 7.7) per ogni x e per ogni $h \in I\!N$.

Teorema 1.3.9 *Sia X uno spazio di Banach con duale separabile e sia τ la topologia debole su X, oppure $X = V'$ con V spazio di Banach separabile e τ la topologia debole* su X. Sia $F_h : X \to \overline{I\!R}$ una successione equicoerciva. Allora da (F_h) si può estrarre una sottosuccessione Γ-convergente.*

Negli spazi topologici che verificano il primo assioma di numerabilità oppure negli spazi di Banach del tipo considerato sopra, la Γ-convergenza gode della proprietà di Uryson. Vale cioè il seguente teorema.

Teorema 1.3.10 *Sia (F_h) una successione di funzioni da X in $\overline{\mathbb{R}}$ e supponiamo che sia soddisfatta una delle seguenti condizioni:*

(i) (X, τ) *verifica il primo assioma di numerabilità;*

(ii) X *è uno spazio di Banach con duale separabile,* τ *è la topologia debole su* X *e* (F_h) *è equicoerciva;*

(iii) $X = V'$ *con* V *spazio di Banach separabile,* τ *è la topologia debole* su* X *e* (F_h) *è equicoerciva.*

Allora (F_h) Γ*-converge a* F *se e solo se da ogni sottosuccessione di* (F_h) *si può estrarre una sottosuccessione* Γ*-convergente a* F*.*

Una delle proprietà di maggior interesse nelle applicazioni è il carattere variazionale della Γ-convergenza, cioè il fatto che, sotto opportune ipotesi, la Γ-convergenza di una successione (F_h) ad un funzionale F implichi la convergenza dei punti di minimo e del valore minimo di (F_h) a punti di minimo e valore minimo di F. Valgono infatti:

Teorema 1.3.11 *Sia* X *uno spazio topologico e sia* (F_h) *una successione di funzioni da* X *in* $\overline{\mathbb{R}}$*. Sia* x_h *un punto di minimo per* F_h *su* X*, o semplicemente una successione tale che*

$$\lim_{h\to+\infty} F_h(x_h) = \lim_{h\to+\infty} \left(\inf_{x\in X} F_h\right).$$

Se esiste il $\Gamma\text{-}\lim\limits_{h\to+\infty} F_h = F$ *e se* (x_h) *converge a* x*, allora*

(a) x *è il punto di minimo per* F*;*

(b) $\lim\limits_{h\to+\infty} \left(\inf\limits_{x\in X} F_h\right) = \min\limits_{x\in X} F.$

Sotto ipotesi di equicoercività della successione di funzioni si recupera in più la compattezza dei punti di minimo e la convergenza dei valori minimi.

Teorema 1.3.12 *Supponiamo che la successione di funzioni* (F_h) *sia equicoerciva e che esista il* $\Gamma\text{-}\lim\limits_{h\to+\infty} F_h = F$*. Sia* (x_h) *una successione minimizzante per* (F_h)*. Allora*

(a) F *è coercivo e* $\min\limits_{x\in X} F = \lim\limits_{h\to+\infty} \left(\inf\limits_{x\in X} F_h\right)$*;*

(b) se $F \neq +\infty$ *allora esiste una sottosuccessione* (x_{h_k}) *tale che* $x_{h_k} \to x$ *e* x *è punto di minimo per* F*;*

(c) se F *ha un unico punto di minimo* x *allora tutta la successione* (x_h) *converge a* x*.*

Ricordiamo, inoltre, (vedi Dal Maso [45] capitolo 9), che su uno spazio metrico X o, più in generale, su uno spazio topologico completamente regolare (uno spazio topologico X si dice completamente regolare se per ogni $x \in X$ e per ogni intorno U di x esiste una funzione $G : X \to [0,1]$ tale che $G(x) = 0$ e $G(y) = 1$ per ogni $y \in X \setminus U$) la Γ-convergenza di una successione di funzioni (F_h) su X può essere caratterizzata in termini del comportamento delle successioni

$$\inf_{x\in X} (F_h + G)(x)$$

per una famiglia opportuna di funzioni continue G.

Teorema 1.3.13 *Sia X uno spazio topologico completamente regolare, sia (F_h) una successione di funzioni equicoercive da X in $[0,+\infty]$ e sia $F : X \to [0,+\infty]$ una funzione semicontinua inferiormente. Allora le condizioni seguenti sono equivalenti:*

(a) (F_h) *Γ-converge a F;*

(b) per ogni funzione continua $G : X \to [0,+\infty[$ si ha

$$\inf_{x\in X} (F + G)(x) = \lim_{h\to+\infty} \inf_{X} (F_h + G)(x).$$

Vale inoltre la seguente proprietà (per la dimostrazione si veda Dal Maso e Mosco [50] e Attouch [1]):

Proposizione 1.3.14 *Siano X e Y due spazi di Banach, con $Y \subseteq X$ e Y denso in X. Supponiamo che Y sia riflessivo e separabile e che l'immersione di Y in X sia compatta. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $F_h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione convessa tale che $F_h(u) \geq \|u\|_Y^2$ per ogni $u \in Y$ e $F_h(u) = +\infty$ per ogni $u \notin Y$. Supponiamo inoltre che esista una funzione semicontinua inferiormente e convessa $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che*

$$\lim_{h\to+\infty} \inf_{v\in X} [F_h(v) + G(v)] = \min_{v\in X} [F(v) + G(v)]$$

per ogni funzione lineare e continua $G : X \to \mathbb{R}$. Allora (F_h) Γ-converge a F in X.

L'invarianza dei Γ-limiti nei confronti dell'operazione di composizione con l'operatore di inviluppo semicontinuo (vedi Proposizione 1.3.3 punto (d)) consente di ridurre lo studio della Γ-convergenza di funzioni definite su uno spazio topologico X al caso delle sole successioni di funzioni semicontinue inferiormente. In generale però la Γ-convergenza sulle funzioni semicontinue inferiormente da X in $\overline{\mathbb{R}}$ non è mai metrizzabile, a meno che X non sia localmente compatto, il che esclude il caso di spazi di dimensione infinita.

Denotiamo con $S(X)$ l'insieme di tutte le funzioni semicontinue inferiormente da X in $\overline{\mathbb{R}}$. Se invece di considerare tutto $S(X)$ si considera la sottoclasse

$$S_\psi(X) = \left\{ F : X \to \overline{\mathbb{R}}, \quad F \text{ s.c.i.}, \quad F \geq \psi \right\},$$

dove $\psi \in S(X)$ è una funzione assegnata, allora si ha il seguente teorema.

Teorema 1.3.15 *Sia X uno spazio metrico separabile e sia $\psi : X \to \overline{I\!\!R}$ semicontinua inferiormente e coerciva. Allora esiste una distanza δ_Γ tale che lo spazio metrico $(S_\psi(X), \delta_\Gamma)$ è compatto e si ha in $S_\psi(X)$ che (F_h) Γ-converge a F se e solo se (F_h) converge a F nella distanza δ_Γ.*

Dal teorema sopra scritto segue quindi che la topologia indotta dalla metrica δ_Γ su $S_\psi(X)$ ha come successioni convergenti tutte e sole le successioni Γ-convergenti.

1.4 Formulazione generale di un problema di controllo ottimo e sua rilassazione. Definizione della γ-convergenza

Una formulazione generale di un problema di controllo ottimo richiede un ambiente astratto abbastanza largo da contenere il caso di problemi di ottimizzazione di forma, in cui non è data a priori una struttura topologica sull'insieme dei controlli ammissibili. In altri termini si considera:

- U lo spazio degli stati; in genere è uno spazio topologico con la topologia data a priori. Nelle applicazioni si suppone che sia uno spazio metrico separabile;
- $\mathcal{A}$ l'insieme dei controlli; non ha una topologia data a priori, come nel caso dei problemi di ottimizzazione di forma, ma è soltanto un insieme su cui verrà definita una topologia opportuna;
- J il funzionale costo, definito su $\mathcal{A} \times U$ a valori in $\overline{I\!\!R}$, che dovrà essere minimizzato;
- E l'insieme delle coppie ammissibili; è un sottoinsieme di $\mathcal{A} \times U$ e spesso è individuato da un'equazione differenziale che lega lo stato al controllo, detta equazione di stato.

Il problema di controllo ottimo è allora

$$\min\{J(\Omega, u) \;:\; \Omega \in \mathcal{A},\; u \in U,\;\; (\Omega, u) \in E\} \tag{1.4.1}$$

e le sue soluzioni sono dette "coppie ottime" o, più brevemente, "soluzioni ottime".

Ci occuperemo del caso (a cui ci si può sempre ricondurre) in cui l'insieme E delle coppie ammissibili sia descritto da

$$(\Omega, u) \in E \Longleftrightarrow u \in \operatorname{argmin} G(\Omega, \cdot),$$

dove $G : \mathcal{A} \times U \to \overline{I\!\!R}$ è un funzionale assegnato che chiameremo "funzionale di stato" e dove

$$\operatorname{argmin} G(\Omega, \cdot) = \left\{ u \in U \;: G(\Omega, u) = \min_{z \in U} G(\Omega, z) < +\infty \right\}.$$

Se, per ogni controllo Ω, la minimizzazione del funzionale di stato $G(\Omega, \cdot)$ fornisce un unico punto di minimo, allora denotiamo con u_Ω tale minimo. Se, inoltre, per ogni controllo Ω il funzionale $G(\Omega,\cdot)$ ammette equazione di Eulero e tutte le sue soluzioni sono punti di minimo, allora questa equazione è l'equazione di stato che individua l'insieme E. Con queste notazioni il problema (1.4.1) può essere scritto anche nella forma equivalente

$$\min \left\{ J(\Omega,u) \; : \; u \in \operatorname{argmin} G(\Omega,\cdot) \right\}. \tag{1.4.2}$$

Dato un qualunque spazio topologico X e preso B un sottoinsieme di X, indichiamo con $\chi_B : X \to \overline{I\!\!R}$ la funzione indicatrice di B, definita da

$$\chi_B(x) = 0 \quad \text{se } x \in B \text{ e } \chi_B(x) = +\infty \quad \text{se } x \notin B.$$

Un primo risultato di esistenza, che segue dal metodo diretto del calcolo delle variazioni, è il seguente.

Teorema 1.4.1 *Supponiamo che si possa munire $\mathcal{A}$ di una topologia tale che:*

(i) $J + \chi_E$ *sia sequenzialmente coercivo su* $\mathcal{A} \times U$*;*

(ii) J *sia sequenzialmente semicontinuo inferiormente su* $\mathcal{A} \times U$*;*

(iii) E *sia chiuso (nella topologia prodotto), cioè:*

per ogni $(\Omega_h, u_h) \in E$ *tale che* $\Omega_h \to \Omega$ *nella topologia di* $\mathcal{A}$*,* $u_h \to u$ *nella topologia di* U *con* $u_h \in \operatorname{argmin} G(\Omega_h,\cdot)$*, allora* $u \in \operatorname{argmin} G(\Omega,\cdot)$*;*

allora esiste almeno una soluzione del problema di controllo ottimo (1.4.2).

Dimostrazione Si applica il metodo diretto del calcolo delle variazioni al funzionale $J+\chi_E$. A causa di (i) basta dimostare che $J + \chi_E$ è sequenzialmente semicontinuo inferiormente. Dalla chiusura di E segue (vedi Dal Maso [45] esempio 1.6) che χ_E è semicontinua inferiormente e quindi da (ii) si ha la tesi. □

Osservazione 1.4.2 Dal teorema 1.4.1 si vede che, sotto ipotesi di semicontinuità inferiore e coercività del funzionale J, si ottiene subito l'esistenza della soluzione del problema (1.4.2) a patto che la topologia su $\mathcal{A}$ fornisca la chiusura di E. Grazie a (iii) si vede quindi che la topologia "naturale" su $\mathcal{A}$ che dà la chiusura di E è quella che tiene conto della convergenza dei punti di minimo dei funzionali di stato $G(\Omega,\cdot)$.

Osservazione 1.4.3 Grazie alle proprietà della Γ-convergenza (vedi teorema 1.3.12) sotto ipotesi di equicoercività dei funzionali $G(\Omega_h,\cdot)$, $\Omega_h \in \mathcal{A}$, se fosse $G(\Omega,\cdot) = \Gamma\text{-}\lim_{h\to+\infty} G(\Omega_h,\cdot)$ allora seguirebbe (eventualmente passando a sottosuccessioni) che $u_{\Omega_h} \in \operatorname{argmin} G(\Omega_h,\cdot)$ converge a $u_\Omega \in \operatorname{argmin} G(\Omega,\cdot)$.

Il problema dell'esistenza della soluzione di problemi di controllo del tipo (1.4.2) è stato ampiamenente studiato da vari autori (vedi per esempio Buttazzo e Dal Maso [32], Belloni, Buttazzo e Freddi [4]). In particolare se assumiamo le seguenti ipotesi:

(E1) per ogni $\Omega \in \mathcal{A}$ la funzione $G(\Omega,\cdot)$ sia propria e semicontinua inferiormente su $\mathcal{A}$;

(E2) sia data a priori una topologia sullo spazio dei controlli $\mathcal{A}$ più forte della Γ-convergenza dei funzionali $G(\Omega, \cdot)$, cioè:

$$\Omega_h \to \Omega \Rightarrow \Gamma\text{-}\lim_{h\to+\infty} G(\Omega_h, \cdot) = G(\Omega, \cdot);$$

(E3) le funzioni $G(\Omega, \cdot)$ siano semicontinue inferiormente e localmente equicoercive (cioè per ogni compatto $K \subseteq \mathcal{A}$ esiste una funzione semicontinua inferiormente e coerciva $\psi_K : U \to \overline{I\!R}$ tale che $G(\Omega, u) \geq \psi_K(u)$ per ogni $(\Omega, u) \in K \times U$, ossia, con le notazioni delle sezione 1.3, $G(\Omega, \cdot) \in S_{\psi_K}(U)$ per ogni $\Omega \in K$);

(E4) J sia semicontinuo inferiormente su $\mathcal{A} \times U$;

(E5) $J(\Omega, u)$ sia sequenzialmente coercivo rispetto a $\mathcal{A}$, cioè:

$$J(\Omega_h, u_h) \leq M \in I\!R \Rightarrow (\Omega_h) \text{ è relativamente compatta in } \mathcal{A},$$

allora si può dimostrare un risultato di esistenza. Precisamente vale il seguente teorema:

Teorema 1.4.4 *(vedi Belloni-Buttazzo-Freddi [4]) Sotto le ipotesi* (E1)—(E5) *il problema (1.4.2) ha almeno una soluzione.*

Quando una soluzione ottima del problema (1.4.2) non esiste, è interessante individuare un "problema rilassato"

$$\min\left\{\widehat{J}(\widehat{\Omega}, u)\ : \widehat{\Omega} \in \widehat{\mathcal{A}},\ u \in U,\ u \in \operatorname{argmin} \widehat{G}(\widehat{\Omega}, \cdot)\right\}, \tag{1.4.3}$$

dove $\widehat{\mathcal{A}}$ è la classe dei "controlli rilassati", $\widehat{J}$ è il funzionale costo "rilassato" e $\widehat{G}$ è il funzionale di stato "rilassato", opportunamente definiti in modo che le soluzioni del problema (1.4.3) descrivano il comportamento asintotico delle successioni minimizzanti del problema di partenza (1.4.2). Per introdurre il problema rilassato (1.4.3) assumiamo le seguenti ipotesi:

(R1) lo spazio degli stati U sia metrico e separabile;

(R2) per ogni $\Omega \in \mathcal{A}$ la funzione $G(\Omega, \cdot)$ sia propria e semicontinua inferiormente;

(R3) esista una funzione $\psi : U \to \overline{I\!R}$ coerciva e semicontinua inferiormente tale che $G(\Omega, u) \geq \psi(u)$ per ogni $(\Omega, u) \in \mathcal{A} \times U$.

Sotto le ipotesi (R1), (R2), (R3) (vedi teorema 1.3.15) la classe $S_\psi(U)$ è uno spazio metrico compatto munito della topologia della Γ-convergenza. Sia δ_Γ la distanza associata, indichiamo con $\mathcal{G} : \mathcal{A} \to S_\psi(U)$ la funzione definita da

$$\mathcal{G}(\Omega) = G(\Omega, \cdot)$$

e supponiamo in più che

(R4) l'applicazione $\mathcal{G}$ sia iniettiva.

Se poniamo:

$$d(A,B) = \delta_\Gamma\left(\mathcal{G}(A), \mathcal{G}(B)\right),$$

allora otteniamo che $(\mathcal{A}, d)$ è uno spazio metrico e $\mathcal{G}$ è un'isometria fra $(\mathcal{A}, d)$ e $(S_\psi(U), \delta_\Gamma)$. Sia γ la convergenza associata alla distanza d, allora:

Definizione 1.4.5 *Siano Ω_h, $\Omega \in \mathcal{A}$. Diciamo che $\Omega_h \to \Omega$ nella γ-convergenza su $\mathcal{A}$ (e scriveremo $\Omega_h \xrightarrow{\gamma} \Omega$) se e solo se*

$$\Gamma\text{-}\lim_{h\to+\infty} G(\Omega_h, \cdot) = G(\Omega, \cdot).$$

Osservazione 1.4.6 La compattezza dello spazio metrico $(S_\psi(U), \delta_\Gamma)$ non implica la compattezza di $(\mathcal{A}, d)$. La situazione generale, infatti, risulta essere la seguente: presa una successione (Ω_h) in $\mathcal{A}$ e considerati i funzionali $G(\Omega_h, \cdot) \in S_\psi(U)$, esiste il $\Gamma\text{-}\lim_{h\to+\infty} G(\Omega_h, \cdot) = H \in S_\psi(U)$, ma in generale non esiste alcun $\Omega \in \mathcal{A}$ tale che $H = G(\Omega, \cdot)$.

Osservazione 1.4.7 Tenendo presente quanto detto nell'osservazione 1.4.3 segue che la γ-convergenza è la "topologia naturale" su $\mathcal{A}$ che tiene conto della convergenza dei minimi del problema (1.4.2)

Sia ora $\left(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{d}\right)$ il completamento dello spazio metrico $(\mathcal{A}, d)$ e sia $\mathcal{G} : \widehat{\mathcal{A}} \to S_\psi(U)$ l'unica isometria che estende $\mathcal{G}$: più precisamente

$$\widehat{\mathcal{G}}(\widehat{\Omega}) = \Gamma\text{-}\lim_{h\to+\infty} \mathcal{G}(\Omega_h),$$

dove (Ω_h) è una qualunque successione $\widehat{d}$-convergente a $\widehat{\Omega}$. Possiamo dunque definire il funzionale di stato rilassato $\widehat{G} : \widehat{\mathcal{A}} \times U \to \overline{I\!R}$ come $\widehat{G}(\widehat{\Omega}, \cdot) = \widehat{\mathcal{G}}(\widehat{\Omega})$ e in tal modo si ha

$$\widehat{\Omega}_h \to \widehat{\Omega} \text{ in } \left(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{d}\right) \Longleftrightarrow \Gamma\text{-}\lim_{h\to+\infty} \widehat{G}(\widehat{\Omega}_h, \cdot) = \widehat{G}(\widehat{\Omega}, \cdot).$$

La compattezza della Γ-convergenza su $S_\psi(U)$ implica che $\left(\widehat{\mathcal{A}}, \widehat{d}\right)$ sia uno spazio metrico compatto (vedi Belloni, Buttazzo, Freddi [4]). Per identificare il problema rilassato associato a (1.4.2) supponiamo inoltre:

(R5) per ogni $\widehat{\Omega} \in \widehat{\mathcal{A}}$ il punto di minimo di $\widehat{G}(\widehat{\Omega}, \cdot)$ su U sia unico;

(R6) esista una funzione $\phi : \mathcal{A} \to I\!R$ limitata sugli insiemi d-limitati e una funzione $\omega : U \times U \to I\!R$ con

$$\lim_{v\to u} \omega(u,v) = 0 \quad \forall\, u \in U$$

tale che

$$|J(\Omega, u) - J(\Omega, v)| \le \phi(\Omega)\omega(u,v) \;\; \forall\, u, v \in U,\, \forall\; \Omega \in \mathcal{A}.$$

Allora vale il seguente risultato:

Teorema 1.4.8 *(Belloni, Buttazzo, Freddi [4]) Sotto le ipotesi* (R1)—(R6) *il problema rilassato associato a* (1.4.2) *è il problema (1.4.3), dove* $\widehat{J} : \widehat{\mathcal{A}} \times U \to \overline{\mathbb{R}}$ *è il funzionale costo rilassato*

$$\widehat{J}(\widehat{\Omega}, u) = \inf \left\{ \liminf_{h \to +\infty} J(\Omega_h, u) \ : \Omega_h \to \widehat{\Omega} \in \widehat{\mathcal{A}} \right\}.$$

Il problema (1.4.3) ha sempre almeno una soluzione. Inoltre le successioni minimizzanti di (1.4.2) γ*-convergono (a meno di sottosuccessioni) a punti di minimo di (1.4.3) e l'estremo inferiore di (1.4.2) coincide con il minimo di (1.4.3).*

Osservazione 1.4.9 Quando il funzionale costo non dipende esplicitamente dal controllo Ω allora $\widehat{J} = J$ e quindi il problema rilassato assume la forma più semplice

$$\min \left\{ J(u) \ : \widehat{\Omega} \in \widehat{\mathcal{A}}, \ u \in U, \ \ u \in \operatorname{argmin} \widehat{G}(\widehat{\Omega}, \cdot) \right\}.$$

Nella sezione 2.1 verrà definito lo spazio rilassato $\widehat{\mathcal{A}}$ e la forma che assume il problema rilassato (1.4.3) nel caso concreto di problemi di ottimizzazione di forma con equazione di stato lineare e no.

1.5 Capacità

Introduciamo in questa sezione la teoria della capacità variazionale: i teoremi verranno solo enunciati rimandando per le dimostrazioni a Heinonen, Kilpelainen e Martio [55].

In tutta questa sezione Ω sarà un sottoinsieme (possibilmente illimitato) aperto di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Sia p un numero reale tale che $1 < p < +\infty$. Denotiamo con $H_0^{1,p}(\Omega)$ e $H^{1,p}(\Omega)$ gli spazi di Sobolev usuali.

Definizione 1.5.1 *Sia* K *un sottoinsieme compatto di* Ω. *La capacità armonica di* K *rispetto a* Ω *è*

$$p\text{-}cap\,(K, \Omega) = \inf \left\{ \int_\Omega |D\varphi|^p dx, \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \ \varphi \geq 1 \ su \ K \right\}.$$

Inoltre, se $U \subseteq \Omega$ *è aperto, poniamo*

$$p\text{-}cap\,(U, \Omega) = \sup \left\{ p\text{-}cap\,(K, \Omega), \ \ K \ compatto, \ K \subseteq U \right\},$$

mentre per un insieme $E \subseteq \Omega$ *arbitrario*

$$p\text{-}cap\,(E, \Omega) = \inf \left\{ p\text{-}cap\,(U, \Omega), \ \ U \ aperto, \ E \subseteq U \right\}.$$

Proposizione 1.5.2 *Sia* E *un sottoinsieme di* Ω. *Allora*

$$p\text{-}cap\,(E, \Omega) = \inf \left\{ \int_\Omega |D\varphi|^p dx, \ \varphi \in H_0^{1,p}(\Omega), \ \varphi \geq 1 \ in \ un \ intorno \ di \ \ E \right\}.$$

Teorema 1.5.3 *La funzione* $E \mapsto p\text{-}cap\,(E, \Omega)$ *gode delle seguenti proprietà:*

(a) *se* $E_1 \subseteq E_2$*, allora* $p\text{-}cap\,(E_1,\Omega) \le p\text{-}cap\,(E_2,\Omega)$*;*

(b) *se* $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ *sono aperti e* $E_1 \subseteq \Omega_1$*, allora* $p\text{-}cap\,(E,\Omega_2) \le p\text{-}cap\,(E,\Omega_1)$*;*

(c) *p-cap è fortemente subadditiva, cioè per ogni* $E_1, E_2 \subseteq \Omega$ *si ha*

$$p\text{-}cap\,(E_1 \cup E_2,\Omega) + p\text{-}cap\,(E_1 \cap E_2,\Omega) \le p\text{-}cap\,(E_1,\Omega) + p\text{-}cap\,(E_2,\Omega);$$

(d) *p-cap è numerabilmente subadditiva, cioè se* $E = \cup_h E_h \subseteq \Omega$*, allora*

$$p\text{-}cap\,(E,\Omega) \le \sum_h p\text{-}cap\,(E_h,\Omega);$$

(e) *se* (E_h) *è una successione crescente di insiemi di* Ω*, cioè* $E_h \subseteq E_{h+1}$ *per ogni* $h \in I\!N$*,* $E_h \subseteq \Omega$*, allora*

$$p\text{-}cap\,(\cup_h E_h,\Omega) = \sup_{h\in I\!N} p\text{-}cap\,(E_h,\Omega) = \lim_{h\to+\infty} p\text{-}cap\,(E_h,\Omega);$$

(f) *se* (K_h) *è una successione decrescente di compatti di* Ω *e* $K = \cap_h K_h$ *allora*

$$p\text{-}cap\,(K,\Omega) = \inf_{h\in I\!N} p\text{-}cap\,(K_h,\Omega) = \lim_{h\to+\infty} p\text{-}cap\,(K_h,\Omega).$$

Osservazione 1.5.4 Se $G \subset\subset \Omega$ è un insieme aperto, in generale, $p\text{-}cap\,(G,\Omega)$ è diversa da $p\text{-}cap\,(\overline{G},\Omega)$. Tuttavia, (vedi Heinonen, Kilpelainen e Martio [55]), se B è una palla con $\overline{B} \subseteq \Omega$, allora

$$p\text{-}cap\,(B,\Omega) = p\text{-}cap\,(\overline{B},\Omega).$$

La definizione di capacità armonica implica inoltre che

$$p\text{-}cap\,(K,\Omega) = p\text{-}cap\,(\partial K,\Omega)$$

per ogni compatto K di Ω.

Definizione 1.5.5 *Un insieme* E *di* $I\!R^N$ *ha capacità armonica zero se*

$$p\text{-}cap\,(E \cap \Omega,\Omega) = 0$$

per tutti gli insiemi aperti $\Omega \subset I\!R^N$*.*

Si dice che una proprietà vale *p-quasi ovunque* (brevemente p-q.e.) se essa vale a meno di insiemi di capacità nulla, mentre si dice che una proprietà vale *quasi ovunque* (brevemente a.e.) se essa vale a meno di insiemi di misura di Lebesgue nulla.

Ricordiamo che un'unione numerabile di insiemi di p-capacità zero ha p-capacità zero, e che se $E \subseteq \Omega$ è tale che $p\text{-}cap\,(E,\Omega) = 0$, allora E ha misura di Lebesgue zero.

Teorema 1.5.6 *Sia* Ω *aperto limitato di* $I\!R^N$*,* $x \in \Omega$*. Allora*

(a) *se* $1 < p \leq N$, $\quad p\text{-}cap\,(\{x\},\Omega) = 0\,;$

(b) *se* $p > N$, $\quad p\text{-}cap\,(\{x\},\Omega) > 0\,.$

Teorema 1.5.7 *Sia* Ω *un aperto limitato di* $I\!R^N$. *Sia* M_k *una sottovarietà non vuota di* Ω *di classe* C^1 *e di dimensione* k. *Allora*

(a) *se* $k \leq N-p$, $\quad p\text{-}cap\,(M_k,\Omega) = 0;$

(b) *se* $k > N-p$, $\quad p\text{-}cap\,(M_k,\Omega) > 0.$

Definizione 1.5.8 *Una funzione* $u : \Omega \to \overline{I\!R}$ *si dice p-quasi continua in* Ω *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un insieme aperto* A_ε *tale che* $p\text{-}cap\,(A_\varepsilon,\Omega) < \varepsilon$ *e la restrizione di* u *a* $\Omega \setminus A_\varepsilon$ *sia continua.*

Ricordiamo che ogni funzione $u \in H^{1,p}(\Omega)$ ha un rappresentante p-quasi continuo, unico a meno di insiemi di p-capacità nulla.

È noto che se $u : \Omega \to \overline{I\!R}$ è una funzione p-quasi continua, allora l'insieme di livello $\{u > c\}$ è quasi aperto, per ogni $c \in I\!R$

Definizione 1.5.9 *Sia* $A \subseteq \Omega$. *Diciamo che* A *è quasi aperto se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un insieme aperto* A_ε *con* $p\text{-}cap\,(A_\varepsilon,\Omega) < \varepsilon$, *tale che* $A \bigcup A_\varepsilon$ *sia aperto.*

Teorema 1.5.10 *Se* $u \in H^{1,p}(I\!R^N)$, *allora* $u|_\Omega \in H_0^{1,p}(\Omega)$ *se e solo se* $u = 0$ *p-q.e. su* Ω^c *per un rappresentante p-quasi continuo.*

Teorema 1.5.11 *Sia* $u \in H^{1,p}(\Omega)$. *Se* $u = 0$ *a.e. in* Ω, *allora* $u = 0$ *p-q.e. su* Ω.

Esistono altre definizioni della capacità variazionale. Per esempio talvolta è più conveniente definire la p-capacità metarmonica che sfrutta la norma completa su $H_0^{1,p}(\Omega)$.

Definizione 1.5.12 *Sia* E *un sottoinsieme di* Ω. *Definiamo la p-capacità metarmonica di* E *ponendo*

$$C_p(E,\Omega) = \inf\left\{\int_\Omega |D\varphi|^p dx + \int_\Omega |\varphi|^p dx,\ \varphi \in H_0^{1,p}(\Omega),\ \varphi \geq 1 \text{ in un intorno di } E\right\}.$$

La capacità metarmonica è sempre una capacità nel senso di " Choquet", cioè è una funzione crescente di insieme, è continua lungo successioni crescenti d'insieme e lungo successioni decrescenti di compatti, ed inoltre gli insiemi di $I\!R^N$ che hanno p-capacità armonica zero sono tutti e soli quelli che hanno p-capacità metarmonica nulla.

Pur essendo le due definizioni differenti, sugli insiemi Ω limitati le due capacità sono equivalenti, nel senso che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $K = K(\varepsilon, p, \Omega)$ tale che

$$p\text{-}cap\,(E,\Omega) \leq C_p(E,\Omega) \leq K\, p\text{-}cap\,(E,\Omega)$$

per ogni $E \subseteq \Omega$ tale che $d(E,\partial\Omega) > \varepsilon$.

Utilizzeremo la nozione di capacità metarmonica nel capitolo 5.

1.6 Convergenza di Mosco di insiemi

In questa sezione introduciamo il concetto di convergenza di una successione di insiemi nel senso di Mosco. Rimandiamo a Attouch [1], Dal Maso [46], Mosco [60], Kuratowsky [59] sec. 29, per una trattazione approfondita.

Sia V uno spazio di Banach con una norma $\| \;\|$ e sia (K_h) una successione di sottoinsiemi di V. Le definizioni di limite forte inferiore e limite debole superiore della successione (K_h) sono:

Definizione 1.6.1 *Il limite forte inferiore*

$$s\text{-}\liminf_{h\to+\infty} K_h$$

della successione (K_h) è l'insieme di tutti gli $u \in V$ che godono della seguente proprietà: esistono $k \in I\!N$ e una successione (u_h) convergente a u fortemente in V, tale che $u_h \in K_h$, per ogni $h \geq k$.

Definizione 1.6.2 *Il limite debole superiore*

$$w\text{-}\limsup_{h\to+\infty} K_h$$

della successione (K_h) è l'insieme di tutti gli $u \in V$ che godono della seguente proprietà: esiste una successione (u_k) convergente a u debolmente in V e una sottosuccessione (K_{h_k}) di (K_h), tale che $u_k \in K_{h_k}$, per ogni $k \in I\!N$.

Dalla definizione segue subito che

$$\text{s-}\liminf_{h\to+\infty} K_h \subseteq \text{w-}\limsup_{h\to+\infty} K_h.$$

Definizione 1.6.3 *Diciamo che una successione (K_h) converge a K nel senso di Mosco (vedi Mosco [60]) se*

$$s\text{-}\liminf_{h\to+\infty} K_h = w\text{-}\limsup_{h\to+\infty} K_h = K,$$

ossia se sono verificate le due condizioni:

(M1) $\forall\, u \in K \;\exists\; u_h \in K_h \;\; : u_h \to u;$

(M2) $\forall\, u_{h_k} \in K_{h_k} \;:\; u_{h_k} \rightharpoonup u \;\Rightarrow\; u \in K.$

Dalla definizione seguono le seguenti proprietà (vedi Mosco [60]):

Lemma 1.6.4 *Se (K_n) è una successione crescente di convessi chiusi di V, cioè $K_n \subseteq K_m$ se $n \leq m$, allora (K_n) converge nel senso di Mosco a K, dove K è la chiusura di $\bigcup K_n$ in V.*

Lemma 1.6.5 *Se (K_n) è una successione decrescente di convessi chiusi di V, cioè $K_n \subseteq K_m$ se $n \geq m$, allora (K_n) converge a Knel senso di Mosco, dove $K = \bigcap K_n$ in V.*

1.7 Simmetrizzazione di Steiner

Denotiamo con $\mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ la famiglia degli insiemi misurabili secondo Lebesgue di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, con misura finita. Per ogni $\Omega \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ indichiamo con $|\Omega|$ la sua misura N-dimensionale. Sia $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ la classe delle funzioni misurabili reali u tali che

$$|\left\{x \in \mathbb{R}^N \ : u(x) > c\right\}| < +\infty \quad \forall\, c > \inf u.$$

Dato un insieme misurabile Ω di $\mathbb{R}^N$, con $|\Omega| > 0$, la simmetrizzazione di Steiner di Ω, che indicheremo con Ω^*, si definisce rispetto ad un iperpiano di $\mathbb{R}^N$ e sottointende la nozione di "simmetrizzato" per insiemi misurabili di $\mathbb{R}$. Cominciamo quindi con il caso $N = 1$. Rimandiamo a Brock [11], [12] per una trattazione sistematica sulla simmetrizzazione di Steiner e per la dimostrazione del risultato esposto in questa sezione.

Definizione 1.7.1 *Sia $\Omega \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ aperto o compatto. L'insieme*

$$\Omega^* = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}|\Omega|, \frac{1}{2}|\Omega|\right) & \text{se } \Omega \text{ è aperto} \\ \left[-\frac{1}{2}|\Omega|, \frac{1}{2}|\Omega|\right] & \text{se } \Omega \text{ è compatto} \end{cases}$$

è detto simmetrizzato di Ω.

Se $\Omega \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ non è nè aperto, nè compatto, allora Ω^* si ottiene dalla formula sopra nel senso a.e..

Definizione 1.7.2 *Se $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, allora la funzione*

$$u^* = \sup\left\{c > \inf u \ : x \in \{u > c\}^*\right\}$$

è detta "simmetrizzata" di u.

La funzione u^* è simmetrica rispetto allo zero, è non crescente per $x > 0$, e si ha

$$\{u > c\}^* = \{u^* > c\} \qquad \forall\, c > \inf u.$$

Sia ora $N \geq 2$, sia $\Omega \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^N)$ e sia $\mathcal{H}$ un iperpiano di $\mathbb{R}^N$.

Definizione 1.7.3 *Il simmetrizzato di Steiner di Ω, indicato con Ω^*, si definisce rispetto all'iperpiano $\mathcal{H}$ nel modo seguente: per ogni linea $l \perp \mathcal{H}$ si considera l'insieme 1-dimensionale $\Omega \cap l$ e l'insieme $(\Omega \cap l)^*$ simmetrizzato di $\Omega \cap l$ rispetto al punto $l \cap \mathcal{H}$.*

L'insieme Ω^* è quindi l'insieme, simmetrico rispetto all'iperpiano $\mathcal{H}$, la cui misura è uguale a quella di Ω.

Definizione 1.7.4 *Sia $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. La simmetrizzata di Steiner di u è la funzione u^* tale che*

$$\{u > c\}^* = \{u^* > c\} \qquad \forall\, c > \inf u.$$

Analogamente si può definire il simmetrizzato di Steiner di un insieme Ω rispetto ad una linea l, che continueremo a indicare con Ω^*. Più precisamente

Definizione 1.7.5 *Il simmetrizzato di Steiner di Ω rispetto alla linea l, che indichiamo con Ω^*, si definisce nel modo seguente: per ogni iperpiano $\mathcal{H} \perp l$ si considera l'insieme misurabile $\Omega \cap \mathcal{H}$ e la palla con centro sulla linea l nel punto $l \cap \mathcal{H}$ della stessa misura dell'insieme $\Omega \cap \mathcal{H}$.*

Al variare dell'iperpiano $\mathcal{H}$ si ottiene quindi l'insieme Ω^*, simmetrico rispetto a l, la cui misura è uguale a quella di Ω.

Il risultato di questa sezione fornisce un legame fra una funzione di Sobolev positiva e la sua simmetrizzata di Steiner.

Teorema 1.7.6 *Valgono le seguenti affermazioni:*

(i) se $u \in H^{1,p}(I\!R^N), u \geq 0$ $(1 \leq p < +\infty)$, allora $u^* \in H^{1,p}(I\!R^N), u^* \geq 0$ e

$$\|Du^*\|_p \leq \|Du\|_p;$$

(ii) se Ω è aperto, $u \in H^{1,p}(\Omega), u \geq 0$ $(1 \leq p < +\infty)$, allora $u^* \in H^{1,p}(\Omega^*)$.

Per recenti applicazioni della simmetrizzazione di Steiner al caso di problemi di ottimizzazione di forma rimandiamo a Bucur e Henrot [19] e a Bucur, Buttazzo e Figuereido [16].

Capitolo 2

Il caso lineare

2.1 Situazione generale: mancanza di esistenza. Formulazione del problema di Dirichlet rilassato

Abbiamo già visto nella sezione 1.4 che, in generale, i problemi di controllo ottimo e quindi anche i problemi di ottimizzazione di forma, possono non ammettere soluzione.

Consideriamo in questa sezione una classe di problemi di ottimizzazione di forma governati da un'equazione di stato ellittica con condizioni al bordo di Dirichlet e individuiamo per essa il problema rilassato.

Nel seguito con B denoteremo la palla di $I\!R^N$, $N \geq 2$ e f sarà una funzione di $H^{-1}(B)$ fissata. Per motivi di semplicità consideriamo l'operatore di Laplace $-\triangle$ come operatore modello, ma i risultati che seguono possono essere estesi ad operatori ellittici del secondo ordine più generali.

Seguendo l'impostazione astratta della sezione 1.4 introduciamo un problema concreto di ottimizzazione di forma scegliendo:

U lo spazio $H_0^1(B)$ con la topologia forte di $L^2(B)$;

$\mathcal{A}$ la classe di tutti i sottoinsiemi aperti di B;

G il funzionale di stato

$$G(\Omega, u) = \begin{cases} \int_B |Du|^2 dx - 2 < f, u > & \text{se } u \in H_0^1(\Omega) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases} \tag{2.1.1}$$

la cui equazione di stato è

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } B \setminus \Omega; \end{cases} \tag{2.1.2}$$

(osserviamo che G è equicoercivo, poichè grazie alla disuguaglianza di Poincarè

$$G(\Omega, u) \geq \alpha \int_B |Du|^2 dx - \beta \quad \forall\, u \in H_0^1(B),$$

per $\alpha, \beta > 0$ opportune);

J un funzionale costo di tipo integrale della forma

$$J(u) = \int_B j(x,u)dx,$$

che non ha esplicita dipendenza dal controllo Ω, dove $j(x,u)$ è una funzione di Caratheodory tale che

$$|j(x,s)| \leq a(x) + b|s|^2$$

con $a \in L^1(B)$ e $b \geq 0$.

Il problema di ottimizzazione di forma risulta quindi

$$\min\left\{J(u) :\ \Omega \in \mathcal{A},\ u \in \operatorname{argmin} G(\Omega,\cdot), u \in U\right\}. \tag{2.1.3}$$

Sia d la distanza associata alla Γ-convergenza dei funzionali di stato (vedi la sezione 1.4). Abbiamo già osservato nella osservazione 1.4.6 che lo spazio $(\mathcal{A}, d)$ non è compatto, cosa che, in generale, implica la non esistenza di soluzioni ottime classiche. Anche con dati molto regolari (vedi Buttazzo [30]) come $B = B_{0,1}$ la palla di centro 0 e raggio 1, $f = 1$, $j(x,s) = |s-c|^2$, c costante positiva assegnata, il problema (2.1.3) non ha soluzione classica regolare. Se si suppone che esista $\Omega \subseteq B$, $\Omega \neq B$, dominio regolare soluzione di (2.1.3), prendendo una palla $B_{x_0,\varepsilon} = B_\varepsilon$ disgiunta da Ω e considerando $\Omega_\varepsilon = \Omega \cup B_\varepsilon$ si ottiene che il costo di Ω_ε è strettamente minore di quello di Ω e quindi Ω non può essere minimo. Infatti

$$J(u_\Omega) = \int_B |u_\Omega - c|^2 dx = \int_\Omega |u_\Omega - c|^2 dx + \int_{B_\varepsilon} c^2 dx + \int_{B\setminus\Omega\setminus B_\varepsilon} c^2 dx,$$

mentre

$$J(u_{\Omega\cup B_\varepsilon}) = \int_\Omega |u_\Omega - c|^2 dx + \int_{B_\varepsilon} |u_\varepsilon - c|^2 dx + \int_{B\setminus\Omega\setminus B_\varepsilon} c^2 dx,$$

dove u_ε è la soluzione dell'equazione (2.1.2) in B_ε e u_Ω è la soluzione dell'equazione (2.1.2) in Ω. Ora, per ε sufficientemente piccolo, poichè

$$\int_{B_\varepsilon} |u_\varepsilon - c|^2 dx < \int_{B_\varepsilon} c^2 dx,$$

si ottiene

$$J(u_{\Omega\cup B_\varepsilon}) < J(u_\Omega)$$

e quindi Ω non può essere minimo. Anche la soluzione $\Omega = B$ non può essere minimo. Infatti, in questo caso, se si considera l'insieme vuoto si ottiene ancora che, per valori di c sufficientemente piccoli, si ha

$$J(u_\emptyset) = \int_B c^2 dx < J(u_B) = \int_B |u_B - c|^2 dx$$

e quindi di nuovo B non può essere la soluzione ottima. In conclusione, quindi, per valori di c sufficientemente piccoli non esiste un dominio regolare soluzione del problema (2.1.3).

Osservazione 2.1.1 La non esistenza si ha solo per valori di c sufficientemente piccoli: infatti per valori di c sufficientemente grandi (ad esempio $c \geq \max u_B$) esiste la soluzione banale data da $\Omega = B$.

Grazie all'esempio sopra scritto è quindi chiaro come, in generale, il problema di ottimizzazione di forma (2.1.3) non abbia soluzioni classiche. Quando non si ha esistenza, il modo classico di procedere è quello di considerare il problema rilassato le cui soluzioni sono le cosiddette "soluzioni rilassate".

Con le notazioni sopra fatte, lo spazio $\widehat{\mathcal{A}}$ dei controlli rilassati è stato caratterizzato completamente da Dal Maso e Mosco [50] dove viene dimostrato che $\widehat{\mathcal{A}}$ coincide con lo spazio $\mathcal{M}_0$ di tutte le misure di Borel $\mu : \mathcal{B}(B) \to [0, +\infty]$ che si annullano sugli insiemi di 2-capacità nulla. Inoltre il funzionale costo rilassato $\widehat{G}$ è

$$\widehat{G}(\mu, u) = \int_B |Du|^2 dx - 2 < f, u > + \int_B u^2 d\mu,$$

cosicchè l'equazione di stato rilassata associata al problema di Dirichlet (2.1.2) risulta

$$\begin{cases} -\triangle u + \mu u = f & \text{in } B \\ u \in H_0^1(B) \bigcap L^2_\mu(B), \end{cases} \tag{2.1.4}$$

dove $L^2_\mu(B) = \{u : B \to I\!R \text{ misurabile } : \int_B u^2 d\mu < +\infty\}$. Poichè stiamo considerando il caso di funzionale costo che non dipende dal controllo, si ha $J = \widehat{J}$ e quindi il problema rilassato risulta:

$$\min\left\{\int_B j(x,u)dx \,:\, \mu \in \mathcal{M}_0,\ u \in H_0^1(B),\ -\triangle u + \mu u = f\right\}. \tag{2.1.5}$$

Osservazione 2.1.2 Quando il funzionale costo J dipende anche dal controllo Ω l'espressione esplicita del funzionale rilassato $\widehat{J}$ è complicata. Per esempio, nel caso in cui J sia della forma

$$J(\Omega, u) = \int_\Omega j(x,u)dx,$$

con $j(x,s)$ che soddisfa le proprietà sopra scritte, Buttazzo, Dal Maso, Garroni e Malusa in [36] hanno dimostrato che

$$\widehat{J}(\mu, u) = \int_{A_\mu} j(x,u)dx - \int_{\Omega \setminus A_\mu} j^-(x,0)dx,$$

dove A_μ è l'insieme dove μ "è finita". Più precisamente, se per ogni $\mu \in \mathcal{M}_0$ denotiamo con w_μ la soluzione del problema rilassato con dato $f = 1$,

$$\begin{cases} -\triangle w + \mu w = 1 & \text{in } B \\ w \in H_0^1(B) \bigcap L^2_\mu(B), \end{cases}$$

allora $A_\mu = \{w_\mu > 0\}$.

Osservazione 2.1.3 Grazie all'identificazione $\widehat{A} = \mathcal{M}_0$ abbiamo che i domini rilassati sono delle misure. In particolare un dominio classico $\Omega \in \mathcal{A}$ si può vedere come un elemento di $\mathcal{M}_0$; infatti, se definiamo la misura

$$\mu(C) = \infty_{B\setminus\Omega}(C) = \begin{cases} 0 & \text{se } 2\text{-cap}(\Omega \setminus C) = 0 \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per ogni sottoinsieme di Borel $C \subseteq B$, allora l'insieme Ω si identifica con la misura $\infty_{B\setminus\Omega}$, come si verifica facilmente.

Grazie al teorema 1.4.8 abbiamo così che il problema rilassato (2.1.5) ammette almeno una soluzione. Se il dato f è non negativo si può però, in molte situazioni, recuperare l'unicità. Chipot e Dal Maso in [41] hanno dimostrato, infatti, che il problema di Dirichlet rilassato si può ridurre ad un problema di minimizzazione su un insieme convesso, per il quale è facile dimostrare l'esistenza di un unico punto di minimo. Nel caso di dato f non negativo, il principio di massimo fornisce una soluzione u_μ non negativa dell'equazione rilassata (2.1.4); inoltre, l'insieme delle $u \in H_0^1(B)$ tali che esiste $\mu \in \mathcal{M}_0$ che soddisfano l'equazione (2.1.4), risulta uguale al sottoinsieme convesso di $H_0^1(B)$

$$\mathcal{K} = \left\{ u \in H_0^1(B),\ u \geq 0 \text{ 2-q.e. in } B,\ \triangle u + f \geq 0 \text{ in } B \right\}.$$

È stato dimostrato (vedi Chipot e Dal Maso [41]) che la funzione che associa ad ogni misura $\mu \in \mathcal{M}_0$ la soluzione u_μ dell'equazione di stato rilassata (2.1.4) è iniettiva, poichè la misura μ si può ottenere da u attraverso l'equazione

$$\mu = \frac{\triangle u + f}{u}, \tag{2.1.6}$$

dove si sottointende $\mu = +\infty$ se $u = 0$. In questo modo il problema di ottimizzazione di forma rilassato (2.1.5) diventa equivalente al problema di minimo

$$\min \{ J(u) \ :\ u \in \mathcal{K} \}. \tag{2.1.7}$$

Dal momento che $\mathcal{K}$ è chiuso e convesso in $H_0^1(B)$, se il funzionale costo J è strettamente convesso, il problema (2.1.7) ha una e una sola soluzione $u_{opt} \in \mathcal{K}$ e così dalla (2.1.6) segue che il problema rilassato (2.1.5) ha l'unica soluzione

$$\mu_{opt} = \frac{\triangle u_{opt} + f}{u_{opt}}.$$

Nell'esempio concreto visto prima in cui $f = 1$, $B = B_{0,R}$ con $R = 1$ e $j(x,s) = |s-c|^2$ con c costante positiva fissata, data la simmetria radiale, si possono considerare in $\mathcal{K}$ solo funzioni $u = u(\rho)$ e quindi il problema (2.1.7) diventa (vedi Buttazzo [30]):

$$\min \left\{ \int_0^1 \rho^{N-1} |u - c|^2 d\rho \ :\ u \geq 0,\ u(1) = 0,\ u'' + \frac{N-1}{\rho} u' + 1 \geq 0 \right\}.$$

In questo caso si trova che esiste un $R_c \in]0, R[$ tale che la misura μ_{opt} è data da

$$\mu_{opt} = \begin{cases} \frac{1}{c}dx & \text{su } \{|x| < R_c\} \\ 0 & \text{su } \{|x| > R_c\} \\ \beta_c d\mathcal{H}^{N-1} & \text{su } \{|x| = R_c\} \end{cases}$$

con β_c costante opportuna. La soluzione $u_{opt} \in \mathcal{K}$ è invece data da

$$u_{opt}(\rho) = \begin{cases} c & \text{per } \rho \le R_c \\ \frac{1-\rho^2}{4} + \alpha_c \log(\frac{\rho}{R}) & \text{per } \rho > R_c \text{ se } N = 2 \\ \frac{1-\rho^2}{2N} + \alpha_c \left(\rho^{2-N} - R^{2-N}\right) & \text{per } \rho > R_c \text{ se } N > 2 \end{cases}$$

con α_c costante opportuna.

Dall'espressione esplicita della misura μ_{opt} risulta che, per c sufficientemente piccolo, non esiste alcun dominio (anche irregolare) $\Omega \subseteq B$ tale che $\mu_{opt} = \infty_{B \setminus \Omega}$. Per valori di c sufficientemente piccoli non esiste, quindi, alcun dominio regolare o irregolare classico soluzione del problema originario (2.1.3).

Nel caso della non esistenza è interessante vedere come sono fatte le successioni minimizzanti del problema (2.1.3). Esse dipendono dalla dimensione N. Per esempio se $N = 3$, nella regione $\{|x| < R_c\}$ dove $\mu_{opt} = \frac{1}{c}dx$, una successione minimizzante (Ω_ε) può essere costruita "rimuovendo da B delle piccole palle". Più precisamente

$$\Omega_\varepsilon = B \setminus \cup_{i \in \mathbf{Z}^N} B_{x^i_\varepsilon, r_\varepsilon},$$

dove

$$x^i_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}(1, 1, .., 1) + \frac{i}{\varepsilon} \quad \text{e} \quad r_\varepsilon = \frac{1}{c\varepsilon^3}.$$

Il caso dei domini ottenuti da un dominio fisso rimuovendo un numero di piccole palle, cioè il caso dei "domini con addensamento di buchi", costituisce l'esempio "patologico" di non esistenza per i problemi di ottimizzazione di forma (vedi per esempio Rauch e Taylor [62] e Cioranescu e Murat [42]).

Osservazione 2.1.4 Se c assume valori sufficientemente grandi, allora $R_c = R = 1$ e $\mu_{opt} = 0$. Esiste quindi in questo caso il dominio ottimo che coincide con tutto B (vedi l'osservazione 2.1.1).

2.2 γ-convergenza nel caso lineare: caratterizzazione variazionale, relazioni con la convergenza di Mosco e la capacità

La γ-convergenza sullo spazio dei controlli $\mathcal{A}$ è definita in funzione della Γ- convergenza dei funzionali di stato (vedi la definizione 1.4.5). In questo caso si ha

$$\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega \iff G(\Omega, u) = \Gamma\text{-}\lim G(\Omega_n, u)$$

dove

$$G(\Omega_n, u) = \begin{cases} \int_B |Du|^2 dx - 2 < f, u > & \text{se } u \in H_0^1(\Omega_n) \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Si può dimostrare che la γ-convergenza sopra definita dipende solo dalla classe di operatori ellittici del secondo ordine (e non in particolare dal Laplaciano) e dalla condizione di Dirichlet al bordo. In altri termini, se si sostituisce il Laplaciano con un operatore ellittico del secondo ordine, la γ-convergenza non cambia.

Sfruttando la teoria della Γ- convergenza, vedi in particolare la proprietà (1.3.14), con le scelte fatte nella sezione 2.1, Dal Maso e Mosco in [50] proposition 4.10, hanno ottenuto la seguente caratterizzazione variazionale.

Proposizione 2.2.1 *Una successione $(\Omega_n) \in \mathcal{A}$ γ-converge a Ω se e solo se per ogni $f \in H^{-1}(B)$ le soluzioni u_{Ω_n} del problema*

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \textit{in } \Omega_n \\ u = 0 & \textit{su } B \setminus \Omega_n; \end{cases} \tag{2.2.2}$$

convergono debolmente in $H_0^1(B)$ alla soluzione u_Ω su Ω.

Le soluzioni u_{Ω_n}, u_Ω, che appartengono rispettivamente a $H_0^1(\Omega_n)$ e $H_0^1(\Omega)$, si suppongono estese a zero fuori di Ω_n e Ω, diventando così elementi di $H_0^1(B)$.

Osservazione 2.2.2 La convergenza debole in $H_0^1(B)$ delle soluzioni u_{Ω_n} a u_Ω è equivalente alla convergenza forte in $H_0^1(B)$. Infatti, se $u_{\Omega_n} \rightharpoonup u_\Omega$ in $H_0^1(B)$, allora dall'equazione di stato otteniamo

$$\|u_{\Omega_n}\|^2_{H_0^1(B)} = \int_B |Du_{\Omega_n}|^2 dx = \int_B f u_{\Omega_n} dx \to \int_B f u_\Omega dx = \int_B |Du_\Omega|^2 dx = \|u_\Omega\|^2_{H_0^1(B)}.$$

Essendo $H_0^1(B)$ riflessivo, dalla convergenza debole e dalla convergenza delle norme, otteniamo la convergenza forte.

Per quanto detto nell'osservazione 2.2.2, è possibile dare una definizione del tutto equivalente della γ-convergenza solo in termini della convergenza dei minimi dell'equazione di stato. Precisamente è possibile affermare:

Proposizione 2.2.3 *Si ha $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$ se e solo se per ogni $f \in H^{-1}(B)$ $u_{\Omega_n} \to u_\Omega$ fortemente in $H_0^1(B)$.*

In realtà per descrivere la γ-convergenza non è necessario considerare ogni funzione $f \in H^{-1}(B)$. Sverak in [65] ha infatti dimostrato che è sufficiente considerare il dato $f = 1$. Detta w_{Ω_n} la soluzione di

$$\begin{cases} -\triangle w = 1 & \text{in } \Omega_n \\ w = 0 & \text{su } B \setminus \Omega_n; \end{cases} \tag{2.2.3}$$

vale infatti (vedi Sverak [65] corollario 3.3) il risultato seguente.

Proposizione 2.2.4 *Siano Ω_n, $\Omega \in \mathcal{A}$. Allora $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$ se e solo se $w_{\Omega_n} \rightharpoonup w_\Omega$ in $H_0^1(B)$.*

Dal Maso e Mosco in [50] hanno inoltre caratterizzato la γ-convergenza in termini della convergenza di Mosco di una successione di convessi dello spazio $H_0^1(B)$.

Proposizione 2.2.5 *Siano Ω_n, $\Omega \in \mathcal{A}$. Allora $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$ se e solo se $H_0^1(\Omega_n)$ converge a $H_0^1(\Omega)$ nel senso di Mosco, cioè*

(M1) $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)\ \exists \varphi_n \in H_0^1(\Omega_n) : \varphi_n \to \varphi$ *in* $H_0^1(B)$;

(M2) $\forall \varphi_{n_k} \in H_0^1(\Omega_{n_k}) : \varphi_{n_k} \rightharpoonup \varphi \ \Rightarrow \ \varphi \in H_0^1(\Omega)$.

La γ-convergenza e quindi la convergenza di Mosco degli spazi di Sobolev associati agli aperti, è strettamente legata alla continuità dello spettro degli autovalori dell'operatore di Laplace con condizioni al bordo di Dirichlet (più in generale anche di un operatore ellittico in forma di divergenza con coefficienti L^∞). Infatti se denotiamo con $\lambda_k(\Omega_n)$ il k-esimo autovalore dell'operatore di Laplace su Ω_n (contato con la sua molteplicità) è noto, vedi Boccardo e Marcellini [6] e Buttazzo e Dal Maso [35], che se $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$ allora

$$\lim_{n\to+\infty} \lambda_k(\Omega_n) = \lambda_k(\Omega) \ \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Per ottenere l'implicazione inversa Bucur e Zolèsio in [25], [26] hanno individuato alcune condizioni di "natura geometrica" che legano gli aperti Ω_n a Ω, sotto le quali la continuità dello spettro implica la γ-convergenza. Più precisamente, in qualche situazione speciale, la γ-convergenza si può ottenere come conseguenza della continuità del solo primo autovalore. Enunciamo qui di seguito i principali risultati ottenuti da Bucur e Zolésio, rimandando per le dimostrazioni a [26].

Siano $\Omega_n, \Omega \in \mathcal{A}$. Consideriamo le seguenti ipotesi:

(H1) Ω_n converga a Ω nel senso "semicompatto", cioè,

$$\forall\, K \subset\subset \Omega \,\text{compatto},\ \exists\, n_K\ : \forall\, n \geq n_K\ \ K \subset\subset \Omega_n;$$

(H2) $|\Omega_n| \to |\Omega|$;

(H3) Ω sia connesso.

Teorema 2.2.6 *Sotto le ipotesi* (H1), (H2), (H3) *se* $\lim_{n\to+\infty} \lambda_1(\Omega_n) = \lambda_1(\Omega)$, *allora* $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$.

Corollario 2.2.7 *Sotto le ipotesi* (H1), (H2), (H3) *sono equivalenti le seguenti affermazioni:*

(1) $\lambda_1(\Omega_n) \to \lambda_1(\Omega)$;

(2) $\lambda_k(\Omega_n) \to \lambda_k(\Omega)$ *per ogni* $k \in \mathbb{N}$.

Se invece dell'ipotesi (H1) si sostituisce nel teorema 2.2.6 la prima condizione di Mosco (M1), allora la continuità del primo autovalore diventa condizione necessaria e sufficiente per la γ-convergenza.

Teorema 2.2.8 *Supponiamo che valgano* (M1), (H2), (H3). *Allora* $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$ *se e solo se* $\lambda_1(\Omega_n) \to \lambda_1(\Omega)$.

Infine, se si suppone che (M2) sia valida, per ottenere la γ-convergenza non è necessaria alcuna ipotesi di convergenza sulla misura degli insiemi, ma si ottiene:

Teorema 2.2.9 *Supponiamo che valgano* (H1), (H3) *e* (M2). *Allora* $\Omega_n \xrightarrow{\gamma} \Omega$ *se e solo se* $\lambda_1(\Omega_n) \to \lambda_1(\Omega)$.

Concludiamo questa sezione ricordando che Dal Maso in [43] e Dal Maso e De Franceschi in [48] hanno ottenuto inoltre una caratterizzazione della γ-convergenza in funzione della capacità armonica, valida non solo per gli aperti ma per la classe più ampia dei quasi aperti (vedi la definizione 1.5.9).

Definizione 2.2.10 *Sia $\mathcal{P}(B)$ l'insieme di tutti i sottoinsiemi di B e sia $\mathcal{E}$ un sottoinsieme di $\mathcal{P}(B)$. Diciamo che $\mathcal{E}$ è denso in $\mathcal{P}(B)$ se per ogni coppia (K, U) con K compatto, U aperto e $K \subseteq U \subseteq B$, esiste $E \in \mathcal{E}$ tale che $K \subseteq E \subseteq U$.*

Definizione 2.2.11 *Una successione (A_n) di quasi aperti di B γ-converge a un quasi aperto A di B se e solo se per ogni $f \in H^{-1}(B)$ le soluzioni u_{A_n} del problema*

$$\begin{cases} -\triangle u = f & \textit{in } A_n \\ u = 0 & \textit{su } B \setminus A_n \end{cases}$$

convergono debolmente in $H_0^1(B)$ alla soluzione u_A su A.

Proposizione 2.2.12 *Siano A_n, $A \subseteq B$ quasi aperti. Allora $A_n \xrightarrow{\gamma} A$ se e solo se esiste un insieme denso $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(B)$ tale che per ogni $E \in \mathcal{E}$*

$$\lim_{n \to +\infty} p\text{-}cap\,(A_n^c \cap E) = p\text{-}cap\,(A^c \cap E).$$

2.3 Esistenza di soluzioni classiche sotto condizioni di tipo geometrico

Come abbiamo visto nella sezione 2.1, in generale, nei problemi di ottimizzazione di forma ci si può aspettare solo l'esistenza di soluzioni rilassate. Può tuttavia essere ricercata l'esistenza di soluzioni classiche non rilassate procedendo in due direzioni differenti:

- restringere la classe $\mathcal{A}$ dei domini ammissibili, imponendo alcuni vincoli (vedi per esempio Pironneau [61], Bucur e Zolésio [22], [23], [24], Bucur e Trebeschi [21]);

- imporre condizioni di monotonia sul funzionale costo da minimizzare (vedi Buttazzo e Dal Maso [35]).

Consideriamo inizialmente il primo caso, che è anche il più studiato in letteratura e presentiamo una serie di risultati in cui, sotto opportune condizioni sulla classe dei domini ammissibili, si recupera l'esistenza del dominio ottimo.

Per quanto riguarda il secondo caso rimandiamo alla sezione 2.6.

Sia $\mathcal{A} = \{\Omega \subseteq B, \Omega \text{ aperto}\}$. Come abbiamo visto nella proposizione 2.2.3 la γ- convergenza di una successione di aperti (Ω_n) ad un aperto Ω si traduce nella convergenza in $H_0^1(B)$ delle soluzioni u_{Ω_n} dell'equazione di stato (2.1.2) alla soluzione u_Ω. L'esistenza o no del dominio ottimo è quindi ricondotta allo studio della convergenza di tali soluzioni, quando la successione di aperti (Ω_n) converge "in qualche senso" all'aperto Ω, ossia allo studio della continuità dell'applicazione

$$\Omega \mapsto u_\Omega.$$

Per poter parlare di "continuità" dell'applicazione sopra scritta bisogna innanzitutto fissare la topologia sullo spazio $\mathcal{A}$ dei sottoinsiemi aperti di B. Su tale famiglia consideriamo la topologia di Hausdorff dei complementari, denotata con H^c, indotta dalla metrica

$$d_{H^c}(\Omega_1, \Omega_2) = \sup_{x \in I\!R^N} |d(x, \Omega_1^c) - d(x, \Omega_2^c)|.$$

È noto che (vedi per esempio Dellacherie [52]) d_{H^c} è una metrica e che la famiglia di tutti i sottoinsiemi aperti di B è compatta rispetto a tale metrica. Valgono inoltre le seguenti proprietà (vedi per esempio Pironneau [61]):

Proposizione 2.3.1 *Se $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$, allora per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ esiste $n_K \in I\!N$ tale che per ogni $n \geq n_K$ si ha $K \subseteq \Omega_n$.*

Proposizione 2.3.2 *Se $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$, allora*

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)\ \exists\ (\varphi_n) \in H_0^1(\Omega_n) : \varphi_n \to \varphi \text{ in } H_0^1(B).$$

Come conseguenza diretta della proprietà 2.3.2 segue che, presa sulla famiglia degli aperti $\mathcal{A}$ la topologia di Hausdorff dei complementari H^c, per una successione $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$ risulta soddisfatta la prima condizione della definizione di Mosco degli spazi $H_0^1(\Omega_n)$ e $H_0^1(\Omega)$.

La sola convergenza di Hausdorff dei complementari (senza ipotesi ulteriori sulla classe degli aperti) non è sufficiente a garantire anche la validità della seconda condizione della definizione di convergenza di Mosco. Per esempio, se si considera il caso "patologico" di domini "con addensamento di buchi", cioè domini Ω_n ottenuti da un aperto fisso rimuovendo molti piccoli buchi (vedi per esempio Rauch e Taylor [62] e Cioranescu e Murat [42]), allora la convergenza di Hausdorff dei complementari non implica la condizione (M2) della definizione di convergenza di Mosco. La situazione generale, infatti, risulta essere la seguente: presa una successione minimizzante (Ω_n) del problema (2.1.3) e considerata la successione (u_{Ω_n}) delle soluzioni dell'equazione di stato (2.1.2), abbiamo che:

- esistono (Ω_{n_k}) e Ω tali che $\Omega_{n_k} \overset{H^c}{\to} \Omega$;
- $u_{\Omega_{n_k}} \rightharpoonup u$ in $H^1_0(B)$;
- $u \neq u_\Omega$.

Il problema quindi è quello di determinare una sottoclasse opportuna $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{A}$ che sia compatta per la topologia di Hausdorff dei complementari e che soddisfi la seguente condizione di continuità:

$$\Omega_n \in \mathcal{O},\ \Omega_n \overset{H^c}{\to} \Omega \implies \Omega \in \mathcal{O},\ \ u_{\Omega_n} \to u_\Omega \text{ in } H^1_0(B).$$

Per ottenere la proprietà di continuità sopra scritta si deve verificare per prima cosa il passaggio al limite nell'equazione di stato, che si ottiene come diretta conseguenza della proposizione 2.3.1 (vedi per esempio Pironneau [61] o Henrot [56]).

Proposizione 2.3.3 *Sia $\Omega_n \overset{H^c}{\to} \Omega$. Allora esiste una sottosuccessione (Ω_{n_k}) tale che $u_{\Omega_{n_k}} \rightharpoonup u$ e*

$$\int_\Omega DuD\varphi\, dx =< f, \varphi > \quad \forall \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

Per ottenere la convergenza di tutta la successione u_{Ω_n} a u_Ω (e quindi la γ-convergenza di Ω_n verso Ω) è sufficiente dimostare che $u \in H^1_0(\Omega)$. Infatti:

Proposizione 2.3.4 *Se la funzione u della Proposizione 2.3.3 appartiene a $H^1_0(\Omega)$, allora si ha*

(i) $u = u_\Omega$;

(ii) tutta la successione u_{Ω_n} converge a u_Ω;

(iii) la convergenza è forte in $H^1_0(B)$.

Dimostrazione Le prime due affermazioni sono una diretta conseguenza dell'unicità della soluzione dell'equazione di stato (2.1.2). La terza segue dall'osservazione 2.2.2. □

La questione è ricondotta dunque a stabilire quando $u \in H^1_0(\Omega)$. Un primo risultato, vedi Henrot [56], in cui si ha risposta affermativa senza alcuna condizione sulla classe degli aperti è data dalla seguente proprietà.

Proposizione 2.3.5 *Sia (Ω_n) una successione crescente di insiemi in $\mathcal{A}$ e sia $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$. Allora $u_{\Omega_n} \to u_\Omega$ in $H^1_0(B)$.*

In generale per ottenere la condizione $u \in H^1_0(\Omega)$ sono necessari vincoli di natura geometrica sul bordo degli insiemi ammissibili. Chenais in [39], [40] e Pironneau in [61], hanno dimostrato che se si considera la classe dei sottoinsiemi aperti di B con bordo uniformemente lipschitziano o, più in generale, la classe degli aperti che godono della "proprietà di cono" allora si ottiene la condizione $u \in H^1_0(\Omega)$ e quindi l'esistenza del dominio ottimo. Enunciamo qui di seguito le definizioni e i risultati principali, rimandando a Chenais [39], [40] e a Pironneau [61] per i dettagli sulle proprietà di cono.

Definizione 2.3.6 *Siano $h > 0$ e $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ due numeri reali e ξ un vettore di $I\!R^N$, con $\|\xi\| = 1$. Chiamiamo cono di angolo θ, altezza h e asse ξ l'insieme*

$$C(\xi, \theta, h) = \left\{x \in I\!R^N \, : (x, \xi) > \|x\| \cos\theta, \; \|x\| < h\right\}$$

(dove $(\cdot, \cdot)$ denota l'usuale prodotto scalare in $I\!R^n$).

Definizione 2.3.7 *Siano $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $h > 0, r > 0$ $(2r \leq h)$ tre numeri reali. Diciamo che un sottoinsieme Ω di $I\!R^N$ soddisfa la proprietà di cono (θ, h) se*

$$\forall\, x \in \partial\Omega, \, \exists\, C_x = C(\xi_x, \theta, h) : \forall\, y \in B_{x,r} \cap \Omega \quad y + C_x \subset \Omega,$$

dove $B_{x,r}$ è la palla aperta di centro x e raggio r.

Osservazione 2.3.8 È stato dimostrato (vedi Chenais [38]) che se un aperto Ω soddisfa la proprietà di cono (θ, h), allora anche $\overline{\Omega}^c$ la soddisfa con altre opportune costanti.

Teorema 2.3.9 *Un aperto Ω ha la proprietà di cono (θ, h) se e solo se $\partial\Omega$ è lipschitz-continuo con costante $k = k(\theta, h) > 0$.*

Siano $h > 0$ e $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ fissati e sia

$$\mathcal{O} = \{\Omega \,\text{aperto}, \, \Omega \subseteq B, \, \Omega \text{ ha la proprietà di cono } (\theta, h)\}.$$

L'insieme $\mathcal{O}$ è compatto nella topologia di Hausdorff dei complementari (vedi Pironneau [61]) e vale il seguente

Teorema 2.3.10 *Siano $\Omega_n, \Omega \in \mathcal{O}$ tali che $\Omega_n \stackrel{H^c}{\to} \Omega$. Allora $u_{\Omega_n} \to u_\Omega$.*

Il risultato di continuità delle soluzioni dell'equazione di stato si può ottenere anche più in generale imponendo condizioni di "stabilità" (vedi Henrot [56]) sull'aperto limite Ω.

Definizione 2.3.11 *Sia $\Omega \subseteq B$ aperto. Diciamo che Ω è stabile se e solo se*

$$u \in H_0^1(B), \, u = 0 \text{ 2-}q.e. \text{ su } \overline{\Omega}^c \;\Rightarrow\; u \in H_0^1(\Omega).$$

Sfruttando la nozione sopra introdotta, Pironneau in [61] ha dimostrato che si ottiene la continuità delle soluzioni dell'equazione di stato (2.1.2) sotto ipotesi più deboli della uniforme lipschitzianità dei bordi degli aperti. Posto

$$1_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in C \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

per ogni insieme C di $I\!R^N$, vale infatti il risultato seguente.

Teorema 2.3.12 *Siano $\Omega_n \in \mathcal{A}$. Supponiamo che:*

(1) $\Omega_n \stackrel{H^c}{\to} \Omega$;

(2) $1_{B\setminus\Omega_n} \rightharpoonup l$ *debolmente* in* $L^\infty(B)$, *con* $l > 0$ *a.e. in* $B \setminus \Omega$;

(3) $u \in H_0^1(B)$, $u \cdot 1_{B\setminus\Omega} = 0$ *a.e.* $\Rightarrow u|_\Omega \in H_0^1(\Omega)$.

Allora $u_{\Omega_n} \to u_\Omega$.

Osservazione 2.3.13 L'ipotesi (2) del teorema 2.3.12 garantisce che non si verifichi il caso di "domini con addensamento di buchi", situazione patologica della non esistenza (vedi per esempio Cioranescu e Murat [42]). L'ipotesi (3) invece nasconde essenzialmente la nozione di stabilità introdotta nella definizione 2.3.11 per l'aperto limite Ω. Infatti

$$u \cdot 1_{B\setminus\Omega} = 0 \,\text{a.e.} \Rightarrow u = 0 \,\text{a.e. su int}(\Omega^c)$$

ed essendo $\text{int}(\Omega^c)$ aperto, dal teorema 1.5.11 segue che $u = 0$ q.e su $\text{int}(\Omega^c)$.

Concludiamo questa sezione ricordando che se si impone, oltre alla stabilità dell'aperto limite, una nozione di convergenza più forte della convergenza di Hausdorff dei complementari si ottiene il risultato di continuità. Rimandiamo per la dimostrazione a Rauch e Taylor [62] oppure ad Henrot [56].

Teorema 2.3.14 *Siano* $\Omega_n, \Omega \in \mathcal{A}$. *Supponiamo che:*

(i) Ω_n *converga "compattamente" a* Ω, *cioè, per ogni* $K_1 \subset\subset \Omega$ *compatto, per ogni* $K_2 \subset\subset ext(\Omega)$ *compatto, esiste* $\overline{n} \in \mathbb{N}$ *tale che, per ogni* $n \geq \overline{n}$, $K_1 \subset\subset \Omega_n$ *e* $K_2 \subset\subset ext(\Omega_n)$;

(ii) Ω *sia stabile.*

Allora $u_{\Omega_n} \to u_\Omega$.

2.4 Esistenza di soluzioni classiche sotto condizioni di tipo capacitario

Per ottenere la condizione al bordo $u|_\Omega \in H_0^1(\Omega)$ bisogna restringere, in generale, la classe dei domini ammissibili, imponendo ulteriori condizioni sugli aperti.

Bucur e Zolésio in [22], [23] hanno ottenuto un risultato di compattezza nella topologia di Hausdorff dei complementari per una classe di aperti che soddisfano condizioni di tipo capacitario. Tali condizioni risultano essere assai più deboli di quelle geometriche introdotte da Chenais [38],[39] ,[40] e da Pironneau in [61]: esse infatti corrispondono ad una nozione di "cono piatto" (vedi la definizione 2.4.8) più debole di quella di cono vista nella sezione precedente (vedi la definizione 2.3.7). Tali condizioni escludono inoltre la situazione patologica della non esistenza nel caso di domini finemente perforati: infatti, la condizione trovata da Bucur e Zolésio, richiede che la capacità relativa del complementare dei domini ammissibili, vicino al bordo, non si debba annullare.

Rimandiamo a Bucur e Zolésio [22] e [23] per le dimostrazioni dei risultati che seguono. In tutta questa sezione $p = 2$ e $B_{x,r}$ denota la palla di centro x e raggio r.

Definizione 2.4.1 *Per $c, r > 0$ diciamo che un aperto Ω soddisfa la condizione uniforme (r, c) di capacità se*

$$\forall\, x \in \partial\Omega \qquad \frac{p\text{-}cap\,(\Omega^c \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r})}{p\text{-}cap\,(\overline{B}_{x,r}; B_{x,2r})} \geq c$$

Definizione 2.4.2 *Per $r < 1$ definiamo la seguente famiglia di sottoinsiemi aperti di B:*

$$\mathcal{O}_{r,c}(B) = \{\Omega \subseteq B \;: \forall\, r_0 \; 0 < r_0 < r \;\; \Omega \text{ soddisfa la condizione} (r_0, c)\}\,.$$

Definizione 2.4.3 *Sia x un punto di $\partial\Omega$. L'insieme Ω^c è "spesso" in x (o anche Ω^c soddisfa il criterio di Wiener in x) se localmente il complementare di Ω ha "abbastanza capacità", precisamente se*

$$\int_0^1 \left(\frac{p\text{-}cap\,(\Omega^c \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r})}{p\text{-}cap\,(\overline{B}_{x,r}; B_{x,2r})} \right) \frac{dr}{r} = +\infty.$$

Osservazione 2.4.4 Se Ω soddisfa la condizione uniforme (r, c) di capacità, il complementare è "spesso" in ogni punto del bordo.

Teorema 2.4.5 *La famiglia $\mathcal{O}_{r,c}(B)$ è compatta nella topologia di Hausdorff dei complementari.*

Il risultato ottenuto da Bucur e Zolésio in [22] è il seguente:

Teorema 2.4.6 *Sia (Ω_n) una successione di aperti in $\mathcal{O}_{r,c}(B)$ tale che $\Omega_n \overset{H^c}{\to} \Omega$. Allora $u_{\Omega_n} \to u_\Omega$.*

Osservazione 2.4.7 La linearità dell'equazione di stato gioca un ruolo essenziale nella dimostrazione del teorema 2.4.6. Essa infatti consente di arrivare, via sottrazione delle soluzioni u_{Ω_n} con la soluzione fissa u_B su tutta la palla B, ad una equazione armonica per le funzioni $u_{\Omega_n} - u_B$, per le quali si può sfruttare la teoria delle funzioni armoniche. Quest'ultima, più la condizione di capacità sugli aperti Ω_n, consente di recuperare una proprietà di equicontinuità su B per le funzioni $u_{\Omega_n} - u_B$ e quindi su $\overline{\Omega}_n$ per le funzioni u_{Ω_n}, dalla quale si ottiene, per passaggio al limite, la condizione al bordo $u|_\Omega \in H^1_0(\Omega)$ per il limite debole u delle u_{Ω_n}. Questa, grazie alla proposizione 2.3.4, implica il risultato di continuità.

Visto il ruolo essenziale giocato dalla linearità dell'equazione di stato, questa tecnica dimostrativa non può essere utilizzata nel caso non lineare (vedi Bucur e Trebeschi [21]): la sottrazione con il termine fisso u_B nel caso non lineare non comporta infatti alcuna facilitazione per ottenere la continuità.

Un esempio di classe di domini che soddisfano la condizione (r, c) di capacità per certe costanti r, c e per la quale si ha anche una descrizione geometrica abbastanza semplice, è costituito dall'insieme degli aperti che verificano la condizione "di cono piatto".

Definizione 2.4.8 *Sia $x \in I\!R^N$, $1 > \omega > 0$, $h > 0$ e $\nu, \xi \in I\!R^N$ con $\|\nu\| = \|\xi\| = 1$. Si definisce "cono piatto" l'insieme*

$$\tilde{\mathcal{C}}(x, \omega, h, \xi, \nu) = \Big\{ y \in I\!R^N \;: 0 \leq (\overline{xy}, \xi) \leq \omega \|\overline{xy}\|,\, (\overline{xy}, \nu) = 0,\, \|\overline{xy}\| \leq h \Big\}\,.$$

$\tilde{\mathcal{C}}(x, \omega, h, \xi, \nu)$ giace nell'iperpiano che contiene x e che ha normale ν, ω è la sua apertura, h è la sua altezza e ξ è l'asse di simmetria; si dice "cono piatto" perchè è contenuto in un iperpiano. In particolare la sua misura di Lebesgue N-dimensionale è zero.

Definizione 2.4.9 *Siano $1 > \omega > 0$ e $h > 0$. Diciamo che un insieme aperto $\Omega \subseteq B$, soddisfa la condizione (ω, h) di cono piatto se*

$$\forall\, x \in \partial\Omega,\ \exists\, \xi_x, \nu_x \in I\!R^N \textit{ vettori unitari, tali che } \tilde{\mathcal{C}}(x, \omega, h, \xi_x, \nu_x) \subseteq \Omega^c.$$

Indichiamo con $\tilde{\mathcal{C}}(\omega, h, B)$ la famiglia dei sottoinsiemi aperti di B che soddisfano la condizione (ω, h) di cono piatto.

Osservazione 2.4.10 Se si confronta la condizione (ω, h) di cono piatto con la condizione di cono (θ, h) (vedi la definizione 2.3.7), per la quale si sa che c'è la continuità delle soluzioni del problema di Dirichlet (vedi teorema 2.3.10), si può vedere che la condizione (ω, h) di cono piatto è più debole per due ragioni. La prima perchè si richiede che la proprietà di cono valga solo in un punto e non in un intorno; la seconda perchè il cono piatto ha dimensione più piccola di quella del cono uniforme (ha infatti dimensione di Lebesgue N-dimensionale zero). Inoltre non è richiesta alcuna condizione di locale uniformità per la direzione del cono.

Proposizione 2.4.11 *La famiglia $\tilde{\mathcal{C}}(\omega, h, B)$ è contenuta in $\mathcal{O}_{r,c}(B)$ ed è compatta per la topologia H^c.*

Proposizione 2.4.12 *Sia (Ω_n) una successione di aperti, $\Omega_n \in \tilde{\mathcal{C}}(\omega, h, B)$ e $\Omega_n \stackrel{H^c}{\to} \Omega$. Allora $u_{\Omega_n} \to u_\Omega$.*

La continuità delle soluzioni dell'equazione di stato si riesce ad ottenere anche indebolendo ulteriormente la classe $\mathcal{O}_{r,c}(B)$. Bucur e Zolésio in [23] hanno dimostrato che la condizione più debole sotto cui si ottiene il risultato di continuità per le soluzioni è una condizione di tipo "Wiener uniforme". Più precisamente sia $w : (0,1) \times (0,1) \times B \to I\!R^+$ una funzione tale che:

$$\lim_{r \to 0} w(r, R, x) = +\infty \ \text{ localmente uniformemente in } x,$$

cioè per ogni $R \in (0,1)$ e per ogni $x \in B$ esiste un intorno U di x tale che, per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $|r| < \delta$ si ha $w(r, R, y) > M$ per ogni $y \in U$.

Definizione 2.4.13 *Definiamo la seguente famiglia di sottoinsiemi aperti di B:*

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_w(B) \ = \ & \Big\{ \Omega \subseteq B : \forall\, x \in \partial\Omega, \forall\, 0 < r < R < 1 \\ & \int_r^R \Big(\frac{p\text{-}cap\,(\Omega^c \cap \overline{B}_{x,t}; B_{x,2t})}{p\text{-}cap\,(\overline{B}_{x,t}; B_{x,2t})} \Big) \frac{dt}{t} \geq w(r, R, x) \Big\}. \end{aligned}$$

Teorema 2.4.14 *Sia (Ω_n) una successione di aperti in $\mathcal{W}_w(B)$ tale che $\Omega_n \stackrel{H^c}{\to} \Omega$ con Ω aperto in B. Allora $u_{\Omega_n} \to u_\Omega$.*

Osservazione 2.4.15 La condizione di Wiener uniforme richiesta nella definizione 2.4.13 è più debole della condizione (r, c) di capacità della definizione 2.4.1, in quanto essa implica solo una "locale equicontinuità" delle soluzioni u_{Ω_n} (vedi Bucur e Zolésio [23]) e non una equicontinuità uniforme come nel caso $\mathcal{O}_{r,c}(B)$.

Senza ipotesi ulteriori sulla funzione w la classe $\mathcal{W}_w(B)$ sopra introdotta non risulta essere compatta nella topologia di Hausdorff dei complementari. Si recupera la compattezza sotto ipotesi di semicontinuità. Vale infatti:

Teorema 2.4.16 *Se w è semicontinua inferiormente nella terza variabile x, allora la famiglia $\mathcal{W}_w(B)$ è compatta nella topologia di Hausdorff dei complementari.*

2.5 Il caso 2-dimensionale: risultato di Sverak

Sverak in [64] e [65] dimostra la continuità delle soluzioni dell'equazione di stato sotto condizioni di natura topologica. Più precisamente sia $N = 2$ e sia l un numero intero fissato. Denotiamo con:

$$\mathcal{O}_l(B) = \{\Omega \subseteq B,\ \Omega \text{ aperto},\ \sharp\Omega^c \leq l\}$$

la famiglia dei sottoinsiemi aperti di B il cui complementare ha al più l componenti connesse. Con $\sharp$ denotiamo il numero delle componenti connesse.

Teorema 2.5.1 *La famiglia $\mathcal{O}_l(B)$ è compatta nella topologia di Hausdorff dei complementari H^c.*

Teorema 2.5.2 *(Sverak) Se $\Omega_n \in \mathcal{O}_l(B)$ e $\Omega_n \stackrel{H^c}{\to} \Omega$, allora $\Omega \in \mathcal{O}_l(B)$ e $u_{\Omega_n} \to u_\Omega$.*

La condizione sull'uniforme limitatezza del numero delle componenti connesse esclude a priori il caso patologico dei domini con addensamento di buchi. Inoltre tale condizione è in realtà strettamente legata a questioni di tipo capacitario: Bucur in [14] ha dimostrato che il risultato di continuità 2-dimensionale nella classe $\mathcal{O}_l(B)$ può essere ottenuto come diretta conseguenza del risultato di compattezza per la classe $\mathcal{O}_{r,c}(B)$ introdotta nella sezione 2.4.

2.6 Esistenza di domini classici sotto ipotesi di monotonia per il funzionale costo

Consideriamo in questa sezione una ristretta classe di funzionali costo, lasciando la classe $\mathcal{A}$ dei domini ammissibili senza alcun vincolo geometrico. Buttazzo e Dal Maso in [35] hanno recentemente dimostrato che, sotto ipotesi di monotonia del funzionale costo, si ottiene l'esistenza di un dominio ottimo nella classe dei quasi aperti. Enunciamo il risultato ottenuto da Buttazzo e Dal Maso rimandando per la dimostrazione a [35].

Sia B la palla di $I\!R^N$, $N \geq 2$ e sia $\mathcal{A}$ la classe dei sottoinsiemi quasi aperti di B. Consideriamo il seguente problema di ottimizzazione di forma

$$\min\{F(A): \; A \in \mathcal{A}\},$$

dove F è il funzionale costo che deve essere minimizzato sulla classe $\mathcal{A}$.

Teorema 2.6.1 *Sia $F : \mathcal{A} \to \overline{I\!R}$ una applicazione che soddisfa le seguenti ipotesi:*

(i) F sia semicontinua rispetto alla γ-convergenza;

(ii) F sia decrescente rispetto all'inclusione di insiemi, cioè, $F(A) \geq F(B)$ quando $A \subseteq B$.

Allora per ogni $0 < c < |B|$ esiste una soluzione del problema di minimo

$$\min\{F(A) \; : A \in \mathcal{A}, \; |A| = c\}.$$

Il risultato sopra esposto è stato recentemente generalizzato da Bucur, Buttazzo e Henrot [17] per problemi di "partizioni ottime" del tipo

$$\min\{F(A_1, \cdot\cdot, A_k): \; A_i \in \mathcal{A}, \; p\text{-}cap\,(A_i \cap A_j) = 0\}, \tag{2.6.1}$$

dove k è un intero positivo fissato, $\mathcal{A}$ è la famiglia dei quasi aperti contenuti in B e $F : \mathcal{A}^k \to \overline{I\!R}$ è il funzionale costo. Essi hanno dimostrato che, come nel caso classico di problemi di ottimizzazione di forma ($k = 1$), se si impongono ipotesi di monotonia sul funzionale costo il problema (2.6.1) ha soluzione nella classe dei quasi aperti.

Concludiamo questa sezione ricordando che, in alcuni casi, l'ipotesi di monotonia sul funzionale costo non è necessaria per ottenere l'esistenza di domini classici, vedi per esempio Bucur, Buttazzo e Figuereido [16]; tuttavia, per ora, non si conosce una condizione più debole della monotonia che implichi in generale l'esistenza di un dominio ottimo.

Capitolo 3

Il caso non lineare con condizioni di stabilità

3.1 Introduzione

Presentiamo in questo capitolo un risultato di continuità per problemi di ottimizzazione di forma governati da equazioni di stato non lineari di forma generale.

Sia $\mathcal{A}$ la famiglia dei sottoinsiemi aperti Ω della palla B di $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ e sia $p \in \mathbb{R}$ tale che $1 < p < +\infty$. Consideriamo la classe dei funzionali

$$G : \mathcal{A} \times H_0^{1,p}(B) \to \overline{\mathbb{R}} \tag{3.1.1}$$

della forma

$$G(\Omega, u) = F(u) + \chi_{\{u=0 \text{ a.e. su } B \setminus \Omega\}}(u), \tag{3.1.2}$$

dove $F : H_0^{1,p}(B) \to \overline{\mathbb{R}}$ sia un funzionale che soddisfa le seguenti ipotesi:

(F1) F sia semicontinuo inferiormente rispetto alla topologia debole di $H_0^{1,p}(B)$;

(F2) F sia continuo fortemente su $H_0^{1,p}(B)$;

(F3) F sia coercivo rispetto alla topologia debole di $H_0^{1,p}(B)$;

(F4) $F(0) < +\infty$.

Lo scopo di questo capitolo è studiare la dipendenza delle soluzioni dell'equazione di stato associata al funzionale $G(\Omega, \cdot)$ al variare dell'aperto $\Omega \in \mathcal{A}$, ossia la continuità dell' applicazione

$$\Omega \mapsto u_\Omega, \tag{3.1.3}$$

dove $u_\Omega \in \operatorname{argmin} G(\Omega, \cdot)$. Indichiamo ancora con u_Ω la funzione di $H_0^{1,p}(B)$ ottenuta estendendo u_Ω a zero fuori di Ω.

È noto che se si suppone sullo spazio $H_0^{1,p}(B)$ la topologia debole e su $\mathcal{A}$ la topologia di Hausdorff dei complementari H^c, pur essendo tali topologie compatte, la continuità dell'applicazione (3.1.3), in generale, viene a mancare: basta considerare, per esempio, il caso lineare, sezione 2.3.

In questo capitolo dimostriamo invece che, nelle ipotesi sopra scritte per F, se $p > N$, la continuità delle soluzioni si ottiene come diretta conseguenza della convergenza di Hausdorff dei complementari, ossia

$$\Omega_n, \Omega \in \mathcal{A}, \Omega_n \stackrel{H^c}{\to} \Omega \Rightarrow u_{\Omega_n} \rightharpoonup u_\Omega \text{ in } H_0^{1,p}(B),$$

mentre, se $p \leq N$, si recupera la continuità sotto ipotesi aggiuntive di stabilità. Come nel caso lineare (vedi il teorema 2.3.12) dimostriamo infatti che presi $\Omega_n, \Omega \in \mathcal{A}$ tali che

1. $\Omega_n \stackrel{H^c}{\to} \Omega$;
2. $1_{B\setminus\Omega_n} \rightharpoonup l$ debolmente* in $L^\infty(B)$, $l > 0$ a.e. in $B \setminus \Omega$;
3. $u \in H_0^{1,p}(B), u \cdot 1_{B\setminus\Omega} = 0 \text{ a.e.} \Rightarrow u|_\Omega \in H_0^{1,p}(B)$,

allora $u_{\Omega_n} \rightharpoonup u_\Omega$.

Introduciamo su $\mathcal{A}$ una nozione di convergenza definita solo in termini della convergenza debole $H_0^{1,p}(B)$ delle soluzioni dell'equazione di stato, che chiameremo, in analogia con il caso lineare, γ-convergenza. In altri termini, diciamo che $\Omega_n \stackrel{\gamma}{\to} \Omega$ se $u_{\Omega_n} \rightharpoonup u_\Omega$ in $H_0^{1,p}(B)$. Per quanto visto nell'osservazione 1.4.2 la γ-convergenza definita sopra è esattamente la topologia "naturale" da mettere sull'insieme $\mathcal{A}$ per ottenere l'esistenza di una soluzione per il problema di ottimizzazione di forma

$$\min\{J(\Omega, u) \,:\, u \in \operatorname{argmin} G(\Omega, \cdot)\} \tag{3.1.4}$$

con $J : \mathcal{A} \times H_0^{1,p}(B) \to \overline{I\!R}$. Infatti, sotto ipotesi di semicontinuità e coercività del funzionale J rispetto alla topologia γ su $\mathcal{A}$ e alla topologia debole su $H_0^{1,p}(B)$ (vedi il teorema 1.4.1), la continuità delle soluzioni dell'equazione di stato garantisce l'esistenza della soluzione ottima del problema (3.1.4).

Come applicazione di questo risultato generale presentiamo nella sezione 3.4 un esempio concreto di problema di ottimizzazione di forma del tipo (3.1.4) in cui l'equazione di stato rientra nella forma generale (3.1.2) e in cui il funzionale costo J è di tipo integrale.

3.2 Il caso $p > N$: continuità nella convergenza di Hausdorff dei complementari

Il risultato di continuità dell'applicazione $\Omega \mapsto u_\Omega \in \operatorname{argmin} G(\Omega, \cdot)$ rispetto alla topologia di Hausdorff dei complementari in $\mathcal{A}$, si ottiene, nel caso $p > N$, come diretta conseguenza della Γ-convergenza dei funzionali di stato e dai teoremi di immersione di Sobolev.

Cominciamo con la dimostrazione del seguente lemma di natura topologica, che risulterà essenziale nella dimostrazione della continuità.

Lemma 3.2.1 *Siano C_n, C sottoinsiemi chiusi di B, tali che (C_n) converga a C nella topologia di Hausdorff. Sia $u_n : B \to I\!R$ una funzione continua tale che $u_n = 0$ su C_n. Se $u_n \to u$ uniformemente su B, allora $u = 0$ su C.*

Dimostrazione Supponiamo per assurdo che esista $x \in C$ tale che $u(x) \neq 0$. Per le proprietà della convergenza di Hausdorff esiste una successione $(x_n), x_n \in C_n$, tale che $x_n \to x$. Per ipotesi u_n è continua su B. Allora, essendo B limitata, u_n è uniformemente continua su $\overline{B}$, da cui

$$|u_n(x_n) - u_n(x)| < \varepsilon$$

e quindi, essendo $u_n(x_n) = 0$,

$$|u_n(x)| < \varepsilon.$$

Dalla convergenza uniforme di (u_n) a u, passando al limite per $n \to +\infty$, segue $|u(x)| < \varepsilon$, che contraddice l'ipotesi. □

Consideriamo ora il funzionale $G(\Omega, u) = F(u) + \chi_{\{u=0 \text{ a.e. su} B\setminus\Omega\}}(u)$ dove F soddisfa le ipotesi $(F1)$—$(F4)$ della sezione precedente.

Lemma 3.2.2 *Siano $\Omega_n, \Omega \in \mathcal{A}$ tali che $\Omega_n \stackrel{H^c}{\to} \Omega$. Per ogni $p > 1$ si ha*

$$\Gamma\text{-}\limsup_{n\to+\infty} G(\Omega_n, \cdot) \leq G(\Omega, \cdot)$$

nella topologia forte di $H_0^{1,p}(B)$.

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare che per ogni $u \in H_0^{1,p}(B)$ esiste una successione $u_n \to u$, $u_n \in H_0^{1,p}(B)$ tale che

$$G(\Omega, u) \geq \limsup_{n\to+\infty} G(\Omega_n, u_n).$$

Osserviamo che se $G(\Omega, u) = +\infty$, allora non c'è nulla da dimostrare. Possiamo quindi supporre che $G(\Omega, u) < +\infty$ e quindi limitarci al caso di $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$. Essendo $\Omega_n \stackrel{H^c}{\to} \Omega$, dalla proposizione 2.3.2 si ottiene che esiste una successione $(u_n), u_n \in H_0^{1,p}(\Omega_n)$, tale che $u_n \to u$ in $H_0^{1,p}(B)$. Quindi, per la continuità di F rispetto alla topologia forte di $H_0^{1,p}(B)$, segue

$$G(\Omega, u) = F(u) = \lim_{n\to+\infty} F(u_n) = \lim_{n\to+\infty} G(\Omega_n, u_n),$$

ossia la tesi. □

Lemma 3.2.3 *Siano $\Omega_n, \Omega \in \mathcal{A}$ tali che $\Omega_n \stackrel{H^c}{\to} \Omega$. Se $p > N$, si ha*

$$G(\Omega, \cdot) \leq \Gamma\text{-}\liminf_{n\to+\infty} G(\Omega_n, \cdot)$$

nella topologia debole di $H_0^{1,p}(B)$.

Dimostrazione Dobbiamo dimostrare che per ogni $u \in H_0^{1,p}(B)$ e per ogni successione $u_n \rightharpoonup u$ in $H_0^{1,p}(B)$, allora

$$G(\Omega, u) \leq \liminf_{n \to +\infty} G(\Omega_n, u_n).$$

Osserviamo che se $\liminf_{n\to+\infty} G(\Omega_n, u_n) = +\infty$, non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi che $\liminf_{n\to+\infty} G(\Omega_n, u_n) < +\infty$. Allora, a meno di sottosuccessioni, $u_n = 0$ a.e. su $B \setminus \Omega_n$ e quindi $u_n \in H_0^{1,p}(\Omega_n)$. Rimane quindi da dimostrare che

$$F(u) + \chi_{\{u=0 \text{ a.e. su } B\setminus\Omega\}}(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_n).$$

Poichè F è semicontinuo rispetto alla convergenza debole di $H_0^{1,p}(B)$, basta provare che

$$\chi_{\{u=0 \text{ a.e. su } B\setminus\Omega\}}(u) = 0,$$

cioè $u = 0$ a.e. su $B \setminus \Omega$. Essendo $p > N$, la convergenza $u_n \rightharpoonup u$ in $H_0^{1,p}(B)$ implica $u_n \to u$ uniformemente su B e $u_n, u \in C(\overline{B})$. Allora, essendo u_n continua, si ottiene $u_n = 0$ su $B \setminus \Omega_n$ e dal lemma 3.2.1 si ha la tesi. □

Lemma 3.2.4 *Siano $\Omega_n, \Omega \in \mathcal{A}$ tali che $\Omega_n \overset{H^c}{\to} \Omega$. Se $p > N$, allora*

$$G(\Omega, \cdot) = \Gamma\text{-}\lim_{n\to+\infty} G(\Omega_n, \cdot)$$

nella topologia debole di $H_0^{1,p}(B)$.

Dimostrazione È una diretta conseguenza dei lemmi 3.2.2 e 3.2.3 e della proposizione 1.3.3 punto (c). □

Teorema 3.2.5 *Siano $\Omega_n, \Omega \in \mathcal{A}$ tali che $\Omega_n \overset{H^c}{\to} \Omega$. Se $p > N$, allora*

$$u_{\Omega_n} \rightharpoonup u_\Omega \quad \textit{in } H_0^{1,p}(B),$$

ossia $\Omega_n \overset{\gamma}{\to} \Omega$.

Dimostrazione La tesi segue come diretta conseguenza della Γ-convergenza dei funzionali di stato ottenuta nel lemma 3.2.4. □

3.3 Il caso $p \leq N$: continuità sotto ipotesi di stabilità

In tutta questa sezione consideriamo il caso $p \leq N$. Come abbiamo già detto nell'introduzione, in generale, per $p \leq N$ viene a mancare la continuità delle soluzioni quando si considera sull'insieme dei domini ammissibili la sola convergenza di Hausdorff dei complementari.

Generalizziamo in questa sezione il risultato ottenuto da Pironneau [61] nel caso lineare (vedi il teorema 2.3.12), al caso in cui l'equazione di stato sia non lineare e della forma

$$u_\Omega \in \operatorname{argmin} G(\Omega, \cdot)$$

dove G è il funzionale definito in (3.1.2).

Teorema 3.3.1 *Siano $\Omega_n, \Omega \in \mathcal{A}$. Supponiamo che*

(i) $\Omega_n \overset{H^c}{\to} \Omega$;

(ii) $1_{B\setminus\Omega_n} \rightharpoonup l$ *debolmente* in* $L^\infty(B)$, $l > 0$ *a.e. in* $B \setminus \Omega$;

(iii) $u \in H_0^{1,p}(B), u \cdot 1_{B\setminus\Omega} = 0$ *a.e.* $\Rightarrow u|_\Omega \in H_0^{1,p}(B)$.

Allora esiste una sottosuccessione $(u_{\Omega_{n_k}})$ *tale che*

$$u_{\Omega_{n_k}} \rightharpoonup u_\Omega \ \text{ in } H_0^{1,p}(B),$$

ossia $\Omega_{n_k} \overset{\gamma}{\to} \Omega$.

Dimostrazione La dimostrazione si ottiene in vari passi.

1. Dimostriamo che $u_{\Omega_n} \rightharpoonup u$ in $H_0^{1,p}(B)$.

   Cominciamo con l'osservare che le funzioni u_{Ω_n} sono limitate in $H_0^{1,p}(B)$. Infatti, poichè $u_{\Omega_n} \in \operatorname{argmin} G(\Omega_n, \cdot)$, $u_{\Omega_n} = 0$ a.e. su $B \setminus \Omega_n$ e $u_{\Omega_n} \in \operatorname{argmin} F$. Allora

   $$F(u_{\Omega_n}) = G(\Omega_n, u_{\Omega_n}) \leq G(\Omega_n, v) \tag{3.3.1}$$

   per ogni $v \in H_0^{1,p}(B)$. In particolare, prendendo $v = 0$, otteniamo

   $$F(u_{\Omega_n}) \leq G(\Omega_n, 0) = F(0) < +\infty. \tag{3.3.2}$$

   Per ipotesi F è coercivo su $H_0^{1,p}(B)$. Allora se fosse $\|u_{\Omega_n}\|_{H_0^{1,p}(B)} \to +\infty$ si avrebbe $F(u_{\Omega_n}) \to +\infty$, il che è assurdo per la (3.3.2). Quindi (u_{Ω_n}) è limitata in $H_0^{1,p}(B)$ e dalla riflessività di $H_0^{1,p}(B)$ segue che esiste una sottosuccessione, che indichiamo ancora con gli stessi indici, tale che $u_{\Omega_n} \rightharpoonup u$ in $H_0^{1,p}(B)$.

2. Dimostriamo che $u|_\Omega \in H_0^{1,p}(B)$.

   Segue direttamente dall'ipotesi (iii). Infatti da $\int_B u_{\Omega_n} \cdot 1_{B\setminus\Omega_n}\, dx = 0$, passando al limite, si ha

   $$\int_B u \cdot l \, dx = 0,$$

   con $l > 0$ a.e. su $B \setminus \Omega$; allora $u \cdot l = 0$ a.e. su B e, da (iii), segue che $u|_\Omega \in H_0^{1,p}(\Omega)$.

3. Dimostriamo che $G(\Omega, u) < +\infty$.

   È una diretta conseguenza dalla semicontinuità di F. Infatti

   $$G(\Omega, u) = F(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_{\Omega_n}) \leq F(0) < +\infty.$$

4. Dimostiamo che $u = u_\Omega$, ossia $u \in \operatorname{argmin} G(\Omega, \cdot)$.

   Bisogna dimostrare che
$$G(\Omega, u) \leq G(\Omega, v) \quad \forall v \in H_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.3.3}$$
   Basta provare che
$$F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in H_0^{1,p}(\Omega). \tag{3.3.4}$$
   Osserviamo che essendo $F(u) < +\infty$, ci si può limitare a verificare la (3.3.4) solo per $v \in H_0^{1,p}(\Omega)$ tale che $F(v) < +\infty$. Mettiamoci quindi in questo caso. Per le proprietà della convergenza di Hausdorff H^c esiste $v_n \in H_0^{1,p}(\Omega_n)$ tale che $v_n \to v$ in $H_0^{1,p}(B)$. Allora
$$\begin{aligned} F(u) &\leq \liminf_{n\to+\infty} F(u_{\Omega_n}) = \liminf_{n\to+\infty} G(\Omega_n, u_{\Omega_n}) \leq \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} G(\Omega_n, v_n) = \liminf_{n\to+\infty} F(v_n) = \\ &= \lim_{n\to+\infty} F(v_n) = F(v). \end{aligned}$$
$\square$

Osservazione 3.3.2 Le dimostrazioni sia del caso $p > N$ che $p \leq N$ valgono più in generale per funzioni a valori vettoriali.

3.4 Il caso integrale

Siano p e q due numeri reali tali che $1 < p, q < +\infty$. Sia m un numero intero, $m \geq 2$ e sia $\mathcal{A}$ come nelle sezioni precedenti. Sia $\phi : B \times I\!R^m \times I\!R^N \to \overline{I\!R}$ una funzione boreliana tale che:

(ϕ1) $\phi(x, \cdot, \cdot)$ sia semicontinua inferiormente su $I\!R^m \times I\!R^N$, a.e. $x \in B$;

(ϕ2) $\phi(x, s, \cdot)$ sia convessa su $I\!R^N$, per ogni $s \in I\!R^m$, a.e. $x \in B$;

(ϕ3) $\phi(x, s, z) \geq -\alpha(x) + \beta|z|^q$ con $\alpha(x) \in L^1(B)$ e $\beta \in I\!R, \beta > 0$.

Sia $J : \mathcal{A} \times H_0^{1,q}(B) \to \overline{I\!R}$ il funzionale definito da
$$J(\Omega, u) = \int_B \phi(x, u, Du)dx \tag{3.4.1}$$
che non dipende esplicitamente dal dominio $\Omega \in \mathcal{A}$.

Osservazione 3.4.1 Il funzionale J è ben definito grazie alle ipotesi sulla funzione ϕ. Inoltre, per il teorema di Ioffe [57], da (ϕ1) e (ϕ2), si ha che J è semicontinuo su $H_0^{1,p}(B)$ rispetto alla topologia debole, mentre, grazie a (ϕ3), si ha che J è coercivo su $H_0^{1,p}(B)$ sempre rispetto alla topologia debole.

Sia ora $g : B \times I\!R^m \times I\!R^N \to \overline{I\!R}$ una funzione boreliana tale che:

$(g1)$ $g(x,\cdot,\cdot)$ sia continua su $I\!R^m \times I\!R^N$, a.e. $x \in B$;

$(g2)$ $|g(x,s,z)| \leq a(x) + b\,(|s|^p + |z|^p)$ con $a(x) \in L^1(B), b \in I\!R, b \geq 0$;

$(g3)$ $g(x,s,\cdot)$ sia convessa per ogni $s \in I\!R^m$, a.e. $x \in B$;

$(g4)$ $g(x,s,z) \geq -a_1(x) + k|z|^p$ con $a_1(x) \in L^1(B), k \in I\!R, k > 0$.

Sia $G : \mathcal{A} \times H_0^{1,p}(B) \to \overline{I\!R}$ il funzionale definito da

$$G(\Omega,u) = \int_B g(x,u,Du)dx + \chi_{H_0^{1,p}(\Omega)}(u) = F(u) + \chi_{H_0^{1,p}(\Omega)}(u). \tag{3.4.2}$$

Osservazione 3.4.2 Ricordando che per aperti limitati e regolari la norma

$$|||u||| = ||Du||_{L^p} + ||u||_{L^r}$$

è equivalente alla norma $H^{1,p}$ (vedi Brezis [10]) purchè

$$\begin{array}{ll} 1 < r \leq p^* & \text{se } 1 < p < N \\ 1 < r < +\infty & \text{se } p = N \\ 1 < r \leq +\infty & \text{se } p > N \end{array}$$

dove $p^* = \frac{Np}{N-p}$ è l'esponente di Sobolev, allora $(g2)$ può essere indebolita sostituendo $|s|^p$ con $|s|^r$, dove r varia secondo i casi analizzati sopra.

Osservazione 3.4.3 Grazie alle ipotesi sulla funzione g il funzionale F è ben definito. Grazie a $(g1)$ e $(g2)$ F è continuo rispetto alla topologia forte di $H_0^{1,p}(B)$. Infatti se $u_n \to u$ in $H_0^{1,p}(B)$, allora, posto $f_n = a(x) + b\,(|u_n|^p + |Du_n|^p) \in L^1(B)$, abbiamo che $f_n \to f$ in $L^1(B)$ e da $(g2)$, per il teorema della convergenza dominata generalizzato, segue che $F(u_n) \to F(u)$. Infine, per il teorema di Ioffe [57], grazie a $(g1)$ e $(g3)$, F è semicontinuo su $H_0^{1,p}(B)$ rispetto alla topologia debole, mentre, grazie a $(g4)$, otteniamo la coercività di F su $H_0^{1,p}(B)$ sempre rispetto alla topologia debole. Il funzionale integrale (3.4.2) sopra definito rientra quindi nella classe di funzionali generalizzati G analizzati nella sezione precedente.

Consideriamo ora i funzionali J e G definiti in (3.4.1) e (3.4.2) rispettivamente. Sia

$$U = H_0^{1,q}(B) \cap H_0^{1,p}(B) = H_0^{1,r}(B) \qquad \text{con} \quad r = p \vee q.$$

Allora il problema di ottimizzazione di forma

$$\min\{J(\Omega,u) \ : \ u \in \operatorname{argmin} G(\Omega,\cdot)\} \tag{3.4.3}$$

è ben definito per ogni $(\Omega,u) \in \mathcal{A} \times U$ e, inoltre, valgono per G tutti i risultati della sezione precedente. In particolare si ha:

Lemma 3.4.4 *Siano $\Omega_n, \Omega \in \mathcal{A}$ tali che $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$. Se $r > N$, allora*

$$G(\Omega, \cdot) = \Gamma\text{-}\lim_{n \to +\infty} G(\Omega_n, \cdot)$$

nella topologia debole di $H_0^{1,r}(B)$.

Come diretta conseguenza della Γ-convergenza dei funzionali di stato vale il seguente risultato di esistenza per il problema (3.4.3).

Teorema 3.4.5 *Sia $r > N$. Allora il problema (3.4.3) ammette soluzione.*

Dimostrazione Sia (Ω_n) una successione di aperti in $\mathcal{A}$. Cominciamo con l'osservare che grazie all'ipotesi di crescita $(g4)$ i funzionali di stato $G(\Omega_n, \cdot)$ sono equicoercivi, quindi esiste $\operatorname{argmin} G(\Omega_n, \cdot)$, per ogni $n \in I\!N$. Sia ora (Ω_n, u_{Ω_n}) una successione minimizzante per il problema (3.4.3). Allora $u_{\Omega_n} \in \operatorname{argmin} G(\Omega_n, \cdot)$ e

$$J(\Omega_n, u_{\Omega_n}) = J(u_{\Omega_n}) \to \inf \left\{ J(v),\ v \in H_0^{1,r}(B) \right\}.$$

Per la coercività di J esiste una sottosuccessione di (u_{Ω_n}), indicata ancora con gli stessi indici, tale che $u_{\Omega_n} \rightharpoonup u$ in $H_0^{1,r}(B)$, mentre, per la compattezza della topologia di Hausdorff H^c, a meno di sottosuccessioni, si ha $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$. Dimostriamo che la coppia (Ω, u) è soluzione del problema (3.4.3). Osserviamo innanzitutto che, dalle proprietà della Γ-convergenza, per il lemma 3.4.4, si ha che $u \in \operatorname{argmin} G(\Omega, \cdot)$. D'altra parte, essendo J semicontinuo rispetto alla topologia debole di $H_0^{1,r}(B)$, si ha

$$J(u) \leq \liminf_{n \to +\infty} J(u_{\Omega_n}) = \inf J$$

e quindi (Ω, u) è minimo per il problema (3.4.3). □

Osserviamo che, nel caso $r > N$, l'esistenza della coppia ottima per il problema (3.4.3) si trova nella classe $\mathcal{A}$ senza imporre alcun vincolo sull'insieme dei domini ammissibili. In generale, invece, se $r \leq N$ e se non si aggiungono ipotesi supplementari sulla classe dei domini $\mathcal{A}$, il teorema 3.4.5 non vale più come mostra l'esempio seguente.

Esempio: Diamo ora un esempio di non esistenza nel caso $r \leq N$. Sia $J : \mathcal{A} \times H_0^1(B) \to \overline{I\!R}$ il funzionale definito da

$$J(\Omega, u) = J(u_\Omega) = \int_B |u_\Omega - c|^2 dx + k \int_B |Du|^2 dx, \tag{3.4.4}$$

k e c sono due costanti fissate, con $k > 0$ e $u_\Omega \in \operatorname{argmin} G(\Omega, \cdot)$, dove

$$G(\Omega, u) = \int_B |Du|^2 dx - 2 \int_B u\, dx + \chi_{H_0^1(\Omega)}(u). \tag{3.4.5}$$

I funzionali J e G rientrano nella classe generale di funzionali integrali introdotta sopra. In questo caso $r = p = q = 2 \leq N$ e dalla definizione di G si ha che l'equazione di stato $u \in \operatorname{argmin} G(\Omega, \cdot)$ è equivalente a

$$\begin{cases} -\triangle u = 1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{in } B \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dimostriamo che per valori opportuni della costante c non esiste alcuna soluzione del problema

$$\min \left\{ \int_B |u_\Omega - c|^2 dx + k \int_B |Du_\Omega|^2 dx \ : \ u_\Omega \in H_0^1(\Omega), \ -\triangle u_\Omega = 1 \text{ in } \Omega \right\}. \tag{3.4.6}$$

1. Dimostriamo che non esiste alcun aperto $\Omega \subseteq B$, $\Omega \neq B$ soluzione del problema (3.4.6).

   Supponiamo per assurdo che esista tale Ω. Consideriamo una palla $B_\varepsilon = B_{x,\varepsilon} \subseteq B$ disgiunta da Ω. Dimostriamo che $\Omega \cup B_\varepsilon$ realizza il minimo.

   Cominciamo con l'osservare che dall'equazione di stato, integrando per parti, si ottiene

   $$\int_B |Du_\Omega|^2 dx = \int_B u_\Omega dx,$$

   supponendo u_Ω estesa a zero fuori di Ω. Allora il problema (3.4.6) è equivalente a

   $$\min \left\{ \int_B |u_\Omega - c|^2 dx + k \int_B u_\Omega dx \ : \ u_\Omega \in H_0^1(\Omega), \ -\triangle u_\Omega = 1 \text{ in } \Omega \right\}. \tag{3.4.7}$$

   Valutiamo separatamente $J(u_\Omega)$ e $J(u_{\Omega\cup B_\varepsilon})$. Spezzando l'integrale su B nella somma degli integrali su Ω, su B_ε e su $\Omega \cup B_\varepsilon$ rispettivamente, si ha

   $$J(u_\Omega) = \int_\Omega |u_\Omega - c|^2 dx + k \int_\Omega u_\Omega dx + \int_{B_\varepsilon} c^2 dx + \int_{B\setminus\Omega\setminus B_\varepsilon} c^2 dx,$$

   mentre

   $$J(u_{\Omega\cup B_\varepsilon}) = \int_\Omega |u_\Omega - c|^2 dx + k \int_\Omega u_\Omega dx + \int_{B_\varepsilon} |u_{B_\varepsilon} - c|^2 dx + k \int_{B_\varepsilon} u_{B_\varepsilon} dx + \int_{B\setminus\Omega\setminus B_\varepsilon} c^2 dx.$$

   Confrontando le due espressioni di $J(u_\Omega)$ e $J(u_{\Omega\cup B_\varepsilon})$ si ha che

   $$J(u_{\Omega\cup B_\varepsilon}) < J(u_\Omega)$$

   se e solo se

   $$\int_{B_\varepsilon} |u_{B_\varepsilon} - c|^2 dx + k \int_{B_\varepsilon} u_{B_\varepsilon} dx < \int_{B_\varepsilon} c^2 dx. \tag{3.4.8}$$

   Sviluppando il quadrato nel primo addendo della (3.4.8) si ha

   $$\int_{B_\varepsilon} |u_{B_\varepsilon} - c|^2 dx + k \int_{B_\varepsilon} u_{B_\varepsilon} dx = \int_{B_\varepsilon} u_{B_\varepsilon}(u_{B_\varepsilon} - 2c + k) dx + \int_{B_\varepsilon} c^2 dx \tag{3.4.9}$$

e quindi la disuguaglianza (3.4.8) è soddisfatta se e solo se

$$\int_{B_\varepsilon} u_{B_\varepsilon}(u_{B_\varepsilon} - 2c + k)dx < 0. \tag{3.4.10}$$

Poichè per $\varepsilon \to 0$ si ha $u_{B_\varepsilon} \to 0$, affinchè valga la disuguaglianza (3.4.10) è sufficiente che

$$-2c + k < 0 \tag{3.4.11}$$

ossia che $c > \frac{k}{2}$.

Abbiamo dimostrato che, per ε sufficientemente piccolo, se scegliamo $c > \frac{k}{2}$, allora $J(u_{\Omega\cup B_\varepsilon}) < J(u_\Omega)$, il che è assurdo per la minimalità di Ω.

2. Dimostriamo che $\Omega = B$ non è soluzione.

   Supponendo per assurdo che B sia il minimo del problema (3.4.6), facciamo vedere che $J(u_\emptyset) < J(u_B)$. Infatti, essendo

$$J(u_\emptyset) = \int_B c^2 dx, \quad J(u_B) = \int_B |u_B - c|^2 dx + k\int_B u_B dx,$$

   sviluppando il quadrato nell'espressione di $J(u_B)$ si ha che $J(u_\emptyset) < J(u_B)$ se e solo se

$$\int_B (u_B^2 + ku_B - 2cu_B)dx > 0,$$

   ossia, se e solo se

$$c < \frac{k}{2} + \frac{\int_B u_B^2 dx}{2\int_B u_B dx}.$$

   Anche in questo caso, per $c < \frac{k}{2} + \frac{\int_B u_B^2 dx}{2\int_B u_B dx}$ si ha che $J(u_\emptyset) < J(u_B)$. Assurdo perchè B realizza il minimo.

In conclusione, dai punti 1. e 2., segue che, fissata $k > 0$, per tutti i valori di c tali che

$$\frac{k}{2} < c < \frac{k}{2} + \frac{\int_B u_B^2 dx}{2\int_B u_B dx}$$

il problema (3.4.6) non ha soluzione.

Osservazione 3.4.6 La mancanza di soluzione per il problema (3.4.3) nel caso $r \leq N$ è essenzialmente dovuta al fatto che, in generale, se $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$, $u_{\Omega_n} \in \operatorname{argmin} G(\Omega_n, \cdot)$ con $u_{\Omega_n} \rightharpoonup u$, non è detto che $u \in \operatorname{argmin} G(\Omega, \cdot)$. Nell'esempio concreto di non esistenza scritto sopra, infatti, per quanto visto nel capitolo 2, si ottiene che $u \neq u_\Omega$ essendo u soluzione dell'equazione rilassata

$$-\triangle u + \mu u = 1 \qquad \text{in } B,$$

con μ misura opportuna.

La proprietà della continuità delle soluzioni dell'equazione di stato al variare del dominio è la proprietà chiave per la dimostrazione dell'esistenza della coppia ottima per il problema (3.4.3).

Indichiamo con $\tilde{\mathcal{A}}$ una sottoclasse di $\mathcal{A}$ costituita da aperti $\Omega \subseteq B$ tali che se $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$, allora

1. $1_{B\setminus\Omega_n} \rightharpoonup l$ debolmente * in $L^\infty(B)$, $l > 0$ a.e. in $B \setminus \Omega$;
2. $u \in H_0^{1,p}(B), u \cdot 1_{B\setminus\Omega} = 0 \,\text{a.e.} \Rightarrow u|_\Omega \in H_0^{1,p}(B)$.

Un esempio di famiglia di sottoinsiemi aperti della palla B che soddisfano le condizioni 1. e 2. sopra scritte, è costituito dalla famiglia degli aperti con bordo uniformemente lipschitziano, o, più in generale, dalla famiglia degli aperti che soddisfano la condizione di cono esterno (vedi la sezione 2.3 per il caso lineare).

Nella classe $\tilde{\mathcal{A}}$ il teorema 3.3.1 consente di recuperare l'esistenza anche nel caso $r \leq N$.

Teorema 3.4.7 *Sia $r \leq N$. Allora il problema (3.4.3) ha soluzione in $\tilde{\mathcal{A}} \times H_0^{1,r}(B)$.*

Dimostrazione Sia (Ω_n, u_{Ω_n}) una successione minimizzante per il problema (3.4.3). Allora, a meno di sottosuccessioni, $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$ e $u_{\Omega_n} \rightharpoonup u$ in $H_0^{1,r}(B)$. Per il teorema 3.3.1 abbiamo che $u = u_\Omega$ e quindi, procedendo come nel teorema 3.4.5 si ottiene la tesi. □

Concludiamo questo capitolo osservando che i vincoli sulla classe dei domini sotto cui si recupera l'esistenza corrispondono a vincoli di natura geometrica forte (per esempio, i domini che soddisfano la proprietà di cono li verificano), ma consentono di considerare funzionali di stato di forma generale. Osserviamo inoltre anche che, se si considera su $\mathcal{A}$ invece della convergenza di Hausdorff dei complementari la convergenza "compatta" (cioè Ω_n converge "compattamente" a Ω se per ogni $K_1 \subset\subset \Omega$ compatto, per ogni $K_2 \subset\subset \text{ext}(\Omega)$ compatto, esiste $\overline{n} \in I\!N$ tale che, per ogni $n \geq \overline{n}$, $K_1 \subset\subset \Omega_n$ e $K_2 \subset\subset \text{ext}(\Omega_n)$) e se si impone una condizione di stabilità sull'aperto limite Ω, le ipotesi soddisfatte dal funzionale di stato G consentono ancora di recuperare, nel caso $p \leq N$, la convergenza delle soluzioni. Vale, infatti, un risultato del tutto equivalente a quello del teorema 2.3.14 (omettiamo la dimostrazione essendo del tutto simile a quella del caso lineare).

Se l'equazione di stato è invece di forma particolare (vedi il capitolo 4) l'esistenza si può ottenere in classi di domini con vincoli molto più deboli: in questo caso è la forma dell'equazione di stato che aiuta nella scelta della classe di domini ammissibili per il problema di ottimizzazione di forma.

Capitolo 4

Il caso non lineare per operatori monotoni in forma di divergenza

4.1 Introduzione

Presentiamo in questo capitolo un risultato di continuità per operatori monotoni non lineari in forma di divergenza ottenuto in collaborazione con Dorin Bucur (vedi Bucur e Trebeschi [20], [21]). Lo scopo di questo capitolo è studiare la dipendenza delle soluzioni di un problema non lineare di Dirichlet in funzione della variazione del dominio e provare la sua continuità sotto "vincoli deboli" sulla classe dei domini; si studia quindi la continuità dell'applicazione

$$\Omega \mapsto u_{\Omega,f,h} \tag{4.1.1}$$

dove Ω è un sottoinsieme aperto di una palla fissa B in $I\!R^N$, $N \geq 2, f \in H^{-1,q}(B), h \in H_0^{1,p}(B)$ sono fissate con $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $u_{\Omega,f,h}$ è la soluzione del problema di Dirichlet per il p-Laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f & \text{in } \Omega \\ u - h \in H_0^{1,p}(\Omega). \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Il risultato di continuità stabilito per il p-Laplaciano sarà esteso ad una classe più ampia di operatori in forma di divergenza, usando argomenti associati alla nozione di convergenza di Mosco (vedi la sezione 1.6).

Utilizzeremo in questo capitolo la nozione di γ-convergenza, che verrà definita, come nel caso lineare, solo in termini della convergenza delle soluzioni del problema di Dirichlet con condizioni al bordo omogenee per il p-Laplaciano. Si dice che *una successione* (Ω_n) *di sottoinsiemi aperti di una palla fissa B γ_p-converge a* Ω se, per ogni $f \in H^{-1,q}(B)$, le soluzioni del problema di Dirichlet

$$-\Delta_p u_n = f \quad \text{in} \quad \Omega_n, \quad u_n \in H_0^{1,p}(\Omega_n)$$

convergono fortemente in $H_0^{1,p}(B)$, per $n \to +\infty$, alla soluzione del problema corrispondente in Ω (vedi Dal Maso [43], Dal Maso e De Franceschi [48]). Consideriamo la soluzione $u_{\Omega_n,f,0}$

come un elemento di $H_0^{1,p}(B)$ estendendola a zero fuori di Ω_n. Seguendo Dal Maso e Murat [51] è sufficiente dimostrare la continuità solo per $f = 1$; usando poi argomenti legati alla convergenza di Mosco si può estendere il risultato di continuità all'equazione con condizioni al bordo non omogenee.

In generale, la classe degli insieme aperti non è compatta nella γ_p-convergenza e il problema "limite" è di tipo "rilassato", cioè contiene un termine che dipende da una misura di Borel (vedi Buttazzo e Dal Maso [34], Dal Maso e Murat [51]). Per ottenere il risultato di compattezza introdurremo alcuni vincoli sulla classe dei domini ammissibili che sono espressi in termini della capacità (vedi il capitolo 1 sezione 1.6).

Nel caso lineare ci sono due tipi di approcci. Il primo (vedi Henrot [56], Rauch e Taylor [62]) considera le perturbazioni dei domini nella cosiddetta "convergenza compatta" (vedi teorema 2.3.14) e il risultato di continuità si ottiene sotto ipotesi aggiuntive di "stabilità" dell'aperto limite. Casi di natura geometrica in cui la stabilità è verificata si hanno sotto la condizione di cono uniforme (vedi Chenais [38], Pironneau [61]). Questo approccio non dà però risultati utili di compattezza per i problemi di ottimizzazione di forma. Il secondo (vedi Bucur e Zolésio [23], [22], Sverak [65]) utilizza la topologia di Hausdorff dei complementari sulla famiglia degli insiemi aperti e i vincoli sui domini sono dati in funzione della capacità. La classe degli insiemi aperti, in cui si ottiene la continuità, risulta compatta per la γ_2-convergenza (vedi teorema 2.4.5).

Il caso non lineare risulta molto più complicato, perchè non è possibile applicare le tecniche standard usate nel caso lineare per il passaggio al limite nell'equazione. Inoltre, il confronto del termine limite con una funzione fissa (vedi l'osservazione 2.4.7), utile nel caso lineare grazie all'utilizzo di un lemma di continuità al bordo per le funzioni armoniche (vedi Bucur e Zolésio [22]), nel caso non lineare non è più applicabile. Le dimostrazioni dell'esistenza e dell'unicità della soluzione si ottengono dalla teoria delle funzioni armoniche generalizzate e degli operatori monotoni.

Utilizzando vincoli di tipo capacitario analoghi a quelli introdotti da Bucur e Zolésio in [23] e [22] per il caso lineare , dimostriamo in questo capitolo un risultato di γ_p-compattezza per il p-Laplaciano. Per ottenere questo risultato studiamo prima alcuni risultati di stabilità per l'equazione omogenea con dato al bordo non omogeneo $h \in H_0^{1,p}(B)$

$$\begin{cases} -\Delta_p u = 0 & \text{in } \Omega_n \\ u - h \in H_0^{1,p}(\Omega_n). \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Più precisamente, la classe dei domini ammissibili è la seguente (per la definizione di capacità rimandiamo alla sezione 1.5):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_w(B) \;=\; & \Big\{ \Omega \subseteq B : \forall\, x \in \partial\Omega, \forall\, 0 < r < R < 1 \\ & \int_r^R \Big(\frac{p\text{-}cap\,(\Omega^c \cap \overline{B}_{x,t}; B_{x,2t})}{p\text{-}cap\,(\overline{B}_{x,t}; B_{x,2t})} \Big)^{\frac{1}{p-1}} \frac{dt}{t} \geq w(r,R,x) \Big\}, \end{aligned}$$

dove $B_{x,t}$ è la palla con centro in x e raggio t, e

$$w : (0,1) \times (0,1) \times B \to I\!R^+$$

è tale che:

1. $\lim_{r\to 0} w(r,R,x) = +\infty$, localmente uniformemente in x, cioè per ogni $R \in (0,1)$ e per ogni $x \in B$ esiste un intorno U di x tale che, per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $|r| < \delta$ si ha $w(r,R,y) > M$ per ogni $y \in U$;

2. w sia semicontinua nella terza variabile.

Dimostreremo il seguente risultato.

Teorema 4.1.1 *Sia $\Omega_n \in \mathcal{W}_w(B)$ e supponiamo che $\Omega_n \to \Omega$ nella topologia di Hausdorff dei complementari. Allora $\Omega \in \mathcal{W}_w(B)$ e $\Omega_n \xrightarrow{\gamma_p} \Omega$.*

Come conseguenza, otteniamo un risultato di γ_p-compattezza in dimensione N e per $p \in]N-1,N]$ analogo al risultato di Sverak [65]. In questo caso la continuità e la compattezza sono ottenute imponendo condizioni sul numero di componenti connesse del complementare dei domini ammissibili. Poniamo

$$\mathcal{O}_l(B) = \{\Omega \subseteq B \ \mid \ \sharp\Omega^c \le l\}$$

dove $\sharp$ denota il numero di componenti connesse.

Teorema 4.1.2 *Sia $N \ge p > N-1$. Consideriamo $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{O}_l(B)$ e supponiamo che $\Omega_n \to \Omega$ nella topologia di Hausdorff dei complementari. Allora $\Omega \in \mathcal{O}_l(B)$ e $\Omega_n \xrightarrow{\gamma_p} \Omega$.*

Verrà seguito il seguente schema generale: supponiamo che (Ω_n) converga nella topologia di Hausdorff dei complementari a Ω, con Ω_n, Ω sottoinsiemi aperti di $B \subseteq \mathbb{R}^N$ e $N \ge 2$. Se

- $p > N$, allora (Ω_n) γ_p -converge a Ω (segue dai teoremi di immersione di Sobolev);

- $N \ge p > N-1$, allora (Ω_n) γ_p-converge a Ω nella famiglia $\mathcal{O}_l(B)$;

- $N \ge p > 1$, allora (Ω_n) γ_p-converge a Ω nella famiglia $\mathcal{W}_w(B)$.

Osserviamo che questi risultati di continuità per il p-Laplaciano possono essere estesi ad una classe di operatori monotoni più generale, utilizzando classici argomenti legati alla nozione di convergenza di Mosco degli spazi di Sobolev associati (vedi le sezioni 4.2 e 4.7). In Dal Maso [43] e Dal Maso e De Franceschi [48], sono dimostrate condizioni necessarie e sufficienti per la γ_p-convergenza, che sono espresse in funzione della capacità. Sfortunatamente questi risultati non possono essere usati nello studio del problema della continuità e compattezza che affronteremo in questo capitolo.

4.2 Notazioni e risultati preliminari

Utilizziamo in questo capitolo le notazioni e i risultati relativi alla capacità armonica introdotti nel capitolo 1 nella sezione 1.5.

In questo capitolo dimostriamo un risultato di continuità nella topologia di Hausdorff dei complementari (vedi il capitolo 2 sezione 2.3) prima per il p-Laplaciano (γ_p-convergenza) e poi, in un secondo momento, proveremo che la γ_p-convergenza implica la continuità debole delle soluzioni di un problema di Dirichlet associato ad un operatore monotono (vedi la sezione 4.7). Per questa ragione introduciamo in questa sezione questa classe più larga di operatori e proviamo per essa alcuni risultati preliminari necessari per la continuità, che sono, ovviamente, veri anche per il p-Laplaciano. Supponiamo che $a : I\!R^N \times I\!R^N \to I\!R^N$, $N \geq 2$, soddisfi le seguenti ipotesi:

$$\text{per ogni } \zeta \in I\!R^N \text{ la funzione } a(\cdot,\zeta) \text{ sia misurabile;} \tag{4.2.1}$$

$$\text{per a.e. } x \in I\!R^N \text{ la funzione } a(x,\cdot) \text{ sia continua;} \tag{4.2.2}$$

$$a(x,t\zeta) = |t|^{p-2} t a(x,\zeta), \quad t \in I\!R, t \neq 0. \tag{4.2.3}$$

Riguardo alle ipotesi di monotonia su $a(x,\zeta)$ supponiamo (vedi per esempio Dal Maso e Murat [51]) che esistano due costanti c_0, c_1 con $0 < c_0 \leq c_1 < \infty$ tali che per a.e. $x \in I\!R^N$ e per ogni $\zeta_1, \zeta_2 \in I\!R^N$ si abbia: nel caso $2 \leq p < +\infty$

$$(a(x,\zeta_1) - a(x,\zeta_2), \zeta_1 - \zeta_2) \geq c_0 |\zeta_1 - \zeta_2|^p, \tag{4.2.4}$$

$$|a(x,\zeta_1) - a(x,\zeta_2)| \leq c_1 (|\zeta_1| + |\zeta_2|)^{p-2} |\zeta_1 - \zeta_2|, \tag{4.2.5}$$

nel caso $1 < p \leq 2$

$$(a(x,\zeta_1) - a(x,\zeta_2), \zeta_1 - \zeta_2) \geq c_0 (|\zeta_1| + |\zeta_2|)^{p-2} |\zeta_1 - \zeta_2|^2, \tag{4.2.6}$$

$$|a(x,\zeta_1) - a(x,\zeta_2)| \leq c_1 |\zeta_1 - \zeta_2|^{p-1}. \tag{4.2.7}$$

In particolare (4.2.3)—(4.2.7) implicano che per a.e. $x \in I\!R^N$ e per ogni $\zeta \in I\!R^N$

$$(a(x,\zeta), \zeta) \geq c_0 |\zeta|^p, \tag{4.2.8}$$

$$|a(x,\zeta)| \leq c_1 |\zeta|^{p-1}. \tag{4.2.9}$$

Fissiamo una palla B in $I\!R^N$. Siano p, q due numeri reali, $1 < p, q < +\infty$ tali che $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Sia $H^{-1,q}(B)$ il duale di $H_0^{1,p}(B)$ e sia $\mathcal{D}'(B)$ lo spazio delle distribuzioni su B. Dalle ipotesi fatte su $a(x,\zeta)$ l'operatore $Au = -div\Big(a(x,Du)\Big)$ è continuo e fortemente monotono da $H_0^{1,p}(B)$ nel suo duale $H^{-1,q}(B)$ mediante la dualità

$$< Au, v >= \int_B a(x,Du) Dv \, dx \qquad \forall\, u, v \in H_0^{1,p}(B). \tag{4.2.10}$$

Se $a(x,\zeta) = |\zeta|^{p-2}\zeta$, allora A è il p-Laplaciano $-\Delta_p u = -div(|Du|^{p-2}Du)$. In questo caso (4.2.4)—(4.2.7) sono soddisfatte con $c_0 = 2^{2-p}$ e $c_1 = p-1$ per $p \geq 2$, e $c_0 = 1$, $c_1 = 2^{2-p}$ per $p \leq 2$.

Lo schema della dimostrazione del risultato di continuità ottenuto in questo capitolo è il seguente. Siamo interessati all'equazione (4.1.2) e consideriamo una successione di insiemi aperti $(\Omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente nella topologia di Hausdorff dei complementari H^c a qualche insieme aperto Ω.

- La successione delle soluzioni dell'equazione (4.1.2) su Ω_n (con un operatore monotono generale) è limitata in $H_0^{1,p}(B)$ e ogni limite debole di una sottosuccessione soddisfa l'equazione (4.1.2) su Ω.
- Per il p-Laplaciano è sufficiente studiare la continuità per l'equazione (4.1.3).
- Usando condizioni di tipo capacitario, dimostriamo che il termine limite soddisfa la condizione al bordo su Ω e quindi è la soluzione su Ω.
- Il passaggio dal p-Laplaciano al caso generale di un operatore in forma di divergenza è ottenuto usando la convergenza di Mosco.

4.3 Alcune stime per la soluzione e passaggio al limite nell'equazione

Le stime e il passaggio al limite sono fatte in questa sezione direttamente per un operatore generale. Consideriamo una funzione $a(x,\zeta)$ che soddisfa (4.2.1)—(4.2.9). Fissiamo una palla B in $\mathbb{R}^N$ e sia A l'operatore definito in (4.2.10). Fissiamo inoltre $f \in H^{-1,q}(B)$ e $h \in H_0^{1,p}(B)$. Allora per ogni sottoinsieme aperto Ω di B consideriamo il seguente problema di Dirichlet: trovare u tale che

$$\begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ u \in H^{1,p}(\Omega), \ u - h \in H_0^{1,p}(\Omega), \end{cases} \tag{4.3.1}$$

cioè, in senso debole,

$$\int_\Omega a(x,Du)D\varphi\, dx =< f,\varphi > \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

dove $<,>$ è la dualità fra $H^{-1,q}(\Omega)$ e $H_0^{1,p}(\Omega)$. Seguendo Dal Maso e Murat [51] si ottengono, per il problema (4.3.1), risultati di esistenza e unicità e alcune stime per la soluzione in funzione dei dati f e h. Da queste stime seguono un risultato di limitatezza, uniforme rispetto a Ω, per la soluzione del problema (4.3.1) e un risultato sulla dipendenza continua della soluzione del problema (4.3.1) dai dati f e h.

Indichiamo con $u_{\Omega,f,h}$ la soluzione del problema (4.3.1). Allora $u_{\Omega,f,h} \in H^{1,p}(\Omega)$ e dal momento che $u_{\Omega,f,h} - h \in H_0^{1,p}(\Omega)$ possiamo estendere la funzione $u_{\Omega,f,h}$ con h fuori di Ω a un elemento che appartiene a $H_0^{1,p}(B)$. Indichiamo questa estensione con $\tilde{u}_{\Omega,f,h}$. Con questa definizione abbiamo

$$\|\tilde{u}_{\Omega,f,h}\|^p_{H_0^{1,p}(B)} = \int_\Omega |Du_{\Omega,f,h}|^p dx + \int_{B\setminus\Omega} |Dh|^p dx.$$

Dal Maso e Murat in [51] considerano il problema di Dirichlet rilassato con la presenza di una misura μ (vedi per il caso lineare la sezione 2.1). In questo capitolo consideriamo il problema di Dirichlet sui domini (e quindi con una particolare misura, vedi l'osservazione 2.1.3), perciò le stime sulle soluzioni ottenute da Dal Maso e Murat [51] si possono utilizzare anche per il nostro problema (4.3.1).

Proposizione 4.3.1 *Per ogni $f \in H^{-1,q}(B)$ e per ogni $h \in H_0^{1,p}(B)$ il problema (4.3.1) ha un'unica soluzione $u_{\Omega,f,h}$ che soddisfa la stima*

$$\int_\Omega |Du_{\Omega,f,h}|^p dx \leq C(\|f\|^q_{H^{-1,q}(B)} + \int_B |Dh|^p dx), \tag{4.3.2}$$

dove C è una costante che dipende solo da p, c_0, c_1.

Dimostrazione Per la dimostrazione rimandiamo a Dal Maso e Murat [51], theorem 2.1. □

Usando la proprietà sopra scritta si può dimostrare un risultato di limitatezza, uniforme rispetto a Ω, per la funzione $\tilde{u}_{\Omega,f,h}$. Infatti:

Corollario 4.3.2 *Per ogni $\Omega \subseteq B$ sia $u_{\Omega,f,h}$ la soluzione del problema (4.3.1). Allora*

$$\|\tilde{u}_{\Omega,f,h}\|_{H_0^{1,p}(B)} \leq C$$

dove C dipende da f, h, c_0, c_1, p.

Dimostrazione Sia $u = u_{\Omega,f,h}$. Dalla proposizione 4.3.1 abbiamo

$$\int_\Omega |Du|^p dx \leq C(\|f\|^q_{H^{-1,q}(B)} + \int_B |Dh|^p dx).$$

Sommando $\int_{B\setminus\Omega} |Dh|^p dx$ ad ambo i membri abbiamo

$$\|\tilde{u}_{\Omega,f,h}\|^p_{H_0^{1,p}(B)} \leq \tilde{C}(\|f\|^q_{H^{-1,q}(B)} + \int_B |Dh|^p dx),$$

che implica la tesi. □

Il seguente lemma sarà usato per provare la dipendenza continua della soluzione del problema (4.3.1) da f e h. Il lemma è vero per ogni coppia di funzioni u_1 e $u_2 \in H^{1,p}(\Omega)$. Useremo poi questo risultato nel caso di due soluzioni del problema (4.3.1) sullo stesso Ω relative a due coppie differenti di dati (f, h).

Lemma 4.3.3 *Siano $u_1, u_2 \in H^{1,p}(\Omega)$. Se $2 \leq p < +\infty$, allora*

$$c_0 \int_\Omega |Du_1 - Du_2|^p dx \leq \int_\Omega (a(x, Du_1) - a(x, Du_2), Du_1 - Du_2) dx. \tag{4.3.3}$$

Se $1 < p \leq 2$, allora

$$c_0 (\int_\Omega |Du_1 - Du_2|^p dx)^{\frac{2}{p}} \leq K(u_1, u_2) \int_\Omega (a(x, Du_1) - a(x, Du_2), Du_1 - Du_2) dx \tag{4.3.4}$$

dove $K(u_1, u_2)$ *è data da*

$$K(u_1, u_2) = 2(\int_\Omega |Du_1|^p dx + \int_\Omega |Du_2|^p dx)^{\frac{2-p}{p}}.$$

Dimostrazione Per la dimostrazione rimandiamo a Dal Maso e Murat [51], lemma 2.2. □

Fissiamo ora $f_1, f_2 \in H^{-1,q}(B)$ e $h_1, h_2 \in H_0^{1,p}(B)$; siano poi $u_1 = u_{\Omega,f_1,h_1}$ e $u_2 = u_{\Omega,f_2,h_2}$ le soluzioni del problema (4.3.1) sullo stesso Ω relative ai dati (f_1, h_1)e (f_2, h_2) rispettivamente.

Lemma 4.3.4 *Se* $2 \leq p < +\infty$, *allora*

$$c_0 \int_\Omega |Du_1 - Du_2|^p dx \leq K(\|Dh_1 - Dh_2\|_{L^p(B)} + \|f_1 - f_2\|_{H^{-1,q}(B)}). \tag{4.3.5}$$

Se $1 < p \leq 2$, *allora*

$$c_o(\int_\Omega |Du_1 - Du_2|^p dx)^{\frac{2}{p}} \leq KK(u_1, u_2)(\|Dh_1 - Dh_2\|_{L^p(B)} + \|f_1 - f_2\|_{H^{-1,q}(B)}), \tag{4.3.6}$$

dove K *è una costante che dipende da* $\|f_1\|_{H^{-1,q}(B)}$, $\|f_2\|_{H^{-1,q}(B)}$, $\|h_1\|_{H_0^{1,p}(B)}$, $\|h_2\|_{H_0^{1,p}(B)}$, c_0, c_1, p *e* $K(u_1, u_2)$ *è il termine del lemma 4.3.3.*

Dimostrazione Scrivendo l'equazione (4.3.1) per u_1 e u_2 e per le funzioni test $\varphi = u_1 - h_1$ e $\varphi = u_2 - h_2$, con una semplice sottrazione si ottiene

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (a(x, Du_1) - a(x, Du_2), Du_1 - Du_2) dx = \\ &= \int_\Omega (a(x, Du_1) - a(x, Du_2), Dh_1 - Dh_2) dx + \\ &+ < f_1 - f_2, u_1 - h_1 > - < f_1 - f_2, u_2 - h_2 >= I + II + III. \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Consideriamo separatamente i tre termini I, II e III. Cominciamo con I. Usando la (4.2.9) e la disuguaglianza di Holder abbiamo

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (a(x, Du_1) - a(x, Du_2), Dh_1 - Dh_2) dx \leq \\ &\leq \int_\Omega |a(x, Du_1)||Dh_1 - Dh_2| dx + \int_\Omega |a(x, Du_2)||Dh_1 - Dh_2| dx \leq \\ &\leq c_1(\int_\Omega |Du_1|^{p-1} |Dh_1 - Dh_2| dx + \int_\Omega |Du_2|^{p-1} |Dh_1 - Dh_2| dx) \leq \\ &\leq c_1 \sum_{i=1}^2 (\int_\Omega |Du_i|^p dx)^{\frac{1}{q}} (\int_\Omega |Dh_1 - Dh_2|^p dx)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Ora, dal teorema 4.3.1, per $i = 1, 2$, abbiamo

$$(\int_\Omega |Du_i|^p dx)^{\frac{1}{q}} \leq c(\|f_i\|^q_{H^{-1,q}(B)} + \int_B |Dh_i|^p dx)^{\frac{1}{q}}.$$

Esiste perciò una costante α_0 tale che

$$I \leq \alpha_0 \|Dh_1 - Dh_2\|_{L^p(\Omega)} \leq \alpha_0 \|Dh_1 - Dh_2\|_{L^p(B)}, \tag{4.3.8}$$

dove α_0 dipende da $f_1, f_2, h_1, h_2, c_0, c_1, p$.

Consideriamo ora II. Dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz abbiamo

$$II \leq \|f_1 - f_2\|_{H^{-1,q}(B)} \|u_1 - h_1\|_{H_0^{1,p}(B)} \leq \|f_1 - f_2\|_{H^{-1,q}(B)} (\|\tilde{u}_1\|_{H_0^{1,p}(B)} + \|h_1\|_{H_0^{1,p}(B)}),$$

e dal corollario 4.3.2 otteniamo

$$II \leq \alpha_1 \|f_1 - f_2\|_{H^{-1,q}(B)}, \tag{4.3.9}$$

dove α_1 dipende da f_1, h_1, c_0, c_1, p.

Consideriamo ora III. Usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, come nel caso precedente, otteniamo

$$III \leq \alpha_2 \|f_1 - f_2\|_{H^{-1,q}(B)} \tag{4.3.10}$$

dove α_2 dipende da f_2, h_2, c_0, c_1, p. Ora, da (4.3.7)—(4.3.10), abbiamo

$$\int_\Omega (a(x, Du_1) - a(x, Du_2), Du_1 - Du_2) dx \leq \tag{4.3.11}$$

$$\leq K(\|Dh_1 - Dh_2\|_{L^p(B)} + \|f_1 - f_2\|_{H^{-1,q}(B)}),$$

dove $K = \max(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$. Se $p \geq 2$, da (4.3.3) e (4.3.11) otteniamo

$$c_0 \int_\Omega |Du_1 - Du_2|^p dx \leq K(\|Dh_1 - Dh_2\|_{L^p(B)} + \|f_1 - f_2\|_{H^{-1,q}(B)}),$$

mentre, se $1 < p \leq 2$, da (4.3.4) e (4.3.11) otteniamo

$$c_0 (\int_\Omega |Du_1 - Du_2|^p dx)^{\frac{2}{p}} \leq K(u_1, u_2) K(\|Dh_1 - Dh_2\|_{L^p(B)} + \|f_1 - f_2\|_{H^{-1,q}(B)}).$$

Questo conclude la dimostrazione. □

Osservazione 4.3.5 Osserviamo che se $h_n \to h$ in $H_0^{1,p}(B)$ e $f_n \to f$ in $H^{-1,q}(B)$, allora $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ possono essere scelte indipendentemente da n e limitate. Così la costante K nel lemma 4.3.4 è uniformemente limitata e, usando il teorema 4.3.1, lo stesso vale per $K(u_n, u)$.

Dal lemma 4.3.4 e dall'osservazione 4.3.5 possiamo provare la dipendenza continua da f e h della soluzione $u_{\Omega,f,h}$ che è uniforme rispetto Ω.

Teorema 4.3.6 *Se $h_n \to h$ fortemente in $H_0^{1,p}(B)$ e $f_n \to f$ fortemente in $H^{-1,q}(B)$, allora*

$$\tilde{u}_{\Omega,f_n,h_n} \to \tilde{u}_{\Omega,f,h}$$

uniformemente rispetto a Ω.

Dimostrazione Poniamo $\tilde{u}_n = \tilde{u}_{\Omega,f_n,h_n}$ e $\tilde{u} = \tilde{u}_{\Omega,f,h}$. Ricordiamo che

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_n\|^p_{H_0^{1,p}(B)} = \|Du - Du_n\|^p_{L^p(\Omega)} + \|Dh - Dh_n\|^p_{L^p(B\setminus\Omega)}.$$

Se $p \geq 2$ da (4.3.5) abbiamo

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_n\|^p_{H_0^{1,p}(B)} \leq \tilde{K}(\|Dh - Dh_n\|_{L^p(B)} + \|Dh - Dh_n\|^p_{L^p(B\setminus\Omega)} + \|f - f_n\|_{H^{-1,q}(B)})$$

e dal momento che $h_n \to h$ fortemente $H_0^{1,p}(B)$ e $f_n \to f$ fortemente $H^{-1,q}(B)$ abbiamo

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_n\|^p_{H_0^{1,p}(B)} \leq \varepsilon.$$

Se $1 < p \leq 2$ da (4.3.6) otteniamo

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_n\|^2_{H_0^{1,p}(B)} \leq M(\|Dh - Dh_n\|_{L^p(B)} + \|Dh - Dh_n\|^2_{L^p(B\setminus\Omega)} + \|f - f_n\|_{H^{-1,q}(B)}),$$

dove M è una costante che non dipende da n (vedi l'osservazione 4.3.5) e come nel caso precedente otteniamo

$$\|\tilde{u} - \tilde{u}_n\|^2_{H_0^{1,p}(B)} \leq \varepsilon.$$

$\square$

Queste stime per le soluzioni permettono di considerare il caso dei domini che variano. È noto che, se (Ω_n) converge a Ω nella topologia di Hausdorff dei complementari, si ottiene la continuità provando che ogni sottosuccessione convergente debolmente converge alla soluzione dell'equazione su Ω (vedi, per il caso lineare, la proposizione 2.3.4).

Una funzione è la soluzione su Ω se essa soddisfa l'equazione nel senso delle distribuzioni e soddisfa la condizione al bordo. Consideriamo una successione di domini che converga nella topologia di Hausdorff dei complementari e cominciamo con il provare il passaggio al limite nell' equazione.

Proposizione 4.3.7 *Siano $\Omega_n, \Omega \subseteq B$ e $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$. Allora $\|\tilde{u}_{\Omega_n,f,h}\|_{H_0^{1,p}(B)}$ è uniformemente limitata e se $\tilde{u}_{\Omega_n,f,h} \rightharpoonup u$, allora*

$$\int_\Omega a(x, Du) D\varphi \, dx =< f, \varphi > \ \ \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Dimostrazione Posto $u_n = u_{\Omega_n,f,h}$ per ottenere l'uguaglianza sopra scritta è sufficiente provare che

$$a(x, Du_n) \overset{L^q(\Omega)}{\rightharpoonup} a(x, Du).$$

Consideriamo una funzione test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$; allora $supp\varphi = K \subset\subset \Omega$ e, dal momento che $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$, abbiamo che $K \subset\subset \Omega_n$, per n sufficientemente grande. Allora $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_n)$ e dal momento che u_n è una soluzione in Ω_n, possiamo scrivere

$$\int_{\Omega_n} a(x, Du_n) D\varphi \, dx =< f, \varphi > .$$

Consideriamo un intorno $K^\varepsilon = \{x \in I\!R^N : d(x,K) < \varepsilon\}$ di K tale che $K^\varepsilon \subset\subset \Omega$; se n è sufficientemente grande, otteniamo ancora $K^\varepsilon \subset\subset \Omega_n$. Proviamo ora che

$$a(x, Du_n) \overset{L^q(K^{\varepsilon/2})}{\rightharpoonup} a(x, Du).$$

Fissiamo $g \in C_0^\infty(\Omega)$ tale che $g = 1$ su $K^{\varepsilon/2}$, $g = 0$ su $\mathrm{ext}(K^\varepsilon)$ e $0 \leq g \leq 1$ su K^ε; consideriamo la funzione test

$$\phi_n := g(u_n - u) \in H_0^{1,p}(K^\varepsilon).$$

Se scriviamo l'equazione per u_n in Ω_n con la funzione test ϕ_n abbiamo

$$\int_{K^\varepsilon} a(x, Du_n) D(g(u_n - u)) dx =< f, g(u_n - u) > .$$

Calcolando le derivate della funzione test nel membro destro otteniamo

$$\int_{K^\varepsilon} a(x, Du_n) g D(u_n - u) dx =< f, g(u_n - u) > - \int_{K^\varepsilon} a(x, Du_n)(u_n - u) Dg\, dx \leq$$

$$\leq < f, g(u_n - u) > + (\int_B |a(x, D\tilde{u}_n)|^q dx)^{\frac{1}{q}} (\int_B |Dg(\tilde{u}_n - u)|^p dx)^{\frac{1}{p}}.$$

Osserviamo ora che il primo termine del membro destro va a zero per $n \to \infty$, almeno per una sottosuccessione, dal momento che $gu_n \rightharpoonup gu$ in $H^{1,p}(K^\varepsilon)$. Il secondo termine è il prodotto di una successione uniformemente limitata (grazie alle ipotesi su $a(x,\zeta)$) e di un termine che si annulla dal momento che $\tilde{u}_n \to u$ in $L^p(B)$ (per l'uniforme limitatezza in $H_0^{1,p}(B)$ della soluzione $\tilde{u}_n$). Allora

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{K^\varepsilon} a(x, Du_n) g D(u_n - u) dx \leq 0.$$

D'altra parte

$$\int_{K^\varepsilon} a(x, Du) g D(u_n - u) dx \longrightarrow 0 \quad \text{per} \quad n \to \infty,$$

dal momento che $Du_n \overset{L^q(K^\varepsilon)}{\rightharpoonup} Du$ e quindi, per sottrazione, abbiamo

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{K^\varepsilon} g[a(x, Du_n) - a(x, Du)] D(u_n - u) dx \leq 0.$$

Dalle ipotesi di monotonia su $a(x,\zeta)$ e dalla positività di g otteniamo

$$g[a(x, Du_n) - a(x, Du)] D(u_n - u) \geq 0 \quad \forall x \in K^\varepsilon,$$

da cui

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K^\varepsilon} g[a(x, Du_n) - a(x, Du)] D(u_n - u) dx = 0.$$

Dalla positività dell'integrando e dall'uguaglianza $g = 1$ su $K^{\varepsilon/2}$ abbiamo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{K^{\varepsilon/2}} [a(x, Du_n) - a(x, Du)] D(u_n - u) dx = 0.$$

Ora, sfruttando il risultato di Heinonen, Kilpelainen e Martio (vedi [55], lemma 3.73), otteniamo che $a(x, Du_n) \overset{L^q(K^{\varepsilon/2})}{\rightharpoonup} a(x, Du)$, cosicchè, possiamo scrivere

$$\int_{K^{\varepsilon/2}} a(x, Du_n) D\varphi \, dx = < f, \varphi >$$

dove φ è la funzione test definita sopra. Se calcoliamo il limite per $n \to \infty$ abbiamo

$$\int_{K^{\varepsilon/2}} a(x, Du) D\varphi \, dx = < f, \varphi > .$$

Dal momento che $supp\varphi = K \subset\subset K^{\varepsilon/2}$ vale l'uguaglianza precedente in Ω e, poichè φ era scelto arbitrariamente , u soddisfa l'equazione su Ω nel senso delle distribuzioni. $\square$

4.4 Comportamento al bordo per il termine limite del p-Laplaciano

In questa sezione consideriamo il caso del p-Laplaciano, cioè $a(x, \xi) = |\xi|^{p-2}\xi$, $1 < p < +\infty$, e con $\tilde{u}_{\Omega,f,h}$ indichiamo la soluzione dell'equazione (4.1.2). Vogliamo provare il risultato della γ_p-convergenza . Per ottenere la continuità dell'applicazione $\Omega \mapsto u_{\Omega,f,0}$, per la proposizione 4.3.7, dobbiamo solo provare che $u|_\Omega \in H_0^{1,p}(\Omega)$ e quindi u sarà l'unica soluzione dell'equazione su Ω. In generale questa affermazione è falsa e rimandiamo a Dal Maso e Murat [51] per i controesempi. Osserviamo che l'ipotesi di H^c-convergenza nella famiglia degli aperti non è sufficiente a provare la continuità dell'applicazione $\Omega \mapsto u_{\Omega,f,0}$.

Per ottenere il risultato di continuità bisogna imporre ulteriori condizioni sulla classe dei domini. Per esempio, come abbiamo visto nella sezione 2.3 per il caso lineare (vedi Henrot [56]), se (Ω_n) *converge compattamente* a Ω (cioè per ogni compatto $K_1 \subset\subset \Omega$, $K_2 \subset\subset ext(\Omega)$ esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n \geq \overline{n}$ abbiamo $K_1 \subset\subset \Omega_n$ e $K_2 \subset\subset ext(\Omega_n)$) e Ω è *p-stabile* (cioè se $u \in H^{1,p}(I\!R^N)$ tale che $u = 0$ a.e. su $int(\Omega^c)$, abbiamo $u|_\Omega \in H_0^{1,p}(\Omega)$) allora segue la continuità (la dimostrazione è esattamente la stessa del caso lineare; per la dimostrazione del caso lineare rimandiamo a Henrot [56]).

Notiamo che, in generale, un insieme aperto arbitrario Ω non è p -stabile e l'approccio delle funzioni di Sobolev con la misura di Lebesgue non è sufficientemente preciso. Pensiamo, per esempio, ad una funzione di $H^{1,p}$ su un dominio che ha una frattura: anche se essa ha misura di Lebesgue nulla, la funzione ha una traccia sulla frattura, che rende quest' ultima non trascurabile.

Consideriamo, per questa ragione, il caso più generale di domini che non sono p-stabili. Questa classe è stata definita nella sezione 4.1 ed è indicata con $\mathcal{W}_w(B)$. Per dimostrare il risultato di continuità sono necessari alcuni lemmi preliminari.

Lemma 4.4.1 *Siano Ω_n,$\Omega \subseteq B$ insiemi aperti. Se*

$$\tilde{u}_{\Omega_n,0,h} \longrightarrow \tilde{u}_{\Omega,0,h} \quad \textit{per ogni } h \in H_0^{1,p}(B)$$

allora

$$\tilde{u}_{\Omega_n,f,0} \longrightarrow \tilde{u}_{\Omega,f,0} \quad \textit{per ogni } f \in H^{-1,q}(B).$$

Dimostrazione Per semplicità scriviamo $v_n = u_{\Omega_n,0,h}$, $v = u_{\Omega,0,h}$ e $u_n = u_{\Omega_n,f,0}$, $u = u_{\Omega,f,0}$. Abbiamo $u \in H_0^{1,p}(\Omega) \subseteq H_0^{1,p}(B)$. Dalla limitatezza della funzione $\tilde{u}_n$, abbiamo $\tilde{u}_n \rightharpoonup w$ in $H_0^{1,p}(B)$. Proviamo che $w = u$. Consideriamo il nuovo problema

$$\begin{cases} -\Delta_p \varphi_h = 0 & \text{in } \Omega_h \\ \varphi_h = -w & \text{in } B \setminus \Omega_h. \end{cases} \tag{4.4.1}$$

Prendendo in (4.4.1) come funzione test $\tilde{\varphi}_h + w - \tilde{u}_h \in H_0^{1,p}(\Omega_h)$ abbiamo

$$\int_B |D\tilde{\varphi}_h|^{p-2} D\tilde{\varphi}_h D(\tilde{\varphi}_h + w - \tilde{u}_h) dx = 0.$$

Ora, indicando con φ la soluzione di (4.4.1) su Ω, abbiamo che $D(\tilde{\varphi}_h + w - \tilde{u}_h) \rightharpoonup D\tilde{\varphi}$ in $L^p(B)$ e $|D\tilde{\varphi}_h|^{p-2} D\tilde{\varphi}_h \to |D\tilde{\varphi}|^{p-2} D\tilde{\varphi}$ in $L^q(B)$ (questo segue dalla convergenza delle norme in $L^q(B)$ e dalla convergenza a.e., che deriva da $D\tilde{\varphi}_h \to D\tilde{\varphi}$ in $L^p(B)$), così passando al limite, otteniamo

$$\int_B |D\tilde{\varphi}|^{p-2} D\tilde{\varphi} D\tilde{\varphi}\, dx = 0$$

cioè $\tilde{\varphi} = 0$. Ma $\tilde{\varphi} = -w$ in $B \setminus \Omega$, da cui $w = 0$ in $B \setminus \Omega$. Abbiamo quindi provato che il limite debole w soddisfa la condizione al bordo e, dalla proposizione 4.3.7, l'equazione sull'aperto limite Ω, da cui $w = u$ per l'unicità della soluzione.
Abbiamo dunque dimostrato che $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$. Per concludere la dimostrazione è sufficiente provare la convergenza delle norme. Usando l'equazione su Ω_n e su Ω abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \|\tilde{u}_n\|^p_{H_0^{1,p}(B)} = \lim_{n\to+\infty} < -\triangle_p \tilde{u}_n, \tilde{u}_n >= \lim_{n\to+\infty} < f, \tilde{u}_n >= \tag{4.4.2}$$
$$=< f, \tilde{u} >=< -\triangle_p \tilde{u}, \tilde{u} >= \|\tilde{u}\|^p_{H_0^{1,p}(B)}.$$

□

Il lemma precedente ci consente di studiare l'oscillazione della soluzione del problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = h & \text{in } B \setminus \Omega \end{cases} \tag{4.4.3}$$

vicino al bordo, per funzioni regolari h. Ricordiamo il seguente teorema (vedi Heinonen, Kilpelainen e Martio [55]).

Teorema 4.4.2 *Supponiamo che Ω sia limitato. Sia $h \in H^{1,p}(\Omega) \cap C^(\overline{\Omega})$ e sia u la soluzione del problema (4.4.3). Se $y \in \partial\Omega$, allora per ogni $0 < r \le R$ si ha*

$$osc(u, \Omega \cap B_{y,r}) \le osc(h, \partial\Omega \cap \overline{B}_{y,2R}) +$$
$$+ osc(h, \partial\Omega) \exp\Big(-c \int_r^R \Big(\frac{p\text{-}cap\,(\Omega^c \cap \overline{B}_{y,t}; B_{y,2t})}{p\text{-}cap\,(\overline{B}_{y,t}; B_{y,2t})} \Big)^{\frac{1}{p-1}} \frac{dt}{t} \Big)$$

dove c è una costante fissata e

$$osc(u, A) = \sup_A u(x) - \inf_A u(x).$$

Se h è una funzione fissata in $C_0^\infty(B)$ e $\Omega \in \mathcal{W}_w(B)$ esiste, per il teorema 4.4.2, una costante M tale che per ogni $x, z \in \Omega \cap B_{y,r}$

$$|u(x) - u(z)| \leq MR + M\exp(-cw(r, R, y)).$$

Dal momento che y è un punto regolare (vedi per la definizione di punto regolare Heinonen, Kilpelainen e Martio [55]; per ipotesi $\Omega \in \mathcal{W}_w(B)$ e $\lim_{r\to 0} w(r, R, y) = +\infty$) abbiamo che

$$\lim_{z\to y, z\in\Omega\cap B_{y,r}} u(z) = h(y).$$

Allora possiamo scrivere

$$|u(x) - h(y)| \leq MR + M\exp(-cw(r, R, y)),$$

da cui

$$|u(x) - h(x)| \leq |h(x) - h(y)| + MR + M\exp(-cw(r, R, y)),$$

ossia

$$|u(x) - h(x)| \leq 2MR + M\exp(-cw(r, R, y)). \tag{4.4.4}$$

Siamo ora nelle condizioni di provare il teorema 4.1.1.

Dimostrazione del teorema 4.1.1. La famiglia $\mathcal{W}_w(B)$ è compatta nella topologia di Hausdorff dei complementari (il caso non lineare può essere dimostrato come il caso lineare, vedi Bucur e Zolésio [23]). Perciò Ω appartiene a $\mathcal{W}_w(B)$. Per il lemma 4.4.1 è sufficiente dimostrare che $\tilde{u}_{\Omega_n,0,h} \longrightarrow \tilde{u}_{\Omega,0,h}$, per ogni $h \in H_0^{1,p}(B)$.
Passo 1: Sia $h \in C_0^\infty(B)$; cominciamo provando che $\tilde{u}_{\Omega_n,0,h} \rightharpoonup \tilde{u}_{\Omega,0,h}$.
Posto per semplicità $u_n = u_{\Omega_n,0,h}$ abbiamo, per una sottosuccessione, che $\tilde{u}_n \rightharpoonup u$ in $H_0^{1,p}(B)$. Per la proposizione 4.3.7 u soddisfa l'equazione su Ω, così è sufficiente provare che $u = h$ p-q.e. su $B \setminus \Omega$. Per il teorema di Banach-Saks, possiamo costruire una successione di combinazioni convesse

$$\psi_n = \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_k^n \tilde{u}_k, \quad \text{con} \quad \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_k^n = 1 \tag{4.4.5}$$

tali che

$$\psi_n(x) \to u(x) \ \text{ p-q.e. su } B. \tag{4.4.6}$$

Consideriamo un punto $x \in B \setminus \Omega$ dove vale (4.4.6). Per ogni $\varepsilon > 0$ proviamo che $|u(x) - h(x)| \leq \varepsilon$ da cui segue che $u(x) = h(x)$ p-q.e. su $B \setminus \Omega$. Da (4.4.5) abbiamo

$$|u(x) - h(x)| \leq \sum_{k=n}^{N_n} \alpha_k^n |\tilde{u}_k(x) - h(x)|,$$

così è sufficiente dimostrare che esiste k_ε tale che , per ogni $k \geq k_\varepsilon$,

$$|\tilde{u}_k(x) - h(x)| \leq \varepsilon. \tag{4.4.7}$$

Se $x \in B \setminus \Omega_k$ allora (4.4.7) è vera. Per poter applicare la disuguaglianza (4.4.4) per l'aperto Ω_k, fissiamo R_0 sufficientemente piccolo tale che $2MR_0 \leq \varepsilon/4$. Usando l'ipotesi sulla funzione w (cioè $\lim_{r\to 0} w(r,R,x) = +\infty$, localmente uniformemente in x) esiste un intorno di x, detto U e un r_0 sufficientemente piccolo tale che $B_{x,r_0} \subseteq U$ e

$$M \exp(-cw(r,R,y)) \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

per tutti gli $r \leq r_0$ e per tutti gli $y \in U$. Per le proprietà della topologia di Hausdorff, esiste k_0 sufficientemente grande, tale che, per ogni $k \geq k_0$, $B_{x,r_0} \cap \Omega_k^c \neq \emptyset$. Se $x \in \Omega_k$, esiste $z_k \in B_{x,r_0} \cap \partial\Omega_k$ e si può applicare così la disuguaglianza (4.4.4) per u_k, r_0, R_0, z_k ottenendo direttamente

$$|u_k(x) - h(x)| \leq \varepsilon \quad \forall\, k \geq k_0,$$

che implica la (4.4.7).
Passo 2: Sia $h \in C_0^\infty(B)$. Proviamo che $\tilde{u}_{\Omega_n.0,h} \longrightarrow \tilde{u}_{\Omega,0,h}$.
Posto per semplicità $u_n = u_{\Omega_n,0,h}$, abbiamo $u_n \in H^{1,p}(\Omega_n)$ e

$$\int_{\Omega_n} |Du_n|^{p-2} Du_n D\varphi\, dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in H_0^{1,p}(\Omega_n).$$

Possiamo scegliere $\varphi = u_n - h$ come funzione test nell'uguaglianza sopra scritta, da cui

$$\int_{\Omega_n} |Du_n|^{p-2} Du_n Du_n dx = \int_{\Omega_n} |Du_n|^{p-2} Du_n Dh\, dx. \tag{4.4.8}$$

Utilizzando il primo passo abbiamo che $\tilde{u}_n \rightharpoonup \tilde{u}$ in $H_0^{1,p}(B)$, dove $\tilde{u} = \tilde{u}_{\Omega,0,h}$. Da Boccardo e Murat [8] theorem 2.1, otteniamo (eventualmente passando a sottosuccessioni)

$$D\tilde{u}_n \longrightarrow D\tilde{u} \quad \text{a.e. in } B.$$

Proviamo ora la convergenza forte delle soluzioni dimostrando che si ha la convergenza delle norme. Da (4.4.8) segue

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_n\|^p_{H_0^{1,p}(B)} &= \int_{\Omega_n} |Du_n|^p dx + \int_{B\setminus\Omega_n} |Dh|^p dx = \\ &= \int_{\Omega_n} |Du_n|^{p-2} Du_n Du_n dx + \int_{B\setminus\Omega_n} |Dh|^p dx = \\ &= \int_{\Omega_n} |Du_n|^{p-2} Du_n Dh\, dx + \int_{B\setminus\Omega_n} |Dh|^p dx = \\ &= \int_B |D\tilde{u}_n|^{p-2} D\tilde{u}_n Dh\, dx + \int_{B\setminus\Omega_n} |Dh|^p dx - \int_{B\setminus\Omega_n} |D\tilde{u}_n|^{p-2} D\tilde{u}_n Dh\, dx = \\ &= \int_B |D\tilde{u}_n|^{p-2} D\tilde{u}_n Dh\, dx. \end{aligned}$$

Perciò passando al limite, grazie alla relazione (4.4.8), abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \|\tilde{u}_n\|^p_{H_0^{1,p}(B)} = \lim_{n\to+\infty} \int_B |D\tilde{u}_n|^{p-2} D\tilde{u}_n Dh\, dx = \int_B |D\tilde{u}|^{p-2} D\tilde{u} Dh\, dx =$$

$$= \int_{B\setminus\Omega} |Dh|^{p-2} Dh Dh \, dx + \int_{\Omega} |Du|^{p-2} Du Dh \, dx =$$

$$= \int_{B\setminus\Omega} |Dh|^{p} dx + \int_{\Omega} |Du|^{p-2} Du Du \, dx = \|\tilde{u}\|^p_{H_0^{1,p}(B)}.$$

Nella relazione precedente, la convergenza debole in L^q di $(|D\tilde{u}_n|^{p-2}D\tilde{u}_n)$ a $|D\tilde{u}|^{p-2}D\tilde{u}$, si ottiene dalla convergenza debole in L^p di $(D\tilde{u}_n)$ a $D\tilde{u}$ e dalla convergenza puntuale quasi ovunque che deriva dal Lemma di Mazur. Ora, poichè $H_0^{1,p}(B)$ è riflessivo , dalla convergenza debole e dalla convergenza delle norme si ottiene la convergenza forte delle soluzioni.
Passo 3: Fissiamo ora $h \in H_0^{1,p}(B)$. Per la densità esiste una successione $(h_k) \in C_0^\infty(B)$ tale che $h_k \to h$ fortemente in $H_0^{1,p}(B)$. Allora $\|h_k\|_{H_0^{1,p}(B)}$ è uniformemente limitata e si ha

$$\|\tilde{u}_{\Omega_n,0,h} - \tilde{u}_{\Omega,0,h}\|_{H_0^{1,p}(B)} \leq \|\tilde{u}_{\Omega_n,0,h} - \tilde{u}_{\Omega_n,0,h_k}\|_{H_0^{1,p}(B)} +$$

$$+ \|\tilde{u}_{\Omega_n,0,h_k} - \tilde{u}_{\Omega,0,h_k}\|_{H_0^{1,p}(B)} + \|\tilde{u}_{\Omega,0,h_k} - \tilde{u}_{\Omega,0,h}\|_{H_0^{1,p}(B)} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3},$$

dove si usa il risultato di continuità del passo 2 nel caso di dati regolari al bordo per il secondo addendo e, per il primo e il terzo addendo, la dipendenza continua della soluzione $\tilde{u}_{\Omega_n,0,h}$ rispetto al cambiamento del dato al bordo che è uniforme in Ω_n. □

Osservazione 4.4.3 Il risultato di continuità del teorema sopra scritto è ancora vero se si elimina l'ipotesi di semicontinuità di w nella terza variabile. Questa ipotesi è infatti necessaria solo per la compattezza della famiglia $\mathcal{W}_w(B)$ nella topologia di Hausdorff dei complementari.

4.5 Caso particolare: famiglia $\mathcal{O}_{p,c,r}(B)$

Un caso particolare di domini contenuti nella famiglia $\mathcal{W}_w(B)$ è costituita dalla seguente famiglia (vedi per il caso lineare Bucur e Zolésio [22] e la sezione 2.4).

Definizione 4.5.1 *Per $c, r > 0$ si dice che Ω soddisfa la condizione uniforme di capacità p-(r,c) se*

$$\forall\, x \in \partial\Omega \qquad \frac{p\text{-}cap\,(\Omega^c \cap \overline{B}_{x,r}, B_{x,2r})}{p\text{-}cap\,(\overline{B}_{x,r}, B_{x,2r})} \geq c.$$

Definizione 4.5.2 *Per $r < 1$ definiamo la seguente famiglia di sottoinsiemi aperti di B:*

$$\mathcal{O}_{p,r,c}(B) = \{\Omega \subseteq B \;: \forall\, r_0 \;\, 0 < r_0 < r \;\; \Omega \textit{ soddisfa la condizione } p\text{-}(r_0, c)\}\,.$$

Questa famiglia è compatta nella topologia H^c: per la dimostrazione nel caso lineare $p = 2$ rimandiamo a Bucur e Zolésio [22]; il caso non lineare segue in modo del tutto analogo a quello lineare.

Pur essendo la classe $\mathcal{O}_{p,c,r}(B)$ una sottoclasse della $\mathcal{W}_w(B)$, dimostriamo in questa sezione il risultato di continuità nella classe $\mathcal{O}_{p,c,r}(B)$ con una dimostrazione indipendente rispetto a quella vista nella sezione precedente.

Teorema 4.5.3 *Siano $\Omega_n \in \mathcal{O}_{p,r,c}(B)$ tali che $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$. Allora per ogni h hölderiana su B con costanti (M, δ) (cioè $|h(x) - h(y)| \leq M|x-y|^\delta$ per ogni $x, y \in B$), abbiamo*

$$\tilde{u}_{\Omega_n,0,h} \rightharpoonup \tilde{u}_{\Omega,0,h}.$$

Dimostrazione È sufficiente dimostrare che per ogni sottosuccessione che converge debolmente, il limite debole u soddisfa la condizione $u - h|_\Omega \in H_0^{1,p}(\Omega)$. Posto per semplicità $u_{\Omega_n,0,h} = u_n$, abbiamo che $\tilde{u}_n \rightharpoonup u$. Dimostriamo che $\tilde{u}_n$ sono uniformemente hölderiane su B. Infatti su Ω_n^c, $\tilde{u}_n = h$ che è hölderiana; sul bordo $\partial\Omega_n$, $\tilde{u}_n = h$ che è (M, δ)- hölderiana per ipotesi e allora da Heinonen, Kilpelainen e Martio [55], theorem 6.44, $\tilde{u}_n$ è (M_1, δ_1)-hölderiana su $\overline{\Omega}_n$ e (M_1, δ_1) dipendono solo da M, δ, c_0, c_1, p, n, $\mathrm{diam}(\Omega_n)$. Dal momento che il diametro di Ω_n è uniformemente limitato, esistono due costanti (M_2, δ_2) tali che ogni $\tilde{u}_n$ è hölderiana con costanti (M_2, δ_2). Così esse sono uniformemente limitate e equicontinue; applicando il teorema di Ascoli Arzelà si ottiene quindi una sottosuccessione uniformemente convergente a u su B.

Dimostriamo che $u = h$ p-q.e. su Ω^c. Ma u e h sono continue e quindi proveremo che $u = h$ su Ω^c. Consideriamo un punto $x \in \Omega^c$. Dalla H^c-convergenza esiste una successione di punti $x_n \in \Omega_n^c$ tale che $x_n \to x$. Possiamo quindi scrivere

$$|u(x) - h(x)| \leq |u(x) - u(x_n)| + |u(x_n) - \tilde{u}_n(x_n)| + +|\tilde{u}_n(x_n) - h(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

grazie alla continuità di u e alla convergenza uniforme di $(\tilde{u}_n)$ a u e alla definizione di $\tilde{u}_n$. Allora

$$u(x) = h(x), \quad \forall\, x \in \Omega^c$$

e quindi la tesi. □

Seguendo il principio del confronto (vedi Heinonen, Kilpelainen e Martio [55], pag. 133) è noto che se Ω è un insieme aperto in $\mathcal{O}_{p,r,c}(B)$ e h_1, h_2 sono due funzioni continue in B tali che $h_1 \leq h_2$ su $\partial\Omega$, allora $u_{\Omega,0,h_1}(x) \leq u_{\Omega,0,h_2}(x)$ per tutti gli $x \in \Omega$.

Usando questo principio per le funzioni A-armoniche, possiamo estendere il risultato precedente:

Teorema 4.5.4 *Siano $\Omega_n \in \mathcal{O}_{p,r,c}(B)$ tali che $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$. Allora, per ogni $h \in C(\overline{B}) \cap H_0^{1,p}(B)$, abbiamo $\tilde{u}_{\Omega_n,0,h} \rightharpoonup \tilde{u}_{\Omega,0,h}$.*

Dimostrazione Consideriamo $h \in C(\overline{B}) \cap H_0^{1,p}(B)$. Per $\varepsilon > 0$ fissato, sia $B^\varepsilon = \{x \in I\!\!R^N : d(x, B) < \varepsilon\}$; esistono allora due sottosuccessioni $(h_k^1)_{k \in I\!\!N}$, $(h_k^2)_{k \in I\!\!N}$ in $C_0^\infty(B^\varepsilon)$, tali che

$$h_k^1(x) \leq h_{k+1}^1(x) \leq h(x) \leq h_{k+1}^2(x) \leq h_k^2(x) \;\; \forall\, x \in B^\varepsilon, \forall\, k \in I\!\!N \tag{4.5.1}$$

e $h_k^1(x) \to h(x)$, $h_k^2(x) \to h(x)$ per tutti gli $x \in B^\varepsilon$ (vedi Heinonen, Kilpelainenen e Martio [55]). Per il principio del confronto su ogni Ω_n possiamo scrivere

$$u_{\Omega_n,0,h_k^1}(x) \leq u_{\Omega_n,0,h}(x) \leq u_{\Omega_n,0,h_k^2}(x) \quad \forall\, x \in \Omega_n, \forall\, k \in I\!\!N,$$

e usando la definizione dell'estensione su Ω_n^c e la relazione (4.5.1) abbiamo

$$\tilde{u}_{\Omega_n,0,h_k^1}(x) \leq \tilde{u}_{\Omega_n,0,h}(x) \leq \tilde{u}_{\Omega_n,0,h_k^2}(x) \quad \forall\, x \in B^\varepsilon, \forall\, k \in I\!N.$$

Fissiamo $k \in I\!N$. Per $n \to +\infty$ dal teorema 4.5.3 segue

$$\tilde{u}_{\Omega_n,0,h_k^1} \rightharpoonup \tilde{u}_{\Omega,0,h_k^1} \text{ in } H_0^{1,p}(B^\varepsilon),$$

$$\tilde{u}_{\Omega_n,0,h_k^2} \rightharpoonup \tilde{u}_{\Omega,0,h_k^2} \text{ in } H_0^{1,p}(B^\varepsilon).$$

Indicando con u il limite debole di una sottosuccessione debolmente convergente di $(\tilde{u}_{\Omega_n,0,h})$, abbiamo

$$\tilde{u}_{\Omega,0,h_k^1}(x) \leq u(x) \leq \tilde{u}_{\Omega,0,h_k^2}(x) \quad \forall\, x \in B^\varepsilon, \forall\, k \in I\!N$$

per un rappresentante p-quasicontinuo di u. Allora , per ogni $x \in \Omega^c$ possiamo scrivere

$$h_k^1(x) \leq u(x) \leq h_k^2(x).$$

Se calcoliamo il limite per $k \to +\infty$, dalla convergenza puntuale di (h_k^1) e di (h_k^2) verso h, abbiamo $u(x) = h(x)$ p-q.e. su Ω^c, ossia $u - h|_\Omega \in H_0^{1,p}(\Omega)$. □

Dalla continuità debole delle soluzioni, esattamente come nel passo 2 del teorema 4.1.1, si ottiene la convergenza forte delle soluzioni dell'equazione del p-Laplaciano con condizioni non omogenee al bordo e quindi, grazie al lemma 4.4.1, si ottiene il risultato di continuità nella classe $\mathcal{O}_{p,c,r}(B)$ delle soluzioni dell'equazione non omogenea con dato al bordo omogeneo per il p-Laplaciano.

4.6 Estensione del risultato di Sverak per $N-1 < p \leq N$

In questa sezione generalizziamo il risultato di continuità di Sverak. In dimensione due e per il caso lineare, in [64] e [65] è stata ottenuta la continuità fissando un numero massimo uniforme di componenti connesse del complementare dei domini ammissibili (vedi capitolo 2 sezione 2.5). Generalizziamo questo risultato per un arbitrario $N \geq 2$ e per $p \in]N-1, N]$. La ragione della scelta di p è che in $I\!R^N$ una curva ha p capacità positiva se $p > N-1$. Il caso $p > N$ è banale dal momento che tutte le funzioni in $H^{1,p}(I\!R^N)$ sono continue.

Per dimostrare il risultato di tipo Sverak diamo alcuni lemmi preliminari.

Lemma 4.6.1 *Sia $\gamma_{[x,\xi]}$ una curva continua di estremi x e ξ contenuta in $B_{x,r}$ e tale che $\xi \in \partial B_{x,r}$. Allora*

$$p\text{-}cap\,(\gamma_{[x,\xi]}; B_{x,2r}) \geq p\text{-}cap\,([x,\xi]; B_{x,2r})$$

dove $[x,\xi]$ è il segmento di estremi x e ξ.

Dimostrazione Per $\epsilon > 0$ consideriamo una funzione $\varphi \in C_0^\infty(B_{x,2r}; I\!R^+)$ tale che

$$\int_{B_{x,2r}} |D\varphi|^p dx \leq p\text{-}cap\,(\gamma_{[x,\xi]}; B_{x,2r}) + \epsilon$$

e $\varphi \geq 1$ in un intorno U di $\gamma_{[x,\xi]}$. Indicata con φ^* la simmetrizzazione di Steiner (vedi la sezione 1.7) di φ rispetto alla linea $x\xi$, si ha che $\varphi^* \in H_0^{1,p}(B_{x,2r})$, $\varphi^* \geq 1$ su $U^* \supseteq [x,\xi]$ e

$$\int_{B_{x,2r}} |D\varphi^*|^p dx \leq \int_{B_{x,2r}} |D\varphi|^p dx.$$

Dal momento che $p\text{-}cap\,([x,\xi]; B_{x,2r}) \leq \int_{B_{x,2r}} |D\varphi^*|^p dx$, per $\epsilon \to 0$, si ha la tesi. □

Osservazione 4.6.2 Nella dimostrazione del lemma precedente è necessario considerare l'intorno aperto U di $\gamma[x,\xi]$ per poter parlare di simmetrizzazione di Steiner. Infatti $|\gamma[x,\xi]| = 0$ in $I\!R^N$ e quindi non si può definire la simmetrizzazione di Steiner. Ricordiamo, infatti, che quest'ultima si definisce solo per insiemi di misura N-dimensionale positiva.

Lemma 4.6.3 *Sia $K \subset I\!R^N$ un insieme compatto e connesso. Allora, per ogni $x \in K$ e $r < \frac{1}{2} diam K$, si ha*

$$\frac{p\text{-}cap\,(K \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r})}{p\text{-}cap\,(\overline{B}_{x,r}; B_{x,2r})} \geq \frac{p\text{-}cap\,([0,1] \times \{0\}^{N-1}; B_{0,2})}{p\text{-}cap\,(\overline{B}_{0,1}; B_{0,2})}.$$

Dimostrazione Consideriamo un punto $x \in K$ e sia $K^\delta = \{x \in I\!R^N | d(x,K) < \delta\}$. Allora $\overline{K^\delta} \subseteq K^{\delta+\epsilon}$ per ogni $\epsilon > 0$ e, per la proprietà della capacità sulle successioni decrescenti di compatti (vedi la proprietà 1.5.3) unita alla sua monotonia, abbiamo

$$p\text{-}cap\,(K \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r}) \leq p\text{-}cap\,(K^\delta \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r}) \leq p\text{-}cap\,(\overline{K}^\delta \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r}), \tag{4.6.1}$$

da cui, passando al limite per $\delta \to 0$ in ambo i membri, si ha

$$p\text{-}cap\,(K \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r}) \leq \lim_{\delta \to 0} p\text{-}cap\,(K^\delta \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r}) \leq$$

$$\lim_{\delta \to 0} p\text{-}cap\,(\overline{K}^\delta \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r}) = p\text{-}cap\,(K \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r}).$$

Quindi

$$p\text{-}cap\,(K \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r}) = \lim_{\delta \to 0} p\text{-}cap\,(K^\delta \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r}). \tag{4.6.2}$$

Osserviamo ora che l'insieme K^δ è aperto, contiene K e così è connesso per archi. Dal momento che K^δ non è contenuto in $\overline{B}_{x,r}$ (poichè $r < \frac{1}{2}\mathrm{diam}K$), esiste quindi un punto $\xi \in \partial B_{x,r} \cap K^\delta$ e una curva continua $\gamma_{[x,\xi]}$ che unisce x e ξ, contenuta in $\overline{B}_{x,r} \cap K^\delta$. Per concludere la dimostrazione è sufficiente usare il lemma 4.6.1 e il comportamento della capacità sugli insiemi omotetici. Infatti otteniamo

$$p\text{-}cap\,(K^\delta \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r}) \geq p\text{-}cap\,(\gamma_{[x,\xi]} \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r}) \geq p\text{-}cap\,([x,\xi] \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r}).$$

Usando la (4.6.2), per $\delta \to 0$, si ha

$$p\text{-}cap\,(K \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r}) \geq p\text{-}cap\,([x,\xi] \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r}).$$

La tesi segue osservando che

$$\frac{p\text{-}cap\,([x,\xi] \cap \overline{B}_{x,r}; B_{x,2r})}{p\text{-}cap\,(\overline{B}_{x,r}; B_{x,2r})} = \frac{p\text{-}cap\,([0,1] \times \{0\}^{N-1}; B_{0,2})}{p\text{-}cap\,(\overline{B}_{0,1}; B_{0,2})}.$$

$\square$

Osserviamo che se $p > N-1$, allora (vedi per esempio Ziemer [66]) ogni curva in $I\!R^N$ ha p-capacità positiva (vedi il teorema 1.5.7).

Dimostrazione del teorema 4.1.2 È facile vedere che $\mathcal{O}_l(B)$ è compatto nella topologia H^c (vedi per esempio Sverak [65]), così $\Omega \in \mathcal{O}_l(B)$. Seguendo le stesse idee di Bucur [14], decomponiamo $\overline{B}\setminus\Omega_n$ nelle sue componenti connesse $\overline{B}\setminus\Omega_n = K_1^n \cup ... \cup K_l^n$. Alcune di queste componenti possono essere vuote. Usando la compattezza della topologia di Hausdorff, si può estrarre una sottosuccessione, tale che

$$K_i^n \xrightarrow{H} K_i \quad \forall\, i = 1,..,l.$$

Allora K_i sono ancora compatti, connessi e si ha

$$\Omega = B \setminus (K_1 \cup .. \cup K_l).$$

Esistono tre tipi di componenti connesse per l'insieme limite: $K_i = \emptyset$, K_i è solo un punto, K_i contiene al più due punti. Consideriamo la seguente famiglia di indici che corrisponde ai primi due casi $I = \{i : \text{diam} K_i = 0\}$ e consideriamo i nuovi insiemi

$$\Omega_n^+ = B \setminus \bigcup_{i \in \{1,..,l\}\setminus I} K_i^n.$$

Allora, $\Omega_n^+ \supseteq \Omega_n$ e $\Omega_n^+ \xrightarrow{H^c} \Omega^+$ dove $\Omega^+ = B \setminus \bigcup_{i\in\{1,..,l\}\setminus I} K_i$. Per n sufficientemente grande esiste $r > 0$ tale che $\text{diam}(K_i^n) > r$, per ogni $i \in \{1,..,l\} \setminus I$ e usando il lemma 4.6.3 e il teorema 4.1.1 abbiamo

$$u_{\Omega_n^+,f,0} \to u_{\Omega^+,f,0}.$$

Fissiamo ora $f = 1$. Abbiamo

$$u_{\Omega_n^+,1,0} \longrightarrow u_{\Omega^+,1,0} \tag{4.6.3}$$

e dalla limitatezza di $(u_{\Omega_n,1,0})$ (possibilmente passando a una sottosuccessione)

$$u_{\Omega_n,1,0} \rightharpoonup u, \tag{4.6.4}$$

da cui

$$u_{\Omega_n^+,1,0} - u_{\Omega_n,1,0} \rightharpoonup u_{\Omega^+,1,0} - u. \tag{4.6.5}$$

Per il principio del massimo si ha

$$u_{\Omega_n^+,1,0} \geq u_{\Omega_n,1,0} \geq 0. \tag{4.6.6}$$

Da (4.6.6) e (4.6.4) segue che $u \geq 0$, e da (4.6.5) e (4.6.6) si ha $u_{\Omega^+,1,0} \geq u$. Allora

$$0 \leq u \leq u_{\Omega^+,1,0} \tag{4.6.7}$$

da cui $u \in H_0^{1,p}(\Omega^+)$. Dal momento che p-$cap\,(\Omega^+ \setminus \Omega) = 0$ allora $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$, cioè $u = u_{\Omega,1,0}$ grazie alla proposizione 4.3.7. Abbiamo dimostrato che $u_{\Omega_n,1,0} \rightharpoonup u_{\Omega,1,0}$. Ora, dal teorema 6.3 di Dal Maso e Murat [51] segue

$$u_{\Omega_n,f,0} \rightharpoonup u_{\Omega,f,0} \quad \forall f \in H^{-1,q}(B). \tag{4.6.8}$$

Usando l'equazione su Ω_n e su Ω otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \|u_{\Omega_n,f,0}\|^p_{H_0^{1,p}(\Omega_n)} = \lim_{n\to+\infty} < -\triangle_p u_n, u_n >= \lim_{n\to+\infty} < f, u_n >= \tag{4.6.9}$$

$$=< f, u >=< -\triangle_p u, u >= \|u_{\Omega,f,0}\|^p_{H_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Infine, da (4.6.8) e (4.6.9) si ha $u_{\Omega_n,f,0} \longrightarrow u_{\Omega,f,0}$ per ogni $f \in H^{-1,q}(B)$, cioè la γ_p-convergenza. □

4.7 Convergenza di Mosco e osservazioni finali sugli operatori monotoni

Utilizzando la nozione di convergenza di Mosco introdotta nella sezione 4.2.6, si dice che una successione di spazi di Sobolev $\left(H_0^{1,p}(\Omega_n)\right)$ converge nel senso di Mosco a $H_0^{1,p}(\Omega)$ se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

(M1) $\forall\, u \in H_0^{1,p}(\Omega)\ \exists\, u_n \in H_0^{1,p}(\Omega_n)$ tale che $u_n \to u$ in $H^{1,p}(B)$;

(M2) $\forall\, u_{n_k} \in H_0^{1,p}(\Omega_{n_k})$ $u_n \rightharpoonup u$ in $H^{1,p}(B)$ abbiamo $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$.

Se $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$, allora la condizione (M1) segue dal fatto che ogni insieme compatto contenuto in Ω è anche contenuto in Ω_n per n sufficientemente grande. La condizione (M2) in generale è falsa e, anche se sembra indipendente dall'equazione ellittica (4.1.2), bisogna usare l'equazione con un particolare membro destro per dimostrarla. Vale infatti:

Lemma 4.7.1 *Siano Ω_n e Ω sottoinsiemi aperti di B. Siano $u_n = u_{\Omega_n,f,0}$ e $u = u_{\Omega,f,0}$ le soluzioni dell'equazione (4.1.2). Se $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ fortemente in $H^{1,p}(B)$, per ogni $f \in H^{-1,q}(B)$, allora $H_0^{1,p}(\Omega)$ è il limite di Mosco di $\left(H_0^{1,p}(\Omega_n)\right)$.*

Dimostrazione La condizione (M1) della definizione di convergenza di Mosco è una diretta conseguenza della convergenza forte delle soluzioni in $H^{1,p}(B)$ per ogni $f \in H^{-1,q}(B)$. Infatti sia $g \in H_0^{1,p}(\Omega) \subseteq H^{1,p}(B)$. Consideriamo $f = -\Delta_p g \in H^{-1,q}(B)$. Allora g soddisfa l'equazione (4.1.2) con tale f.

Siano g_n le soluzioni dell'equazione (4.1.2) con $f = -\Delta_p g$. Per ipotesi abbiamo allora che $g_n \to g$ in $H^{1,p}(B)$ (supponiamo le funzioni g_n e g estese a zero fuori dagli insiemi Ω_n e Ω). Dunque vale la condizione (M1) della definizione di Mosco.

Dimostriamo che vale anche la (M2). Sia $v_n \in H_0^{1,p}(\Omega_n)$ tale che $v_n \rightharpoonup v$ in $H^{1,p}(B)$. Dimostriamo che $v \in H_0^{1,p}(\Omega)$. Posto $f = -\Delta_p v \in H^{-1,q}(B)$, siano u_n e u le soluzioni dell'equazione (4.1.2) con questa f fissata. Moltiplichiamo ambo i membri dell'equazione (4.1.2) per $u_n - v_n \in H_0^{1,p}(\Omega_n)$, ossia

$$\int_B |D\tilde{u}_n|^{p-2} D\tilde{u}_n (D\tilde{u}_n - D\tilde{v}_n) dx =< f, \tilde{u}_n - \tilde{v}_n > .$$

Ora, poiché $\tilde{u}_n - \tilde{v}_n \rightharpoonup \tilde{u} - v$ e $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$, passando al limite per $n \to +\infty$, si ha

$$\int_B |D\tilde{u}|^{p-2} D\tilde{u} (D\tilde{u} - Dv) dx =< f, \tilde{u} - v > .$$

Ricordando che $f = -\Delta_p v$, l'uguaglianza sopra scritta si scrive anche nella forma

$$< -\Delta_p \tilde{u}, \tilde{u} - v >=< -\Delta_p v, \tilde{u} - v >,$$

cioè

$$< -\Delta_p \tilde{u} + \Delta_p v, \tilde{u} - v >= 0.$$

Essendo il p-Laplaciano strettamente monotono otteniamo quindi che $\tilde{u} = v$, da cui, essendo $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$, si ha $v \in H_0^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Lemma 4.7.2 *Siano $\Omega_n, \Omega \subseteq B$ insiemi aperti e siano $u_n = u_{\Omega_n,f,0}$ e $u = u_{\Omega,f,0}$ le soluzioni dell'equazione (4.1.2) rispettivamente su Ω_n e su Ω. Se $H_0^{1,p}(\Omega)$è il limite di Mosco di $\left(H_0^{1,p}(\Omega_n)\right)$ allora $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$, per ogni $f \in H^{-1,q}(B)$.*

Dimostrazione Per la limitatezza delle soluzioni dell'equazione (4.1.2), a meno di sottosuccessioni, si ha che esiste una $g \in H_0^{1,p}(B)$ tale che $\tilde{u}_n \rightharpoonup g$. Per la (M2) di Mosco abbiamo che $g \in H_0^{1,p}(\Omega)$, mentre per la (M1) di Mosco abbiamo che

$$\exists\, g_n \in H_0^{1,p}(\Omega_n) \ : g_n \to g.$$

Dimostriamo che g soddisfa l'equazione (4.1.2) su Ω, cioè

$$\int_\Omega |Dg|^{p-2} Dg D\varphi \, dx =< f, \varphi > \quad \forall\, \varphi \in H_0^{1,p}(\Omega).$$

Sia $\varphi \in H_0^{1,p}(\Omega)$. Allora, per la definizione di convergenza di Mosco, esiste $\varphi_n \in H_0^{1,p}(\Omega_n)$ tale che $\varphi_n \to \varphi$. Consideriamo l'equazione (4.1.2) per le u_n su Ω_n con funzione test φ_n:

$$\int_{\Omega_n} |Du_n|^{p-2} Du_n D\varphi_n dx = \int_B |D\tilde{u}_n|^{p-2} D\tilde{u}_n D\tilde{\varphi}_n dx =< f, \tilde{\varphi}_n > .$$

Poichè $\tilde{\varphi}_n \to \tilde{\varphi}$ e $\tilde{u}_n \rightharpoonup g$ si ha

$$\int_\Omega |Dg|^{p-2} DgD\varphi\, dx = \int_B |Dg|^{p-2} DgD\tilde{\varphi}\, dx =< f, \tilde{\varphi} >,$$

e quindi g è soluzione dell'equazione (4.1.2) su Ω. Dall'unicità della soluzione dell'equazione (4.1.2) segue quindi $u = g$. Infine, come nel passo 2 del teorema 4.1.1, dalla convergenza debole segue la convergenza delle norme e quindi la convergenza forte $u_n \to u$. □

Osservazione 4.7.3 Nella dimostrazione dei lemmi 4.7.1 e 4.7.2 abbiamo usato solo la proprietà di monotonia stretta del p-Laplaciano e la continuità rispetto alla convergenza forte delle soluzioni dell'equazione (4.1.2). La stessa dimostrazione sussiste anche per il caso di operatori monotoni in forma di divergenza: non dipende quindi dal p-Laplaciano ma solo dalla classe di operatori monotoni considerati in questo capitolo.

Osserviamo inoltre che nel caso del p-Laplaciano la convergenza debole delle soluzioni implica banalmente la convergenza forte delle soluzioni, in quanto si ha la convergenza delle norme. Nel caso generale, invece, poichè la forma quadratica $a(x, \xi) \cdot \xi$ associata all'operatore A non è 1-omogenea, la convergenza debole delle soluzioni non implica quella forte.

La γ_p-convergenza è quindi equivalente alla convergenza di Mosco degli spazi di Sobolev associati. Come immediata conseguenza, la γ_p-convergenza implica la stabilità delle soluzioni dell'equazione più generale (4.3.1). In questo caso, si può solo ottenere (vedi l'osservazione 4.7.3) la continuità debole delle soluzioni in $H_0^{1,p}(B)$.

Sia $Au = -div\Big(a(x, Du)\Big)$, dove $a(x, \zeta)$ soddisfa le ipotesi (4.2.1)—(4.2.9). Sia $\tilde{u}_{\Omega_n,f,h}$ la soluzione dell' equazione generale (4.3.1). Vale il seguente teorema.

Teorema 4.7.4 *Sia $\Omega_n \in \mathcal{W}_w(B)$ e supponiamo che $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$. Allora*

$$\tilde{u}_{\Omega_n,f,h} \rightharpoonup \tilde{u}_{\Omega,f,h}.$$

Dimostrazione Dalla proposizione 4.3.7 abbiamo $\tilde{u}_{\Omega_n,f,h} \rightharpoonup u$, dove $u|_\Omega$ verifica l'equazione su Ω. Le condizioni di capacità implicano la convergenza di Mosco degli spazi di Sobolev $H_0^{1,p}(\Omega_n)$ a $H_0^{1,p}(\Omega)$ (vedi il teorema 4.1.1). Usando la definizione di limite nel senso di Mosco abbiamo che $(u - h)|_\Omega \in H_0^{1,p}(\Omega)$ e, dall'unicità della soluzione dell'equazione (4.3.1), otteniamo che $u = u_{\Omega,f,h}$. □

4.8 Esistenza di domini classici sotto ipotesi di monotonia per il funzionale costo

Abbiamo visto nella sezione 2.6 che Buttazzo e Dal Maso in [35] hanno dimostrato, nel caso lineare, che, sotto ipotesi di monotonia per il funzionale costo, si ottiene l'esistenza di un dominio ottimale nella classe dei quasi aperti della palla B di $I\!R^N$, $N \geq 2$.

In questa sezione generalizziamo tale risultato al caso non lineare: la dimostrazione segue da quella del caso lineare sfruttando la teoria dell'equazione di Dirichlet rilassata non lineare sviluppata da Dal Maso e Murat in [51].

Ricordiamo che, nel caso lineare, l'esistenza della soluzione del problema

$$\min\{F(A)\ :\ A\in\mathcal{A},\quad |A|=c\} \tag{4.8.1}$$

con $\mathcal{A}$ l'insieme dei sottoinsiemi quasi aperti di B, c costante positiva in $I\!R$, $F:\mathcal{A}\to\overline{I\!R}$ monotono decrescente rispetto all'inclusione di insiemi e γ_2 semicontinuo inferiormente, è stata ottenuta come conseguenza dell'esistenza della soluzione del problema "ausiliario"

$$\min\{G(w)\ :\ w\in\mathcal{K},\quad |\{w>0\}|\le c\}, \tag{4.8.2}$$

dove $\mathcal{K}=\Big\{w\in H_0^{1,p}(B)\ :\ w\ge 0,\ \triangle w+1\ge 0\Big\}$ è l'insieme, compatto nella topologia forte di $L^2(B)$, delle soluzioni dell'equazione di Dirichlet rilassata e $G:\mathcal{K}\to\overline{I\!R}$ è un funzionale tale che:

1) G sia decrescente su $\mathcal{K}$, cioè, $G(u)\ge G(v)$ se $u\le v$ a.e. su B;

2) G sia semicontinuo inferiormente su $\mathcal{K}$ rispetto alla topologia forte di $L^2(B)$;

3) $G(w_A)=F(A)$, per ogni $A\in\mathcal{A}$, dove w_A è la soluzione dell'equazione di stato con dato $f=1$, ossia

$$\begin{cases}-\triangle u=1 & \text{in } A\\ u\in H_0^1(A).\end{cases}$$

Poichè $w_A\in\mathcal{K}$ per ogni $A\in\mathcal{A}$, il funzionale G è stato costruito considerando il rilassato dell'inviluppo monotono di F su $\mathcal{K}$, ossia

$$G(w)=\inf\left\{\liminf_{h\to+\infty}J(w_h)\ :\ \ w_h\to w\ \text{in}\ L^2(B)\right\}, \tag{4.8.3}$$

dove $J:\mathcal{K}\to\overline{I\!R}$ è il funzionale definito da

$$J(w)=\inf\{F(A)\ :\ A\in\mathcal{A}\ :w_A\le w\}. \tag{4.8.4}$$

Poichè $\mathcal{K}$ è compatto nella topologia forte di $L^2(B)$ e G è semicontinuo inferiormente rispetto a tale topologia, esiste una soluzione w_0 del problema (4.8.2). A partire da tale w_0, Buttazzo e Dal Maso hanno dimostrato che l'insieme $A_0=\{w_0>0\}$ è soluzione del problema

$$\min\{F(A)\ :\ A\in\mathcal{A},\ |A|\le c\}, \tag{4.8.5}$$

da cui segue, per la monotonia di F, l'esistenza della soluzione del problema originario (4.8.1). Infatti se A_0 è soluzione di (4.8.5), allora esiste $A\in\mathcal{A}$ tale che $A_0\subseteq A$ e $|A|=c$ (basta "allargare" un poco A_0). Poichè F è decrescente si ha

$$F(A)\le F(A_0)\le F(C)\ \ \forall C\in\mathcal{A}\text{ tale che } |C|=c, \tag{4.8.6}$$

e quindi A è la soluzione del problema (4.8.1).

Nel caso non lineare vale esattamente la stessa dimostrazione, nelle ipotesi che F sia γ_p semicontinuo inferiormente e monotono decrescente rispetto all'inclusione di insiemi. Il problema ausiliario (4.8.2) è ora definito sull'insieme

$$\mathcal{K}_p = \left\{ u \in H_0^{1,p}(B) \ : \ u \geq 0, \ 1 + \triangle_p u \geq 0 \right\}, \tag{4.8.7}$$

che coincide con l'insieme delle soluzioni rilassate dell'equazione di Dirichlet rilassata per il p-Laplaciano corrispondente al dato $f = 1$ (vedi Dal Maso e Murat [51], theorem 5.1). In altri termini $\mathcal{K}_p$ è l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$< -\triangle_p u, v > + \int_B |u|^{p-2} uv \, d\mu = \int_B v dx \quad \forall \, v \in H_0^{1,p}(B) \cap L^p_\mu(B), \tag{4.8.8}$$

dove $\mu \in \mathcal{M}_0^p(B)$ e $L^p_\mu(B) = \{u : B \to I\!R$ misurabile tale che $\int_B |u|^p d\mu < +\infty\}$. Abbiamo indicato con $\mathcal{M}_0^p(B)$ l'insieme delle misure di Borel positive che si annullano sugli insiemi di capacità positiva e tali che

$$\mu(C) = \inf \{\mu(U), \ U \text{ quasi aperto } C \subseteq U\}.$$

In questo caso $\mathcal{K}_p$ è compatto nella topologia forte di $L^p(B)$ e costruendo G come nel caso lineare ma rispetto alla topologia forte di $L^p(B)$, si ottiene ancora l'esistenza per il problema (4.8.1). Per la dimostrazione dell'esistenza è fondamentale la proprietà 3) del funzionale G (qui w_A è la soluzione dell'equazione $-\triangle_p u = 1$ in A con $u \in H_0^{1,p}(A)$). Tale proprietà si ottiene come diretta conseguenza della generalizzazione, al caso non lineare, dei lemmi 3.2, 3.3 e 3.4 di [35] dimostrati da Buttazzo e Dal Maso nel caso lineare.

Per quanto riguarda la generalizzazione del lemma 3.4, poichè la dimostrazione è essenzialmente la stessa del caso lineare, la omettiamo, mentre, per quanto riguarda la generalizzazione dei lemmi 3.2 e 3.3 rimandiamo al capitolo 5, lemmi 5.3.11 e 5.3.12.

Capitolo 5

Il problema dell'ostacolo ottimo

5.1 Introduzione

I problemi di ottimizzazione associati al problema degli ostacoli non hanno, in generale, soluzione anche se il funzionale costo ha buone proprietà. In generale, le successioni minimizzanti di ostacoli "convergono", infatti, alla soluzione di un nuovo problema che è di tipo "rilassato", la cui caratterizzazione è stata studiata da vari autori sfruttando la teoria della Γ-convergenza (vedi per esempio Attouch e Picard [2], Dal Maso [46], Dal Maso e Longo [49]). Per recuperare l'esistenza dell'ostacolo ottimo, escludendo il caso del rilassamento, si può invece restringere la classe di ostacoli ammissibili imponendo alcuni vincoli ulteriori (vedi per esempio Attouch e Picard [3], Biroli [5], Boccardo e Marcellini [6], Boccardo e Murat [7], Carbone e Colombini [37]).

Buttazzo e Dal Maso in [35] hanno dimostrato che, nel caso di problemi di ottimizzazione di forma, sotto condizioni di monotonia sul funzionale costo, si ottiene l'esistenza del dominio ottimo nella classe dei quasi aperti senza imporre vincoli ulteriori sulla classe dei domini. In questa classe di problemi rientrano, per esempio, problemi di minimizzazione di funzionali dipendenti dagli autovalori dell'operatore di Laplace con condizioni omogenee di Dirichlet al bordo. L'idea principale della dimostrazione si ottiene dalla teoria generale della Γ-convergenza ed è basata sulla descrizione della famiglia dei domini rilassati (vedi il capitolo 4 sezione 4.8).

In questo capitolo si studia un problema analogo per funzionali dipendenti da ostacoli, ma la tecnica utilizzata nel caso dei problemi di ottimizzazione di forma non è estendibile a questo caso: la principale difficoltà consiste nel fatto che, in questo caso, non si ha una caratterizzazione esatta della famiglia degli ostacoli rilassati.

Più precisamente, consideriamo il problema di ottimizzazione per ostacoli, della forma

$$\min\{F(g)\,:\,g\in X(\Omega)\} \tag{5.1.1}$$

dove F è un funzionale costo assegnato e $X(\Omega)$ è la classe degli ostacoli ammissibili. Un vincolo tipico sugli elementi di $X(\Omega)$ sarà di tipo integrale:

$$\int_\Omega g\,dx = c$$

dove c è una costante fissata.

Per provare che il problema (5.1.1) ammette soluzione, si può usare il metodo diretto del calcolo delle variazioni, ossia si deve trovare una convergenza compatta su $X(\Omega)$ che renda il funzionale costo F semicontinuo inferiormente. Questa è la più grossa difficoltà, dal momento che esiste una convergenza "naturale" su $X(\Omega)$ che rende F semicontinuo inferiormente, ma che non è compatta, a meno che non si impongano condizioni più restrittive di regolarità sugli ostacoli ammissibili. In questo capitolo cerchiamo il minimo in (5.1.1) senza ipotesi aggiuntive sulla classe degli ostacoli ammissibili, cosa che, in generale, fa perdere l'esistenza dell'ostacolo ottimo. Per questo motivo fisseremo l'attenzione su una classe speciale di funzionali costo che verificano ipotesi di monotonia. Perciò, considereremo la classe $X(\Omega)$ come uno spazio ordinato, dove l'ordine fra due ostacoli ammissibili sarà l'ordine usuale fra le funzioni.

La convergenza "naturale" su $X(\Omega)$ menzionata sopra, sarà quella associata alla Γ-convergenza dei funzionali dell'energia

$$\int_\Omega \frac{1}{p}|Du|^p dx + \chi_{\{u\geq g\}}(u) \tag{5.1.2}$$

dove $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ e, in analogia con alcuni problemi di ottimizzazione di forma già considerati in letteratura (vedi Bucur [13], Bucur, Buttazzo e Henrot [17], Bucur e Trebeschi [21] e Buttazzo e Dal Maso [35]), sarà denotata con γ. Come abbiamo già detto, questa convergenza non è compatta su $X(\Omega)$ e così , in generale, ci si può aspettare solo l'esistenza di soluzioni "rilassate" per il problema (5.1.1). Gli ostacoli rilassati, cioè, i γ-limiti di successioni di ostacoli, sono stati studiati in dettaglio da Attouch e Picard [2], Dal Maso [44] e Dal Maso e Longo [49] e sono stati caratterizzati come una sottoclasse delle terne (f, μ, ν) dove f è una funzione reale positiva su $\Omega \times I\!R$ e μ e ν sono due misure.

In questo capitolo usiamo invece un approccio diverso e introduciamo un ambiente generale astratto che consente di non usare gli ostacoli rilassati. Utilizzando le ipotesi di monotonia su F, introduciamo, infatti, una seconda convergenza, che chiameremo γ- debole, che risulta compatta e rende F ancora semicontinuo inferiormente.

I risultati di questo capitolo sono stati ottenuti in collaborazione con Dorin Bucur e Giuseppe Buttazzo (vedi [18]).

5.2 Ambiente generale e risultato principale.

In questa sezione presentiamo l'ambiente generale astratto in cui può essere ambientato il problema di minimizzazione di un funzionale monotono. Consideriamo uno spazio ordinato $(X, \leq)$ e il funzionale $F : X \to \overline{I\!R}$. Supponiamo che X abbia due convergenze denotate con γ e $w\gamma$, dove la seconda è più debole della prima ed è sequenzialmente compatta. Inoltre supponiamo che il funzionale F sia γ semicontinuo inferiormente. La relazione fra le due convergenze γ e $w\gamma$ è la seguente:

IPOTESI (A) *Per ogni $x_n \xrightarrow{w\gamma} x$ esiste una successione di interi (n_k) e una successione $(y_{n_k}) \subseteq X$ tale che $y_{n_k} \leq x_{n_k}$ e $y_{n_k} \xrightarrow{\gamma} x$.*

La monotonia di F diventa un'ipotesi importante grazie al seguente risultato.

Proposizione 5.2.1 *Se $F : X \to \overline{I\!\!R}$ è monotono crescente e γ semicontinuo inferiormente, allora F è $w\gamma$ semicontinuo inferiormente.*

Dimostrazione Consideriamo $x_n \xrightarrow{w\gamma} x$ e sia (x_{n_k}) una sottosuccessione tale che

$$\lim_{k\to+\infty} F(x_{n_k}) = \liminf_{n\to+\infty} F(x_n).$$

Usando l'ipotesi (A) sopra scritta, esiste una sottosuccessione di (x_{n_k}) (denotata per semplicità ancora con (x_{n_k})) e una successione (y_{n_k}) con $y_{n_k} \le x_{n_k}$, tale che $y_{n_k} \xrightarrow{\gamma} x$. La γ semicontinuità di F implica

$$F(x) \le \liminf_{k\to+\infty} F(y_{n_k})$$

e dalla monotonia di F segue $F(y_{n_k}) \le F(x_{n_k})$. Perciò

$$F(x) \le \liminf_{k\to+\infty} F(y_{n_k}) \le \liminf_{k\to+\infty} F(x_{n_k}) = \liminf_{n\to+\infty} F(x_n)$$

da cui la tesi. □

Consideriamo ora un altro funzionale $\Phi : X \to \overline{I\!\!R}$ e il seguente problema

$$\min\{F(x) : x \in X, \Phi(x) \le 0\}; \tag{5.2.1}$$

allora abbiamo

Teorema 5.2.2 *Sia F un funzionale crescente e γ semicontinuo inferiormente e sia Φ $w\gamma$ semicontinuo inferiormente. Sotto l'ipotesi (A) sopra scritta, il problema (5.2.1) ammette almeno una soluzione.*

Dimostrazione La dimostrazione segue direttamente dal metodo diretto del calcolo delle variazioni e dalla proposizione 5.2.1. □

L'ambiente generale astratto introdotto sopra, si applica molto bene al caso di problemi di ottimizzazione di forma e verrà applicato, in particolare, anche al caso degli ostacoli. La principale difficoltà risulta quella di identificare la $w\gamma$-convergenza e provare che l'ipotesi (A) sia verificata.

Nel caso degli ostacoli considereremo un insieme aperto limitato Ω di $I\!\!R^N$ $(N \ge 2)$, una funzione $\psi \in H_0^{1,p}(\Omega)$, la famiglia degli ostacoli ammissibili

$$X_\psi(\Omega) = \{g : \Omega \to \overline{I\!\!R} : g \le \psi, \;\; g \text{ quasi semicontinua superiormente}\}$$

e un funzionale costo $F : X_\psi(\Omega) \to \overline{I\!\!R}$ monotono crescente, cioè per ogni $g_1, g_2 \in X_\psi(\Omega)$, con $g_1 \le g_2$ si ha $F(g_1) \le F(g_2)$. Supponiamo inoltre che F sia semicontinuo inferiormente rispetto ad una opportuna γ-convergenza che risulta definita in funzione della Γ -convergenza dei funzionali di ostacolo associati (vedi la definizione 5.3.4).

Teorema 5.2.3 *Sotto le ipotesi sopra scritte, per ogni costante $c \in I\!\!R$, il problema*

$$\min\{F(g) : g \in X_\psi(\Omega), \int_\Omega g\,dx = c\}$$

ammette una soluzione.

5.3 Preliminari

In questa sezione introduciamo alcuni concetti base relativi al problema all'ostacolo. Utilizzeremo le nozioni di Γ-convergenza e capacità introdotte nel capitolo 1 sezioni 1.3 e 1.5. Ricordiamo in particolare la definizione di capacità armonica e metarmonica di un insieme rispetto ad un aperto Ω di $I\!R^N$, $N \geq 2$. Sia $p \in I\!R$, $1 < p < +\infty$. Se Ω è limitato la capacità armonica di un insieme arbitrario $E \subseteq \Omega$ è (vedi Dal Maso e De Franceschi [48])

$$p\text{-}cap\,(E, \Omega) := \inf\{\int_\Omega |Du|^p dx, \quad u \in H_0^{1,p}(\Omega), u \geq 1 \text{ su un intorno di } E\};$$

se Ω è un aperto illimitato la capacità metarmonica di un insieme arbitrario $E \subseteq \Omega$ è

$$C_p(E, \Omega) := \inf\{\int_\Omega |Du|^p dx + \int_\Omega |u|^p dx, \quad u \in H_0^{1,p}(\Omega), u \geq 1 \text{ su un intorno di } E\}.$$

Abbiamo già osservato nella sezione 1.5 che, se Ω è limitato, le due capacità $p\text{-}cap$ and C_p sono equivalenti, nel senso che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste una costante $K = K(p, \Omega, \varepsilon)$ tale che

$$p\text{-}cap\,(E, \Omega) \leq C_p(E, \Omega) \leq K\, p\text{-}cap\,(E, \Omega)$$

per ogni $E \subseteq \Omega$, $d(E, \partial\Omega) \geq \varepsilon$. Per semplicità di notazioni scriveremo $p\text{-}cap\,(E)$ e $C_p(E)$ quando l'insieme ambiente è Ω, altrimenti specificheremo per esteso l'insieme rispetto al quale si considera la capacità.

Lavoreremo in questo capitolo con gli insiemi quasi aperti (vedi la sezione 1.5). In particolare, ricordiamo che gli spazi di Sobolev sono definiti in maniera naturale sui quasi aperti (vedi Kilpelainen e Maly [58]) nel modo seguente.

Sia U un quasi aperto. Definiamo

$$H_0^{1,p}(U) = \bigcap \left\{ H_0^{1,p}(G) : \ G \text{ aperto}, \ G \supseteq U \right\}.$$

Utilizzeremo inoltre la nozione di funzione quasi continua e quasi continua superiormente: rimandiamo a Dal Maso [46], Heinonen, Kilpelainen e Martio [55] e Ziemer [66] per una trattazione approfondita.

Per una funzione quasi continua superiormente (brevemente quasi s.c.s.) $g : \Omega \to \overline{I\!R}$ definiamo l'insieme

$$K_g = \{u \in H_0^{1,p}(\Omega) : u \geq g\}.$$

La scelta degli ostacoli semicontinui superiormente è naturale, dal momento che un ostacolo arbitrario può essere sempre sostituito con un opportuno ostacolo quasi continuo superiormente. Vale infatti (vedi Dal Maso [46]) il seguente risultato:

Teorema 5.3.1 *Per ogni funzione $g : \Omega \to \overline{I\!R}$ con $K_g \neq \emptyset$ esiste una funzione $\tilde{g}$ quasi continua superiormente tale che $K_g = K_{\tilde{g}}$. La funzione $\tilde{g}$ è unica (a meno di insiemi di capacità nulla) e $\tilde{g} \geq g$ p-q.e. su Ω.*

Per ogni $f \in L^p(\Omega)$ la soluzione del problema all'ostacolo associato a f e g è data da

$$\min\{\int_\Omega \frac{1}{p}|Du|^p dx - \int_\Omega f u\, dx : u \in K_g\}. \tag{5.3.1}$$

Per f fissata, lo studio delle soluzioni del problema (5.3.1), quando l'ostacolo g varia, è fatto attraverso la teoria classica della Γ -convergenza dei funzionali dell'energia (5.1.2) (vedi per esempio, Attouch e Picard [2] e Dal Maso e Longo [49]). Per questa ragione, ricordiamo la nozione di convergenza di Mosco già introdotta nella sezione 1.6. Una successione di insiemi convessi $(G_n) \subseteq H_0^{1,p}(\Omega)$ converge nel senso di Mosco a G se

(M1) $\forall\, u \in G\ \exists\, u_n \in G_n$ tale che $u_n \to u$ fortemente in $H_0^{1,p}(\Omega)$.

(M2) $\forall\, u_{n_k} \in G_{n_k}$, $u_{n_k} \rightharpoonup u$ debolmente in $H_0^{1,p}(\Omega)$, allora $u \in G$.

Se (g_n) è una successione di ostacoli ammissibili e se (K_{g_n}) converge nel senso di Mosco a K_g, allora le soluzioni u_n del problema (5.3.1) associate a g_n convergono debolmente in $H_0^{1,p}(\Omega)$ alla soluzione di (5.3.1) corrispondente a g (vedi Mosco [60]).

Si può facilmente dimostrare che la convergenza di Mosco della successione di insiemi convessi (K_{g_n}) a K_g è equivalente alla Γ-convergenza dei funzionali energia (5.1.2) associati a g_n e g. Infatti, dalla teoria della Γ-convergenza, abbiamo che una successione di funzioni (f_h) Γ-converge a f nella topologia forte di $H_0^{1,p}(\Omega)$ se e solo se

$$\Gamma_s\text{-}\limsup_{h\to+\infty} f_h \le f \le \Gamma_w\text{-}\liminf_{h\to+\infty} f_h$$

(dove Γ_s e Γ_w sono i Γ-limiti nella topologia forte e debole di $H_0^{1,p}(\Omega)$), ossia se

(F1) $\forall\, u \in H_0^{1,p}(\Omega)\ \exists\, u_h \to u$ tale che $f(u) \ge \limsup_{h\to+\infty} f_h(u_h)$;

(F2) $\forall\, u \in H_0^{1,p}(\Omega)$, $\forall\, u_h \rightharpoonup u$ allora $f(u) \le \liminf_{h\to+\infty} f(u_h)$.

Siano ora f_h e f i funzionali dell'energia (5.1.2) associati a g_h e g rispettivamente.

Lemma 5.3.2 (M1) *è equivalente a* (F1).

Dimostrazione Supponiamo che valga (M1). Sia $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$. Se $f(u) = +\infty$, allora non c'è nulla da dimostrare. Se $f(u) < \infty$, allora $u \in K_g$ e dalla (M1) otteniamo che esiste $u_h \in K_{g_h}$ tale che $u_h \to u$. Allora

$$f_h(u_h) = \frac{1}{p}\int_\Omega |Du_h|^p dx + \chi_{K_{g_h}}(u_h) = \frac{1}{p}\int_\Omega |Du_h|^p dx \to \frac{1}{p}\int_\Omega |Du|^p dx$$

e quindi

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |Du|^p dx = \lim_{h\to+\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega |Du_h|^p dx = \limsup_{h\to+\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega |Du_h|^p dx,$$

cioè vale (F1).

Supponiamo ora che valga (F1). Sia $u \in K_g$, da cui $f(u) < +\infty$. Per la (F1) esiste $u_h \to u$ tale che $\limsup_{h\to+\infty} f(u_h) \le f(u) < +\infty$. Allora $u_h \in K_{g_h}$, ossia vale (M1). □

Lemma 5.3.3 (M2) *è equivalente a* (F2).

Dimostrazione Supponiamo che valga (M2). Sia $u \in H_0^{1,p}(\Omega)$ e sia $u_h \rightharpoonup u$. Osserviamo che se $\liminf_{h\to+\infty} f_h(u_h) = +\infty$, non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo quindi che $\liminf_{h\to+\infty} f_h(u_h) < +\infty$, ossia $u_h \in K_{g_h}$. Per ipotesi vale (M2) e quindi $u \in K_g$. Allora

$$f(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |Du|^p dx + \chi_{K_g}(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |Du|^p dx \leq \liminf_{h\to+\infty} \frac{1}{p}\int_\Omega |Du_h|^p dx,$$

cioè vale (F2).

Viceversa, sia $u_h \in K_{g_h}$ tale che $u_h \rightharpoonup u$. Dobbiamo dimostrare che $u \in K_g$. Per ipotesi vale (F2), quindi:

$$f(u) \leq \liminf_{h\to+\infty} f_h(u_h) = \frac{1}{p}\int_\Omega |Du_h|^p dx < +\infty,$$

cioè $u \in K_g$. □

Definizione 5.3.4 *Diciamo che* (g_n) γ*-converge a* g *se* (K_{g_n}) *converge nel senso di Mosco a* K_g.

Osservazione 5.3.5 Poichè la Γ-convergenza di funzionali equicoercivi è metrizzabile segue che la γ-convergenza degli ostacoli è metrizzabile.

Ricordiamo ora il seguente risultato ottenuto da Dal Maso [46].

Lemma 5.3.6 *Siano* g_n, g *funzioni quasi semicontinue superiormente, con* $g_n : \Omega \to \overline{I\!R}$. *Allora* $g_n \xrightarrow{\gamma} g$ *e* $K_g \neq \emptyset$ *se e solo se*

1. *esiste* $T \subseteq]0,+\infty[$ *con* $0 \in \overline{T}$ *tale che per ogni* $t \in T$
$$\lim_{n\to+\infty} C_p(\{g_n > t\}) = C_p(\{g > t\});$$

2. *esiste un insieme denso* $D \subseteq I\!R$ *e un insieme denso* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ *tale che per ogni* $t \in D$ *e per ogni* $B \in \mathcal{B}$
$$\lim_{n\to+\infty} C_p(\{g_n > t\} \cap B) = C_p(\{g > t\} \cap B);$$

3. $\lim_{t\to+\infty} \limsup_{n\to+\infty} \int_t^{+\infty} C_p(\{g_n > s\})(s-t)^{p-1} ds = 0$;

4. $\lim_{t\to 0} \limsup_{n\to+\infty} \int_0^t C_p(\{g_n > s\}) s^{p-1} ds = 0$.

Osserviamo che quando si sostituisce nel risultato sopra scritto la capacità metarmonica C_p con la capacità armonica *p-cap*, l'analogo del lemma 5.3.6 può non essere più vero (vedi Dal Maso [46], theorem 5.6 e 5.9).

Studieremo il caso degli ostacoli attraverso lo studio degli insiemi di livello $\{g < t\}$ per $t \in \mathbb{R}$, che sono insiemi quasi aperti . Ricordiamo così alcuni risultati validi per gli insiemi quasi aperti.

In analogia col caso degli aperti, si dice che una successione di insiemi quasi aperti (A_n) γ_p-converge a un quasi aperto A, se gli spazi di Sobolev $\left(H_0^{1,p}(A_n)\right)$ convergono nel senso di Mosco a $H_0^{1,p}(A)$.

Definiamo una γ_p-convergenza debole (denotata semplicemente con $w\gamma_p$) per i domini sfruttando la nozione introdotta da Bucur, Buttazzo e Henrot in [17] nel modo seguente: (A_n) γ_p-converge debolmente a un quasi aperto A, se $w_{A_n} \rightharpoonup w$ debolmente in $H_0^{1,p}(\Omega)$ e $A = \{w > 0\}$. Qui w_A è la soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta_p w_A = 1 & \text{in } A \\ w_A \in H_0^{1,p}(A). \end{cases} \tag{5.3.2}$$

La γ_p-convergenza di una successione di domini è equivalente (vedi il capitolo 4 per il caso degli aperti; il risultato si estende nello stesso modo al caso dei quasi aperti) alla convergenza forte di w_{A_n} a w_A in $H_0^{1,p}(\Omega)$. Tuttavia, abbiamo visto nel capitolo 2 teorema 2.2.12 che Dal Maso e Dal Maso e De Franceschi in [43], [48] hanno caratterizzato la γ_p-convergenza in funzione del comportamento locale della capacità. Se Ω è un insieme aperto e limitato di $\mathbb{R}^N$ e A_n e A sono insiemi quasi aperti di Ω, allora $A_n \xrightarrow{\gamma_p} A$ se e solo se esiste un insieme denso $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ tale che

$$\lim_{n\to+\infty} p\text{-}cap\,(A_n^c \cap B) = p\text{-}cap\,(A^c \cap B) \tag{5.3.3}$$

per ogni $B \in \mathcal{B}$. Se Ω è illimitato, lo stesso risultato è vero se nella relazione (5.3.3) si usa la capacità metarmonica C_p (vedi Dal Maso [43]). Per poter applicare il lemma 5.3.6 per un aperto limitato Ω, utilizzando la capacità metarmonica, dimostriamo i seguenti lemmi preliminari.

Lemma 5.3.7 *Siano Ω, Ω' insiemi aperti tali che $d(\Omega, \Omega') > 0$. Se $F \subseteq \Omega$ e $F' \subseteq \Omega'$, allora*

$$C_p(F \cup F', \Omega \cup \Omega') = C_p(F, \Omega) + C_p(F', \Omega').$$

Dimostrazione Dimostriamo che $C_p(F \cup F', \Omega \cup \Omega') \leq C_p(F, \Omega) + C_p(F', \Omega')$. Per la subadditività della capacità e per il teorema 1.5.3 parte (b) abbiamo che

$$C_p(F \cup F', \Omega \cup \Omega') \leq C_p(F, \Omega \cup \Omega') + C_p(F', \Omega \cup \Omega') \leq C_p(F, \Omega) + C_p(F', \Omega').$$

Dimostriamo ora che vale la disuguaglianza opposta. Sia φ che realizza $C_p(F \cup F', \Omega \cup \Omega')$, cioè $\varphi \geq 1$ su $F \cup F'$, $\varphi \in H_0^{1,p}(\Omega \cup \Omega')$. Allora , grazie all'ipotesi $d(\Omega, \Omega') > 0$, abbiamo che $\varphi \in H_0^{1,p}(\Omega)$ e $\varphi \in H_0^{1,p}(\Omega')$. Per definizione di estremo inferiore si ha che per ogni $\varepsilon > 0$

$$\int_{\Omega\cup\Omega'} |D\varphi|^p dx + \int_{\Omega\cup\Omega'} |\varphi|^p dx \leq C_p(F \cup F', \Omega \cup \Omega') + \varepsilon.$$

Considerando separatamente $\varphi|_F$ e $\varphi|_{F'}$ abbiamo

$$C_p(F,\Omega) \le \int_\Omega |D\varphi|_F|^p dx + \int_\Omega |\varphi|_F|^p dx,$$

$$C_p(F',\Omega') \le \int_\Omega |D\varphi|_{F'}|^p dx + \int_\Omega |\varphi|_{F'}|^p dx,$$

da cui

$$C_p(F,\Omega) + C_p(F',\Omega') \le \int_{\Omega\cup\Omega'} |D\varphi|^p dx + \int_{\Omega\cup\Omega'} |\varphi|^p dx \le C_p(F\cup F', \Omega\cup\Omega') + \varepsilon.$$

Dall'arbitrarietà di ε segue quindi la tesi. □

Lemma 5.3.8 *Siano Ω, Ω' due insiemi aperti tali che $d(\Omega,\Omega') > 0$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) esiste $\tilde{\mathcal{B}}$ denso in $\mathcal{P}(\Omega\cup\Omega')$;

(ii) esiste $\mathcal{B}$ denso in $\mathcal{P}(\Omega)$.

Dimostrazione Supponiamo che valga (i). Allora basta considerare $\mathcal{B} = (\tilde{\mathcal{B}}\cap\Omega)$ che è densa in $\mathcal{P}(\Omega)$. Viceversa, se esiste $\mathcal{B}$, allora basta considerare $\tilde{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}\cup\Omega')$ che è densa in $\mathcal{P}(\Omega\cup\Omega')$. □

Lemma 5.3.9 *Siano Ω, Ω' due insiemi aperti tali che $d(\Omega,\Omega') > 0$. Siano $A_n, A \subseteq \Omega$ quasi aperti. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) esiste $\tilde{\mathcal{B}}$ denso in $\mathcal{P}(\Omega\cup\Omega')$ tale che

$$C_p(A_n^c\cap\tilde{B}, \Omega\cup\Omega') \to C_p(A^c\cap\tilde{B}, \Omega\cup\Omega') \quad \textit{per ogni } \tilde{B}\in\tilde{\mathcal{B}};$$

(ii) esiste $\mathcal{B}$ denso in $\mathcal{P}(\Omega)$ tale che

$$C_p(A_n^c\cap B, \Omega) \to C_p(A^c\cap B, \Omega) \quad \textit{per ogni } B\in\mathcal{B}.$$

Dimostrazione Supponiamo che valga (i). Osserviamo che $A_n^c = (\Omega\setminus A_n)\cup\Omega'$. Allora, riscrivendo la (i), si ha

$$C_p\left([(\Omega\setminus A_n)\cup\Omega']\cap\tilde{B}, \Omega\cup\Omega'\right) \to C_p\left([(\Omega\setminus A)\cup\Omega']\cap\tilde{B}, \Omega\cup\Omega'\right). \tag{5.3.4}$$

D'altra parte

$$C_p\left([(\Omega\setminus A_n)\cup\Omega']\cap\tilde{B}, \Omega\cup\Omega'\right) = C_p\left([(\Omega\setminus A_n)\cap\tilde{B}]\cup(\Omega'\cap\tilde{B}), \Omega\cup\Omega'\right).$$

Ora, osservando che $F = (\Omega\setminus A_n)\cap\tilde{B}$ e $F' = \Omega'\cap\tilde{B}$ soddisfano le ipotesi del lemma 5.3.7, si ha

$$C_p\left([(\Omega\setminus A_n)\cup\Omega']\cap\tilde{B}, \Omega\cup\Omega'\right) = C_p\left((\Omega\setminus A_n)\cap\tilde{B}, \Omega\right) + C_p(\Omega'\cap\tilde{B}, \Omega').$$

Analogamente

$$C_p\left([(\Omega\setminus A)\cup\Omega']\cap\tilde{B},\Omega\cup\Omega'\right)=C_p\left((\Omega\setminus A)\cap\tilde{B},\Omega\right)+C_p(\Omega'\cap\tilde{B},\Omega').$$

Quindi, riscrivendo la (5.3.4), si ha

$$C_p\left((\Omega\setminus A_n)\cap\tilde{B},\Omega\right)+C_p(\Omega'\cap\tilde{B},\Omega')\to C_p\left((\Omega\setminus A)\cap\tilde{B},\Omega\right)+C_p(\Omega'\cap\tilde{B},\Omega'),$$

da cui, essendo $C_p(\Omega'\cap\tilde{B},\Omega')$ costante, segue

$$C_p\left((\Omega\setminus A_n)\cap\tilde{B},\Omega\right)\to C_p\left((\Omega\setminus A)\cap\tilde{B},\Omega\right)\ \forall\,\tilde{B}\subseteq\tilde{\mathcal{B}}$$

dove $\tilde{\mathcal{B}}$ è densa in $\mathcal{P}(\Omega\cup\Omega')$. Infine, grazie al lemma 5.3.8, esiste $\mathcal{B}$ densa in $\mathcal{P}(\Omega)$ tale che $C_p\left((\Omega\setminus A_n)\cap B,\Omega\right)\to C_p\left((\Omega\setminus A)\cap B,\Omega\right)$ per ogni $B\subseteq\mathcal{B}$, che conclude la dimostrazione. $\square$

Siamo ora in grado di poter esprimere indifferentemente la γ_p-convergenza di quasi aperti in un insieme limitato Ω sia in termini della capacità armonica che metarmonica. Vale infatti il seguente risultato.

Lemma 5.3.10 *Sia Ω un insieme aperto limitato di $I\!R^N$ e siano A_n, A quasi aperti di Ω. Allora $A_n\stackrel{\gamma_p}{\to}A$ se e solo se esiste un insieme denso $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(\Omega)$ tale che*

$$\lim_{n\to+\infty}C_p(A_n^c\cap B)=C_p(A^c\cap B)\ \text{ per ogni } B\in\mathcal{B}. \tag{5.3.5}$$

Dimostrazione La dimostrazione del lemma segue dal risultato di Dal Maso [46] per un insieme Ω non limitato e dai lemmi precedenti. L'idea, infatti, è di vedere la successione (A_n) di sottoinsiemi di Ω, come una successione di sottoinsiemi di $\Omega\cup\Omega'$, dove Ω' è un aperto non limitato tale $d(\Omega,\Omega')>0$. Allora la tesi segue facilmente dai lemmi 5.3.7, 5.3.8 e 5.3.9. $\square$

Il risultato del lemma 5.3.10 ci consente di riformulare il lemma 5.3.6 solo in termini della γ_p-convergenza degli insiemi di livello nella famiglia degli ostacoli che sono limitati uniformemente dall'alto (vedi la proposizione 5.4.2).

Per poter risolvere il problema di minimizzazione, presentiamo alcuni risultati sugli insiemi quasi aperti, che risulteranno essenziali per la dimostrazione dell'esistenza dell'ostacolo ottimale. Iniziamo col dimostrare un risultato simile all'ipotesi (A) per quasi aperti, che è una generalizzazione del risultato provato da Buttazzo e Dal Maso in [35] per $p=2$ (vedi anche Bucur [13], Bucur, Buttazzo e Henrot [17]). Ricordiamo inizialmente il seguente Lemma (vedi Buttazzo e Dal Maso [35] e Bucur [13]).

Lemma 5.3.11 *Sia (A_n) una successione di sottoinsiemi quasi aperti di Ω e sia $w\in H_0^{1,p}(\Omega)$ una funzione tale che $w_{A_n}\rightharpoonup w$ in $H_0^{1,p}(\Omega)$. Sia $u_n\in H_0^{1,p}(\Omega)$ tale che $u_n=0$ p-q.e. su $\Omega\setminus A_n$ e supponiamo che $u_n\rightharpoonup u$ in $H_0^{1,p}(\Omega)$. Allora $u=0$ p-q.e. su $\{w=0\}$.*

Dimostrazione Cominciamo innanzi tutto ad osservare che per ogni quasi aperto A la misura $\infty_{\Omega\setminus A}$ è in $\mathcal{M}_0^p(B)$ (vedi Dal Maso [43] Remark 3.3) e quindi, per ogni $n \in I\!N$, si possono utilizzare per le misure $\infty_{\Omega\setminus A_n}$ i risultati di Dal Maso e De Franceschi [48] e di Dal Maso e Murat [51]. In particolare, vedi Dal Maso e De Franceschi [48] theorem 2.1, si ha che i funzionali

$$F_n(u) = \int_\Omega |Du|^p dx + \chi_{H_0^{1,p}(A_n)}(u)$$

Γ-convergono, nella topologia debole di $H_0^{1,p}(B)$, al funzionale

$$F(u) = \int_\Omega |Du|^p dx + \int_\Omega |u|^p d\mu$$

dove $\mu \in \mathcal{M}_0^p(\Omega)$. Detto w il punto di minimo del funzionale F, allora $w_{A_n} \rightharpoonup w$ e per i teoremi 5.1 e 6.3 di Dal Maso e Murat [51] si ha che μ è una misura di Borel che si annulla sugli insiemi di capacità nulla ed è definita da

$$\mu(C) = \begin{cases} \int_\Omega \frac{d\nu}{w^{p-1}} & \text{se } C_p(C \cap \{w=0\}) = 0 \\ +\infty & \text{se } C_p(C \cap \{w>0\}) > 0, \end{cases}$$

con $\nu = 1 + \triangle_p w$. Consideriamo ora $u_n \rightharpoonup u$ in $H_0^{1,p}(\Omega)$ con $u_n = 0$ p-q.e. su $\Omega \setminus A_n$. Allora $u_n \in H_0^{1,p}(A_n)$ e dalla Γ-convergenza si ha

$$F(u) \le \liminf_{n\to+\infty} F_n(u_n) < +\infty$$

e quindi

$$\int_\Omega |u|^p d\mu < +\infty.$$

Essendo $w \ge 0$ (poichè è il limite a.e. di una successione di funzioni positive), si ha

$$\int_\Omega |u|^p d\mu = \int_{\{w>0\}} |u|^p d\mu + \int_{\{w=0\}} |u|^p d\mu.$$

Se $u > 0$ su $C \cap \{w=0\}$ dove C è un insieme di Borel tale che $C_p(C \cap \{w=0\}) > 0$, allora per il lemma 5.3 di Dal Maso e Murat [51] si ha

$$\int_{\{w=0\}} |u|^p d\mu = +\infty,$$

e si giunge quindi ad una contraddizione. Si ha quindi che $u = 0$ p-q.e. su $\{w=0\}$. □

Nel caso dei domini l'ipotesi (A) è verificata, come mostra il seguente lemma.

Lemma 5.3.12 *Sia (A_n) una successione di quasi aperti che γ_p-converge debolmente a un quasi aperto A. Allora esiste una sottosuccessione (A_{n_k}) e una successione di quasi aperti $(G_k) \subseteq \Omega$ con $A_{n_k} \subseteq G_k$ e (G_k) γ_p-converge a A.*

Dimostrazione Dalla definizione di γ_p-convergenza debole abbiamo che $w_{A_n} \rightharpoonup w$ debolmente in $H_0^{1,p}(\Omega)$ e $A = \{w > 0\}$. Seguendo Dal Maso e Murat [51] segue che $w \leq w_A$. Per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo il seguente insieme p-quasi aperto $A^\varepsilon = \{w_A > \varepsilon\}$ (vedi Buttazzo e Dal Maso [35] per il caso lineare $p = 2$). Per una sottosuccessione, denotata ancora con gli stessi indici, possiamo supporre che $w_{A_n \cup A^\varepsilon} \rightharpoonup w^\varepsilon$ debolmente in $H_0^{1,p}(\Omega)$ e per il principio del confronto abbiamo che $w^\varepsilon \geq u_{A^\varepsilon}$. Ma $w^\varepsilon \in H_0^{1,p}(A)$ per la convergenza di Mosco di $(A_n \cup A^\varepsilon)$. Infatti, se definiamo $v^\varepsilon = 1 - \frac{1}{\varepsilon}\min\{w_A, \varepsilon\}$, otteniamo $0 \leq v^\varepsilon \leq 1$ e $v^\varepsilon = 0$ su A^ε, $v^\varepsilon = 1$ su $\Omega \setminus A$. Prendendo $w_n = \min\{v^\varepsilon, w_{A_n \cup A^\varepsilon}\}$, otteniamo $w_n = 0$ su A^ε, $w_n = 0$ su $\Omega \setminus (A_n \cup A^\varepsilon)$ e in particolare su $\Omega \setminus A_n$. Inoltre, $w_n \rightharpoonup \min\{v^\varepsilon, w^\varepsilon\}$ debolmente in $H_0^{1,p}(\Omega)$ e, quindi, dal lemma 5.3.11, segue che $\min\{v^\varepsilon, w^\varepsilon\} = 0$ p-q.e. su $\{w = 0\}$. Dal momento che $v^\varepsilon = 1$ su $\Omega \setminus A$, otteniamo che $w^\varepsilon = 0$ p-q.e. su $\Omega \setminus A$. Dal teorema 5.1 di Dal Maso e Murat [51] (vedi anche Buttazzo e Dal Maso [35]) e dal fatto che $-\Delta_p w_{A_n \cup A^\varepsilon} \leq 1$ in Ω, segue $-\Delta_p w^\varepsilon \leq 1$ e quindi $w^\varepsilon \leq w_A$. Perciò $w_{A^\varepsilon} \leq w^\varepsilon \leq w_A$ e con un procedimento diagonale, si ottiene che

$$w_{A_n \cup A^{\varepsilon_n}} \rightharpoonup w_A \quad \text{debolmente in } H_0^{1,p}(\Omega).$$

Per concludere è sufficiente scegliere $G_n = A_n \cup A^{\varepsilon_n}$. □

Osservazione 5.3.13 Nel lemma sopra scritto si possono prendere gli insiemi G_n aperti, grazie al fatto che ogni insieme quasi aperto è approssimato dall'esterno, in capacità, con una famiglia di aperti.

In generale l'unione di una famiglia qualsiasi di quasi aperti non è un insieme quasi aperto. Dimostriamo, invece, che l'unione di una famiglia crescente di quasi aperti è un quasi aperto e la famiglia γ_p- converge all'unione. Per dimostrare tale risultato utilizzeremo alcuni risultati di Kilpelainen e Maly [58].

Definizione 5.3.14 *Sia $U \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme quasi aperto. Si dice che V è un sottoinsieme $(1,p)$-stretto di U se V è quasi aperto, $V \subseteq U$ e esiste una funzione quasi continua $u \in H^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tale che $0 \leq u \leq 1$, $u = 0$ fuori di U e $u = 1$ su V.*

Sia $U \subseteq \mathbb{R}^N$ un quasi aperto. Denotiamo con $\mathcal{D}(U)$ l'insieme di tutte le funzioni quasi continue da $H^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ che si annullano fuori di un insieme $V \subset\subset U$ che sia un sottoinsieme $(1,p)$-stretto di U. La classe $\mathcal{D}(U)$ è quindi costituita dalle funzioni quasi continue in $H^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ che si annullano al di fuori di qualche sottoinsieme di U che sia "sufficientemente lontano dal complementare di U".

Denotiamo inoltre con $\mathcal{Q}(U)$ l'insieme di tutte le funzioni quasi continue su un quasi aperto U.

Definizione 5.3.15 *Una famiglia $\mathcal{B}$ di quasi aperti si dice un quasi ricoprimento di un insieme E se l'unione B di qualche sottofamiglia numerabile di $\mathcal{B}$ è tale che $C_p(E \setminus B) = 0$.*

Lemma 5.3.16 *(vedi [58] lemma 2.4) Supponiamo che $g \in \mathcal{D}(U)$ e che (U_α) sia un quasi ricoprimento di U di quasi aperti di U. Allora esiste una successione $(g_j) \in H_0^{1,p}(U)$ convergente a g in $H_0^{1,p}(U)$ tale che ogni g_j è una somma finita di funzioni da $\bigcup_\alpha \mathcal{D}(U_\alpha)$ e* $\sup|g_j| \leq \sup|g|$. *Inoltre, se $g \geq 0$, allora $g_j \geq 0$.*

Teorema 5.3.17 *Sia u una funzione su $\mathbb{R}^N$, $u \in H^{1,p}(U) \cap \mathcal{Q}(U)$ e $u = 0$ su $\mathbb{R}^N \setminus U$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) $u \in H_0^{1,p}(U)$;

(ii) u *è quasi continua in* $\mathbb{R}^N$;

(iii) u *appartiene alla chiusura di* $\mathcal{D}(U)$ *in* $H^{1,p}(U)$.

Vale inoltre, vedi Kilpelainen e Maly [58], il seguente teorema.

Teorema 5.3.18 *L'unione numerabile di quasi aperti è un quasi aperto.*

Utilizzando i risultati sopra scritti possiamo dimostrare il seguente teorema.

Teorema 5.3.19 *Sia $\tau \in \mathbb{R}$ e sia D un denso di $\mathbb{R}$. Sia (A_t) con $t \in D$, $t \leq \tau$ una famiglia crescente di quasi aperti (cioè, se $t_1 \leq t_2$ allora $A_{t_1} \subseteq A_{t_2}$). Allora*

(i) $\bigcup_{t \in D, t \leq \tau} A_t$ *è quasi aperto;*

(ii) $A_t \xrightarrow{\gamma_p} \bigcup_{t \in D, t \leq \tau} A_t$.

Dimostrazione Dimostriamo (i). Osserviamo che se

$$\bigcup_{t \in D, t \leq \tau} A_t = \bigcup_{t_n \in D, t_n \leq \tau, t_n \uparrow \tau} A_{t_n}, \tag{5.3.6}$$

essendo il secondo membro un'unione numerabile di quasi aperti, dal teorema 5.3.18, segue la tesi. Dimostriamo che vale l'uguaglianza (5.3.6) facendo vedere che valgono contemporaneamente le due inclusioni.
Passo 1: $\bigcup_{t_n \in D, t_n \leq \tau, t_n \uparrow \tau} A_{t_n} \subseteq \bigcup_{t \in D, t \leq \tau} A_t$. L'inclusione è ovvia.
Passo 2: $\bigcup_{t \in D, t \leq \tau} A_t \subseteq \bigcup_{t_n \in D, t_n \leq \tau, t_n \uparrow \tau} A_{t_n}$. Sia $t_0 \in D$ con $t_0 \leq \tau$. Allora esiste $\overline{t}_n \in D$ tale che $t_0 \leq \overline{t}_n \leq \tau$ (per la densità di D). Per la monotonia della famiglia (A_t) segue che $A_{t_0} \subseteq A_{\overline{t}_n}$ e quindi

$$A_{t_0} \subseteq \bigcup_{t_n \in D, t_n \leq \tau, t_n \uparrow \tau} A_{t_n}.$$

Dimostriamo ora (ii). Grazie al punto (i) è sufficiente dimostrare che

$$A_{t_n} \xrightarrow{\gamma_p} \bigcup_{t_n \in D, t_n \leq \tau, t_n \uparrow \tau} A_{t_n}.$$

Poniamo $U = \bigcup_{t_n \in D, t_n \leq \tau, t_n \uparrow \tau} A_{t_n}$ e ricordiamo che $A_{t_n} \xrightarrow{\gamma_p} U$ se e solo se

(M1) $\forall \varphi \in H_0^{1,p}(U)\ \exists \varphi_n \in H_0^{1,p}(A_{t_n})$ tale che $\varphi_n \to \varphi$;

(M2) $\forall \varphi_{n_k} \in H_0^{1,p}(A_{t_{n_k}})$ con $\varphi_{n_k} \rightharpoonup \varphi$, allora $\varphi \in H_0^{1,p}(U)$.

Osserviamo che (M2) è ovvia per la monotonia degli A_{t_n}. Infatti ogni $\varphi_{n_k} \in H_0^{1,p}(A_{t_{n_k}}) \subseteq H_0^{1,p}(U)$. Allora se $\varphi_{n_k} \rightharpoonup \varphi$, segue banalmente che $\varphi \in H_0^{1,p}(U)$.

Rimane quindi da dimostrare che vale (M1). Dal teorema 5.3.17 sappiamo che $\mathcal{D}(U)$ è denso in $H_0^{1,p}(U)$. Allora è sufficiente dimostrare che vale (M1) per $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Sia $\varphi \in \mathcal{D}(U)$. Gli insiemi $(A_{t_n}), t_n \in D, t_n \leq \tau, t_n \uparrow \tau$ costituiscono un quasi ricoprimento di U (infatti la loro unione ricopre U a meno di insiemi di capacità nulla) e quindi, dal lemma 5.3.16 abbiamo che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ esiste $\varphi_n \to \varphi$, dove

$$\varphi_n = \varphi_n^1 + \varphi_n^2 + \ldots + \varphi_n^k$$

con $\varphi_n^1 \in H_0^{1,p}(A_{t_n}^{j_1})$ per qualche $j_1,\ldots,$ $\varphi_n^k \in H_0^{1,p}(A_{t_n}^{j_k})$ per qualche j_k. Ora, sfruttando la monotonia della famiglia (A_{t_n}), si ha che esiste $\overline{n}$ tale che

$$H_0^{1,p}(A_{t_n}^{j_1}), \cdots, H_0^{1,p}(A_{t_n}^{j_k}) \subseteq H_0^{1,p}(A_{t_{\overline{n}}}).$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(U)\ \exists\ \varphi_n : \varphi_n \to \varphi,\ \ \varphi_n \in H_0^{1,p}(A_{t_{\overline{n}}}).$$

Per concludere, bisogna dimostrare che $\varphi_n \in H_0^{1,p}(A_{t_n})$ per ogni n. Questo segue direttamente dalla monotonia degli (A_{t_n}). Infatti si possono facilmente riordinare le funzioni φ_n in modo che ogni elemento stia in $H_0^{1,p}(A_{t_n})$. □

5.4 Il problema dell'ostacolo

In questa sezione definiamo la $w\gamma$-convergenza per gli ostacoli e dimostriamo che l'ipotesi (A) è soddisfatta per questa convergenza.

Lemma 5.4.1 *Per ogni $B \subseteq \Omega$ e per ogni funzione g quasi semicontinua superiormente esiste un insieme al più numerabile $D(B)$ in $I\!R$ tale che*

$$C_p(\{g > t\} \cap B) = C_p(\{g \geq t\} \cap B) \quad \textit{per ogni} \ \ t \in I\!R \setminus D(B).$$

Dimostrazione Fissiamo $B \subseteq \Omega$ e scegliamo per ogni $t \in I\!R$

$$U_t = \{g > t\} \cap B,\ \ \tilde{U}_t = \{g \geq t\} \cap B.$$

Abbiamo $U_t \subseteq \tilde{U}_t$, da cui segue

$$C_p(U_t) \leq C_p(\tilde{U}_t) \quad \forall\, t \in I\!R. \tag{5.4.1}$$

La funzione $t \to C_p(\tilde{U}_t)$ è decrescente in t, così è continua su $N = I\!R \setminus D(B)$, con $D(B) \subseteq I\!R$ al più numerabile. Fissiamo $\tau \in N$. Per ogni $t \in I\!R$ tale che $\tau < t$, abbiamo $C_p(U_\tau) \geq C_p(U_t)$; allora, per $t \to \tau$, segue

$$C_p(U_\tau) \geq C_p(\tilde{U}_\tau). \tag{5.4.2}$$

Ora da (5.4.1) e (5.4.2) si deduce

$$C_p(U_\tau) = C_p(\tilde{U}_\tau) \quad \forall\, \tau \in N,$$

che conclude la dimostrazione. □

La seguente proposizione è un'utile caratterizzazione della γ- convergenza di una successione di ostacoli in funzione del comportamento degli insiemi di livello. Essa afferma che una successione di ostacoli è γ-convergente se e solo se i suoi insiemi di livello sono insiemi quasi aperti γ_p-convergenti.

Proposizione 5.4.2 *Siano $g_n, g \in X_\psi(\Omega)$. Allora $g_n \xrightarrow{\gamma} g$ se e solo se esiste un insieme $T \subseteq I\!R$ tale che $I\!R \setminus T$ è al più numerabile e*

$$\{g_n < t\} \xrightarrow{\gamma_p} \{g < t\} \quad \textit{per ogni} \;\; t \in T.$$

Dimostrazione La dimostrazione si basa sul lemma 5.3.6 e sul lemma 5.3.10. Supponiamo che $g_n \xrightarrow{\gamma} g$. Seguendo il lemma 5.3.6 esiste un insieme denso $T \subseteq \overline{I\!R}$ con $\overline{I\!R} \setminus T$ al più numerabile e una famiglia numerabile e densa $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ tale che

$$\lim_{n \to +\infty} C_p(\{g_n > t\} \cap B) = C_p(\{g > t\} \cap B)$$

per ogni $t \in T$ e per ogni $B \in \mathcal{B}$. Dal lemma 5.4.1 segue che, per ogni $B_k \in \mathcal{B}$ e per ogni $n \in I\!N$, la famiglia dei $t \in I\!R$ tali che

$$C_p(\{g_n > t\} \cap B_k) \neq C_p(\{g_n \geq t\} \cap B_k)$$

è al più numerabile. Perciò, eliminando tutti i $t \in T$ per ogni $k, n \in I\!N$ per cui sussite la relazione sopra scritta, si può trovare un insieme T' tale che $I\!R \setminus T'$ è al più numerabile e tale che

$$\lim_{n \to +\infty} C_p(\{g_n \geq t\} \cap B) = C_p(\{g \geq t\} \cap B)$$

per ogni $t \in T'$ e per ogni $B \in \mathcal{B}$. Usando il lemma 5.3.10 si ha che per ogni $t \in T'$ $\{g_n < t\} \xrightarrow{\gamma_p} \{g < t\}$. Dal momento che T' è denso in $\overline{I\!R}$ concludiamo la parte relativa alla condizione necessaria.

Supponiamo ora che, per una famiglia $T \subseteq \overline{I\!R}$ tale che $I\!R \setminus T$ è al più numerabile, si abbia $\{g_n < t\} \xrightarrow{\gamma_p} \{g < t\}$. Proviamo che le condizioni $1), 2), 3), 4)$ del lemma 5.3.6 sono soddisfatte. Dal fatto che $g_n, g \leq \psi$ le condizioni 3) e 4) sono verificate. Seguendo il lemma 5.3.10 la condizione 2) è vera (basta eliminare ancora la famiglia al più numerabile di $t \in I\!R$ tali che $C_p(\{g_n > t\} \cap B_k) \neq C_p(\{g_n \geq t\} \cap B_k)$. Rimane da provare che vale 1).

Fissiamo un $t > 0$ e sia $K_t = \{\psi \geq t\}$ il sottoinsieme quasi chiuso di Ω. Dal momento che $g_n \leq \psi$ abbiamo

$$C_p(\{g_n \geq t\} \cap K_t) = C_p(\{g_n \geq t\}).$$

L'idea è di trovare un insieme $B \in \mathcal{B}$ "compreso" fra K_t e Ω; questo non è immediato, dal momento che K_t non è chiuso, ma solo quasi chiuso, tuttavia, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un insieme chiuso $K_\varepsilon \subseteq K_t$ tale che $C_p(K_t \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$. Allora

$$|C_p(\{g_n \geq t\} \cap K_t) - C_p(\{g_n \geq t\} \cap K_\varepsilon)| \leq C_p(K_t \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Scegliendo un insieme $B \in \mathcal{B}$ tale che $K_\varepsilon \subseteq B \subseteq \Omega$ e per il quale

$$C_p(\{g_n > t\} \cap B) \to C_p(\{g > t\} \cap B),$$

allora

$$|C_p(\{g > t\}) - C_p(\{g_n > t\})| = |C_p(\{g > t\} \cap K_t) - C_p(\{g_n > t\} \cap K_t)| \leq$$
$$\leq |C_p(\{g > t\} \cap K_t) - C_p(\{g > t\} \cap B)| +$$
$$+ |C_p(\{g > t\} \cap B) - C_p(\{g_n > t\} \cap B)| + |C_p(\{g_n > t\} \cap K_t) - C_p(\{g_n > t\} \cap B)|.$$

Il primo e l'ultimo termine del membro destro sono minori di ε per la scelta di B e il secondo termine si annulla per $n \to +\infty$. Quindi si ha

$$\lim_{n \to +\infty} C_p(\{g_n > t\}) = C_p(\{g > t\}).$$

Il punto 1) del lemma 5.3.6 è quindi verificato, da cui segue la tesi. □

Osservazione 5.4.3 La famiglia $\mathbb{R} \setminus T$ nella proposizione precedente può essere sostituita con una più piccola, per esempio con un qualsiasi insieme denso di $\mathbb{R}$.

Corollario 5.4.4 *Siano $g_n, g \in X_\psi(\Omega)$. Allora $g_n \xrightarrow{\gamma} g$ se e solo se esiste un insieme denso $D \subseteq \mathbb{R}$ tale che*

$$\{g_n < t\} \xrightarrow{\gamma_R} \{g < t\} \quad \textit{per ogni} \;\; t \in D. \tag{5.4.3}$$

Dimostrazione Per la parte relativa alla condizione necessaria si veda il primo passo della proposizione 5.4.2. Viceversa, supponiamo che (5.4.3) sia soddisfatta per un insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ denso. Proviamo che (5.4.3) vale per $t \in T$ dove $\mathbb{R} \setminus T$ è un insieme al più numerabile (da cui, per la proposizione 5.4.2, $g_n \xrightarrow{\gamma} g$).

Per ogni $t \in \mathbb{R}$, eventualmente passando a sottosuccessioni, si ha $w_{\{g_{n_k} < t\}} \rightharpoonup u_t$ debolmente in $H_0^{1,p}(\Omega)$ per una opportuna funzione u_t. È sufficiente dimostrare allora che $u_t = w_{\{g<t\}}$ a meno di un insieme al più numerabile di $t \in \mathbb{R}$.

Per ipotesi, D è denso in $\mathbb{R}$ e così esistono $t_1, t_2 \in D$ tali che $t_1 \leq t \leq t_2$. Allora

$$w_{\{g<t_1\}} \leq u_t \leq w_{\{g<t_2\}}. \tag{5.4.4}$$

Poniamo

$$A_\tau = \{g < \tau\} \quad \forall\, \tau \in D, \quad \tau \leq t,$$
$$B_\tau = \{g < \tau\} \quad \forall\, \tau \in D, \quad \tau \geq t.$$

Gli insiemi A_τ e B_τ sono quasi aperti, inoltre $(A_\tau)_{\tau\in D,\tau\leq t}$ è crescente e $(B_\tau)_{\tau\in D,\tau\geq t}$ è decrescente rispetto all'inclusione di insiemi. Ora, dalla teoria della γ_p-convergenza, si ha

$$A_\tau \xrightarrow{\gamma_p} \bigcup_{\tau\in D,\tau\leq t} A_\tau = A_t \tag{5.4.5}$$

$$w_{\{g<t\}} = \sup\{w_{\{g<\tau\}} : \tau\in D, \tau\leq t\}. \tag{5.4.6}$$

Osserviamo che in generale l'unione di una famiglia arbitraria di quasi aperti non è quasi aperta, ma in questo caso la monotonia gioca un ruolo essenziale . Infatti una famiglia crescente di quasi aperti γ_p- converge all'unione che è quasi aperta (vedi il teorema 5.3.19). Inoltre poichè

$$\{g<t\}\subseteq B_\tau \quad \forall\tau\in D,\ \tau\geq t, \tag{5.4.7}$$

allora

$$w_{\{g<t\}} \leq w_{\{g<\tau\}} \quad \forall\tau\in D,\ \tau\geq t, \tag{5.4.8}$$

da cui segue

$$w_{\{g<t\}} \leq \inf\{w_{\{g<\tau\}} :\ \ \tau\in D,\ \tau\geq t\}. \tag{5.4.9}$$

Ora da (5.4.4)–(5.4.9) si ha

$$\begin{aligned} w_{\{g<t\}} &= \sup\{w_{\{g<\tau\}} :\ \ \tau\in D,\ \tau\leq t\} \\ &\leq u_t \leq \inf\{w_{\{g<\tau\}} :\ \ \ \tau\in D,\ \tau\geq t\}. \end{aligned} \tag{5.4.10}$$

Consideriamo l'applicazione $t\mapsto \|w_{\{g<t\}}\|_{L^p(\Omega)}$ che è crescente e che quindi ha al più una infinità numerabile di punti di discontinuità. Se t è un punto dove l'applicazione è continua allora

$$\sup\{w_{\{g<\tau\}} :\ \ \tau\in D,\ \tau\leq t\} = \inf\{w_{\{g<\tau\}} :\ \ \tau\in D,\ \tau\geq t\}. \tag{5.4.11}$$

Infatti, per il teorema di Lebesgue, per $\tau\to t^+$ si ha che $w_{\{g<\tau\}}$ converge in $L^p(\Omega)$ a $\inf_{\tau\geq t,\tau\in D} w_{\{g<\tau\}}$ (la famiglia è crescente), mentre per $\tau\to t^-$ si ha che $w_{\{g<\tau\}}$ converge in $L^p(\Omega)$ a $\sup_{\tau\leq t,\tau\in D} w_{\{g<\tau\}}$. Dalla convergenza L^p abbiamo quindi

$$\lim_{\tau\to t^-} \|w_{\{g<\tau\}}\|_{L^p(\Omega)} = \|\sup_{\tau\leq t,\tau\in D} w_{\{g<\tau\}}\|_{L^p(\Omega)}, \tag{5.4.12}$$

$$\lim_{\tau\to t^+} \|w_{\{g<\tau\}}\|_{L^p(\Omega)} = \|\inf_{\tau\geq t,\tau\in D} w_{\{g<\tau\}}\|_{L^p(\Omega)}. \tag{5.4.13}$$

Essendo t un punto di continuità per l'applicazione $t\mapsto \|w_{\{g<t\}}\|_{L^p(\Omega)}$ da (5.4.12) e (5.4.13) si ottiene

$$\|\sup_{\tau\leq t,\tau\in D} w_{\{g<\tau\}}\|_{L^p(\Omega)} = \|\inf_{\tau\geq t,\tau\in D} w_{\{g<\tau\}}\|_{L^p(\Omega)}. \tag{5.4.14}$$

Da (5.4.14), ricordando che $\sup_{\tau\leq t,\tau\in D} w_{\{g<\tau\}}$ e $\inf_{\tau\geq t,\tau\in D} w_{\{g<\tau\}}$ sono funzioni positive una minore dell'altra (vedi (5.4.10)), si ottiene la (5.4.11), da cui $u_t = w_{\{g<t\}}$, che conclude la dimostrazione. $\square$

Introduciamo ora la γ-convergenza debole di ostacoli.

Definizione 5.4.5 *Si dice che una successione di ostacoli $(g_n)_{n\in I\!\!N}$ γ-converge debolmente a g (e scriviamo $g_n \overset{w\gamma}{\rightharpoonup} g$) se esiste un insieme denso $D \subseteq I\!\!R$ tale che*

$$\{g_n < t\} \overset{w\gamma_p}{\rightharpoonup} \{g < t\} \quad \textit{per ogni} \;\; t \in D.$$

Osserviamo innanzi tutto che la definizione sopra è corretta nel senso che se $g_n \overset{w\gamma}{\rightharpoonup} g$ e $g_n \overset{w\gamma}{\rightharpoonup} g'$ allora $g = g'$. Per questo non esiste ambiguità nella scelta dell'insieme denso D.

Proposizione 5.4.6 *Siano $g_n, g \in X_\psi(\Omega)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

(i) esiste un insieme denso $D \subseteq I\!\!R$ tale che $\{g_n < t\} \overset{w\gamma_p}{\rightharpoonup} \{g < t\}$ per ogni $t \in D$;

(ii) esiste un insieme N al più numerabile tale che $\{g_n < t\} \overset{w\gamma_p}{\rightharpoonup} \{g < t\}$ per ogni $t \in I\!\!R \setminus N$.

Dimostrazione Osserviamo che se vale (ii), essendo N numerabile si ha che $I\!\!R \setminus N$ è denso in $I\!\!R$ e quindi vale (i). Supponiamo che valga (i) e sia D il denso di $I\!\!R$. Allora, per ogni $s \in D$, si ha $w_{\{g_n<s\}} \rightharpoonup w_s$ in $H_0^{1,p}(\Omega)$ e $\{w_s > 0\} = \{g < s\}$ e, dalla semicontinuità superiore di g, per ogni $t \in I\!\!R$ si ha

$$\{g < t\} = \bigcup_{s\in D, s\le t} \{g < s\}.$$

Per ogni $t \in I\!\!R$ definiamo $w_t := \sup\limits_{s\in D, s\le t} w_s$. Per la monotonia dell'applicazione $s \mapsto w_s$ la definizione sopra è corretta e vale

$$\{w_t > 0\} = \bigcup_{s\in D, s\le t} \{w_s > 0\} = \bigcup_{s\in D, s\le t} \{g < s\} = \{g < t\}.$$

Dalla limitatezza di $w_{\{g_n<t\}}$, eventualmente passando a sottosuccessioni ancora denotate con gli stessi indici, si ha

$$w_{\{g_n<t\}} \rightharpoonup u_t.$$

Così per concludere, è sufficiente dimostrare che esiste N al più numerabile tale che $u_t(x) = w_t(x)$ p-q.e. per $t \in I\!\!R \setminus N$. Osserviamo che, dalla monotonia, per ogni $s \in D$ con $s \le t$, abbiamo

$$w_{\{g_n<s\}} \le w_{\{g_n<t\}}, \tag{5.4.15}$$

da cui, passando al limite nella (5.4.15) per $n \to +\infty$, si ottiene

$$w_s \le u_t \quad \forall\, s \in D, s \le t,$$

e quindi

$$u_t \ge \sup_{s\in D, s\le t} w_s = w_t. \tag{5.4.16}$$

D'altra parte, per la monotonia, si ha che

$$u_t \le w_s \quad \forall\, s \in D, s \ge t,$$

da cui

$$u_t \leq \inf_{s \in D, s \geq t} w_s := \tilde{w}_t. \tag{5.4.17}$$

Ora, ragionando come nel corollario 5.4.4, per $t \in I\!R \setminus N$ con N al più numerabile, si ha $w_t = \tilde{w}_t$, dal momento che l'applicazione $t \to \|w_t\|_{L^p(\Omega)}$ è monotona crescente e quindi ha al più un insieme numerabile di punti di discontinuità. Così da (5.4.16) e (5.4.17) segue $u_t = w_t$ per ogni $t \in I\!R \setminus N$.

□

Proposizione 5.4.7 *Supponiamo che $g_n \xrightarrow{\gamma} g$. Allora $g_n \overset{w\gamma}{\rightharpoonup} g$.*

Dimostrazione È una immediata conseguenza del corollario 5.4.4 e della definizione 5.4.5.

□

La compattezza è una proprietà fondamentale della $w\gamma$-convergenza di ostacoli. Proviamo quest'ultima nella seguente proposizione.

Proposizione 5.4.8 *Per ogni successione $(g_n)_{n \in I\!N}$ in $X_\psi(\Omega)$, esiste una sottosuccessione (denotata con gli stessi indici) e un ostacolo $g \in X_\psi(\Omega)$ tale che $g_n \overset{w\gamma}{\rightharpoonup} g$.*

Dimostrazione Consideriamo una numerazione $\{r_1, r_2, ...\}$ dell'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Per il livello r_1 esiste una sottosuccessione di $(g_n)_{n \in I\!N}$, che indichiamo con gli stessi indici, tale che $w_{\{g_n < r_1\}} \rightharpoonup w_{r_1}$ debolmente in $H_0^{1,p}(\Omega)$ (per la limitatezza delle funzioni $w_{\{g_n < r_k\}}$). Per il livello r_2 esiste una sottosuccessione della precedente tale che $w_{\{g_n < r_2\}} \rightharpoonup w_{r_2}$ debolmente in $H_0^{1,p}(\Omega)$. In questo modo, per ogni $r_k \in \mathbb{Q}$ si può estrarre una sottosuccessione (della successione ottenuta per r_{k-1}) tale che $w_{\{g_n < r_k\}} \rightharpoonup w_{r_k}$ debolmente in $H_0^{1,p}(\Omega)$. Con un procedimento diagonale si può scegliere un elemento della prima successione tale che

$$\|w_{\{g_{n_1} < r_1\}} - w_{r_1}\|_{L^p(\Omega)} < 1,$$

un secondo elemento della seconda successione tale che

$$\|w_{\{g_{n_2} < r_1\}} - w_{r_1}\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{2} \ \text{ e } \ \|w_{\{g_{n_2} < r_2\}} - w_{r_2}\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{2},$$

e continuando in questo modo, si costruisce una sottosuccessione $(g_{n_i})_i$ tale che

$$\forall\, k \in I\!N \quad w_{\{g_{n_i} < r_k\}} \overset{L^p(\Omega)}{\to} w_{r_k} \quad \text{per} \quad i \to +\infty.$$

Questo significa che per ogni $t \in \mathbb{Q}$

$$\{g_{n_i} < t\} \overset{w\gamma_p}{\rightharpoonup} \{w_t > 0\} \quad \text{per} \quad i \to +\infty.$$

Si definisce quindi l'ostacolo limite attraverso i suoi insiemi di livello

$$\{g < t\} = \{w_t > 0\} \quad \text{per ogni} \quad t \in \mathbb{Q}. \tag{5.4.18}$$

Se $t_1, t_2 \in \mathbb{Q}$ con $t_1 < t_2$, allora chiaramente $\{g < t_1\} \subseteq \{g < t_2\}$. La funzione g è definita da

$$g(x) = \inf\{t \in \mathbb{Q} : x \in \{g < t\}\}.$$

Allora, per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ si ha

$$\{g < t\} = \bigcup_{s \in \mathbb{Q}, s < t} \{g < s\}. \tag{5.4.19}$$

Si può vedere che:

1. g è correttamente definita.

2. g è quasi semicontinua superiormente, perchè i suoi insiemi di livello $\{g < t\}$ sono quasi aperti, essendo, per definizione, un'unione numerabile di quasi aperti (vedi (5.4.18) e (5.4.19)).

3. $g \in X_\psi(\Omega)$, perchè $\{\psi < t\} \supseteq \{g < t\}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Infatti, consideriamo inizialmente il caso $t \in \mathbb{Q}$. Dall'ipotesi $g_{n_i} \leq \psi$, si ha

$$\{\psi < t\} \supseteq \{g_{n_i} < t\} \quad \forall\, i \in \mathbb{N},$$

da cui

$$w_{\{g_{n_i} < t\}} \leq w_{\{\psi < t\}}.$$

Calcolando il limite per $i \to +\infty$, segue

$$w_t \leq w_{\{\psi < t\}},$$

così

$$\{w_{\{\psi < t\}} > 0\} = \{\psi < t\} \supseteq \{w_t > 0\} = \{g < t\}.$$

Fissiamo ora $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Abbiamo

$$\{g < t\} = \bigcup_{s < t, s \in \mathbb{Q}} \{g < s\} \subseteq \bigcup_{s < t, s \in \mathbb{Q}} \{\psi < s\} \subseteq \{\psi < t\}$$

che significa $g \in X_\psi(\Omega)$.

Per concludere, rimane solo da dimostrare che $g_{n_i} \xrightarrow{w\gamma} g$, o equivalentemente, che esiste un sottoinsieme denso $D \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$w_{\{g_{n_i} < t\}} \rightharpoonup w_t, \quad \{w_t > 0\} = \{g < t\} \ \ \forall t \in D.$$

Se $t \in \mathbb{Q}$, l'implicazione sopra è vera grazie alla definizione di g, da cui la tesi. □

Per verificare la validità dell'ipotesi (A) dimostriamo un lemma tecnico per i domini, che risulta importante per la costruzione di una successione di ostacoli γ-convergente a partire da una $w\gamma$-convergente.

Lemma 5.4.9 *Consideriamo due successioni di insiemi quasi aperti* $X_n \stackrel{\gamma_p}{\to} X$ *e* $Y_n \stackrel{\gamma_p}{\to} Y$*. Allora* $X_n \cap Y_n \stackrel{\gamma_p}{\to} X \cap Y$*.*

Dimostrazione La dimostrazione consiste nel verificare le due condizioni della definizione di convergenza di Mosco. Inizialmente, consideriamo una successione debolmente convergente $w_n \in H_0^{1,p}(X_n \cap Y_n)$, $w_n \rightharpoonup w$. Per ipotesi abbiamo $w \in H_0^{1,p}(X) \cap H_0^{1,p}(Y)$, ossia $w \in H_0^{1,p}(X \cap Y)$. Consideriamo $w \in H_0^{1,p}(X \cap Y)$ e $w \geq 0$ (se w cambia di segno possiamo applicare il ragionamento alle sue parti positiva e negativa w^+ e w^-). Esistono due successioni (x_n), (y_n), $x_n \in H_0^{1,p}(X_n)$ e $y_n \in H_0^{1,p}(Y_n)$, fortemente convergenti a w. Possiamo scegliere queste successioni positive. Allora $\min\{x_n, y_n\} \in H_0^{1,p}(X_n \cap Y_n)$ e converge fortemente a w. □

L'ipotesi (A) è data dal seguente risultato.

Teorema 5.4.10 *Consideriamo una successione* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_\psi(\Omega)$ *tale che* $g_n \stackrel{w\gamma}{\rightharpoonup} g$*. Esiste una sottosuccessione* $(g_{n_k})_k$ *e una successione* $(f_k)_k$ *con* $f_k \leq g_{n_k}$ *tale che* $f_{n_k} \stackrel{\gamma}{\to} g$*.*

Dimostrazione Dimostriamo la tesi in due passi. Consideriamo inizialmente il caso particolare degli ostacoli che assumono solo un numero finito di valori. Consideriamo i numeri

$$-\infty = l_1 < l_2 < \ldots < l_q$$

e la famiglia speciale di ostacoli

$$\mathcal{A}[l_1, \ldots, l_q] = \{g \in X_\psi(\Omega) \ : \ g(x) \in \{l_1, \ldots, l_q\}\}.$$

Costruiamo i seguenti insiemi

$$A_1(g) = \{g < l_2\}, \ \ A_2(g) = \{g < l_3\}, \ldots, A_{q-1}(g) = \{g < l_q\},$$

che sono quasi aperti e tali che $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_{q-1}$. Consideriamo ora una successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}[l_1, \ldots, l_q]$ che $w\gamma$-converge ad una funzione g. Ad ogni funzione g_n associamo, come prima, gli insiemi

$$g_n \to A_1(g_n), \ldots, A_{q-1}(g_n).$$

Dalla compattezza della $w\gamma_p$-convergenza di insiemi, per una sottosuccessione denotata con gli stessi indici, si ha che

$$A_i(g_n) \stackrel{w\gamma_p}{\rightharpoonup} A_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, q-1.$$

Dalla definizione della $w\gamma$-convergenza debole degli ostacoli abbiamo

$$g = l_1 \ \text{su} \ A_1, \quad g = l_2 \ \text{su} \ A_2 \setminus A_1, \ldots, g = l_q \ \text{su} \ \Omega \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{q-1}).$$

Per come è stata costruita g è quasi semicontinua superiormente e inoltre $g \leq \psi$. Infatti, per dimostrare quest'ultima disuguaglianza, è sufficiente provare che, per ogni $i = 2, \ldots, q$,

si ha $\{g < l_i\} \subseteq \{\psi < l_i\}$, cosa che segue da $\{g_n < l_i\} \subseteq \{\psi < l_i\}$ e dalle proprietà della $w\gamma_p$-convergenza di insiemi.
Costruiamo ora una successione (f_n) di ostacoli ammissibili tale che $f_n \xrightarrow{\gamma} g$ con $f_n \leq g_n$. Dal lemma 5.3.12 segue che, passando a sottosuccessioni, esistono degli insiemi $G_i^n \supseteq A_i(g_n)$ tali che $G_i^n \xrightarrow{\gamma_p} A_i$. Per n fissato, gli insiemi $G_1^n, \dots, G_{q-1}^n$ non sono ordinati. Applichiamo allora il lemma 5.4.9 e consideriamo

$$\tilde{G}_1^n = G_1^n \cap G_2^n \cap \dots \cap G_{q-1}^n,$$
$$\tilde{G}_2^n = G_2^n \cap G_3^n \cap \dots \cap G_{q-1}^n,$$
$$\dots$$
$$\tilde{G}_{q-1}^n = G_{q-1}^n.$$

Allora $\tilde{G}_1^n \subseteq \tilde{G}_2^n \subseteq \dots \subseteq \tilde{G}_{q-1}^n$ e $\tilde{G}_i^n \xrightarrow{\gamma_p} A_i$. Inoltre $\tilde{G}_i^n \supseteq A_i(g_n)$. Definendo l'ostacolo f_n attraverso gli insiemi $\tilde{G}_1^n, \dots, \tilde{G}_{q-1}^n$ nel modo seguente

$$f_n = l_1 \text{ su } \tilde{G}_1^n, \;\; f_n = l_2 \text{ su } \tilde{G}_2^n \setminus \tilde{G}_1^n, \dots, f_n = l_q \text{ su } \Omega \setminus \tilde{G}_{q-1}^n,$$

otteniamo che f_n è quasi semicontinuo superiormente, $f_n \leq g_n$ e $f_n \xrightarrow{\gamma} g$.

Nel passo successivo, considereremo ostacoli arbitrari, che verranno approssimati con ostacoli che assumono solo un numero finito di valori, cioè del tipo $\mathcal{A}[l_1, \dots, l_q]$. Definiamo per ogni $k \in I\!N$ la famiglia di livelli $\mathcal{R}_k = \{l_1, \dots, l_k\} \cup \{-\infty\}$ dove $(l_k)_k$ è un insieme denso in $\overline{I\!R}$ con la proprietà che la $w\gamma_p$-convergenza sussiste per il livello l_i. Abbiamo che $\mathcal{R}_{k_1} \subseteq \mathcal{R}_{k_2}$ se $k_1 \leq k_2$. Poniamo $\mathcal{R} = \bigcup_{k \in I\!N} \mathcal{R}_k$. Per ogni ostacolo $g \in X_\psi(\Omega)$ definiamo la troncatura su $\mathcal{R}_k$ di g nel modo seguente

$$T_k(g)(x) = \sup\{l \in \mathcal{R}_k : g(x) \geq l\}.$$

Si ha che $T_k(g) \in \mathcal{A}[\mathcal{R}_k]$ e $T_k(g) \leq g$. Inoltre, se $l \in \mathcal{R}_k$ allora per $k' \geq k$ abbiamo

$$\{T_{k'}(g) < l\} = \{g < l\}.$$

Come nel primo passo, per $k = 1$ esiste una sottosuccessione di $(T_1(g_n))$, che indichiamo ancora con gli stessi indici, tale che

$$T_1(g_n) \xrightarrow{w\gamma} T_1(g);$$

consideriamo una sottosuccessione e una successione (f_n^1), $f_n^1 \leq T_1(g_n)$ con $f_n^1 \xrightarrow{\gamma} T_1(g)$. Per $k = 2$ esiste una sottosuccessione (come nel passo precedente) tale che

$$T_2(g_n) \xrightarrow{w\gamma} T_2(g);$$

ancora, consideriamo una sottosuccessione e una successione (f_n^2), $f_n^2 \leq T_2(g_n)$ con $f_n^2 \xrightarrow{\gamma} T_2(g)$. Continuiamo questa procedura per ogni $k \in I\!N$ e scegliamo una successione diagonale $(f_{n_k}^k)_k$ con la proprietà che $d_\gamma(f_{n_k}^k, T_k(g)) \leq \frac{1}{k}$. Qui d_γ denota la distanza che genera la stessa topologia della γ-convergenza (vedi il teorema 1.3.15 per la metrizzabilità della γ-convergenza). D'altra parte, per il corollario 5.4.4 si ha $T_k(g) \xrightarrow{\gamma} g$ e quindi esiste una sottosuccessione $(f_{n_k}^k)_k$ che verifica le proprietà desiderate. $\square$

5.5 Semicontinuità del vincolo e esistenza dell'ostacolo ottimo

Per dimostrare che un vincolo di tipo integrale del tipo

$$\int_\Omega g\,dx \geq c$$

è $w\gamma$ compatto, premettiamo la seguente proposizione.

Proposizione 5.5.1 *Siano $g_n, g \in X_\psi(\Omega)$ con $g_n \overset{w\gamma}{\rightharpoonup} g$. Allora*

$$g(x) \geq \limsup_{n\to+\infty} g_n(x) \quad \textit{per a.e. } x \in \Omega.$$

Dimostrazione Consideriamo $x \in \Omega$ e $l \in \mathbb{R}$ con $g(x) < l$. Dalla $w\gamma$-convergenza, si ha che esiste l' compreso fra $g(x)$ e l, tale che

$$\{g_n < l'\} \overset{w\gamma_p}{\rightharpoonup} \{g < l'\};$$

allora $1_{\{g<l'\}} \leq \liminf_{n\to+\infty} 1_{\{g_n<l'\}}$, dove 1_C è la funzione indicatrice di C (che vale 1 se $x \in C$ e 0 altrimenti). In particolare questo significa che $g_n(x) < l'$ per n sufficientemente grande, cioè

$$\limsup_{n\to+\infty} g_n(x) \leq l'.$$

Dal momento che l era arbitrario e $g(x) < l' < l$ si ottiene la tesi. □

Corollario 5.5.2 *Siano $g_n, g \in X_\psi(\Omega)$ con $g_n \overset{w\gamma}{\rightharpoonup} g$. Allora*

$$\int_\Omega g\,dx \geq \limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n dx.$$

Dimostrazione Segue direttamente dalla proposizione 5.5.1 e dal lemma di Fatou, applicabile in quanto $g_n, g \in X_\psi(\Omega)$. □

Osservazione 5.5.3 Un vincolo generale del tipo $\int \Phi(x, g(x))dx \geq c$ può essere sostituito nell'ambiente astratto del teorema 5.2.2 supponendo che la funzione $\Phi(x, \cdot)$ sia decrescente e semicontinua superiormente in $\overline{\mathbb{R}}$.

Concludiamo questa sezione con la dimostrazione del teorema 5.2.3 che si ottiene come diretta conseguenza del teorema 5.2.2 e della proposizione 5.5.1. Osserviamo che nel teorema 5.2.3 il vincolo è espresso da un'uguaglianza, mentre nel teorema 5.2.2 la forma generale del vincolo è espressa da una disuguaglianza.

Dimostrazione del teorema 5.2.3 Consideriamo una successione minimizzante $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di ostacoli ammissibili. Esiste una sottosuccessione (denotata con gli stessi indici) tale che $g_n \overset{w\gamma}{\rightharpoonup} g$ dove $w\gamma$ è definita nella definizione 5.4.5 e

$$F(g) \leq \liminf_{n\to+\infty} F(g_n).$$

Dal corollario 5.5.2 segue che $\int_\Omega g\,dx \geq c$. Se $\int_\Omega g\,dx = c$, allora l'ostacolo g è ammissibile e realizza il minimo. Se $\int_\Omega g\,dx > c$, allora il nuovo ostacolo $\tilde{g}$ definito da

$$\tilde{g}(x) = g(x) - \frac{1}{|\Omega|}\Big(\int_\Omega g(y)dy - c\Big)$$

è ammissibile (cioè $\tilde{g} \in X_\psi(\Omega)$ e $\int_\Omega \tilde{g}\,dx = c$) e dalla monotonia di F si ha $F(\tilde{g}) \leq F(g)$. $\square$

5.6 Esempi

Esempio 1: Ostacoli limitati dal basso. I risultati esposti nelle sezioni precedenti si estendono, per analogia, al caso di ostacoli della forma

$$\tilde{X}_\psi(\Omega) = \{g : \Omega \to \overline{I\!R} : g \text{ quasi semicontinuo inferiormente } \ g \geq \psi\},$$

con ψ fissata in $H_0^{1,p}(\Omega)$. Gli insiemi convessi associati sono

$$\tilde{K}_g = \{u \in H_0^{1,p}(\Omega) : u \leq g\}$$

e la γ-convergenza e la $w\gamma$-convergenza sono definite, come nella definizioni 5.3.4 e 5.4.5, considerando i sopralivelli: $\{g > t\}$. Indichiamo, in questo caso, con $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{w\gamma}$ le due convergenze. Per tali convergenze valgono esattamente, per simmetria, gli stessi risultati ottenuti per γ e per la $w\gamma$. In particolare, la relazione che lega le due convergenze $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{w\gamma}$, risulta:

IPOTESI (A') *Per ogni $x_n \xrightarrow{\tilde{w\gamma}} x$ esiste una successione di interi (n_k) e una successione $(y_{n_k}) \subseteq \tilde{X}_\psi$ tale che $y_{n_k} \geq x_{n_k}$ e $y_{n_k} \xrightarrow{\tilde{\gamma}} x$.*

Supponiamo che il funzionale costo F soddisfi le seguenti ipotesi:

1. F sia semicontinuo inferiormente rispetto alla $\tilde{\gamma}$-convergenza;

2. F sia monotono decrescente rispetto all'ordine naturale delle funzioni.

Allora, sotto l'ipotesi (A'), vale il seguente teorema.

Teorema 5.6.1 *Se $F : \tilde{X}_\psi(\Omega) \to \overline{I\!R}$ è monotono decrescente e $\tilde{\gamma}$ semicontinuo inferiormente, allora F è $\tilde{w\gamma}$ semicontinuo inferiormente.*

Dimostrazione La dimostrazione è del tutto analoga a quella della proposizione 5.2.1. $\square$

In perfetta analogia con quanto dimostrato nel caso degli ostacoli limitati dall'alto valgono inoltre i seguenti risultati.

Proposizione 5.6.2 *Siano $g_n, g \in \tilde{X}_\psi(\Omega)$ con $g_n \xrightarrow{\tilde{w\gamma}} g$. Allora*

$$g(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} g_n(x) \quad \textit{per a.e. } x \in \Omega$$

Dimostrazione Dalla $\tilde{w\gamma}$-convergenza, si ha che esiste un insieme denso $D \subseteq I\!R$ tale che

$$\{g_n > t\} \xrightarrow{w\gamma_p} \{g > t\}$$

per ogni $t \in D$. Allora

$$1_{\{g>t\}} \le \liminf_{n\to+\infty} 1_{\{g_n>t\}}, \tag{5.6.1}$$

dove 1_C è la funzione indicatrice di C (la misura di Lebesgue è semicontinua inferiormente rispetto alla $w\gamma_p$-convergenza di insiemi, vedi Bucur, Buttazzo e Henrot [17]).

Sia $x \in \Omega$ e sia $\alpha = g(x) \in I\!R$. Poichè D è denso in $I\!R$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $t \in D$ tale che $|t - \alpha| \le \varepsilon$. Consideriamo $t = \alpha - \varepsilon < \alpha$; allora $g(x) > t = \alpha - \varepsilon$. Dalla (5.6.1) segue che

$$\liminf_{n\to+\infty} 1_{\{g_n>\alpha-\varepsilon\}}(x) \ge 1_{\{g>\alpha-\varepsilon\}}(x) = 1, \tag{5.6.2}$$

da cui $1_{\{g_n>\alpha-\varepsilon\}}(x) \ge 1$. Esiste quindi un n_0 tale che $g_n(x) > \alpha - \varepsilon$ per ogni $n \ge n_0$. Allora

$$\liminf_{n\to+\infty} g_n(x) > \alpha - \varepsilon$$

e per $\varepsilon \to 0$ si ottiene la tesi. □

Corollario 5.6.3 *Siano $g_n, g \in \tilde{X}_\psi(\Omega)$ con $g_n \xrightarrow{\tilde{w\gamma}} g$. Allora*

$$\int_\Omega g\,dx \le \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega g_n dx.$$

Dimostrazione Segue direttamente dalla proposizione 5.6.2 e dal lemma di Fatou. □

Teorema 5.6.4 *Sia F monotono decrescente e $\tilde{\gamma}$ semicontinuo inferiormente. Allora, per ogni costante $c \in I\!R$, il problema*

$$\min\{F(g) : g \in \tilde{X}_\psi(\Omega),\ \int_\Omega g\,dx = c\}$$

ammette una soluzione.

Dimostrazione La dimostrazione è del tutto analoga a quella del teorema 5.2.3. In questo caso, partendo da una successione minimizzante (g_n), a meno di sottosuccessioni, si ha che questa $\tilde{w\gamma}$-converge a una funzione g, vale

$$F(g) \le \liminf_{n\to+\infty} F(g_n)$$

e $\int_\Omega g(x)dx \le c$. Ci sono quindi due possibilità. Se $\int_\Omega g(x)dx = c$, allora g realizza il minimo. Altrimenti, se $\int_\Omega g(x)dx < c$, sia $\varepsilon > 0$ tale che

$$\int_\Omega (g+\varepsilon)(x)dx = c.$$

Ora $g+\varepsilon > g$, F è monotona decrescente e quindi si ha $F(g+\varepsilon) \le F(g)$, ossia $g+\varepsilon$ realizza il minimo. □

Esempio 2: Ostacoli bilaterali. Fissiamo una funzione $\psi \in H_0^{1,p}(\Omega)$. L'insieme ammissibile di ostacoli è in questo caso

$$X(\Omega) = \{(g_1, g_2) : g_i : \Omega \to \overline{I\!R}, i = 1, 2, \ \ g_1 \text{ quasi s.c.s., } g_2 \text{ quasi s.c.i., } g_1 \leq \psi \leq g_2\}.$$

Definiamo i convessi associati

$$K_{g_1,g_2} = \{u \in H_0^{1,p}(\Omega) : g_1 \leq u \leq g_2\}$$

e consideriamo un funzionale $F : X(\Omega) \to \overline{I\!R}$. Allora il teorema 5.2.3 vale ancora sotto le ipotesi

1. $F(.,.)$ sia semicontinuo inferiormente rispetto alla $(\gamma, \tilde{\gamma})$-convergenza;
2. $F(.,.)$ sia monotono crescente rispetto alla prima variabile e decrescente rispetto alla seconda variabile;
3. il vincolo sugli ostacoli sia, in questo caso,
$$\int_\Omega g_1 dx = c, \quad \int_\Omega g_2 dx = \tilde{c},$$
con, naturalmente, $c \leq \tilde{c}$.

Dimostrazione: Presa una successione minimizzante $(g_{1,n}, g_{2,n})$, a meno di sottosuccessioni, esiste (g_1, g_2) tale che:

$$g_{1,n} \stackrel{w\gamma}{\rightharpoonup} g_1, \qquad g_{2,n} \stackrel{\tilde{w\gamma}}{\rightharpoonup} g_2.$$

Per il corollario 5.5.2 e per il corollario 5.6.3 si ha, rispettivamente, che $\int_\Omega g_1(x)dx \geq c$ e $\int_\Omega g_2(x)dx \leq \tilde{c}$. Allora si ragiona come nel caso precedente.

1. Se $\int_\Omega g_1(x)dx = c$, $\int_\Omega g_2(x)dx = \tilde{c}$, allora (g_1, g_2) è una soluzione del problema di minimo.
2. Se $\int_\Omega g_1(x)dx > c$, $\int_\Omega g_2(x)dx = \tilde{c}$, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(g_1 - \varepsilon, g_2)$ è una soluzione del problema di minimo.
3. Se $\int_\Omega g_1(x)dx = c$, $\int_\Omega g_2(x)dx < \tilde{c}$, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(g_1, g_2 + \varepsilon)$ è una soluzione del problema di minimo.
4. Se $\int_\Omega g_1(x)dx > c$, $\int_\Omega g_2(x)dx < \tilde{c}$, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(g_1 - \varepsilon, g_2 + \varepsilon)$ è una soluzione del problema di minimo.

$\square$

Esempio 3: Ostacoli semplici. Consideriamo un problema di ostacolo bilaterale nella famiglia di ostacoli semplici. Sia

$$\mathcal{O}(\Omega) = \{(g_1, g_2) : \ g_1 = -\infty \cdot 1_{A_1}, \ g_2 = +\infty \cdot 1_{A_2}, \ \ A_i \subseteq \Omega, \ A_i \ \text{ quasi aperto}, \forall\, i = 1, 2\}.$$

Siano $(\gamma, \tilde{\gamma})$ e $(w\gamma, \tilde{w\gamma})$ le convergenze definite nelle sezioni precedenti.

Teorema 5.6.5 *L'insieme*

$$\mathcal{O}(\Omega) = \{(g_1, g_2) :\ g_1 = -\infty \cdot 1_{A_1},\ g_2 = +\infty \cdot 1_{A_2},\quad A_i \subseteq \Omega,\ A_i \ \ \textit{quasi aperto},\ \forall\, i = 1, 2\}$$

è chiuso rispetto a $(w\gamma, \tilde{w\gamma})$.

Dimostrazione Sia $(g_{1,n}, g_{2,n}) \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che

$$g_{1,n} \stackrel{w\gamma}{\rightharpoonup} g_1, \qquad g_{2,n} \stackrel{\tilde{w\gamma}}{\rightharpoonup} g_2.$$

Dobbiamo dimostrare che $(g_1, g_2) \in \mathcal{O}(\Omega)$. Consideriamo separatamente le due componenti.

1. Dimostriamo che $g_1 \in \mathcal{O}(\Omega)$, cioè esiste un quasi aperto A_1 tale che $g_1 = -\infty$ su A_1 e $g_1 = 0$ su A_1^c.

   Cominciamo con l'osservare che essendo $g_{1,n} \in \mathcal{O}(\Omega)$, esiste una successione $(A_{1,n})$ di quasi aperti, tale che $g_{1,n} = -\infty$ su $A_{1,n}$ e $g_{1,n} = 0$ altrimenti. Inoltre, per ipotesi, abbiamo che $g_{1,n} \stackrel{w\gamma}{\rightharpoonup} g_1$, ossia esiste un sottoinsieme denso $D \subseteq \mathbb{R}$ tale che

   $$\{g_{1,n} < t\} \stackrel{w\gamma_p}{\rightharpoonup} \{g_1 < t\} \quad \forall\, t \in D. \tag{5.6.3}$$

   Sia $A_{1,t} = \{g_1 < t\}, \forall t \in D$. Osserviamo che se $t > 0$, allora $A_{1,t} = \Omega$, perchè $\{g_{1,n} < t\} = \Omega$ che quindi $w\gamma_p$-converge a Ω. Se $t \leq 0$, allora $A_{1,t}$ è costante ed è uguale al $w\gamma_p$ limite di $(A_{1,n})$. Allora, riscrivendo la (5.6.3) per $\bar{t} \in D \cap \mathbb{R}^-$ che è denso in $\mathbb{R}^-$ (poichè D è denso in $\mathbb{R}$), abbiamo che

   $$A_{1,n} \stackrel{w\gamma_p}{\rightharpoonup} A_1 \tag{5.6.4}$$

   dove

   $$A_1 = \{g_1 < \bar{t}\} \ \ \forall\, \bar{t} \in D \cap \mathbb{R}^-, \tag{5.6.5}$$

   ossia $A_1 = \{g_1 = -\infty\}$. Per concludere rimane da dimostrare che $\{g_1 = 0\} \subseteq A_1^c$. Sia $x \in \Omega$ tale che $g_1(x) = 0$. Allora, per la definizione di A_1, x non appartiene a A_1.

2. Dimostriamo che $g_2 \in \mathcal{O}(\Omega)$, cioè esiste un quasi aperto A_2 tale che $g_2 = +\infty$ su A_2 e $g_2 = 0$ su A_2^c.

   La dimostrazione è del tutto analoga a quella del punto 1.

□

Sia $v : \mathcal{O}(\Omega) \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$v(g_1, g_2) = \left(\int_\Omega 1_{\{g_1 \neq 0\}}(x)dx, \int_\Omega 1_{\{g_2 \neq 0\}}(x)dx \right).$$

Teorema 5.6.6 *La funzione* $v(\cdot, \cdot)$ *è semicontinua inferiormente rispetto a* $(w\gamma, \tilde{w\gamma})$.

Dimostrazione La tesi segue come diretta conseguenza della chiusura di $\mathcal{O}(\Omega)$ rispetto a $(w\gamma, \tilde{w}\gamma)$ e della semicontinuità inferiore della misura di Lebesgue rispetto alla $w\gamma_p$-convergenza dei domini. Consideriamo separatamente le due componenti di v.

1. Siano $g_{1,n} = -\infty \cdot 1_{A_{1,n}}$ tali che $g_{1,n} \stackrel{w\gamma}{\rightharpoonup} g_1$. Dal teorema 5.6.5 si ha $g_1 = -\infty \cdot 1_{A_1}$, per un certo A_1. Per la definizione della $w\gamma$-convergenza di ostacoli, esiste un insieme denso D in $I\!R$ tale che
$$\{g_{1,n} < t\} \stackrel{w\gamma_p}{\rightharpoonup} \{g_1 < t\} \quad \forall\, t \in D,$$
e quindi, in particolare anche per ogni $t \in D \cap I\!R^-$, ossia
$$A_{1,n} \stackrel{w\gamma_p}{\rightharpoonup} A_1,$$
da cui
$$1_{A_1}(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} 1_{A_{1,n}}(x).$$
Dal lemma di Fatou, segue così
$$|A_1| \leq \liminf_{n\to+\infty} |A_{1,n}|,$$
ossia
$$\int_\Omega 1_{\{g_1 \neq 0\}}(x)dx \leq \liminf_{n\to+\infty} \int_\Omega 1_{\{g_{1,n} \neq 0\}}(x)dx.$$

2. È analogo al punto 1. Siano $g_{2,n} = +\infty \cdot 1_{A_{2,n}}$ tali che $g_{2,n} \stackrel{w\gamma}{\rightharpoonup} g_2$. Dal teorema 5.6.5 si ha $g_2 = +\infty \cdot 1_{A_2}$, per un certo A_2. Per la definizione della $\tilde{w}\gamma$-convergenza di ostacoli, esiste un insieme denso D in $I\!R$ tale che
$$\{g_{2,n} > t\} \stackrel{w\gamma_p}{\rightharpoonup} \{g_2 > t\} \quad \forall\, t \in D,$$
e quindi, in particolare anche per ogni $t \in D \cap I\!R^+$, ossia
$$A_{2,n} \stackrel{w\gamma_p}{\rightharpoonup} A_2,$$
da cui
$$1_{A_2}(x) \leq \liminf_{n\to+\infty} 1_{A_{2,n}}(x),$$
che implica la tesi.

□

Proposizione 5.6.7 *La funzione $v(\cdot,\cdot)$ è monotona decrescente rispetto alla prima variabile e monotona crescente rispetto alla seconda variabile.*

Dimostrazione Consideriamo separatamente le due variabili.

1. Monotonia rispetto alla prima variabile.
   Siano $g = -\infty \cdot 1_A$ e $\tilde{g} = -\infty \cdot 1_B$, con $g \le \tilde{g}$. Allora $B \subseteq A$ e quindi
   $$1_B = 1_{\{\tilde{g} \neq 0\}} \le 1_A = 1_{\{g \neq 0\}},$$
   da cui
   $$\int_\Omega 1_{\{\tilde{g} \neq 0\}}(x)dx \le \int_\Omega 1_{\{g \neq 0\}}(x)dx.$$
2. Monotonia rispetto alla seconda variabile.
   Siano $g = +\infty \cdot 1_A$ e $\tilde{g} = +\infty \cdot 1_B$, con $g \le \tilde{g}$. Allora $A \subseteq B$ e quindi
   $$1_A = 1_{\{g \neq 0\}} \le 1_B = 1_{\{\tilde{g} \neq 0\}},$$
   da cui la tesi.

□

Consideriamo ora il seguente problema di ostacolo bilaterale

$$\min \{F(g_1, g_2), \;\; (g_1, g_2) \in \mathcal{O}(\Omega) \;\; : \;\; v(g_1, g_2) = (c_1, c_2)\} \tag{5.6.6}$$

dove $c_i \in I\!R$ per $i = 1, 2$ e dove

1. $F(\cdot, \cdot)$ sia semicontinuo inferiormente rispetto a $(\gamma, \tilde{\gamma})$;
2. $F(\cdot, \cdot)$ sia monotono crescente rispetto alla prima variabile e monotono decrescente rispetto alla seconda variabile.

Teorema 5.6.8 *Per ogni $c_1, c_2 \in I\!R$, il problema (5.6.6) ha soluzione.*

Dimostrazione La tesi segue direttamente dal teorema 5.6.5, dalle ipotesi di semicontinuità inferiore e monotonia di F e v. Infatti sia $(g_{1,n}, g_{2,n})$ una successione minimizzante per il problema (5.6.6). Allora esiste $(g_1, g_2) \in \mathcal{O}(\Omega)$ tale che

$$g_{1,n} \xrightarrow{w\gamma} g_1, \qquad g_{2,n} \xrightarrow{\tilde{w}\gamma} g_2.$$

Dalla semicontinuità di F rispetto alla $(w\gamma, \tilde{w}\gamma)$-convergenza si ha che

$$F(g_1, g_2) \le \liminf_{n \to +\infty} F(g_{1,n}, g_{2,n}).$$

Rimane quindi da verificare che $v(g_1, g_2) = (c_1, c_2)$. Per la semicontinuità di v rispetto alla $(w\gamma, \tilde{w}\gamma)$-convergenza otteniamo

$$v(g_1, g_2) \le \liminf_{n \to +\infty} v(g_{1,n}, g_{2,n}) = (c_1, c_2).$$

Analizziamo separatamente i vari casi.

1. Se $v(g_1, g_2) = (c_1, c_2)$, allora (g_1, g_2) realizza il minimo.

2. Se $v(g_1, g_2) = (\alpha, c_2)$ con $\alpha < c_1$ e $g_1 = -\infty \cdot 1_A$, consideriamo un quasi aperto $B \supseteq A$ tale che $|B| = c_1$ e definiamo l'ostacolo $\tilde{g} = -\infty \cdot 1_B$. Allora $\tilde{g} \leq g_1$. Ora $(\tilde{g}, g_2) \in \mathcal{O}(\Omega)$ e per la monotonia di F rispetto alla prima variabile si ha che
$$F(\tilde{g}, g_2) \leq F(g_1, g_2) \leq \liminf_{n \to +\infty} F(g_{1,n}, g_{2,n}),$$
dove $v(\tilde{g}, g_2) = (c_1, c_2)$, ossia $(\tilde{g}, g_2)$ realizza il minimo.

3. Se $v(g_1, g_2) = (c_1, \beta)$ con $\beta < c_2$ e $g_2 = +\infty \cdot 1_A$, consideriamo un quasi aperto $C \supseteq A$ tale che $|C| = c_2$ e definiamo l'ostacolo $\overline{g} = +\infty \cdot 1_C$. Allora $\overline{g} \geq g_2$. Ora $(g_1, \overline{g}) \in \mathcal{O}(\Omega)$ e per la monotonia di F rispetto alla seconda variabile si ha che
$$F(g_1, \overline{g}) \leq F(g_1, g_2) \leq \liminf_{n \to +\infty} F(g_{1,n}, g_{2,n}),$$
dove $v(g_1, \overline{g}) = (c_1, c_2)$, ossia $(g_1, \overline{g})$ realizza il minimo.

4. Se $v(g_1, g_2) = (\alpha, \beta)$, con $\alpha < c_1$ e $\beta < c_2$, basta considerare come elemento che realizza il minimo $(\tilde{g}, \overline{g}) \in \mathcal{O}(\Omega)$, dove $\tilde{g}$ e $\overline{g}$ sono gli ostacoli definiti nei punti 2 e 3 rispettivamente.

□

Siano ora $A_1 = A_2 = A$ e $c_1 = c_2 = c$. L'ostacolo bilaterale $(g_1, g_2) = (-\infty \cdot 1_A, +\infty \cdot 1_A)$ individua, allora, univocamente il quasi aperto A. La condizione di ostacolo bilaterale $g_1 \leq u \leq g_2$, corrisponde, in questo caso, alla relazione $u = 0$ su A^c e il problema dell'ostacolo bilaterale con ostacoli semplici (5.6.6) diventa quindi un problema di Dirichlet, con condizioni omogenee al bordo, associato al p-Laplaciano. Infine, poichè la condizione $v(g_1, g_2) = (c, c)$ corrisponde a $|A| = c$, il problema di ottimizzazione di forma studiato da Buttazzo e Dal Maso e presentato nella sezione 2.6 può, inoltre, anche essere visto, utilmente, come caso particolare del problema di ostacoli bilaterali (5.6.6) sopra descritto, nelle ipotesi $A_1 = A_2 = A$ e $c_1 = c_2 = c$.

Esempio 4: Il caso variazionale. Sia $\tilde{F} : H_0^{1,p}(\Omega) \to \overline{I\!R}$. Consideriamo un funzionale F di tipo variazionale della forma
$$F(g) = \min_{u \in K_g} \tilde{F}(u). \tag{5.6.7}$$
Direttamente dalla definizione si ha che F è monotono crescente: infatti, se $g_1 \leq g_2$, allora $K_{g_2} \subseteq K_{g_1}$ e quindi $F(g_1) \leq F(g_2)$.

Teorema 5.6.9 *Se $\tilde{F}$ è debolmente semicontinuo inferiormente e coercivo su $H_0^{1,p}(\Omega)$, allora F è γ-semicontinuo inferiormente.*

Dimostrazione Sia (g_n) una successione di ostacoli tale che $g_n \xrightarrow{\gamma} g$. Dobbiamo dimostrare che
$$\min_{u\in K_g} \tilde{F}(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} \min_{u\in K_{g_n}} \tilde{F}(u).$$
Possiamo supporre che il membro destro della disuguaglianza precedente sia finito. Grazie alle ipotesi di semicontinuità e di coercività del funzionale $\tilde{F}$, per ogni $n \in I\!N$, esiste la soluzione di $\min_{u\in K_{g_n}} \tilde{F}(u)$ che denotiamo con u_n. Poichè $\tilde{F}$ è coercivo su $H_0^{1,p}(\Omega)$ si ha che $\|u_n\|_{H_0^{1,p}(\Omega)} < c$ uniformemente e quindi esiste una sottosuccessione, denotata ancora con gli stessi indici, tale che $u_n \rightharpoonup u$ in $H_0^{1,p}(\Omega)$. Per ipotesi $g_n \xrightarrow{\gamma} g$, ossia (K_{g_n}) converge nel senso di Mosco a K_g e quindi $u \in K_g$. Dalla semicontinuità di $\tilde{F}$ si ha infine che
$$\min_{v\in K_g} \tilde{F}(v) \leq \tilde{F}(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} \tilde{F}(u_n) = \lim_{n\to+\infty} \min_{v\in K_{g_n}} \tilde{F}(v)$$
ossia la tesi. □

I funzionali della forma (5.6.7) soddisfano quindi le ipotesi generali del teorema 5.2.3 e costituiscono un esempio di applicazione della teoria astratta esposta nelle sezioni precedenti. Osserviamo pero' che, per questa classe di funzionali, se si elimina la condizione $g \leq \psi$ sulla classe degli ostacoli ammissibili, il problema di minimizzazione
$$\min\left\{\tilde{F}(u) \,:\, u \in K_g,\, g \,\text{quasi s.c.s.}, \int_\Omega g\,dx \geq c\right\} \tag{5.6.8}$$
è equivalente a
$$\min\left\{\tilde{F}(u) \,:\, u \in H_0^{1,p}(\Omega), \int_\Omega u\,dx \geq c\right\}. \tag{5.6.9}$$
Infatti, se (g,u) è la soluzione di (5.6.8), allora $\int_\Omega g\,dx \geq c$ e $u \in K_g$, ossia $u \geq g$. Allora $\int_\Omega u\,dx \geq c$ e quindi u è ammissibile per il problema (5.6.9) e minimizza tale problema. Viceversa se u^* è la soluzione del problema (5.6.9), allora la coppia (u^*, u^*) è ammissibile per il problema (5.6.8) e minimizza tale problema.

L'esistenza della soluzione del problema (5.6.8) può essere ottenuta dall'esistenza della soluzione del problema (5.6.9) che, in questo caso, segue direttamente dal metodo diretto del calcolo delle variazioni.

Questo metodo, tuttavia, essendo strettamente legato alla forma variazionale del funzionale, non è utile in tutti quei casi in cui il problema di ottimizzazione di forma non può essere scritto nella forma (5.6.8). Per esempio, nei problemi di ottimizzazione di forma, questo potrebbe essere il caso del secondo autovalore dell'operatore di Laplace con condizioni al bordo di Dirichlet. Infatti il secondo autovalore non si può mai scrivere nella forma (5.6.8) essendo il risultato di un'operazione di "min max". Casi favorevoli, nei problemi di ottimizzazione di forma, sono invece il problema di minimizzazione dell'energia e del primo autovalore del Laplaciano con condizioni al bordo di Dirichlet. Nel caso degli ostacoli, un esempio in cui il metodo sopra scritto risulta vantaggioso, è costituito dal funzionale di minima energia associato ad un ostacolo.

Sia Ω un insieme aperto e limitato e $f \in L^q(\Omega)$ (qui q è l'esponente coniugato di p). Per ogni ostacolo ammissibile $g \in X(\Omega)$ l'energia è data da

$$\tilde{F}(g) = \Big\{\frac{1}{p}\int_\Omega |Du|^p dx - \int_\Omega f\,u\,dx\Big\}$$

che è appunto un funzionale debolmente semicontinuo inferiormente e coercivo su $H_0^{1,p}(\Omega)$.

Usando, in questo caso, l'equivalenza tra (5.6.8) e (5.6.9), si possono scrivere le condizioni di ottimalità per la soluzione u^* del problema (5.6.9) calcolando direttamente le derivate direzionali e usando i moltiplicatori di Lagrange in (5.6.8). Per una costante positiva λ si ha allora

$$-\triangle_p u^* = f + \lambda \;\text{ in }\; H_0^{1,p}(\Omega).$$

La regolarità della soluzione u^* dipende quindi dalla regolarità di f e così, per dati f e Ω sufficientemente regolari, la soluzione di (5.6.9) appartiene alla classe delle funzioni regolari.

Esempio 5: Il caso integrale. Sia

$$X_\psi(\Omega) = \{g : \Omega \to \overline{I\!R} : g \le \psi, \;\; g \text{ quasi semicontinua superiormente}\}$$

l'insieme degli ostacoli ammissibili, dove $\psi \in H_0^{1,p}(\Omega)$ è una funzione fissata. Sia $F : X_\psi(\Omega) \to \overline{I\!R}$ il funzionale della forma

$$F(g) = \int_\Omega f(x, u_g)\,dx,$$

dove u_g è il punto di minimo del funzionale

$$E_g(u) = \begin{cases} \frac{1}{p}\int_\Omega |Du|^p\,dx & \text{se } u \ge g, \\ +\infty & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

ed $f(x,u)$ è un'assegnata funzione di Carathèodory non negativa e crescente in u. Allora il funzionle F soddisfa le ipotesi generali del teorema 5.2.3. Infatti, la monotonia di F segue da ben noti risultati di confronto (analoghi a quelli utilizzati nell'esempio 4.) e dalla monotonia della funzione $f(x,\cdot)$, mentre la sua semicontinuità è ovvia derivando dalle ipotesi di continuità della funzione $f(x,u)$.

Bibliografia

[1] H. ATTOUCH: *Variational convergence for functions and operators.* Pitman, London (1984).

[2] H. ATTOUCH, C. PICARD: *Variational inequalities with varying obstacles: The general form of the limit problem.*, J. Funct. Anal., **50** (1983), 329–386.

[3] H. ATTOUCH, C. PICARD: *Inéquations variationnelles avec obstacles et éspaces fonctionnels en théorie du potentiel.*, Applicable Anal., **12** (1981), 287–306.

[4] M. BELLONI, G. BUTTAZZO, L. FREDDI: *Completion by Gamma-convergence for optimal control problems.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math., **2** (1993), 149–162.

[5] M. BIROLI: *G-convergence for elliptic equations, variational inequalities and quasi-variational inequalities.*, Rend Sem. Mat. Fis. Milano, **47** (1977), 269–328.

[6] L. BOCCARDO, P. MARCELLINI: *Sulla convergenza delle soluzioni di disequazioni variazionali.*, Ann. Mat. Pura Appl., **110** (1976), 137–159.

[7] L. BOCCARDO, F. MURAT: *Nouveaux résultats de convergence dans des problèmes unilatéraux.*, in "Non-linear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar", **Vol. II**, (H. Brézis and J.L. Lions, Eds.), Research Notes in Mathematics, **60**, Pitman, London, 1982, 68–85.

[8] L. BOCCARDO, F. MURAT: *Almost Everywhere Convergence of the Gradients of Solutions of Elliptic and parabolic equations.* Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, **19(6)** (1992), 581–597.

[9] M. BRELOT: *On Topologies and Boundaries in Potential Theory.* Lecture Notes in Mathematics, **175**, Springer, Berlin, 1971.

[10] H. BREZIS: *Analisi Funzionale.* Liguori, Napoli (1986).

[11] F. BROCK: *Continuous Rearrangement and Symmetry of Solutions of Elliptic Problems.*, sottomesso per pubblicazione a Memoirs of A.M.S..

[12] F. BROCK, L. YU SOLYNIN: *An Approach to Symmetrization via Polarization.* Transactions of A.M.S. (in corso di stampa).

[13] D. BUCUR: *Un Théorème de caractérisation pour la γ- convergence.* C. R. Acad. Sci. Paris, **323** (1996), 883–888.

[14] D. BUCUR: *Shape Analysis for Nonsmooth Elliptic Operator* Appl. Math. Lett., Vol 9, **3** (1996), 11–16.

[15] D. BUCUR: *Capacitary extension and two dimensional shape optimization.* Preprint 93.24, Institut Non Linéaire, Nice (1993).

[16] D. BUCUR, G. BUTTAZZO, I. FIGUEREIDO: *On the attainable eigenvalues of the Laplace operator.* Preprint Dipartimento di Matematica Università di Pisa, Pisa (1997).

[17] D. BUCUR, G. BUTTAZZO, A. HENROT: *Existence results for some optimal partition problems.* (di prossima pubblicazione in Adv. Sci. Mat.).

[18] D. BUCUR, G. BUTTAZZO, P. TREBESCHI: *Existence results for optimal obstacles.* Preprint Dipartimento di Matematica Università di Pisa, Pisa (1997).

[19] D. BUCUR, A. HENROT: *Continuous Steiner symmetrization and Mosco convergence.*, (in preparazione).

[20] D. BUCUR, P. TREBESCHI: *Shape optimization problems governed by nonlinear state equations.* Preprint Dipartimento di Matematica Università di Pisa, Pisa (1995)

[21] D. BUCUR, P. TREBESCHI: *Shape optimization problems governed by nonlinear state equations II.* (di prossima pubblicazione su Proceedings of "Royal Society of Edimburg").

[22] D. BUCUR, J. P. ZOLÉSIO: *N-dimensional shape optimization under capacitary constraint.* J. Diff. Eq., **123** (1995), 504–522.

[23] D. BUCUR, J. P. ZOLÉSIO: *Wiener criterion and shape continuity for the Dirichlet problem.* (di prossima pubblicazione su BUMI).

[24] D. BUCUR, J. P. ZOLÉSIO: *Flat cone condition and shape analysis.* Control of Partial Differential Equations, G. Da Prato and L. Tubaro eds., Marcel Dekker Pubs. (di prossima pubblicazione).

[25] D. BUCUR, J.P. ZOLÉSIO: *Stabilité du spectre d'un opérateur elliptique par rapport au domaine.* C.R. Acad. S.c.i. Paris, **324** Serie I (1997), 191–194.

[26] D. BUCUR, J.P. ZOLÉSIO: *Spectrum stability of an elliptic operator to domain pertirbations.* (di prossima pubblicazione su J. of Convex Anal.).

[27] G. BUTTAZZO: *Semicontinuity, Relaxation and Integral Representation in the Calculus of Variations.* Pitman Res. Notes Math. Ser., **207** Longman, Harlow (1989).

[28] G. BUTTAZZO: *Relaxed formulation for a class of shape optimization problems.* Proceedings of "Boundary Control and Boundary Variations", Sophia-Antipolis, October 15–17, 1990, Lecture Notes in Control and Inf. Sci., **178** Springer-Verlag, Berlin (1992), 50–59.

[29] G. BUTTAZZO: *Existence via relaxation for some domain optimization problems.* Proceedings of "Topology Design of Structures", Sesimbra 20–26 June 1992, NATO ASI Series E: Applied Sciences **227**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1993), 337–343.

[30] G. BUTTAZZO: *Relaxed shape optimization problems with Dirichlet boundary conditions.* Proceedings of "Composite Media and Homogenization Theory II", Trieste 20 September – 1 October 1993, World Scientific, Singapore (1995), 125–137.

[31] G. BUTTAZZO: *A general theory of relaxed controls and application to shape optimization problems.* Proceedings of "Progress in Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations", Capri September 19–23 1994, Pitman Res. Notes Math. Ser., **350**, Longman, Harlow (1996), 58–70.

[32] G. BUTTAZZO, G. DAL MASO: Γ*-convergence and optimal control problems.* J. Optim. Theory Appl., **38** (1992), 385–409.

[33] G. BUTTAZZO, G. DAL MASO: *Shape optimization for Dirichlet problems: relaxed solutions and optimality conditions.* Bull. Amer. Math. Soc., **23** (1990), 531–535.

[34] G. BUTTAZZO, G. DAL MASO: *Shape optimization for Dirichlet problems: relaxed formulation and optimality conditions.* Appl. Math. Optim., **23** (1991), 17–49.

[35] G. BUTTAZZO, G. DAL MASO: *An existence result for a class of shape optimization problems.* Arch. Rational Mech. Anal., **122** (1993), 183–195.

[36] G. BUTTAZZO, G. DAL MASO, A. GARRONI, A. MALUSA: *On the relaxed formulation of Some Shape Optimization Problems.* Adv. Math. Sci. Appl., **7**, 1–24.

[37] L. CARBONE, F. COLOMBINI:*On the convergence of functionals with unilateral constraints.*, J. Math. Pures Appl., **59** (1980), 465–500.

[38] D. CHENAIS: *On the existence of a solution in a domain identification problem.* J. Math. Anal. Appl., **52** (1975), 189–289.

[39] D. CHENAIS: *Homeomorphisme entre ouverts voisins uniformement lipschitziens.* C. R. Acad. Sci. Paris, **A 283** (1976), 461–464.

[40] D. CHENAIS: *Homeomorphisme entre ouverts lipschitziens.* Ann. Mat. Pura Appl., **118** (1980), 343–398.

[41] M. CHIPOT, G. DAL MASO: *Relaxed shape optimization: the case of nonnegative data for the Dirichlet problem.* Adv. Math. Sci. Appl., **1** (1992), 47–81.

[42] D. CIORANESCU, F. MURAT: *Un terme étrange venu d'ailleurs I, II.* In "Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications, Collège de France Seminar",**Vol. II**, 98–138,**Vol III**, 154–178, Pitman, Boston (1982).

[43] G. DAL MASO: Γ-*convergence and* μ-*capacities.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **14** (1987), 423-464.

[44] G. DAL MASO: *Limiti di problemi di minimo con ostacoli.* Atti del convegno su studio di problemi limite in Analisi funzionale, Bressanone (1981), Pitagora, Bologna 1982, 79–100.

[45] G. DAL MASO: *An Introduction to* Γ-*convergence.* Birkhäuser, Boston (1993).

[46] G. DAL MASO: *Some Necessary and Sufficient Condition for Convergence of Sequence of Unilateral Convex Sets.* J. Funct. Anal., **62** (1985), 119–159.

[47] G. DAL MASO: *Comportamento asintotico delle soluzioni di problemi di Dirichlet.* Bollettino U.M.I. (7), **11-A** (1997), 253–277.

[48] G. DAL MASO, A. DE FRANCESCHI: *Limits of Nonlinear Dirichlet Problems in Varying Domains.* Manuscripta Math., **61** (1988), 251–278.

[49] G. DAL MASO, P. LONGO: Γ-*limits of obstacles.* Ann. Mat. Pura Appl.,**128 (IV)** (1980), 1–50.

[50] G. DAL MASO, U. MOSCO: *Wiener's criterion and* Γ-*convergence.* Appl. Math. Optim., **15** (1987), 15–63.

[51] G. DAL MASO, F. MURAT: *Asymptotic behaviour and correctors for Dirichlet problems in perforated domains with homogeneous monotone operators.* Preprint SISSA, Trieste (1996).

[52] C. DELLACHERIE: *Ensembles Analytiques, Capacitès, Measures de Hausdorff.* Lectures Notes In Applied Mathematics, **295** Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1972).

[53] J.L. DOOB: *Classical potential theory and its probabilistic counterpart.* Springer, Berlin, 1984.

[54] L.I. HEDBERG: *Spectral synthesis in Sobolev spaces and uniqueness of solutions of the Dirichlet problem.* Acta Math., **147** (1982), 237–264.

[55] J. HEINONEN, T. KILPELAINEN, O. MARTIO: *Nonlinear Potential Theory of Degenerate Elliptic Equations.* Oxford Clarendon Press, 1993.

[56] A. HENROT: *Continuity with respect to the domain for the Laplacian: a survey.* Control and Cybernetics, **23** (1994), 427–443.

[57] A.D. IOFFE : *On lower semicontinuity of integral functionals.* I. SIAM J. Control Optim., **15** (1977) 521–537.

[58] T. KILPELAINEN, J. MALY: *Supersolutions to degenerate elliptic equations on quasi open sets.* Comm. in P.D.E., **17** (1992), 371–405.

[59] KURATOWSKY: *Topology* Academic Press, New York (1968).

[60] U. MOSCO: *Convergence of Convex sets and of Solutions of Variational Inequalities* Adv. in Math., **3** (1969) 510–585.

[61] O. PIRONNEAU: *Optimal Shape Design for Elliptic Systems.* Springer-Verlag, Berlin (1984).

[62] J. RAUCH, M.TAYLOR: *Potential and Scattering theory on widly perturbed domains.* J. Of Funct. Anal., **18** (1975), 27–59.

[63] I.V. SKRYPNIK: *Asymptotics of solutions of nonlinear elliptic problems in perforated domains.* Russian Acad. Sci. Sb. Math., **80** (1995), No 1, 191–209.

[64] V. ŠVERÁK: *On optimal shape design.* C. R. Acad. Sci. Paris, **I-315** (1992), 545–549.

[65] V. ŠVERÁK: *On optimal shape design.* J. Math. Pures. Appl., **72** (1993), 537–551.

[66] W. ZIEMER: *Weakly Differentiable Functions.* Springer-Verlag, Berlin (1989).