Indice

Capitolo 1. Introduzione 3

Capitolo 2. Nozioni preliminari 11
1. Teoria della misura 11
2. Funzioni BV 15
3. La regola di Vol'pert 18
4. Misure di Young 22
5. Γ-Convergenza 25

Capitolo 3. Teorema rank-one 29
1. Integrazione e disintegrazione di misure 30
2. Misure tangenti 33
3. Dimensione di $E(\mu, x)$ 39
4. Proprietà di $\mathcal{E}(R^n, X)$ 42
5. Misure rettificabili e teorema rank-one 47

Capitolo 4. I funzionali J^β 51
1. L'argomento di Aviles e Giga 53
2. La funzione distanza è un minimo? 60
3. Un controesempio con Ω non convesso 65
4. La rappresentazione di J^3 69
5. Un controesempio alla semicontinuità per $\beta > 3$ 73

Capitolo 5. Lo spazio di Aviles e Giga 77
1. Definizione di $AG(\Omega)$ e $AG_e(\Omega)$ 78
2. AG contiene funzioni il cui gradiente non è BV_{loc} 82
3. Una disuguaglianza di tipo Jensen 85
4. Decomposizione di Hodge 86
5. Il teorema di compattezza 88

Capitolo 6. Altri risultati 93
1. Disuguaglianza del $\Gamma-$liminf ed equicoercività 94
2. $\Gamma-$limsup per funzioni affini a tratti 95

Bibliografia 103

CAPITOLO 1

Introduzione

La teoria della Γ-convergenza, introdotta negli anni '70 da De Giorgi e Franzoni per lo studio di problemi limite nel Calcolo delle Variazioni, in questi ultimi decenni ha avuto un ambito molto vasto di applicazioni, quali ad esempio problemi di omogeneizzazione, problemi di rilassamento, transizioni di fase, problemi di controllo ottimo (si veda in proposito l'ampia bibliografia in [**13**]).
Una notevole applicazione della teoria, ormai divenuta un esempio classico, è l'approssimazione variazionale di funzionali del tipo dell'area mediante funzionali quadratici definiti in spazi di Sobolev. Più in dettaglio, basandosi su una congettura di De Giorgi Modica e Mortola hanno dimostrato in [**23**] che il limite asintotico per $\epsilon \downarrow 0$ della famiglia

$$G_\epsilon(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\frac{(1-u^2)^2}{\epsilon} + \epsilon|\nabla u|^2\right) dx & \text{per } u \in H^2(\Omega) \\ +\infty & \text{per } u \in L^2(\Omega)\backslash H^2(\Omega) \end{cases}$$

è il funzionale

$$G(u) = \begin{cases} \frac{4}{3}\mathcal{H}^{n-1}(J_u) & \text{se } |u| = 1 \text{ q.o. e } u \in BV(\Omega) \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dove Ω è un aperto di $\mathbf{R}^n$ e J_u è l'insieme di salto (nel senso approssimato) di u.
In connessione con la teoria dei cristalli liquidi, nell'87 Aviles e Giga hanno sollevato il problema del comportamento asintotico di funzionali del tipo di Modica-Mortola con un ordine di derivazione più alto, ovvero di funzionali della forma

$$F_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\epsilon|\nabla^2 u|^2 + \frac{(1-|\nabla u|^2)^{\beta-1}}{\epsilon}\right) dx.$$

In particolare in [**8**] hanno congetturato che il funzionale limite, in analogia a quanto succede per il problema di Modica e Mortola, sia del tipo

$$J^\beta(u) = C\int_{J_{\nabla u}} |\nabla u^+ - \nabla u^-|^\beta d\mathcal{H}^{n-1}$$

sulle funzioni u lipschitziane tali che $|\nabla u| = 1$ q.o. e ∇u è una funzione a variazione limitata in Ω.
Nel '94 Gioia e Ortiz ([**25**]) hanno mostrato che nel caso $\beta = 3$ e $n = 2$ i funzionali ϵF_ϵ sono un buon modello per l'energia di deformazione di pellicole sottili che, soggette a compressione biassiale, si distaccano dal substrato

formando bolle: in questo caso $(1-|\nabla u|^2)^2$ rappresenta l'energia elastica, mentre $\epsilon^2|\nabla^2 u|^2$ rappresenta quella di "avvolgimento".
In stretta connessione con i funzionali F_ϵ vi è perciò lo studio del seguente problema:

$$\begin{cases} \inf \int_{J_{\nabla u}} |\nabla u^+ - \nabla u^-|^\beta d\mathcal{H}^1 \\ |\nabla u| = 1 \qquad \mathcal{L}^2 \text{ q.o.}, \qquad \nabla u \in BV(\Omega, \mathbf{R}^2) \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \, \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_{\partial\Omega} = -1 \end{cases} \tag{$*$}$$

dove Ω è un aperto limitato di $\mathbf{R}^2$.
Lo scopo di questa tesi è, da una parte, di raccogliere i risultati dell'ultimo decennio sul comportamento dei funzionali F_ϵ e sui problemi di minimo per i funzionali J^β con opportune condizioni al bordo, dall'altra di approfondire lo studio del caso $\beta = 3$. Tutti i risultati sinora disponibili su questa problematica ([**10**], [**9**],[**8**], [**19**],[**5**],[**16**]) si limitano al contesto bidimensionale e anche in questa tesi tratteremo solo i problemi relativi al caso $n = 2$, ottenendo alcuni risultati originali [**5**] e nuove dimostrazioni di fatti già noti.

Visto che lavoreremo sempre su spazi topologici separabili, useremo le caratterizzazioni per successioni dei Γ-limiti; questo significa che potremmo dividere la strategia di attacco alla congettura di Aviles e Giga in due parti:

(a) dimostrare che $\Gamma-\liminf_\epsilon F_\epsilon \geq J^\beta$, ovvero, fissato u, provare che, per ogni successione $\epsilon_k \downarrow 0$ e per ogni $u_k \to u$ vale

$$\liminf_{k\to\infty} F_{\epsilon_k}(u_k) \geq J^\beta(u);$$

(b) dimostrare che $\Gamma-\limsup_\epsilon F_\epsilon \leq J^\beta$, ovvero che, fissato u, per ogni $\epsilon_k \downarrow 0$ si può trovare una successione (u_k) convergente a u tale che

$$\limsup_{k\to\infty} F_{\epsilon_k}(u_k) = J^\beta(u)$$

(successioni con queste caratteristiche verranno chiamate ottimali).

E' ovvio che per adottare la strategia appena illustrata bisognerà ambientare il nostro problema in un opportuno spazio funzionale munito di un'opportuna topologia e, perché tutto ciò abbia una certa rilevanza, bisognerà anche assicurarsi che in tale contesto ci sia equicoercività dei funzionali. Infatti, solo la presenza di tutte queste condizioni assicurerebbe che i minimi delle energie approssimanti convergono al minimo dell'energia limite. Il principale risultato di questa tesi sarà proprio quello di fornire un contesto appropriato per questa strategia nel caso in cui $\beta = 3$.

Più in dettaglio esibiremo uno spazio topologico X in cui:

(a) si può applicare il metodo diretto del calcolo delle variazioni a un problema di minimo che è un'estensione di $(*)$;

(b) vale la disuguaglianza
$$\Gamma\!-\liminf_{\epsilon\to 0} F_\epsilon \geq J^3;$$
(c) vale la disuguaglianza
$$\Gamma\!-\limsup_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(u) \leq J^3(u)$$
per le u di un certo sottospazio $\mathcal{S}$;

(d) i funzionali F_ϵ sono equicoercivi.

Come si vede, l'unico tassello mancante al mosaico è la disuguaglianza del $\Gamma\!-\limsup$: infatti, pur avendo forti motivi per sospettarlo, non siamo in grado di mostrare che $\mathcal{S}$ è denso in energia, ovvero che, per ogni $u \in X$ esiste una successione $(u_n) \subset \mathcal{S}$ convergente ad u tale che
$$\lim_{n\to\infty} J^3(u_n) = J^3(u).$$
Questa proprietà di $\mathcal{S}$ ci permetterebbe di portare a termine il nostro programma.

Esaminiamo ora un po' più a fondo il contenuto dei vari capitoli.

Nel quarto capitolo abbiamo raccolto i risultati noti in letteratura sull'argomento; in particolare ci siamo rifatti ai tre articoli di Aviles e Giga citati in bibliografia. Le sezioni 2 e 3 gravitano attorno alla domanda: la funzione distanza da $\partial\Omega$ è un minimo per il problema $(*)$? La seconda fornisce alcuni controesempi nel caso in cui Ω non sia convesso, mentre la prima risponde affermativamente quando Ω è un dominio convesso poligonale, le u sono funzioni affini a tratti e $\beta = 1$. Per dimostrare quest'ultima affermazione Aviles e Giga hanno usato il teorema "rank-one" di Alberti ([**1**]), che abbiamo sfruttato anche più avanti in alcuni teoremi di rappresentazione per J^3. Per completezza nel capitolo 3 abbiamo riportato la dimostrazione originale del teorema.

Nella sezione 1 abbiamo riportato la principale motivazione euristica che ha spinto Aviles e Giga a congetturare che J^β sia il Γ-limite dei funzionali F_ϵ. Vista la presenza nel problema di funzioni il cui gradiente ha linee di discontinuità, la loro proposta è di usare le tecniche della Γ-convergenza nello spazio dei gradienti ∇u a variazione limitata; la topologia che sembra più naturale utilizzare è la topologia forte di $W^{1,p}$ per qualche $p < \infty$. Non è difficile vedere che, in tal caso, tutte le funzioni ammissibili per il problema asintotico (ovvero quelle che hanno energia finita al limite) devono soddisfare l'equazione eikonale ($|\nabla u| = 1$ $\mathcal{L}^2$ quasi ovunque).
A questo punto l'argomento di Aviles e Giga non è altro che una congettura su quali possano essere le successioni ottimali per le funzioni u che in seguito chiameremo "tetti". Le u in questione sono lipschitziazne, soddisfano l'equazione eikonale e il loro gradiente assume due valori con discontinuità lungo una retta r (che chiameremo retta di "rottura"); come si può facilmente vedere, la proiezione del gradiente lungo r è costante. Aviles e Giga

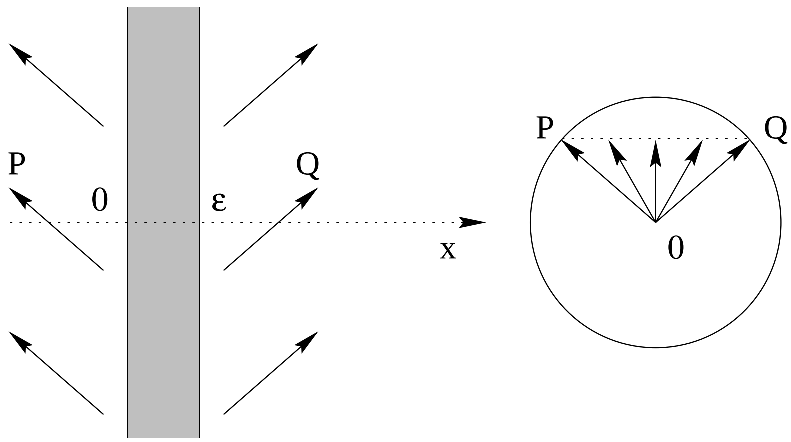
hanno congetturato che si possa costruire una famiglia ottimale per una u che sia un tetto con delle u_ϵ che:

(a) coincidono con la u fuori da una striscia di larghezza ϵ centrata su r;

(b) hanno una transizione liscia da un valore all'altro all'interno della striscia;

(c) la proiezione del loro gradiente lungo la retta r è costante.

(La situazione è riassunta in figura nel caso in cui la retta r sia l'asse delle ascisse.)



Anche se l'ultimo paragrafo del capitolo confuta la congettura per $\beta > 3$, esibendo un controesempio ([**5**]) che mostra che J^β non è semicontinuo per la convergenza L^p dei gradienti, nell'ultima parte di questa tesi abbiamo dimostrato, seguendo un ragionamento di Kohn e Jin [**19**], che le u_ϵ proposte da Aviles e Giga (e anche da Gioia e Ortiz in [**25**]) sono effettivamente una famiglia ottimale nel caso $\beta = 3$.

Nella quarta sezione abbiamo riportato un teorema di rappresentazione per J^3, dimostrato sempre da Aviles e Giga in [**10**] sfruttando dei campi introdotti da Jin e Kohn in [**19**]. Nel caso in cui u soddisfi l'equazione eikonale, questi campi si riducono a

$$\Sigma_{\xi\eta} u = \frac{2}{3}(u_\xi^3 \xi - u_\eta^3 \eta)$$

dove ξ e η sono i due versori di un sistema di riferimento ortonormale. La caratteristica più importante dei campi di Jin e Kohn è che le loro divergenze (nel caso in cui u sia in H^2) si stimano con $F_\epsilon(u)$ ed una perturbazione infinitesima dell'ordine di $\epsilon^{1/2} F_\epsilon^{1/2}(u)$.
In sostanza il teorema di rappresentazione ci dice che, nel caso in cui ∇u sia una funzione BV, la variazione totale della misura che dà l'estremo superiore delle divergenze di questi campi coincide proprio con J^3.

Negli ultimi due capitoli abbiamo esposto alcuni risultati nuovi raccolti in un lavoro con Ambrosio e Mantegazza ([**5**]). Il capitolo 5 è dedicato al risultato chiave di questa tesi, ovvero la dimostrazione che si può applicare il metodo diretto del calcolo delle variazioni a un'opportuna formulazione debole del problema $(*)$. Per far ciò abbiamo dovuto introdurre un nuovo spazio di funzioni (chiamato $AG(\Omega)$). Il suo uso è giustificato nella seconda sezione con un controesempio che mostra come nello spazio precedentemente proposto da Aviles e Giga ([**10**], in cui $\nabla u \in BV(\Omega, S^1)$) non si possa applicare il metodo diretto del calcolo delle variazioni, perché i sottolivelli di J^3 non sono compatti.

La definizione di $AG_e(\Omega)$, data nella sezione 1, è ispirata proprio dal teorema di rappresentazione di J^3 illustrato nel capitolo precedente: in sostanza lo spazio in questione è il più ampio in cui tale rappresentazione ha senso. Infatti $AG_e(\Omega)$ è dato dalle funzioni $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ che soddisfano l'equazione eikonale e per le quali le divergenze distribuzionali dei campi $\Sigma_{\xi\eta}u$ sono misure. Confutando una congettura di Aviles e Giga, abbiamo mostrato con un esempio che questo spazio è strettamente più grande di quello che si otterrebbe imponendo al gradiente delle funzioni di essere a variazione limitata.

Per trattare il problema della Γ-convergenza si è rivelato molto utile usare i campi originali di Jin e Kohn per definire una generalizzazione di AG_e che lasciasse cadere il vincolo eikonale. In tale ottica, sempre nella sezione 1, abbiamo dimostrato un teorema di rappresentazione generale che ingloba come caso particolare quello del capitolo precedente.

Mentre la semicontinuità di J^3 in AG_e è praticamente una conseguenza diretta della definizione, la dimostrazione della compattezza dei suoi sottolivelli richiede un certo sforzo. Le sezioni 3, 4 e 5 sono dedicate proprio alla dimostrazione di questo risultato, ottenuto indipendentemente da DeSimone, Kohn, Müller e Otto [**16**], che si basa su alcuni strumenti tecnici come le misure di Young e una versione debole del teorema di Hodge. In realtà la nostra formulazione finale del teorema è più forte di quella di [**16**] e ha conseguenze più profonde della sola compattezza dei sottolivelli di J^3. Come vedremo infatti nella prima sezione del capitolo 6, una sua diretta conseguenza è l'equicoercività dei funzionali F_ϵ. Inoltre, sempre nella stessa sezione, recuperando nel nuovo contesto l'idea di Jin e Kohn in [**19**] abbiamo dimostrato la disuguaglianza del $\Gamma-\liminf$.
Ciò ci permette di concludere che le famiglie proposte da Aviles, Giga, Gioia e Ortiz per approssimare i "tetti" sono effettivamente ottimali. L'ultimo paragrafo è dedicato ad un metodo costruttivo che consente di raccordare queste famiglie in maniera tale da trovare successioni ottimali per una qualsiasi funzione u affine a tratti.

Concludo ringraziando il prof. Luigi Ambrosio che mi ha seguito in questo lavoro, il dott. Carlo Mantegazza, il dott. Paolo Tilli, Sun-Ra Mosconi e

tutti i miei amici.

Notazioni

$f \circ g$	funzione composta di f e g
∂E	frontiera topologica dell'insieme E
$\mathcal{F}E$	frontiera ridotta di E (pag. 15)
J^β	funzionali definiti a pag. 3 e a pag. 51
$AG(\Omega)$, $AG_e(\Omega)$	spazi di Aviles e Giga definiti a pag. 78
$\mathcal{B}(\Omega)$	σ-algebra degli insiemi di Borel di Ω
$\mathcal{L}^n$	misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^n$
$A \subset\subset B$	B contiene la chiusura di A
$\lvert\mu\rvert$	variazione di una misura μ (pag. 12)
$\lVert\mu\rVert_{var}$	variazione totale di una misura μ (pag. 12)
supp μ	supporto di una misura μ
$\mathcal{M}(\Omega, \mathbf{R}^n)$	spazio delle misure su Ω a valori in $\mathbf{R}^n$ munito della norma $\lVert \cdot \rVert_{var}$
$C_c(\Omega, \mathbf{R}^n)$	spazio delle funzioni continue da Ω in $\mathbf{R}^n$
$C_0(\Omega, \mathbf{R}^n)$	chiusura di $C_c(\Omega, \mathbf{R}^n)$ nella norma del sup
$\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$	$\mathcal{M}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$
$C_0(\mathbf{R}^r)$	$C_0(\mathbf{R}^r, \mathbf{R})$
$\mu \perp \nu$	μ è singolare rispetto a ν (pag. 12)
$\mu << \nu$	μ è assolutamente continua rispetto a ν (pag. 12)
$\mathcal{H}^k$	misura di Hausdorff k-dimensionale
χ_E	funzione caratteristica dell'insieme E
$\mu \llcorner E$	restrizione della misura μ all'insieme E (pag. 14)
$BV(\Omega)$	spazio delle funzioni da Ω in $\mathbf{R}$ a variazione limitata
$C^1_c(\Omega)$	spazio delle funzioni reali di classe C^1 a supporto compatto contenuto in Ω
$P(E, \Omega)$	perimetro di E relativo a Ω (pag. 15)
$\nu_E(x)$	normale interna ad E in x (pag. 15)
$D_c u$	parte cantoriana di Du (pag. 18)
$D_j u$	parte di salto di Du (pag. 18)
$D_a u$	parte assolutamente continua di Du (pag. 18)
S_u	insieme di discontinuità approssimata u (pag. 17)
J_u	insieme di salto approssimato di u (pag. 17)
aplim	limite approssimato (pag. 16)
$u * \rho$	convoluzione di u e ρ
$a \otimes b$	prodotto tensore tra i vettori a e b
S^k	frontiera della palla unitaria in $\mathbf{R}^k$
u^+, u^-	traccia destra e traccia sinistra di u (pag. 15)

$\mathrm{Tan}(\mu, x)$	misure tangenti a μ in x nel senso di Preiss nella sezione 2.3 (pag. 19) nel senso di Alberti nelle altre sezioni (pag. 33)
$[BV(\Omega)]^n$, $BV(\Omega, \mathbf{R}^n)$	spazio delle funzioni da Ω in $\mathbf{R}^n$ a variazione limitata
$f_{\#}(\mu)$	pull-back della misura μ tramite la funzione f (pag. 20)
$f^{\#}\mu$	push-forward della misura μ tramite la funzione f (pag. 32)
δ_y	delta di Dirac concentrata nel punto y
$\Gamma-\lim$	Γ-limite (sezione 2.5)
$\Gamma-\limsup$	Γ-limite superiore (sezione 2.5)
$\Gamma-\liminf$	Γ-limite inferiore (sezione 2.5)
$W^{k,p}(\Omega)$	spazio di Sobolev delle funzioni con derivate p-sommabili fino al k-esimo ordine
$H^k(\Omega)$	$W^{k,2}(\Omega)$
$[d\mu/d\nu]$	derivata di Radon-Nykodim della misura μ rispetto a ν
$E(x, \mu)$	classe di misure definita a pag. 33
$\mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$	classe di misure definita a pag. 34
$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n, X)$	classe di misure definita a pag. 40
ω_n	misura di Lebesgue della palla unitaria di $\mathbf{R}^n$
$\dim\,(E)$	dimensione dello spazio vettoriale E
$\mathrm{Ker}(A)$	nucleo dell'applicazione lineare A
$\mathrm{tr}\,(A)$	traccia dell'applicazione lineare A
$\mathrm{rank}\,(A)$	rango dell'applicazione lineare A
$\lvert A\rvert$	norma di Hilbert-Schmidt dell'applicazione lineare A
C^1_t	funzioni C^1 a tratti (pag. 51)
$[v]^+_-$	"salto" di v (pag. 51)
$\mathrm{div}\, v$, $\nabla \cdot v$	divergenza di v
$\mathrm{rot}\, v$, $\nabla \times v$	rotazione di v
Δu	laplaciano di u
Ju	jacobiano di u

CAPITOLO 2

Nozioni preliminari

Nelle prime due sezioni di questo capitolo richiameremo le definizioni chiave e, omettendone le dimostrazioni, i teoremi più importanti della teoria delle funzioni BV, di cui si farà uso in tutti i capitoli successivi. Nella terza sezione, invece, parleremo della regola di Vol'pert [**26**]: in sostanza verrà dimostrata una formula di derivazione delle funzioni composte $f \circ u$, per certi versi analoga a quella classica, nel caso in cui f è una funzione lipschitziana di classe C^1 e u è una funzione BV. Si è voluto porre l'accento su tale formula perché essa è uno degli ingredienti fondamentali usati da Aviles e Giga nel 96 [**10**] per dare una rappresentazione più maneggevole del funzionale J^3. Su tale rappresentazione si regge tutta la seconda parte di questa tesi, in cui si estende J^3 a AG_e e si dimostra in tale spazio la semicontinuità del funzionale e la compattezza dei suoi sottolivelli. Il quarto paragrafo è essenzialmente una breve presentazione delle misure di Young, che verranno usate nella dimostrazione del teorema di compattezza al quale si è fatto riferimento sopra. Infine, il resto del capitolo è un riassunto delle proprietà principali della Γ-convergenza in cui si è posto l'accento su quelle che verranno usate in seguito.
I testi di riferimento per i primi tre paragrafi sono quello di Ambrosio, Fusco e Pallara [**7**] e gli appunti del corso tenuto da Ambrosio alla Scuola Normale [**2**]. Per la quarta sezione si è seguita l'esposizione dell'argomento fatta da Müller in un ciclo di lezioni al Max Planck Institut ([**24**], gli appunti di tale corso sono disponibili in una delle pagine web dell'istituto), mentre per l'ultima parte il testo base è quello di Dal Maso [**13**].

1. Teoria della misura

In questo paragrafo indichiamo con Ω uno spazio metrico localmente compatto e con $\mathcal{B}(\Omega)$ la σ-algebra dei sottinsiemi di Borel di Ω.

Definizione 2.1. Con il termine di *misura* in Ω intendiamo una funzione

$$\mu : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbf{R}^n$$

che sia numerabilmente additiva.

Quando riferiti a una misura gli aggettivi *non negativa* e *scalare* significano che il codominio della misura è, rispettivamente, $[0, \infty)$ e $\mathbf{R}$. L'unica eccezione a questa terminologia verrà fatta per le misure di Hausdorff, che saranno definite per tutti i sottinsiemi di $\mathbf{R}^n$ e che non sono σ-additive sull'intero insieme delle parti. Una misura *localmente finita* in Ω è una funzione d'insieme definita sulla σ-algebra generata dai compatti di Ω e tale che la sua restrizione a $\mathcal{B}(\Omega')$ sia una misura per ogni $\Omega' \subset\subset \Omega$. La misura di Lebesgue $\mathcal{L}^n$ è l'esempio più importante di misura localmente finita in $\mathbf{R}^n$.

DEFINIZIONE 2.2. La variazione $|\mu|$ di una misura è una funzione d'insieme definita su $\mathcal{B}(\Omega)$ come

$$|\mu|(B) = \sup\left\{\sum_{i=0}^{\infty} |\mu(B_i)| \; |B = \bigcup_{i=0}^{\infty} B_i\right\},$$

dove il sup è fatto su tutte le partizioni di B in insiemi di Borel.

Si vede facilmente che la μ cosí definita è una misura non negativa. Tramite essa si può definire il *supporto* di μ come il minimo chiuso C tale che $|\mu|(\Omega \backslash C) = 0$. Lo spazio $\mathcal{M}(\Omega, \mathbf{R}^p)$ delle misure su Ω a valori vettoriali in $\mathbf{R}^p$ è uno spazio di Banach per la norma

$$\|\mu\|_{var} = |\mu|(\Omega)$$

che viene detta variazione totale di μ. Il teorema di Riesz afferma che $\mathcal{M}(\Omega, \mathbf{R}^p)$ è il duale dello spazio di Banach $C_0(\Omega, \mathbf{R}^p)$ (che è la chiusura, nella norma del sup, di $C_c(\Omega, \mathbf{R}^p)$). Come corollario del teorema di Riesz otteniamo che, data una misura μ di $\mathcal{M}(\Omega, \mathbf{R}^p)$, la sua variazione totale è

$$\sup_{f \in C_c(\Omega, \mathbf{R}^p), \|f\|_\infty \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{p} \int_\Omega f_i d\mu_i \right|$$

dove con f_i intendiamo le componenti di f e con μ_i le misure scalari che si ottengono componendo la misura μ con le proiezioni sui vettori della base canonica. Prima di passare alla definizione di assoluta continuità e al teorema di derivazione enunciamo una proposizione che verrà usata molto spesso in seguito.

PROPOSIZIONE 2.3. *Sia (μ_h) una successione di misure in Ω che convergono *debolmente a una μ e tali che $(|\mu_h|)$ converga *debolmente a σ. Se $A \subset\subset \Omega$ è un aperto per il quale $\sigma(\partial A) = 0$ allora*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A).$$

DEFINIZIONE 2.4. Si dice che una misura μ su Ω è assolutamente continua rispetto a ν quando $|\mu|(B) = 0$ ogni volta che $\nu(B) = 0$; μ è singolare rispetto a ν quando $\nu(\text{supp } \mu) = 0$ (con supp μ si indica il supporto di μ). Nel primo caso si scrive $\mu << \nu$, nel secondo $\mu \perp \nu$.

Il teorema di Radon-Nikodym afferma che, data una misura non negativa μ su Ω, si può decomporre una qualsiasi misura λ come

$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s,$$

in cui λ_a è una misura assolutamente continua rispetto a μ e λ_s è singolare (sempre rispetto a μ). Inoltre λ_a può essere espressa come $f\mu$ con $f \in L_1(\Omega, \mu; \mathbf{R}^p)$ dove con $f\mu$ si indica la misura

$$f\mu(B) = \int_B f d\mu.$$

Se Ω è un aperto di $\mathbf{R}^n$ il teorema di derivazione di Besicovitch dà un'espressione per f in μ-quasi ogni punto di Ω. Le dimostrazioni di tale teorema fanno uso del teorema di ricoprimento enunciato qui sotto che si rivelerà indispensabile nei capitoli successivi.

Definizione 2.5. Sia $\mathcal{B}$ una famiglia di palle chiuse e sia $A \subset \mathbf{R}^n$. Si dice che $\mathcal{B}$ è un ricoprimento fine di A se

$$\inf\left\{\rho > 0 | \overline{B}_\rho(x) \in \mathcal{B}\right\} = 0 \qquad \forall x \in A.$$

Teorema 2.6. **(di ricoprimento di Besicovitch)** *Sia $A \subset \mathbf{R}^n$ un insieme di Borel limitato e sia $\mathcal{B}$ un ricoprimento fine di A. Per ogni misura ν localmente finita e non negativa in $\mathbf{R}^n$ esiste una sottofamiglia disgiunta e numerabile $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ che ricopre μ-quasi tutto A, ovvero*

$$\mu\left(A \setminus \bigcup \mathcal{B}'\right) = 0.$$

Teorema 2.7. **(di derivazione di Besicovitch)** *Sia ν una misura localmente finita in $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ e $\lambda : \mathcal{B}(\Omega) \to \mathbf{R}^\mathbf{p}$ una misura assolutamente continua rispetto a ν. Allora, per ν-quasi ogni $x \in supp\ \nu$ esiste*

$$f(x) = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{\lambda(B_\rho(x))}{\nu(B_\rho(x))} \in \mathbf{R}^\mathbf{p}$$

e si ha $\lambda = f\nu$.

Per finire il paragrafo introdurremo le misure di Hausdorff k-dimensionali in $\mathbf{R}^n$, soffermandoci su quelle intere e sul concetto di insieme $\mathcal{H}^k$-rettificabile

Definizione 2.8. Sia $k \geq 0$, e sia $B \subset \mathbf{R}^n$. Si indica con $\mathcal{H}^k(B)$ la misura di Hausdorff k-dimensionale di B, definita da

$$\mathcal{H}^k(B) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^k_\delta(B),$$

dove, per $0 < \delta \leq +\infty$, $\mathcal{H}^k_\delta$ è definita da

$$\mathcal{H}^k_\delta(B) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf\left\{\sum_{i \in I} (\mathrm{diam}(B_i))^k | \mathrm{diam}(B_i) < \delta, B \subset \bigcup_{i \in I} B_i\right\}$$

e la costante ω_k vale $\pi^{k/2}/\Gamma(1 + k/2)$.

Teorema 2.9. **Proprietà delle misure di Hausdorff**

1. *Le misure* $\mathcal{H}^k$ *sono numerabilmente subadditive sulle parti di* $\mathbf{R}^n$ *e* σ*-additive sugli insiemi di Borel;*

2. $\mathcal{H}^k$ *è identicamente nulla per* $k > n$ *e coincide con la misura che conta i punti se* $k = 0$*;*

3. *se* $k > k' \geq 0$ *allora vale la seguente implicazione*
$$\mathcal{H}^k(B) > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{H}^{k'}(B) = +\infty;$$

4. *se* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ *è una funzione lipschitziana si ha*
$$\mathcal{H}^k(f(B)) \leq M^k \mathcal{H}^k(B)$$
dove M *è la costante di Lipschitz di* f*.*

Nel seguito del paragrafo supporremo che k sia un intero e che E sia un insieme a misura di Hausdorff k-dimensionale finita. Dal teorema di derivazione, posto
$$E \in \mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \quad \nu := \mathcal{H}^n \quad \lambda := \mathcal{H}^n \llcorner E = \chi_E \mathcal{H}^k,$$
si deduce che
$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{|E \cap B_\rho(x)|}{\omega_n \rho^n} = \chi_E(x)$$
per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$. Nel caso $k < n$ non si ottengono informazioni sulla densità di E nei suoi punti: tutto ciò che si può dire è che
$$2^{-k} \leq \limsup_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{H}^k(E \cap B_\rho(x))}{\omega_k \rho^k} \leq 1 \quad \text{per } \mathcal{H}^k\text{-q.o. } x \in E$$
$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{H}^k(E \cap B_\rho(x))}{\omega_k \rho^k} = 0 \quad \text{per } \mathcal{H}^k\text{-q. o. } x \in \mathbf{R}^n \setminus E.$$

Definizione 2.10. Sia $E \subset \mathbf{R}^n$ un insieme di Borel; E si dice numerabilmente $\mathcal{H}^k$ rettificabile se $\mathcal{H}^k$-quasi tutto E si ricopre con una successione di grafici lipschitziani di dimensione k, ovvero se esiste una famiglia numerabile di grafici Γ_h (opportunamente traslati e ruotati) di funzioni lipschitziane di k variabili tali che
$$\mathcal{H}^k\left(E \setminus \bigcup \Gamma_i\right) = 0.$$
Inoltre E viene chiamato $\mathcal{H}^k$-rettificabile se $\mathcal{H}^k(E) < \infty$.

L'esistenza della densità k-dimensionale è strettamente collegata alla proprietà di rettificabilità: un insieme di Borel E a misura di Hausdorff k-dimensionale finita è $\mathcal{H}^k$-rettificabile se e solo se
$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\mathcal{H}^k(E \cap B_\rho(x)}{\omega_k \rho^k} = 1 \quad \text{per } \mathcal{H}^k\text{-q. o. } x \in E.$$

2. Funzioni BV

DEFINIZIONE 2.11. Sia $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un insieme aperto e $u \in L^1(\Omega)$. Diremo che u è a *variazione limitata* in Ω se la sua derivata in senso distribuzionale è una misura su Ω. Lo spazio delle funzioni a variazione limitata in Ω verrà indicato con $BV(\Omega)$ e diremo che una funzione $u : \Omega \to \mathbf{R}^p$ è BV se $u_i \in BV(\Omega)$ per $i = 1, ..., p$.

Da quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente è immediato che una funzione $u \in L^1(\Omega)$ è a variazione limitata se e solo se

$$\sup \left\{ \int_\Omega u \operatorname{div} g dx \ |g \in C_c^1(\Omega, \mathbf{R}^n), |g| \leq 1 \right\} < +\infty.$$

Inoltre si può dimostrare che $u \in BV(\Omega)$ se e solo se esiste una successione $(u_h) \subset C^\infty(\Omega)$ tale che $\|u_h - u\|_{L^1(\Omega)}$ tenda a zero e

$$\limsup_{h\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_h| dx \leq L < +\infty.$$

Il più piccolo L per cui esiste una tale successione è proprio la variazione totale della misura Du.
Lo spazio $BV(\Omega)$ con la norma

$$\|u\|_{BV(\Omega)} = \|Du\|_{var} + \|u\|_{L^1(\Omega)}$$

diventa uno spazio di Banach. Una delle proprietà fondamentali di $BV(\Omega)$ è enunciata nel prossimo teorema.

TEOREMA 2.12. *Sia $\mathcal{F} \subset BV(\Omega)$ una famiglia di funzioni equilimitate in norma. Allora $\mathcal{F}$ è relativamente compatta nella convergenza $L^1_{loc}(\Omega)$.*

I sottinsiemi E di R^n tali che $\chi_E \in BV(\mathbf{R}^n)$ vengono chiamati insiemi a *perimetro finito* o *di Caccioppoli* e la variazione totale di $D\chi_E$ viene chiamata *perimetro* di E. I sottinsiemi di E limitati con bordo regolare sono insiemi di Caccioppoli e la nozione usuale di perimetro coincide in tali casi con quella appena data. In realtà si può dire molto di più: la misura $D\chi_E$ coincide con $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial E$ e ciò non è altro che un caso particolare del teorema di struttura degli insiemi a perimetro finito che enunceremo tra poco. Per far ciò dobbiamo dare alcune definizioni

DEFINIZIONE 2.13. Un insieme $E \subset \Omega$ si dice a *perimetro finito in* Ω se $\chi_E \in BV(\Omega)$ e chiamiamo perimetro di E relativo a Ω (indicato con $P(E, \Omega)$) la variazione totale di $D\chi_E$ in Ω.

DEFINIZIONE 2.14. Sia E un insieme a perimetro finito in Ω. Chiameremo *frontiera* di E (in Ω) l'insieme FE dei punti di Ω tali che

$$0 < \mathcal{L}^n(E \cap B_\rho(x)) < \omega_n \rho^n \qquad \forall \rho > 0.$$

Chiameremo *frontiera ridotta* di E l'insieme $\mathcal{F}E$ dei punti $x \in FE$ tali che

$$\exists \nu_E(x) := \lim_{\rho \to 0^+} \frac{D\chi_E(B_\rho(x))}{|D\chi_E|(B_\rho(x))}$$

e $|\nu_E(x)| = 1$. La funzione $\nu_E(x)$ viene chiamata *normale interna* generalizzata ad E.

TEOREMA 2.15. **(di struttura degli insiemi di Caccioppoli)**
Sia E un insieme a perimetro finito in Ω. Allora $\mathcal{F}E$ è un insieme $\mathcal{H}^{n-1}$-rettificabile, le misure $|D\chi_E|$ e $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \mathcal{F}E$ coincidono e $FE = \overline{\mathcal{F}E}$.

Nella dimostrazione classica di questo teorema si vede come la normale interna sopra definita coincide con la normale interna che ci deriva dalla definizione “classica”. Infatti, essendo $\mathcal{F}E$ un insieme $\mathcal{H}^{n-1}$-rettificabile esso è (a meno di insiemi di misura $\mathcal{H}^{n-1}$ nulla) unione numerabile di sottinsiemi di grafici lipschitziani: tramite una versione raffinata del teorema di estensione di Whitney si può in reltà vedere che (sempre a meno di insiemi $\mathcal{H}^{n-1}$ trascurabili) è unione di sottinsiemi di grafici C^1. Quindi per $\mathcal{H}^{n-1}$ quasi ogni punto di $\mathcal{F}E$ esiste un grafico Γ di classe C^1 tale $\Gamma \cap \mathcal{F}E$ abbia densità $(n-1)$-dimensionale 1. In un punto siffatto si può allora definire la retta normale “classica” a E come la retta normale alla varietà Γ. Tale retta coincide con quella generata dal vettore ν_E.
Il teorema di struttura degli insiemi a perimetro di finito è a sua volta un caso particolare di un teorema che caratterizza tutte le funzioni a variazione limitata. Tale teorema ha alla sua base la nota decomposizione in tre parti delle misure. Infatti, grazie al teorema di Radon-Nikodym, data una misura μ in Ω, questa può essere decomposta in una parte assolutamente continua μ_a rispetto alla misura di Lebesgue e in una parte singolare μ_s. Ovvero possiamo scrivere

$$\mu = f\mathcal{L}^n + \mu_s \qquad \text{con } f \in L^1(\Omega).$$

Nel caso in cui μ sia la derivata di una funzione BV, μ_s può essere decomposta in due misure mutuamente perpendicolari. Una di esse è concentrata su un insieme numerabilmente $\mathcal{H}^{n-1}$ rettificabile J_μ ed è assolutamente continua rispetto a $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner J_\mu$. L'altra (che viene detta parte cantoriana di μ e viene indicata con μ_c) soddisfa la condizione:

$$\mu_c(A) = 0 \quad \text{ se } \mathcal{H}^{n-1}(A) < +\infty.$$

Per mostrare l'esistenza di una tale decomposizione e vedere come essa ci dà alcune proprietà fini delle funzioni BV dobbiamo introdurre i concetti di differenziabilità e punto di salto approssimati.

DEFINIZIONE 2.16. Sia $u \in [L^1_{loc}(\Omega)]^m$; diciamo che u ha *limite approssimato* in $x \in \Omega$ se esiste $z \in \mathbf{R}^m$ tale che

$$\lim_{\rho \to 0^+} \fint_{B_\rho(x)} |u(y) - z| dy = 0.$$

e scriveremo che

$$z = \operatorname{ap} \lim_{y \to x} u(y).$$

L'insieme S_u dei punti di Ω che non hanno tale proprietà viene chiamato *insieme di discontinuità approssimata*, mentre per ogni $x \in \Omega \backslash S_u$ il vettore z viene chiamato *limite approssimato* di u in x ed è indicato con $\overline{u}(x)$.

Come è noto $\mathcal{L}^n(S_u) = 0$, $\overline{u}$ coincide con u quasi ovunque e inoltre $u * \rho_\epsilon$ tendono puntualmente a $\overline{u}$ in $\Omega \backslash S_u$ (dove ρ_ϵ è una qualsiasi famiglia di mollificatori).

DEFINIZIONE 2.17. Sia $u \in [L^1_{loc}(\Omega)]^m$ e $x \in \Omega$. Diciamo che x è un *punto di salto approssimato* di u se esistono $a, b \in \mathbf{R}^m$ e $\nu \in \mathbf{S}^{n-1}$ tali che $a \neq b$ e

$$\lim_{\rho \to 0^+} \fint_{B^+_\rho(x,\nu)} |u(y) - a| dy = 0$$

$$\lim_{\rho \to 0^+} \fint_{B^-_\rho(x,\nu)} |u(y) - b| dy = 0$$

dove

$$B^+_\rho(x,\nu) = \{y \in B_\rho(x) | < \nu, x > \geq 0\}$$
$$B^-_\rho(x,\nu) = \{y \in B_\rho(x) | < \nu, x > \leq 0\}.$$

La tripletta (a, b, ν) è univocamente determinata a meno di permutazioni di (a, b) e di cambi di segno di ν e viene indicata come

$$(u^+(x), u^-(x), \nu_u(x)).$$

L'insieme degli x con tali proprietà viene chiamato *insieme di salto approssimato* e viene indicato con J_u.

Una delle conseguenze del teorema di struttura per gli insiemi di perimetro finito è che ogni $x \in \mathcal{F}E$ è un punto di salto approssimato per la funzione caratteristica di E.

DEFINIZIONE 2.18. Sia $u \in [L^1_{loc}(\Omega)]^m$ e $x \in \Omega \backslash S_u$; diciamo che u è *approssimativamente differenziabile* in x se esiste una matrice L $m \times n$ tale che

$$\lim_{\rho \to 0^+} \fint_{B_\rho(x)} \frac{|u(y) - \overline{u}(x) - L(y - x)|}{\rho} dy = 0.$$

Se u è approssimativamente differenziabile in x la matrice L, che è univocamente determinata, è chiamata *differenziale approssimato* di u in x e viene indicata con $\nabla u(x)$.

Dopo queste definizioni siamo pronti per enunciare il prossimo teorema, che dà le proprietà fini delle funzioni a variazione limitata e che caratterizza le loro derivate prime.

TEOREMA 2.19. *Sia $u \in [BV(\Omega)]^m$. Allora u è approssimativamente differenziabile in ogni $x \in \Omega \backslash S_u$, l'insieme di discontinuità approssimata S_u è numerabilmente $\mathcal{H}^{n-1}$-rettificabile e $\mathcal{H}^{n-1}(S_u \backslash J_u) = 0$.*
Inoltre

1. $Du \llcorner J_u = (u^+ - u^-) \otimes \nu_u \mathcal{H}^{n-1} \llcorner J_u$;

2. *la parte assolutamente continua di* Du *è* $\nabla u \mathcal{L}^n$;

3. *se poniamo* $D_c u = Du_s \llcorner (\Omega \backslash J_u)$ *abbiamo che* $D_c u(A) = 0$ *ogni volta che* A *ha misura di Hausdorff* $n-1$*-dimensionale finita.*

Abbiamo quindi che la misura Du *si scrive come*

$$\nabla u \mathcal{L}^n + (u^+ - u^-) \otimes \nu_u \mathcal{H}^{n-1} \llcorner J_u + D_c u.$$

La parte assolutamente continua di Du viene indicata con $D_a u$, la parte di salto $Du \llcorner J_u$ viene indicata con $D_j u$ mentre $D_c u$ è chiamata parte cantoriana di Du. A questo punto abbiamo tutti gli strumenti per definire il rappresentante "preciso" di una funzione $u \in [BV(\Omega)]^m$, che viene indicato con u^* ed è definito su $\Omega \backslash (S_u \backslash J_u)$ come

$$u^*(x) = \begin{cases} \overline{u}(x) & \text{se } x \in \Omega \backslash S_u \\ (u^+(x) - u^-(x))/2 & \text{se } x \in J_u \end{cases}.$$

La proprietà notevole di u^* è che esso è il limite puntuale nel suo dominio delle funzioni $u * \rho_\epsilon$, qualsiasi sia la famiglia di mollificatori ρ_ϵ.
Chiudiamo il paragrafo con l'enunciazione della formula di coarea, che si rivelerà molto utile nel prossimo capitolo.

Teorema 2.20. **(Formula di coarea)** *Sia* u *una funzione di* $L^1(\Omega)$ *(con* Ω *aperto di* $\mathbf{R}^n$. *Per ogni* $t \in \mathbf{R}$ *indichiamo con* χ_t *la funzione caratteristica del sopralivello* $F_t = \{x | u(x) \geq t\}$. *Allora*

1. $t \to \chi_t$ *è una funzione* $\mathcal{L}^1$ *misurabile da* $\mathbf{R}$ *in* $L^1(\Omega)$; *in particolare l'insieme* B *dei punti* t *tali che* F_t *abbia perimetro finito è misurabile e* $t \to D\chi_t$ *è una funzione misurabile da* B *in* $\mathcal{M}(\Omega, \mathbf{R}^n)$;

2. $u \in BV(\Omega)$ *se e solo se* $L^1(\mathbf{R} \backslash B) = 0$ *e* $\int_{\mathbf{R}} \|D\chi_t\| dt < \infty$. *In più si ha*

$$|Du|(B) = \int_{\mathbf{R}} |Dv_t|(B) dt \qquad \forall B \in \mathcal{B}(\Omega). \tag{2.1}$$

3. La regola di Vol'pert

Dati un aperto limitato Ω in $\mathbf{R}^n$, una $u \in [BV(\Omega)]^m$ e una funzione lipschitziana $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, non è difficile vedere che $v = f \circ u$ è anch'essa una funzione BV. E' quindi naturale chiedersi se esiste una formula di derivazione per funzioni composte che esprima $D(f \circ u)$ in funzione di f,u e Du. Tale formula è nota in letteratura con il nome di *Vol'pert chain rule* e, visto che svolgerà un ruolo cruciale più avanti, ne riportiamo una dimostrazione nel caso in cui f sia C^1 (seguendo il testo di Ambrosio, Fusco e Pallara [**7**]). Il caso generale delle funzioni lipschitziane è stato trattato da Ambrosio e Dal Maso [**6**] e non ne diamo qui una dimostrazione perché, in tutti i casi in cui la formula verrà usata, la f sarà sufficientemente regolare.

Per poter portare a termine la dimostrazione avremo bisogno della definizione di insieme tangente a una misura: per evitare confusione va detto che nel prossimo capitolo daremo una definizione di misura tangente diversa da quella che daremo tra poco (dovuta a Preiss). Visto, però, che il concetto enunciato qui sotto verrà usato solo in questo paragrafo non ci è sembrato opportuno usare due nomi distinti. Quindi, fatta eccezione per la dimostrazione della regola di Vol'pert, nel resto di questa tesi quando si parlerà di misura tangente si intenderà quella definita nel prossimo capitolo (e che sarà alla base della dimostrazione del teorema "rank one" di Alberti [**1**]).

DEFINIZIONE 2.21. Prendiamo una misura μ su $\mathbf{R}^n$ e un punto del suo supporto e introduciamo, per ogni ρ reale positivo, la misura riscalata $\mu_{x,\rho}$ definita come

$$\mu_{x,\rho}(B) = \mu(x + \rho B).$$

Allora denotiamo con Tan (μ, x) l'insieme delle misure ν in B_1 che sono limiti deboli* delle misure

$$\frac{1}{|\mu|(B_{\rho_i(x)})}\mu_{x,\rho_i}$$

per qualche successione infinitesima (ρ_i). Gli elementi di tale insieme vengono chiamate misure tangenti a μ in x.

TEOREMA 2.22. **(Disuguaglianza di Poincaré)** *Sia Ω un aperto limitato e $u \in BV(\Omega)$. Allora esiste una costante C, che dipende solo da Ω, tale che*

$$\int_\Omega |u(x) - m|dx \leq C\rho^{n-1}|Du|(\Omega) \tag{3.1}$$

dove

$$m = \fint_\Omega u(x)dx.$$

La dimostrazione di quest'ultimo teorema non differisce di molto dalle dimostrazioni delle analoghe disuguaglianze negli spazi di Sobolev: innanzitutto si verifica la disuguaglianza per le funzioni C^∞ e poi si passa per densità di quest'ultime in $BV(\Omega)$.

TEOREMA 2.23. **(Chain rule di Vol'pert)** *Siano $u \in [BV(\Omega)]^m$ e $f \in [C^1(\mathbf{R}^m)]^p$ una funzione lipschitziana (con $f(0) = 0$ se $\mathcal{L}^n(\Omega) = \infty$). Allora, $v = f \circ u$ appartiene a $[BV(\Omega)]^p$ e*

$$\begin{cases} D_a v = \nabla f(u)\nabla u\mathcal{L}^n \\ D_c v = \nabla f(\overline{u})D_c u \\ D_j v = (f(u^+) - f(u^-)) \otimes \nu_u \mathcal{H}^{n-1} \llcorner J_u \end{cases} . \tag{3.2}$$

Dim. Dimostriamo innanzitutto che $u \in [BV(\Omega)]^p$ e $|Dv| \leq M|Du|$, dove M è la costante di lipschitz di f. Notiamo che nella dimostrazione di questo fatto non si fa uso della regolarità C^1 di f che giocherà un ruolo cruciale nella dimostrazione della formula. Per quanto abbiamo già osservato, dato un aperto $A \subset \Omega$ possiamo trovare una successione $(u_h) \subset [C^\infty(A)]^m$ tale che lei converga in $[L^1(A)]^m$ a u e $(|Du_h|(A))$ tenda a $|Du|(A)$. Allora, visto che f è lipschitziana, $v_h = f(u_h)$ converge in $[L^1(A)]^p$ a v e inoltre vale la stima

$$\begin{aligned} |Dv_h|(A) &= \int_A |\nabla v_h| dx = \int_A |\nabla f(u_h) \nabla u_h| dx \\ &\leq M \int_A |\nabla u_h| dx = M|Du_h|(A). \end{aligned}$$

Di nuovo, grazie alla caratterizzazione delle funzioni BV come limiti L^1 di successioni di funzioni C^∞ che hanno derivate equiintegrabili, concludiamo che $v \in [BV(A)]^p$ e che $|Dv|(A) \leq M|Du|(A)$. Facendo tendere A a Ω otteniamo che $u \in [BV(\Omega)]^p$ e che $|Dv|(\Omega| \leq M|Du|(\Omega)$.
Indichiamo con $\overline{D}$ la parte "diffusa" della derivata, ovvero $D_a + D_c$; allora possiamo riscrivere la formula 3.2 come

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{D}v = \nabla f(\overline{u}) \overline{D}u \\ D_j u = (f(u^+) - f(u^-)) \otimes \nu_u \mathcal{H}^{n-1} \llcorner J_u \end{array} \right. . \tag{3.3}$$

Passo 1. Dimostreremo la rappresentazione di $\overline{D}v$ tramite un argomento di scoppiamento.
Scriviamo innanzitutto $Du = g|Du|$ con $g \in L^1(\Omega, |Du|)$ (grazie al teorema di derivazione delle misure). Fissiamo quindi un punto x_0 che abbia le seguenti caratteristiche:

(a) x_0 è un punto di Lebesgue per g relativamente a $|Du|$, ovvero

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{\int_{B_\rho(x_0)} |g(x) - g(x_0)| d|Du|}{|Du|(B_{\rho(x_0)})} = 0$$

(b) Tan $(|Du|, x) \neq \emptyset$ e $|Du|(B_\rho(x_0)) = o(\rho^{n-1})$;
(c) $Dv(B_\rho(x_0))/|Du|(B_\rho(x_0))$ tende a qualche limite $\lambda(x_0)$ quando ρ tende a 0.

Vogliamo dimostrare che $\lambda(x_0) = \nabla f(\overline{u}(x_0))$. Poniamo

$$\begin{aligned} c_\rho &= |Du|(B_\rho(x_0)) \\ m_\rho &= \fint_{B_\rho(x_0)} u(x) dx \\ u^\rho(y) &= \frac{u(x_0 + \rho y) - m_\rho}{c_\rho \rho^{n-1}} \\ v^\rho(y) &= \frac{v(x_0 + \rho y) - f(m_\rho)}{c_\rho \rho^{n-1}} \end{aligned}$$

e denotiamo con $I^\rho(x)$ la funzione di riscalamento $(x - x_0)/\rho$. Allora la condizione (b) ci dice che esiste una successione infinitesima (ρ_i) tale che $(I^{\rho_i}_\#(|Du|)/c_{\rho_i})$ converge debole* in B_1 a una misura ν nonnulla (con $f_\#(\mu)$

intendiamo la misura definita da $\mu(f^{-1}(B)))$; visto che x_0 è un punto di Lebesgue per g abbiamo che la successione $(I_{\#}^{\rho_i}(|Dv|)/c_{\rho_i})$ converge debolmente a $g(x_0)\nu$. Dalla disuguaglianza di Poincaré deduciamo che

$$\int_{B_1}|u^\rho(y)|dy = \frac{1}{\rho c_\rho}\int_{B_\rho(x_0)}|u(x)-m_\rho|dx \leq \gamma_1$$

e quindi il teorema di compattezza ci dice che possiamo supporre che (u^{ρ_i}) converga in $[L^1(B_1)]^m$ e $\mathcal{L}^n$-q.o. in B_1 a una qualche funzione u_0 (tutto ciò a meno di estrarre sottosuccessioni, naturalmente).
Esaminiamo ora il comportamento di v^{ρ_i}: si tratta di una successione equilimitata in BV. Perciò, a meno di estrarre altre sottosuccessioni, possiamo supporre che le $|Dv_{\rho_i}|$ convergano debole* a una qualche misura σ in B_1. Applicando il teorema del valor medio ad ogni componente f^α di f otteniamo

$$\left|\frac{f(z)-f(m_\rho)}{c_\rho\rho^{n-1}} - \nabla f(m_\rho)\frac{z-m_\rho}{c_\rho\rho^{n-1}}\right| \leq \omega(|z-m_\rho|)\frac{|z-m_\rho|}{c_\rho\rho^{n-1}}$$

dove ω è il modulo di continuità di tutte le funzioni f_α. Quindi

$$|v^\rho(y)-\nabla f(m_\rho)u^\rho(y)| \leq \omega(|u^\rho(y)|c_\rho\rho^{n-1})|u^\rho(y)|$$

e la convergenza $\mathcal{L}^n$-q.o. di (u^{ρ_i}) a u^0 e quella di (m_{ρ_i}) a $\overline{u}(x_0)$ implicano la convergenza $\mathcal{L}^n$-q.o. in B_1 di (v^{ρ_i}) a

$$v_0 = \nabla f(\overline{u}(x_0))u^0.$$

D'altra parte le v^{ρ_i} sono equiintegrabili e quindi convergono a v^0 anche in $[L^1(B_1)]^p$. In particolare le (Dv^{ρ_i}) convergono debole* a Dv^0 in B_1.
A questo punto scegliamo $t \in (0,1)$ tale che $\nu(B_t) > 0$ e $\sigma(\partial B_t) = 0$. Allora, applicando la 2.3, otteniamo

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty}\frac{Dv(B_{t\rho_i}(x_0))}{|Du|(B_{t\rho_i}(x_0))} &= \lim_{i\to\infty}\frac{Dv(B_{t\rho_i}(x_0))}{|Du|(B_{\rho_i}(x_0))}\frac{Du(B_{\rho_i}(x_0))}{|Du|(B_{t\rho_i}(x_0))}\\
= \quad &\lim_{i\to\infty}\frac{Dv^{\rho_i}(B_t)}{\nu(B_t)} = \frac{Dv^0(B_t)}{\nu(B_t)} = \nabla f(\overline{u}(x_0))\frac{Du^0(B_t)}{\nu(B_t)}\\
= \quad &\nabla f(\overline{u}(x_0))g(x_0).
\end{aligned}$$

Ne concludiamo, grazie a (c), che $\lambda(x_0) = \nabla f(\overline{u}(x_0))g(x_0)$.
A questo punto, usando il teorema di derivazione di misure e quello di struttura per funzioni BV, si piò facilmente verificare che, data g, $|Du|$-q.o. $x_0 \in \Omega\backslash S_u$ ha le proprietà (a), (b) e (c). Visto che $D_jv(\Omega\backslash S_u) = 0$ (questo perché S_v è un sottinsieme di S_u), abbiamo dimostrato che $Dv \llcorner \Omega\backslash S_u = \nabla f(\overline{u})\overline{D}(u)$. A questo punto, visto che S_u è σ-finito rispetto a $\mathcal{H}^{n-1}$, esso è a misura nulla per $\overline{D}v$ e ne deduciamo che $\overline{D}v = \nabla f(\overline{u}(x_0))\overline{D}u$.

Passo 2. Per provare l'identità mancante notiamo che J_v, essendo un sottinsieme di S_v, è contenuto in S_u e quindi

$$(v^+(x), v^-(x), \nu_u(x)) \sim (f(u^+(x)), f(u^-(x)), \nu_u(x)) \qquad \forall x \in J_u \cap J_v$$

mentre $f(u^+) = f(u^-)$ su $J_u \backslash J_v$. Visto che $S_u \backslash J_u$ è a misura nulla per $\mathcal{H}^{n-1}$, il teorema di struttura delle funzioni BV ci permette di concludere la dimostrazione.

$\square$

4. Misure di Young

Come vedremo in seguito, uno dei problemi tecnici che bisognerà affrontare in questa tesi è quello di stimare il comportamento del limite debole in L^p di una successione $(f \circ u_n)$ quando si conosce il limite debole della successione (u_n). Si può vedere con facili esempi che $(f(u_n))$ può tendere a un limite diverso da $(f(v_n))$ anche se le due successioni (u_n) e (v_n) hanno lo stesso limite.

Esempio 2.24. Prendiamo in $L^P([0,1])$ le successioni (u_n) e (v_n) cosí definite:

$$u_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \left[\frac{2k}{2n}, \frac{2k+1}{2n}\right) \text{ per un intero } k \in [0, n-1] \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$v_n(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{se } x \in \left[\frac{3k}{3n}, \frac{3k+2}{3n}\right) \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Non è difficile verificare che entrambe le successioni hanno la funzione identicamente nulla come limite (debole in L^p per ogni $p \in [1, +\infty)$ e debole* per $p = \infty$). Se prendiamo $f(x) = x^3$ allora la successione $(f(u_n))$ converge ancora a 0, mentre $(f(v_n))$ converge a $-7/8$.

L'esempio appena descritto ha molti punti in comune con le stime che verranno fatte nella dimostrazione della compattezza dei sottolivelli di J^3 in AG. In tali stime lo strumento che abbiamo usato (e che viene chiamato misura di Young) fu introdotto per la prima volta da Young in connessione con le soluzioni di problemi di controllo ottimo. In sostanza si tratta di uno strumento che, data una successione $z_j : E \to \mathbf{R}^d$ (dove E è uno spazio con una misura non negativa ν) permette di determinare i limiti di

$$\int_U f(z_j) d\nu$$

per ogni funzione continua f a supporto compatto e per ogni misurabile U. Tutto quello che useremo in questa tesi è riconducibile al teorema fondamentale sulle misure di Young che esporremo tra breve. Ricordiamo che con $C_0(\mathbf{R}^d)$ e $\mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$ si intendono gli spazi introdotti nella prima sezione di questo capitolo in relazione al teorema di rappresentazione di Riesz.

Definizione 2.25. Una funzione

$$\mu : E \longrightarrow \mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$$

si dice *debole* misurabile* se per ogni $f \in C_0(\mathbf{R}^d)$ la funzione

$$E \ni x \longrightarrow \int_{\mathbf{R}}^d f d\mu(x) \in R$$

è misurabile. Inoltre indicheremo con μ_x la misura $\mu(x)$.

TEOREMA 2.26. **(teorema fondamentale sulle misure di Young)** *Sia $E \subset \mathbf{R}^n$ un insieme misurabile di misura finita (secondo Lebesgue) e sia $z_j : E \to \mathbf{R}^d$ una successione di funzioni misurabili. Allora esistono una sottosuccessione z_{j_k} e una funzione debole* misurabile $\nu : E \to \mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$ tali che siano vere le seguenti affermazioni:*

1. *ν_x è non negativa e*
$$\|\nu_x\|_{\mathcal{M}(\mathbf{R}^d)} = \int_{\mathbf{R}^d} d\nu_x \leq 1 \qquad \textit{per q.o.} x \in E;$$
2. *per ogni $f \in C_0(\mathbf{R}^d)$*
$$f(z_{j_k}) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{f} \ \textit{in } L^\infty(E)$$
dove
$$\overline{f}(x) = < \nu_x, f > = \int_{\mathbf{R}^d} f d\nu_x;$$
3. *per ogni $K \subset \mathbf{R}^d$ compatto, supp $\nu_x \subset K$ per q.o. x se dist $(z_j, K) \to 0$ in misura;*
4. *si ha $\|\nu_x\|_{\mathcal{M}} = 1$ per q.o. $x \in E$ se e solo se*
$$\lim_{M\to\infty} \sup_k \mathcal{L}(\{|z_{j_k}| \geq M\}) = 0; \tag{4.1}$$
5. *se vale 4.1, $A \subset E$ è misurabile, $f \in C(\mathbf{R}^d)$ e $f(z_{j_k})$ è relativamente debolmente compatta in $L^1(A)$, allora*
$$f(z_{j_k}) \rightharpoonup \overline{f} \ \textit{in } L^1(A), \qquad \overline{f}(x) = < \nu_x, f >;$$
6. *se vale (4.1), allora in 3 si può rimpiazzare il 'se' con un 'solo se'.*

OSSERVAZIONE 2.27. La mappa ν sopra definita viene chiamata misura di Young associata alla successione (z_{j_k}).

Dim. Poniamo
$$Z_j(x) = \delta_{z_j(x)}$$
dove con δ_y si intende una delta di Dirac centrata nel punto y. Abbiamo allora che $\|Z_j(x)\|_{\mathcal{M}}$=1 e $< Z_j(x), f >= f(z_j(x))$ per ogni $f \in C_0(\mathbf{R}^d)$. La funzione Z_j appartiene allo spazio $L^\infty_\omega(E, \mathcal{M}(\mathbf{R}^d))$ delle funzioni debole* misurabili da E in $\mathcal{M}(\mathbf{R}^d)$ essenzialmente limitate. Si può verificare che

$L^\infty_\omega(E, \mathcal{M}(\mathbf{R}^d))$ è il duale dello spazio $L^1(E, C_0(\mathbf{R}^d))$, dove l'accoppiamento di dualità è dato da

$$< \mu, g >= \int_E < \mu(x), g > dx.$$

Infatti, è semplice verificare che tramite tale accoppiamento di dualità si stabilisce una isometria dallo spazio $L^\infty_\omega(E, \mathcal{M})$ nel duale di $L^1(E, C_0)$. Dobbiamo vedere che tale applicazione è surgettiva: prendiamo perciò un elemento $\mathcal{F}$ del duale di $L^1(E, C_0)$. Allora, fissato $x \in E$ di densità 1, per ogni $f \in C_0(\mathbf{R}^d)$, chiamiamo F^x_n la funzione di $L^1(E, C_0))$ tale che

$$F^x_n(y) = \begin{cases} f & \text{se } y \in B_{1/n}(x) \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definiamo $\mathcal{F}^x_n$ (che apparterrà al duale di C_0, e, quindi, sarà un elemento di $\mathcal{M}$), come

$$\mathcal{F}^x_n(f) = \frac{1}{\mathcal{L}^n(E \cap B_{1/n}(x))} \mathcal{F}(F^x_n).$$

A questo punto è facile vedere che la successione $(\mathcal{F}^x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata e quindi tende debole* in $\mathcal{M}$ a una misura μ_x. Poniamo, allora, $\mu(x) = \mu_x$: tale applicazione è debole* misurabile e appartiene a $L^\infty_\omega(E, \mathcal{M})$. Inoltre

$$\mathcal{F}(F^x_n) =< \mu, F^x_n >$$

e, visto che il sottospazio generato dagli elementi del tipo F^x_n è denso in $L^1(E, C_0)$, ne concludiamo che $\mathcal{F} = \mu$ come funzionale lineare su $L^1(E, C_0)$.

Ritornando alla successione (Z_j) definita all'inizio, possiamo allora applicare il teorema di Banach-Alaoglu e concludere che esiste una sottosuccessione Z_{j_k} che tende debole* in $L^\infty_\omega(E, \mathcal{M})$ a una ν. La semicontinuità della norma implica che $\|\nu_x\| \leq 1$ per quasi ogni $x \in E$. Per $\varphi \in L^1(E)$ e $f \in C_0(\mathbf{R}^d)$ denotiamo con $\varphi \otimes f$ l'elemento di $L^1(E, C_0)$ che associa a ogni x la funzione $\varphi(x) f$ (notiamo che le funzioni F^x_n sopra definite non sono altro che $\chi_{B_{1/n}(x)} \otimes f$). Dalla definizione di Z_{j_k} otteniamo

$$\int_E \varphi(x) f(z_{j_k}(x)) dx =< Z_{j_k}, \varphi \otimes f >\to \int_E \varphi(x) < \nu_x, f > dx,$$

che dimostra la 2. Inoltre, considerando tutte le funzioni $f \geq 0$, $\varphi \geq 0$ si deduce che $\nu \geq 0$ per quasi ogni x.

Per dimostrare la 3 basta vedere che, quando dist $(z_{j_k}, K) \to 0$, si ha

$$< \nu_x, f >= 0 \qquad \forall f \in C_0(\mathbf{R}^d \setminus K).$$

Sia f una funzione siffatta. Allora, per ogni $\epsilon > 0$, esiste C_ϵ tale che $|f(y)| \leq \epsilon + C_\epsilon \text{dist } (y, K)$. L'ipotesi dist $(z_{j_k}, K) \to 0$ in misura implica che $(|f| - \epsilon)^+(z_{j_k}) \to 0$ in misura e quindi si conclude che

$$< \nu_x, (|f| - \epsilon)^+ >= 0 \qquad \text{per q.o. } x.$$

Se poniamo $\epsilon = 1/n$ e facciamo tendere n a ∞ otteniamo ciò che volevamo dimostrare.

Le dimostrazioni del punto 4 e del punto 5 si fanno facilmente sfruttando un argomento di troncamento e la caratterizzazione degli insiemi debolmente compatti di L^1 (ved. [**21**] e l'articolo di Ball [**11**] per i dettagli), mentre il punto 6 segue dal 5 applicato alla funzione limitata $f = \min(\text{dist}\,(\cdot, K), 1)$. □

5. Γ-Convergenza

Chiudiamo questo capitolo con una breve esposizione della teoria della Γ-convergenza, un tipo di convergenza variazionale introdotta da De Giorgi e Franzoni nel 1975 [**14**]. In particolare ricorderemo la caratterizzazione sequenziale per spazi che soddisfano il primo assioma di numerabilità (visto che tutti i casi che tratteremo in seguito cadranno in tale ambito) e alcune condizioni sufficienti perché i punti di minimo dei problemi variazionali relativi a f_h convergano ai minimi del problema variazionale associato al Γ-limite. Nel resto del paragrafo (X, τ) sarà uno spazio topologico e $\mathcal{S}(X)$ indicherà l'insieme delle funzioni semicontinue su X a valori nella retta reale estesa.

Definizione 2.28. Sia $f_h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una successione; per ogni $x \in X$ poniamo

$$\Gamma-\liminf_{h\to\infty} f_h(x) := \sup_{U\ni x, U\in\tau} \liminf_{h\to\infty} \inf_U f_h$$
$$\Gamma-\limsup_{h\to\infty} f_h(x) := \sup_{U\ni x, U\in\tau} \limsup_{h\to\infty} \inf_U f_h.$$

Diremo che la successione (f_h) è Γ-convergente in x se i valori dei due Γ-limiti coincidono. Il loro valore comune verrà indicato con

$$\Gamma-\lim_{h\to\infty} f_h(x).$$

Chiaramente (f_h) è Γ-convergente in x se e solo se si ha

$$\Gamma-\limsup_{h\to\infty} f_h(x) \le \Gamma-\liminf_{h\to\infty} f_h(x)$$

perché la disuguaglianza opposta è sempre verificata. Nella proposizione seguente elencheremo le proprietà più immediate del Γ-limite.

Teorema 2.29. **(Invarianza dei Γ-limiti)**

1. $\Gamma-\liminf f_h, \Gamma-\limsup f_h \in \mathcal{S}(X)$;
2. $\Gamma-\liminf \varphi(f_h) = \varphi(\Gamma-\liminf f_h)$ *e* $\Gamma-\limsup \varphi(f_h) = \varphi(\Gamma-\limsup f_h)$ *per ogni funzione continua crescente* $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$;
3. $\Gamma-\liminf(g + f_h) = g + \Gamma-\liminf f_h$, $\Gamma-\limsup(g + f_h) = g + \Gamma-\limsup f_h$ *per ogni funzione continua* $g : X \to \mathbf{R}$;

4. *se* $f_h = f$ *per ogni* h *allora il* Γ*-limite della successione è l'inviluppo semicontinuo di* f*;*

5. *il* Γ*-limite di* (f_h) *coincide con il* Γ*-limite degli inviluppi semicontinui.*

TEOREMA 2.30. **(Convergenza dei minimi)** *Sia* (f_h) Γ*-convergente a* f *e supponiamo che esista un insieme compatto* $K \subset X$ *tale che*

$$\inf_K f_h = \inf_X f_h \qquad \forall h \in \mathbb{N}.$$

Allora f *ha minimo in* X, $\inf_X f_h$ *converge a* $\min_X f$ *e, data una successione* $(x_h) \subset X$ *tale che*

$$\lim_{h\to\infty} f_h(x_h) = \lim_{h\to\infty} \inf_X f_h,$$

si ha che ogni punto limite di (x_h) *minimizza* f*.*

Una banale conseguenza del teorema appena enunciato è che (qualora esistano) i punti di minimo delle f_h hanno dei punti limite che sono di minimo per f. Vediamo ora come, nel caso in cui lo spazio X soddisfi il primo assioma di numerabilità, si possa dare una caratterizzazione "per successioni" del $\Gamma-\lim$. Per tale motivo in tutti gli altri capitoli di questa tesi si farà poi uso della definizione data qui sotto.

DEFINIZIONE 2.31. Siano $f_h : X \to \overline{\mathbb{R}}$; per ogni $x \in X$ poniamo

$$\Gamma^* - \liminf_{h\to\infty} f_h(x) = \inf\{\liminf_{h\to\infty} f_h(x_h) | (x_h) \subset X, x_h \to x\}$$
$$\Gamma^* - \limsup_{h\to\infty} f_h(x) = \inf\{\limsup_{h\to\infty} f_h(x_h) | (x_h) \subset X, x_h \to x\}$$

Diremo che la successione (f_h) è sequenzialmente Γ-convergente in x se i valori dei due Γ^*-limiti coincidono.

TEOREMA 2.32. *Se* X *soddisfa il primo assioma di numerabilità si ha che:*
(a) i $\Gamma-\limsup, \Gamma-\liminf$ *e* $\Gamma-\lim$ *coincidono con le rispettive definizioni sequenziali;*
(b) (f_h) Γ*-converge a* f *se e solo se ogni successione estratta* f_{h_k} *ha un'altra estratta* Γ*-convergente a* f*.*

Da questo ultimo teorema si deduce che, qualora X soddisfi il primo assioma di numerabilità , per dimostrare che f_h Γ-converge a f in x basta
(a) verificare che per ogni (x_h) che tende a x si ha

$$\liminf_{h\to\infty} f_h(x_h) \geq f(x);$$

(b) costruire una successione (y_h) convergente a x per cui

$$\limsup_{h\to\infty} f_h(y_h) \leq f(x).$$

Osserviamo che il punto (a) ci dice che in realtà $f(x)$ è proprio il limite di $(f_h(x_h))$; per tale motivo (y_h) viene chiamata *successione ottimale.* Tramite un argomento di diagonalizzazione si può anche dimostrare che è sufficiente avere le successioni ottimali per famiglie $\mathcal{F}$ di punti che siano *dense in energia.*

DEFINIZIONE 2.33. Sia $f \in \mathcal{S}(X)$; la famiglia $\mathcal{F} \subset X$ si dice densa in energia per f se $\forall x \in X$ esiste una successione $(x_h) \subset X$ tale che

$$\lim_{h\to\infty} x_h = x$$
$$\lim_{h\to\infty} f(x_h) = f(x).$$

CAPITOLO 3

Teorema rank-one

Come abbiamo visto nel teorema 2.19, se u è una funzione di $[BV(\Omega)]^m$ la parte di salto della misura Du si può scrivere come

$$(u^+(x) - u^-(x)) \otimes \nu_u \mathcal{H}^{n-1} \llcorner J_u$$

e quindi concludiamo che, per $|D_j u|$-q.o. x, la matrice $[dD_j u/d|D_j u|](x)$ (ovvero la derivata di Radon-Nykodim della misura $D_j u$ rispetto alla sua variazione totale) ha rango uno. In un articolo dell'88 Ambrosio e De Giorgi [**4**] hanno congetturato che tale proprietà sia condivisa anche dalla parte cantoriana di Du, ovvero che, per $|D_s u|$-q.o. x, la matrice $\mathrm{d}D_s u/\mathrm{d}|D_s u|$ abbia rango uno: la congettura è stata dimostrata nel $'93$ da Alberti [**1**] e in questo capitolo ripercorreremo la sua dimostrazione. La proprietà rank-one della parte singolare di Du è molto utile per studiare il rilassamento in BV nella topologia L^1 di funzionali del tipo

$$F(u) = \int_\Omega f(x, u(x), \nabla u(x))dx \qquad u \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^m.$$

Per quanto riguarda lo studio dei funzionali J^β il teorema di Alberti è stato usato da Aviles e Giga in un lavoro del 96 [**8**] per dimostrare che, nel caso $\Omega \subset R^2$ sia un poligono convesso, la funzione distanza è il minimo assoluto di J^1 nella classe $\mathcal{A}$ delle funzioni reali u che soddisfano le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned}
&u \in W^{1,\infty}(\Omega) \\
&\nabla u \in [BV(\Omega)]^2 \text{ ed è costante a tratti} \\
&u = 0 \text{ e } \frac{\partial u}{\partial \nu} = -1 \text{ su } \partial\Omega \\
&|\nabla u| = 1.
\end{aligned}$$

Nel prossimo paragrafo daremo delle nozioni preliminari che verranno poi usate nel corso della dimostrazione del teorema di Alberti ma che non saranno necessarie nei capitoli successivi. Per quanto riguarda la parte sull'integrazione di misure rimandiamo al libro di di Dellacherie e Meyer [**15**], mentre per la dimostrazione del teorema di selezione per le funzioni misurabili multivoche si veda il libro di Castaing e Valadier [**12**].

1. Integrazione e disintegrazione di misure

DEFINIZIONE 3.1. Sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^n$, M uno spazio topologico localmente compatto a base numerabile e λ una misura non negativa. Supponiamo che $t \to u_t$ sia una funzione di $L^1(M, \lambda, \mathcal{M}(\Omega, \mathbf{R}^d))$ (che, ovviamente è debole* misurabile). Allora chiamiamo *integrazione su M di μ_t* la misura μ che corrisponde al funzionale lineare

$$C_0(\Omega, \mathbf{R}^d) \ni \varphi \longrightarrow \int_M < \mu_t, \varphi > d\lambda(t)$$

e scriviamo

$$\mu = \int_M \mu_t d\lambda(t).$$

Osserviamo che la misura $|\mu|$ è minore di $\int_M |\mu_t| d\lambda(t)$. Questa nuova definizione ci permette di dare, tra l'altro, una formulazione molto più forte della formula di coarea.

PROPOSIZIONE 3.2. *Sia $u \in BV(\Omega)$. Come abbiamo già visto nel teorema 2.20, per quasi ogni $t \in \mathbf{R}$ il sopralivello F_t della funzione u è un insieme a perimetro finito. Se indichiamo con χ_t la funzione caratteristica del sopralivello F_t abbiamo allora che*

$$Du = \int_{\mathbf{R}} D\chi_t \, dt. \tag{1.1}$$

Nella prossima proposizione X indicherà un cono convesso chiuso di $\mathbf{R}^d$, ovvero un insieme del tipo

$$\{x \in \mathbf{R}^d | < e, x > \geq a|x|\}$$

per qualche $e \in \mathbf{R}^d$ e $a \in \mathbf{R}^+$; $\mathcal{M}(\Omega, X)$ indicherà l'insieme delle misure vettoriali μ su Ω tali che $\mu(B) \in X$ per ogni misurabile B.

PROPOSIZIONE 3.3. *Sia ψ una misura in $\mathcal{M}(\Omega, \mathbf{R}^d)$ tale che essa sia l'integrazione di qualche $\psi_t \in L^1(M, \lambda, \mathcal{M}(\Omega, \mathbf{R}^d))$. Allora:*

1. *ψ appartiene a $\mathcal{M}(\Omega, X)$ se e solo se $[\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}|\psi|] \in X$ per quasi ogni x;*
2. *$\mathcal{M}(\Omega, X)$ è un cono convesso debole* chiuso in $\mathcal{M}(\Omega, \mathbf{R}^d)$;*
3. *$f\psi \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbf{R}^d)$ ogni volta che f è una funzione non negativa di $L^1(|\psi|)$;*
4. *$\psi \in \mathcal{M}(\Omega, X)$ ogni volta che $\psi_t \in \mathcal{M}(\Omega, X)$ per q.o. t;*
5. *se $\psi \in \mathcal{M}(\Omega, X)$ e $\|\psi\| = \int \|\psi_t\| dt$ allora $\psi_t \in \mathcal{M}(\Omega, X)$ per q.o. t.*

Dim. I primi quattro punti sono banali, perciò daremo una dimostrazione soltanto dell'ultimo punto.

Se Y è un altro cono che interseca il cono X solo nel punto 0 allora esiste una costante positiva b strettamente minore di 1 tale che $< x, y > \leq b|x||y|$ $\forall x \in X, \forall y \in Y$. Per ogni $t \in M$ sia S_t l'insieme degli x per cui

$$\left[\frac{d\psi_t}{d|\psi_t|}\right](x) \in Y$$

e poniamo $\psi_t^1 = \psi_t \llcorner S_t, \psi_t^2 = \psi_t \llcorner (\Omega \backslash S_t)$. Si verifica facilmente che le mappe $t \to \psi_t^1$, $t \to \psi_t^2$ sono misurabili e possiamo quindi porre

$$\psi^1 = \int \psi_t^1 d\lambda(t)$$
$$\psi^2 = \int \psi_t^2 d\lambda(t).$$

Allora $\psi^1 \in \mathcal{M}(\Omega, Y)$ e $\psi = \psi^1 + \psi^2$. Ora, se B è un insieme di Borel, per ipotesi $\psi(B) \in X$ e, per quanto appena detto, $\psi^1(B) \in Y$. Quindi, se $|\psi(B)| > 0$, si ha:

$$\begin{aligned} |\psi(B)| \qquad &= \frac{< \psi(B), \psi(B) >}{|\psi(B)|} = \frac{< \psi^1(B), \psi(B) > + < \psi^2(B), \psi(B) >}{|\psi(B)|} \\ &\leq b|\psi^1(B)| + |\psi^2(B)| \end{aligned}$$

da cui deduciamo che $\|\psi\| \leq b\|\psi^1\| + \|\psi^2\|$. Inoltre per ipotesi abbiamo che

$$\|\psi\| = \int \|\psi_t\| d\lambda = \int (\|\psi_t^1\| + \|\psi_t^2\|) d\lambda \geq \|\psi^1\| + \|\psi^2\|.$$

Confrontando le due disuguaglianze e ricordando che $b < 1$ deduciamo $\|\psi^1\| = 0$. Visto che si può scrivere Y come

$$\{x \in \mathbf{R}^d | < x, e > \geq a|x|\}$$

per qualche $e \in S^{d-1}$ e $a \in \mathbf{R}$, possiamo scrivere

$$0 = \|\psi^1\| \geq \int < e, \psi_t > d\lambda \geq a \int \|\psi_t^1\| d\lambda,$$

da cui deduciamo che $\psi_t^1 = 0$ per quasi ogni t.
Quindi, per λ q.o. t si ha che

$$\left[\frac{d\psi_t}{d|\psi_t|}\right](x) \notin Y \qquad \text{per } |\psi_t| \text{ q.o. } x.$$

Visto che $\mathbf{R}^d \backslash X$ è contenuto in un unione numerabile di coni che intersecano X solo nel punto 0 si conclude facilmente che, per λ q.o. t,

$$\left[\frac{d\psi_t}{d|\psi_t|}\right](x) \in X \qquad \text{per } |\psi_t| \text{ q.o. } x.$$

$\square$

Saremo molto interessati al seguente caso particolare di integrazione di misure. Prendiamo due spazi euclidei $M = \mathbf{R}^m$ e $N = \mathbf{R}^n$ e indichiamo con π_M e π_N le proiezioni canoniche da $M \times N$ nei rispettivi fattori. Prendiamo una misura positiva λ su M e una funzione $\mu_t \in L^1(M, \lambda, \mathcal{M}(N, \mathbf{R}^k))$. Per ogni t, indichiamo con $\delta_t \otimes \mu_t$ la misura su $M \times N$ data da

$$[\delta_t \otimes \mu_t](B) = \mu_t(\{x | (t, x) \in B\}).$$

L'integrazione di μ_t su M dà una misura μ tale che

$$\int_{M \times N} f d\mu = \int_M \int_N f(t, s) d\mu_t(s) d\lambda(t).$$

E' piuttosto semplice notare che la misura push-forward $\pi_M^{\#}\mu$ definita come

$$\pi_M^{\#}\mu(B) = \mu(B \times N)$$

è assolutamente continua rispetto a λ. La proposizione seguente ci dice che, data una μ arbitraria sul prodotto e una λ non negativa su M, la condizione $\pi_M^{\#}\mu << \lambda$ è in realtà sufficiente perché sia possibile esibire una μ_t che "ricostruisca" la μ con il procedimento seguito sopra.

Teorema 3.4. **(Disintegrazione di misure)**
Se μ è una misura di $\mathcal{M}(M \times N, \mathbf{R}^k)$ e λ è una misura non negativa su M tale che $\pi_M^{\#}\mu << \lambda$ allora esiste una funzione $t \to \mu_t \in L^1(M, \lambda, \mathcal{M}(N, \mathbf{R}^k))$ tale che

$$\mu = \int_M [\delta_t \otimes \mu_t] d\lambda(t).$$

Tale funzione è essenzialmente unica e viene chiamata disintegrazione di μ rispetto a λ.

In particolare da tale teorema ne discende facilmente uno analogo per funzioni BV.

Teorema 3.5. **(Disintegrazione di funzioni BV)**
Siano M e N due sottospazi lineari complementari di dimensione m e n di $\mathbf{R}^{n+m}$ e identifichiamoli con $M \times \{0\}$ e $N \times \{0\}$. Sia u una funzione reale BV e con $D_N u$ intendiamo la misura di $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n, N)$ definita nel seguente modo: per ogni boreliano B $D_N u(B)$ è la restrizione dell'applicazione lineare $Du(B)$ al sottospazio N (nel caso in cui u sia regolare e dim N sia 1 da questa definizione si recupera la consueta nozione di derivata direzionale). Osserviamo che $\pi_M^{\#}(D_N u)$ è assolutamente continua rispetto a $\mathcal{H}^m \llcorner M$. Sia $t \to (D_N u)_t$ la disintegrazione di $D_N u$ rispetto a $\mathcal{H}^m \llcorner M$; allora per $\mathcal{H}^m$ q.o. $t \in M$, u_t è una funzione a variazione limitata e $Du_t = (D_N u)_t$.

Completiamo questo paragrafo con un argomento che ha ben poco a che vedere con l'integrazione e la disintegrazione di misure. In alcuni passi tecnici della dimostrazione avremo bisogno di un teorema di selezione per funzioni misurabili multivoche (vedere [**12**]).

Definizione 3.6. Sia (X, d) uno spazio metrico localmente compatto e $\mathcal{C}(X)$ lo spazio degli insiemi chiusi di X con la metrica δ di Hausdorff. Allora, presi uno spazio misurabile $(E, \mathcal{E})$ e una applicazione F da E in $\mathcal{C}(X)$,

diciamo che F è *misurabile* se vale una delle seguenti proprietà (che sono equivalenti):
(a) per ogni aperto $A \subset X$, $\{t \in E | F(t) \cap A \neq \emptyset\} \in \mathcal{E}$;
(b) per ogni $x \in X$, $t \to d(x, F(t))$ è una funzione misurabile;
(c) per ogni insieme compatto $K \subset X$, $t \to F(t) \cap K$ è misurabile come funzione da $(E, \mathcal{E})$ nello spazio metrico $\mathcal{C}(X)$.

Inoltre, se E è uno spazio euclideo e $\mu \geq 0$ ha come supporto tutto E, diciamo che F è *approssimativamente semicontinua inferiormente* se, per ogni aperto $A \subset X$, l'insieme A_t dei punti t tali che $F(t) \cap A \neq \emptyset$ ha densità 1 in ogni suo punto.

TEOREMA 3.7. **(Teorema di selezione misurabile)** *Sia $X \subset \mathbf{R}^n$, M uno spazio localmente compatto a base numerabile e μ una misura non negativa localmente finita. Sia $F : M \to \mathcal{C}(X)$ una funzione misurabile tale che $F(x) \neq \emptyset$ per q.o. x.*
Allora esiste una successione di funzioni di Borel $f_n : M \to X$ tali che $F(x)$ è la chiusura di $\{f_n(x) | n \in \mathbb{N}\}$ per q.o. x. Se $F(x)$ è uno spazio lineare per q.o. x, possiamo prendere f_n in $L^1(\mu, X)$.

2. Misure tangenti

Introduciamo ora lo strumento fondamentale della dimostrazione della proprietà del rango 1 (come già avevamo anticipato nel capitolo precedente, facciamo presente che useremo una nozione di misura tangente ben diversa da quella della definizione 2.21).

DEFINIZIONE 3.8. Sia λ una misura su Ω e x un punto dell'aperto. Diciamo che ψ è *tangente* a λ in x se $x \in \operatorname{supp} \psi$ e

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{|\lambda - \psi|(B_\rho(x))}{|\psi|(B_\rho(x))} = 0.$$

Denotiamo con Tan (λ, x) l'insieme delle misure tangenti a λ in x.

Osserviamo che x è nel supporto di ogni $\nu \in T(\lambda, x)$, visto che dalle disuguaglianze $|\lambda| - |\lambda - \nu| \leq |\nu| \leq |\lambda| + |\lambda - \nu|$ segue che

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{|\nu|(B_\rho(x))}{|\lambda|(B_\rho(x))} = 0.$$

Osserviamo ancora che se μ è una misura non negativa e $\nu = f\mu + \nu_s$ è la decomposizione di Radon-Nykodim di ν rispetto a μ, allora, dal teorema di derivazione di Besicovitch, si ha che

$$\lim_{\rho \to 0^+} \frac{|\mu_s|(B_\rho(x))}{\mu(B_\rho(x))} = 0$$

per μ q. o. x. Ne segue che ν è tangente a $f\mu$ per quasi ogni x del supporto di μ.

DEFINIZIONE 3.9. Se μ è una misura positiva (su uno spazio euclideo $\mathbf{R}^k$), denotiamo con $E(x,\mu)$ l'insieme costituito da 0 e da tutti i vettori $v \in \mathbf{R}^k$ tali che esiste una funzione $u \in BV(\mathbf{R}^n)$ per cui Du è tangente in x a $v\mu$.

DEFINIZIONE 3.10. Denotiamo con $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$ l'insieme di tutte le misure $\psi \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^k)$ tali che

$$\left[\frac{d\psi}{d|\psi|}\right](x) \in E(x, |\psi|)$$

per $|\psi|$ q.o. x.

Caratterizzeremo $\mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$ come l'insieme di tutte le misure che possono essere scritte come $Du \llcorner B$ per qualche $u \in BV(\Omega)$ e qualche $B \subset \Omega$.
Riassumiamo nella prossima proposizione le prime proprietà degli insiemi $E(x,\mu)$ e $\mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$, che si dimostrano facilmente con i teoremi enunciati nelle prime 3 sezioni del secondo capitolo.

PROPOSIZIONE 3.11. *Siano μ e λ due misure positive su $\mathbf{R}^k$, ψ una misura di $\mathcal{M}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^k)$ e $u \in BV(\mathbf{R}^k)$. Allora:*

1. *$E(x,\mu)$ è uno spazio vettoriale per ogni x e $E(x,\mu) = 0$ se $x \notin$ supp μ;*
2. *se λ è tangente a $c\mu$ per qualche c positivo allora $E(x,\mu) = E(x,\lambda)$;*
3. *se $\lambda << \mu$ allora $E(x,\lambda) = E(x,\mu)$ per λ q.o. x;*
4. *se $\mu << Du$ allora per μ q.o. x si ha*
$$\left[\frac{dDu}{d|Du|}\right](x) \in E(x,\mu);$$
in particolare
$$\left[\frac{dDu}{d|Du|}\right](x) \in E(x, |Du|)$$
per $|Du|$ quasi ogni x;
5. *se $\psi = fDu$ con $f \in L^1(|Du|)$ allora $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ e quindi, in particolare, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$ se $\psi = Du \llcorner B$ per qualche misurabile B;*
6. *$\mathcal{D}(\mathbf{R}^k)$ è un sottospazio fortemente chiuso di $\mathcal{M}(\mathbf{R}^k, \mathbf{R}^k)$.*

Per focalizzare meglio la definizione vediamo cosa succede in alcuni casi particolari. Ogni misura di $\mathcal{M}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ è la derivata di una funzione BV e quindi $\mathcal{D}(\mathbf{R}) = \mathcal{M}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ e $E(\mu, x) = \mathbf{R}$ se μ è una misura positiva e $x \in$ supp μ.
Se μ è una misura positiva di $\mathcal{M}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$ della forma $f\mathcal{L}^m$ (cioè assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue), allora per ogni x nel supporto di μ si ha $E(\mu, x) = \mathbf{R}^m$. Ciò segue facilmente dal terzo punto della proposizione 3.11 e dal fatto che la funzione che vale costantemente $v \in \mathbf{R}^m$ è una funzione BV che ha come derivata $v\mathcal{L}^m$.

Per quanto abbiamo visto nel capitolo precedente, se A è un insieme a perimetro finito, allora la caratteristica di A è una funzione BV e la sua derivata è $\nu(x)\mathcal{H}^{n-1}\llcorner\mathcal{F}A$. Inoltre, dal teorema di struttura per funzioni BV, abbiamo che, per ogni $u \in BV(\mathbf{R}^n)$, $Du\llcorner\mathcal{F}A$ è della forma

$$(u^+ - u^-)\nu(x)\mathcal{H}^{n-1}\llcorner\mathcal{F}A.$$

Quindi Du è tangente in x a $v\mathcal{H}^{n-1}\llcorner\mathcal{F}A$ se e solo se $v = \pm|v|\nu(x)$.
Riassumiamo tutto ciò dicendo che, se μ è della forma $\mathcal{H}^{n-1}\llcorner S$, per qualche insieme S rettificabile allora per μ q.o. x $E(\mu, x)$ è la retta generata da $\nu(x)$.
Quello che ci proponiamo di dimostrare è che una proprietà analoga vale anche per per le misure cantoriane, ovvero che se μ è una misura positiva singolare rispetto a $\mathcal{L}^n$ allora per μ q.o. x la dimensione di $E(\mu, x)$ è 1 o 0.
Per far ciò abbiamo bisogno di due risultati tecnici, che sono il prossimo lemma e il teorema con cui termina questo paragrafo.

LEMMA 3.12. *Se μ è una misura positiva su $\mathbf{R}^n$ allora l'applicazione $x \to E(\mu, x)$ è μ-approssimativamente semicontinua inferiormente e quindi è μ-misurabile. Inoltre anche $x \to$ dim $E(\mu, x)$ è μ-approssimativamente semicontinua inferiormente e μ-misurabile.*

Dim. Ricordando la definizione di semicontinuità approssimata, quello che dobbiamo dimostrare è che, per ogni aperto $A \subset \mathbf{R}^n$, l'insieme $S(A)$ (ovvero l'insieme dei punti $x \in \mathbf{R}^n$ tali che $E(\mu, x) \cap A \neq \emptyset$) ha μ-densità 1 in ogni suo punto.
Se $0 \in A$ allora $S(A) = \mathbf{R}^n$ (perché $E(\mu, x)$ contiene sempre lo 0). Supponiamo allora che $0 \notin A$ e fissiamo un punto $x \in S(A)$: dalla definizione sappiamo che esistono $v \in A$ e $u \in BV(\mathbf{R}^n)$ tali che Du è tangente a $v\mu$ in x. Il quarto punto della proposizione 3.11 ci dice che Du si può scrivere come $f\mu + \theta$, dove $f \in L^1(\mathbf{R}^n, \mu)$ e θ è una misura singolare rispetto a μ.
Chiamiamo B l'insieme di Borel dei punti x tali che $f(x) \in A$. Osserviamo che, per μ quasi ogni y,

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - v| d\mu = 0$$

e Du è tangente a $f(y)\mu$. Ciò significa che $f(y) \in E(\mu, y) \cap A$ per μ q.o. $y \in B$ e quindi che $B \subset S(A)$. Se si prende $\epsilon > 0$ tale che $B_\epsilon(v) \subset A$, allora $\epsilon^{-1}|f(y) - v| \geq 1$ per ogni $y \in \mathbf{R}^n \backslash B$. Vista l'uguaglianza precedente possiamo allora scrivere:

$$\limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B_r(x)\backslash B)}{\mu(B_r(x))} \leq \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} \epsilon^{-1}|f(y) - v| d\mu = 0.$$

Ciò vuol dire che B ha μ-densità 1 in x e quindi, visto che $B \subset S(A)$, anche $S(A)$ ha μ-densità 1 in x. □
Constatiamo ora l'altro risultato di cui abbiamo bisogno. Rimandiamo la sua dimostrazione alla fine del paragrafo, dopo aver dimostrato due lemmi.

TEOREMA 3.13. *Sia μ una misura positiva e $f \in L^1(\mathbf{R}^n, \mu)$ tale che $f(x) \in E(\mu, x)$ per μ q.o. x. Allora esistono $u \in BV(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{M}(\Omega, \mathbf{R}^n)$ perpendicolare a μ tali che $Du = f\mu + \theta$. Inoltre u può essere preso in maniera tale che $\|u\|_{BV} \leq C\|f\|_{L^1(\mu)}$, dove C dipende solo da n.*

Prima del prossimo lemma facciamo un paio di considerazioni. Se u è una funzione $BV(\mathbf{R}^n)$ con supporto contenuto in una palla di raggio r, allora la disuguaglianza di Poincaré ci dice che esiste una costante C, dipendente solo da n, tale che

$$\|u\|_{L^1} \leq Cr\|Du\|.$$

Data una funzione u reale a variazione limitata in una palla B possiamo estenderla a tutto $\mathbf{R}^n$ semplicemente ponendola identicamente 0 fuori da tale palla. Se chiamiamo Tu questa estensione, allora

$$D[Tu] = Du + u^+\nu\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial B.$$

Inoltre l'operatore T è continuo (infatti, se u è una funzione C^1 è semplice stimare $\|D[Tu]\|$ con $\|Du\|$ e $\|u\|_{L^1}$; si può poi estendere tale stima per densità). Quindi, dalla disuguaglianza di Poincaré si ottiene una costante γ per cui

$$\|D[Tu]\| \leq \gamma\|Du\|$$

per ogni u a media nulla e la miglior costante γ che si può mettere in tale disuguaglianza non dipende dal raggio di B (per omogeneità). Infine, se $u \in BV(\mathbf{R}^n)$ allora

$$\|D[u|_B]\| \leq \gamma|Du|(B).$$

LEMMA 3.14. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$. Sia φ una misura positiva su $\mathbf{R}^n$ e $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, con supporto contenuto in Ω. Allora esistono $u \in BV(\mathbf{R}^n)$ con supporto in $\overline{\Omega}$ e $\lambda \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ tali che*

1. *$(Du - \lambda) \perp \lambda$ e $(Du - \lambda) \perp \varphi$;*
2. *$\|\lambda - \psi\| \leq \|\psi\|/2$;*
3. *$\|Du\| \leq 2\gamma\|\psi\|$.*

Dim. Chiamiamo f la derivata di Radon-Nikodym di ψ rispetto alla sua variazione e sia E l'insieme di tutti i punti x contenuti nel supporto di ψ per cui $f(x)|\psi|$ è tangente in x a ψ e $f(x) \in E(\psi, x)$. Ciò vuol dire che,per tali x, esiste $u_x \in BV(\mathbf{R}^n)$ la cui derivata è tangente a $f(x)|\psi|$ e a ψ in x. Chiaramente, dalla definizione di $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ e dal teorema di derivazione delle misure, avremo $|\psi|(\Omega \backslash E) = 0$

Sia $\mathcal{F}$ la famiglia di tutte le palle $B_r(x)$ contenute in Ω, con centro in un punto di E e tali che

$$|Du_x - \psi|(B_r(x)) \leq \frac{1}{2}\|\psi\|(B_r(x)) \tag{2.1}$$

e $\varphi(\partial B_r(x)) = 0$. $\mathcal{F}$ è un ricoprimento fine di E e quindi possiamo ottenere una successione $(B_n) \subset \mathcal{F}$ di palle disgiunte che ricoprono $|\psi|$ quasi tutto Ω. Per semplificare le notazioni poniamo $u_n = u_{x_n}$ e chiamiamo

- a_n il valor medio di u_n in B_n;
- ν_n la normale interna a ∂B_n;
- t_n la traccia interna di u_n su ∂B_n.

Avremo allora che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|D[(u_n - a_n) \llcorner B_n]\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \gamma |Du_n|(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2\gamma |\psi|(B_n) = 2\gamma\|\psi\|.$$

Poniamo, allora, $u = \sum (u_n - a_n) \llcorner B_n$: grazie alla disuguaglianza appena scritta u risulta essere una funzione BV con supporto contenuto in $\overline{\Omega}$. Inoltre possiamo scrivere

$$Du = \sum_{n=1}^{\infty} Du_n \llcorner B_n + \sum_{n=1}^{\infty} (t_n - a_n)\nu_n \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial B_n$$

dove le due serie convergono in norma a due misure mutuamente singolari. Perciò, ponendo $\lambda = \sum Du_n \llcorner B_n$, otteniamo

- $(Du - \lambda) \perp \lambda$ per costruzione;
- $(Du - \lambda) \perp \varphi$ perché $Du - \lambda$ ha supporto sull'unione delle sfere ∂B_n, sulle quali φ è nulla;
- vista la 2.1
$$\|\lambda - \psi\| = \sum_{n=1}^{\infty} |Du_n - \psi|(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}|\psi|(B_n) = \frac{1}{2}\|\psi\|.$$

$\square$

LEMMA 3.15. *Siano Ω, ψ e φ come nel lemma precedente. Allora esiste una u a variazione limitata e con il supporto contenuto in $\overline{\Omega}$ tale che $(Du - \psi) \perp \varphi$ e $\|Du\| \leq 4\gamma\|\psi\|$.*

Dim. Poniamo $\psi_0 = \psi$, $u_0 = 0$ e $\lambda_0 = 0$. Applicando il lemma precedente possiamo definire per induzione delle funzioni $u_n \in BV(\mathbf{R}^n)$, con supporto in $\overline{\Omega}$ e delle misure ψ_n, λ_n tali che

1. $\psi_n = \psi_{n-1} - \lambda_{n-1}$;
2. $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$;
3. $(Du_n - \lambda_n) \perp \lambda_n$, $(Du_n - \lambda_n) \perp \varphi$ e $Du_n - \lambda_n, \lambda_n \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$;
4. $\|\lambda_n - \psi_n\| \leq \frac{1}{2}\|\psi_n\|$;

5. $\|Du_n\| \leq 2\gamma\|\psi_n\|$.

Notiamo che da 1 e 4 discende che $\psi_1 = \psi_0 = \psi$ e, per $n > 1$, $\|\psi_n\| = \|\psi_{n-1} - \lambda_{n-1}\| \leq \|\psi_{n-1}\|/2$. Quindi, per $n > 0$,

$$\|\psi_n\| \leq 2^{1-n}\|\psi\|$$

e dalla 5 segue che

$$\sum_1^\infty \|Du_n\| \leq 2\gamma \sum_1^\infty \|\psi_n\| \leq 2\gamma \sum_1^\infty 2^{1-n}\|\psi\| = 4\gamma\|\psi\|.$$

Perciò, se poniamo $u = \sum u_n$, otteniamo facilmente che u è BV, ha supporto in Ω e $\|Du\| \leq 4\gamma\|\psi\|$. Inoltre anche $\lambda = \sum \lambda_n$ è ben definita e $(Du - \lambda) = (\sum(Du_n - \lambda_n)) \perp \varphi$.
Per finire la dimostrazione ci basta mostrare che $\lambda = \varphi$. Dalla 1 si deduce che

$$\psi - \sum_{n=1}^{m-1} \lambda_n = \psi_m$$

e quindi

$$\|\psi - \lambda\| \leq \left\|\psi - \sum_1^{m-1} \lambda_n\right\| + \sum_m^\infty \|\lambda_n\| = \|\psi_m\| + \sum_m^\infty \|\lambda_n\|.$$

Ma,visto che le due successioni all'ultimo membro tendono entrambe a 0 per $m \uparrow \infty$, otteniamo proprio $\psi = \lambda$.

$\square$

Dim. del teorema 3.13 Sia (E_n) una successione di insiemi di Borel disgiunti che coprono $\mathbf{R}^n$ e che hanno diametro minore di 1. Ogni E_n è contenuto in una palla di raggio 1. Definiamo allora f_n come coincidente con f su E_n e identicamente nulla fuori. Applicando il lemma precedente con $\psi_n = f_n\mu$ e $\varphi = \mu$ otteniamo delle funzioni u_n che hanno le seguenti proprietà:

- u_n è a variazione limitata e il suo supporto è contenuto in una palla chiusa di raggio 1;
- $Du_n - f_n\mu$ è singolare rispetto a μ;
- $\|Du_n\| \leq 4\gamma\|f_n\mu\|$.

Ponendo $\theta_n = Du_n - \psi_n$ otteniamo che $Du_n = f_n\mu + \theta_n$, dove θ_n è singolare rispetto a μ e (tenendo conto di quanto osservato prima di dimostrare i due lemmi)

$$\|u_n\|_{L^1} + \|Du_n\| \leq 4\gamma(1 + C)\|f_n\|_{L^1(\mu)}.$$

Per concludere la dimostrazione poniamo $u = \sum u_n$ e $\theta = \sum \theta_n$.

$\square$

3. Dimensione di $E(\mu, x)$

In questo paragrafo dimostreremo quanto è stato anticipato nel paragrafo precedente, ovvero che se μ è singolare rispetto alla misura di Lebesgue allora la dimensione di $E(\mu, x)$ è 1 o 0 per μ quasi tutti gli x. Si noti che da tale proposizione e dalla semicontinuità della mappa $x \to E(\mu, x)$ segue che la dimensione di $E(\mu, x)$ è 0 o 1 per tutti gli x.
La proposizione verrà dimostrata prima nel caso particolare in cui μ è una misura su $\mathbf{R}^2$: per passare poi al caso generale useremo la disintegrazione di misure. Nella prima parte giocherà un ruolo chiave il seguente lemma.

LEMMA 3.16. *Sia e_1, e_2 una base ortonormale di $\mathbf{R}^2$ e μ una misura positiva. Supponiamo che esista una funzione limitata $u = (u^1, u^2)$ che appartenga a $BV_{loc}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$ e tale che*

$$Du^i \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^2, X(e_i, \frac{\sqrt{3}}{2})) \qquad e \qquad \mu << Du^i.$$

Allora $\mu << \mathcal{L}^2$. (Ricordiamo che con $X(v, a)$ intendiamo l'insieme degli $x \in \mathbf{R}^n$ tali che $< x, v >\geq a|x|$).

Dim. Modificando opportunamente la u possiamo supporre che Du^i abbia supporto su tutto $\mathbf{R}^2$ (una delle scelte possibili è quella di sostituire u^i con $u^i + \arctan(< \cdot, e_i >)$). Indichiamo poi con (ρ_ϵ) una famiglia di mollificatori C^∞, con u_ϵ le convoluzioni $u * \rho_\epsilon$ e con r l'estremo superiore dell'immagine di $|u|$ (che è un numero reale perché u è limitata). Valgono allora i seguenti fatti:

1. Dalla condizione $Du^i \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^2, X(e_i, \sqrt{3}/2))$ segue che
$$\frac{\partial u^i}{\partial e_i} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}|Du^i|$$
e quindi che $\mu << \partial u^i/\partial e_i$; inoltre $\partial u^i/\partial e_i$ è una misura positiva che ha tutto $\mathbf{R}^2$ come supporto.

2. u_ϵ è una funzione C^∞, $\|u_\epsilon\|_\infty \leq r$ e $\partial u^i_\epsilon/\partial e_i$ è strettamente maggiore di 0 in ogni punto; inoltre $Du^i_\epsilon(x) \in X(e_i.\sqrt{3}/2)$ e quindi
$$\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial u^1_\epsilon}{\partial e_1} \geq \left|\frac{\partial u^1_\epsilon}{\partial e_2}\right|, \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial u^2_\epsilon}{\partial e_2} \geq \left|\frac{\partial u^2_\epsilon}{\partial e_1}\right|.$$

3. u_ϵ è iniettiva. Per dimostrarlo scriviamo
$$u_\epsilon(x+h) - u_\epsilon(x) = \int_0^1 Du_\epsilon(x+th) \cdot h dt$$
con $h \neq 0$. Osserviamo allora che h deve appartenere ad almeno uno dei quattro coni della forma $X(\pm e_i, \sqrt{3}/2)$: tenendo presente il punto (2) ciò ci dice che, per qualche i, $< Du^i_\epsilon, h >$ ha sempre lo stesso segno.

4. L'iniettività di u_ϵ e la formula dell'area ci permettono di scrivere:
$$\frac{3\pi r^2}{2} \geq \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\partial u^1_\epsilon}{\partial e_1}\frac{\partial u^2_\epsilon}{\partial e_2} d\mathcal{L}^2.$$
Infatti
$$\begin{aligned}\pi r^2 \geq \mathcal{H}^2(\mathrm{Im} u_\epsilon) \quad &= \int_{\mathbf{R}^2} |Ju_\epsilon| d\mathcal{L}^2 = \int_{\mathbf{R}^2} \left| \frac{\partial u^1_\epsilon}{\partial e_1}\frac{\partial u^2_\epsilon}{\partial e_2} - \frac{\partial u^1_\epsilon}{\partial e_2}\frac{\partial u^2_\epsilon}{\partial e_1} \right| d\mathcal{L}^2 \\ &\geq \frac{2}{3} \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\partial u^1_\epsilon}{\partial e_1}\frac{\partial u^2_\epsilon}{\partial e_2} d\mathcal{L}^2.\end{aligned}$$

Poniamo allora
$$S_\delta = \left\{ x : \left[d\left(\frac{\partial u^i}{\partial e_i}\right) \Big/ d\mu \right](x) \geq \delta \text{ per } i = 1, 2 \right\}$$
e $\lambda = \delta\mu \llcorner S_\delta$. Avremo $\partial u^i/\partial e_i \geq \lambda$ e $(\partial u^i_\epsilon/\partial e_i) \geq \lambda * \rho_\epsilon$; quindi
$$\frac{3\pi r^2}{2} \geq \int_{\mathbf{R}^2} \frac{\partial u^1_\epsilon}{\partial e_1}\frac{\partial u^2_\epsilon}{\partial e_2} d\mathcal{L}^2 \geq \int_{\mathbf{R}^2} (\lambda * \rho_\epsilon)^2 d\mathcal{L}^2.$$
Visto che tale disuguaglianza vale per ogni ϵ ne concludiamo che λ è rappresentata da una funzione L^2: ne segue che $\mu \llcorner S_\delta$ è assolutamente continua rispetto a $\mathcal{L}^2$. Visto che $\mu << \partial u^i/\partial e_i$ abbiamo
$$\mu \left(\mathbf{R}^2 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} S_{1/n} \right) = 0,$$
da cui concludiamo che $\mu << \mathcal{L}^2$.

□

Con il prossimo teorema colmeremo il gap tecnico che ci manca per arrivare a concludere che la dimensione di $E(\mu, x)$ in $\mathbf{R}^2$ è 0 o 1 quando μ è singolare rispetto a $\mathcal{L}^2$.

DEFINIZIONE 3.17. Sia X un cono convesso chiuso di $\mathbf{R}^n$. Denotiamo con $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n, X)$ l'insieme delle misure positive μ per le quali $\exists u \in BV_{loc}(\mathbf{R}^n)$ tale che Du è una misura localmente finita e $\mu << Du$.

Osserviamo che la u della definizione può essere scelta in maniera tale che $\|u\|_\infty \leq 1$: basta infatti prendere $v = (2/\pi)\arctan(u)$ per continuare ad avere che $\mu << Dv$ (regola di Vol'pert) e ottenere anche $\|v\|_\infty \leq 1$.

TEOREMA 3.18. **(Proprietà di $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n, X)$)** *Sia $X = \{x \in \mathbf{R}^n | < x, v > \geq a|x|\}$ e M uno spazio topologico separabile e localmente compatto. Sia S un insieme $\mathcal{H}^{n-1}$-rettificabile di $\mathbf{R}^n$ orientato da ν, λ una misura positiva su M e μ l'integrazione su M di una mappa $t \to \mu_t$ che appartiene a $L^1(M, \lambda, \mathcal{M}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^+))$. Allora:*

1. *$\mathcal{E}(\mathbf{R}^n, X)$ è un cono convesso fortemente chiuso in $\mathcal{M}(\mathbf{R}^n)$;*

2. *se ψ è una misura assolutamente continua rispetto a un'altra appartenente a $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n, X)$ allora ψ è anch'essa in $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n, X)$;*

3. *se $\mu_t \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n, X)$ per λ q.o. t in M allora $\mu \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n, X)$;*

4. *se $\nu(x)$ appartiene alla parte interna di X per $\mathcal{H}^{n-1}$ q.o. x in S allora $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner S \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n, X)$;*

5. *se ψ è una misura tale che l'intersezione di $E(\psi, x)$ con la parte interna di X è non vuota per ψ q.o. x allora $\psi \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n, X)$.*

I punti (1) e (2) sono banali, mentre per i restanti tre rimandiamo alla prossima sezione. Vediamo ora quali sono le conseguenze di tali proprietà.
Prendiamo una base ortonormale $\{e_1, e_2\}$ di $\mathbf{R}^2$ e supponiamo che una misura μ abbia la proprietà che $E(\mu, x)$ ha dimensione maggiore di 1 μ quasi ovunque. Allora la (5) ci dice che $\mu \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^2, X)$ per ogni cono X che abbia come parametri un vettore v di S^1 e uno scalare $a \in]0, 1[$. Quindi, in particolare, possiamo trovare due funzioni u^1 e u^2 essenzialmente limitate in $\mathcal{L}^2$ e BV_{loc} tali che $\mu << Du_i$ e $Du_i \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^2, X(e_i, \sqrt{3}/2))$: il lemma che abbiamo dimostrato all'inizio del paragrafo ci permette di concludere che $\mu << \mathcal{L}^2$. A questo punto si ha come banale conclusione che se μ è singolare allora dim $(E(\mu, x)) \leq 1$ per μ q.o. x.
Concludiamo quindi il paragrafo passando al caso $n > 2$.

PROPOSIZIONE 3.19. **(Proprietà di disintegrazione di $E(\mu, x)$)**
Siano M e N due spazi euclidei e π_M la proiezione dal prodotto $M \times N$ sul fattore M. Siano μ una misura positiva sul prodotto, λ una misura positiva su M tale che $\pi_M^{\#}\mu << \lambda$ e $t \to \mu_t$ la disintegrazione di μ rispetto a λ. Indichiamo con $\lambda_a + \lambda_s$ la decomposizione di Lebesgue di λ rispetto a $\mathcal{L}^n$. Allora

1. *per λ_a q.o. $t \in M$ si ha che, per μ_t q.o. $s \in N$, $\pi_N(v) \in E(\mu_t, s)$ per tutti i $v \in E(\mu, (t, s))$;*

2. *per λ_s q.o. $t \in M$ si ha che, per μ_t q.o. $s \in N$, $\pi_N(v) = 0$ per ogni $v \in E(\mu, (t, s))$.*

Dim. Il teorema di selezione misurabile (3.7) ci dice che esiste una successione di funzioni $(f_n) \subset L^1(\mu, N)$ tali che $E(\mu, x)$ sia la chiusura di $\{f_n(x) | n \in \mathbb{N}\}$ per μ q.o. x.
Per il teorema 3.13 esistono funzioni $u_n \in BV(N)$ tali che le loro derivate di Radon-Nikodym rispetto a μ siano proprio f_n (per μ q.o. x). Perciò $E(\mu, x)$ per μ q.o. x è proprio la chiusura dell'insieme $\{[dDu_n/d\mu](x)\}$. Quindi basta applicare il teorema 3.5 sulla disintegrazione di funzioni BV per concludere. $\square$

A questo punto siamo in grado di estendere a $n > 2$ il risultato sopra ottenuto.

Teorema 3.20. *Sia μ una misura su $\mathbf{R}^n$ tale che dim $(E(\mu, x)) > 1$ per μ q.o. x. Allora μ è assolutamente continua rispetto a $\mathcal{L}^n$.*

Dim. Abbiamo già affrontato il caso $n = 2$: poniamo perciò $n > 2$.
Sia P un qualsiasi sottospazio di dimensione 2 di $\mathbf{R}^n$ e M il suo sottospazio ortogonale. Sia B l'insieme degli $x \in \mathbf{R}^n$ tali che $\pi_P(E(\mu, x))$ abbia dimensione 2; poniamo $\mu' = \mu \llcorner B$, $\lambda = \pi_M^{\#}\mu'$. Allora dalla proposizione 3.11 si deduce che $\pi_P(E(\mu', x))$ ha dimensione 2 μ' quasi ovunque: la proposizione appena dimostrata ci dice che λ è assolutamente continua rispetto a $\mathcal{H}^{n-2} \llcorner M$ e

$$\pi_P(E(\mu', (t, y))) \subset E(\mu'_t, y) \qquad \text{per } \lambda \text{ q.o. } t \in M \text{ e } \mu'_t \text{ q.o. } y \in P.$$

Ma allora possiamo usare la tesi del teorema nel caso $n = 2$ per dedurre $\mu'_t << \mathcal{H}^2 \llcorner P$ e quindi $\mu \llcorner B = \mu' << \mathcal{L}^n$.
Fissiamo a questo punto una base $\{e_1, ..., e_n\}$ di $\mathbf{R}^n$ e indichiamo con $P_{i,j}$ il sottospazio generato da e_i e e_j (con $i \neq j$). Allora $E(\mu, x)$ ha dimensione strettamente maggiore di 1 se e solo se esistono i e j tali che $\pi_{P_{i,j}}(E(\mu, x))$ ha dimensione 2. Perciò se poniamo

$$B_{i,j} = \{x \in \mathbf{R}^n | \text{dim } (\pi_{P_{i,j}}(E(\mu, x))) = 2\}$$

avremo che

$$\mu \left(\mathbf{R}^n \setminus \bigcup_{i \neq j} B_{i,j} \right) = 0.$$

Da quest'ultima uguaglianza e da quanto detto precedentemente concludiamo che $\mu << \mathcal{L}^n$.

$\square$

4. Proprietà di $\mathcal{E}(R^n, X)$

In questo paragrafo daremo la dimostrazione del teorema 3.18. Come abbiamo già detto, le prime due proprietà sono banali. Per dimostrare la terza avremo bisogno di alcuni lemmi.

Lemma 3.21. *Sia $X(e, a)$ un cono convesso chiuso di $\mathbf{R}^n$. Se u è una funzione L^∞ (rispetto alla misura di Lebesgue) tale che $u \in BV_{loc}(\mathbf{R}^n)$ e Du è una misura localmente finita a valori in X, allora*

$$\frac{2\omega_{n-1}}{a} \|u\|_\infty r^{n-1} \geq |Du|(B_r(0)) \qquad \forall r > 0.$$

(Con ω_k si intende la misura di Lebesgue della palla unitaria in $\mathbf{R}^k$).

Dim. Dividiamo la dimostrazione in due casi

(a) u è una funzione di classe C^∞. In questo caso $\nabla u(x) \in X$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n$ e

$$2\|u\|_\infty \geq \lim_{t \to +\infty} u(x + te) - \lim_{t \to -\infty} u(x + te) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial e}(x + te) dt.$$

Chiamiamo M il sottospazio ortogonale a e, π_M la proiezione su esso e C il cilindro $\{x \in \mathbf{R}^n : |\pi_M(x)| < r\}$. Allora si ha che $B_r(0) \subset C$ e, tenendo conto dell'uguaglianza appena scritta e del fatto che

$$\frac{\partial u}{\partial e} \geq a|\nabla u|,$$

si ottiene

$$2\|u\|_\infty \omega_{n-1} r^{n-1} \geq \int_C \frac{\partial u}{\partial e} d\mathcal{L}^n \geq \int_{B_r(0)} \frac{\partial u}{\partial e} d\mathcal{L}^n \geq a \int_{B_r(0)} |\nabla u| d\mathcal{L}^n.$$

(b) u è una generica funzione BV_{loc}. Allora indichiamo con u_ϵ le convoluzioni di u con una famiglia di mollificatori.

- u_ϵ è di classe C^∞;
- $\nabla u_\epsilon(x) \in X$ per ogni $x \in \mathbf{R}^n$;
- $\nabla u_\epsilon \mathcal{L}^n$ converge *debolmente a Du per $\epsilon \downarrow 0$.

Quindi dalla (a) otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{2\omega_{n-1}}{a}\|u\|_\infty r^{n-1} \quad &\geq \liminf_{\epsilon \to 0} \frac{2\omega_{n-1}}{a}\|u_\epsilon\|_\infty r^{n-1} \\ &\geq \liminf_{\epsilon \to 0} \int_{B_r(0)} |\nabla u_\epsilon| d\mathcal{L}^n \geq |Du|(B_r(0)). \end{aligned}$$

□

LEMMA 3.22. *Sia S l'insieme di tutte le funzioni $u \in L^\infty$ tali che $u \in BV_{loc}(\mathbf{R}^n)$, $\|u\|_\infty \leq 1$ e $Du \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbf{R}^n, X)$. Muniamo S della topologia debole* L^∞. Allora S è compatto e separabile e l'operatore di derivazione è un'applicazione lineare continua da S in $\mathcal{M}_{loc}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ (munito della topologia debole*).*

Dim. Siccome S è limitato e L^∞ è il duale di uno spazio di Banach separabile, sarà sufficiente mostrare, data una successione $(u_n) \subset S$, che il suo limite debole* u appartiene anch'esso a S e che (Du_n) converge *debolmente nel senso delle misure a Du.
Dal lemma precedente abbiamo che

$$\frac{2\omega_{n-1}}{a} r^{n-1} \geq |Du_n|(B_r(x)) \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0$$

e quindi deduciamo proprio che

- $u \in BV_{loc}(\mathbf{R}^n)$;
- Du_n converge *debolmente a Du;
- $Du \in \mathcal{M}_{loc}(\mathbf{R}^n, X)$ perché $\mathcal{M}_{loc}(\mathbf{R}^n, X)$ è debole* chiuso.

□

LEMMA 3.23. *Sia Y_1 l'insieme delle misure positive finite su $\mathbf{R}^n$ e Y_2 quello delle misure localmente finite su $\mathbf{R}^n$ a valori in $\mathbf{R}^n$, entrambi muniti della topologia debole*. Chiamiamo T l'applicazione che a ogni $(\mu, \psi) \in Y_1 \times Y_2$ associa la variazione totale della parte assolutamente continua di μ rispetto a $|\psi|$. Allora T è una funzione di Borel . (Osserviamo che in generale $T(\mu, \psi) \leq \|\mu\|$ e che l'uguaglianza vale se e solo se μ è assolutamente continua rispetto a $|\psi|$.)*

Dim. Denotiamo con $\mu \wedge |\psi|$ la misura data da

$$\mu \wedge |\psi|(B) = \int_B 1 \wedge \frac{d\mu}{d|\psi|} d|\psi|$$

per ogni insieme di Borel B. E' semplice vedere che $\mu \wedge |\psi|$ è minore sia di μ, sia di $|\psi|$ e che

$$\|\mu \wedge |\psi|\| = \inf\{\mu(B) + |\psi|(\mathbf{R}^n \backslash B) | B \text{ è un boreliano di } \mathbf{R}^n\}.$$

Scegliamo un sottoinsieme denso e numerabile $\mathcal{B}_1$ di $C_c(\mathbf{R}^n)$ (che chiameremo Z_1) e un analogo $\mathcal{B}_2$ di $C_c(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ (che chiameremo Z_2). Allora, per quanto appena osservato:

$$\begin{aligned}
\|\mu \wedge |\psi|\| = \quad & \inf_{f \in Z_1, |f| \leq 1} \left[\int f d\mu + \int (1-f) d\psi \right] \\
&= \inf_{f \in Z_1, |f| \leq 1} \left[\int f d\mu + \sup_{g \in Z_2, |g| \leq 1-f} + \int g d\psi \right] \\
&= \inf_{f \in Z_1, |f| \leq 1} \sup_{g \in Z_2, |g| \leq 1-f} \left[\int f d\mu + \int g d\psi \right] \\
&= \inf_{f \in \mathcal{B}_1, |f| \leq 1} \sup_{g \in \mathcal{B}_2, |g| \leq 1-f} \left[\int f d\mu + \int g d\psi \right].
\end{aligned}$$

Visto che le applicazioni $\mu \to \int f d\mu$ e $\psi \to \int g d\psi$ sono funzionali lineari continui rispettivamente su Y_1 e Y_2, ne deduciamo che $(\mu, \psi) \to \|\mu \wedge |\psi|\|$ è una funzione di Borel.
Allora, dal fatto che

$$T(\mu, \psi) = \int \frac{d\mu}{d|\psi|} d|\psi| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int n \wedge \frac{d\mu}{d|\psi|} d|\psi| = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|\mu \wedge |n\psi|\|,$$

otteniamo che T è una funzione di Borel.

□

Dim. di 3.18 (3) Dividiamo la dimostrazione in due passi

Passo 1 Per λ q.o. $t \in M$, $\mu_t \in \mathcal{E}(N, X)$ e quindi esiste $u \in S$ (l'insieme definito nel lemma 3.22) tale che $\mu_t << Du_t$. Vogliamo mostrare che la funzione u_t può essere scelta in maniera tale che la mappa $t \to u_t$ sia una funzione di Borel da M in S.
Definiamo F_t come l'insieme delle $u \in S$ tali che $\mu_t << Du$ (esso è non vuoto per λ q.o. t) e chiamiamo F l'insieme delle coppie $(t, u) \in M \times S$

tali che $u \in F_t$. Se T è definita come in 3.23, allora $(t, u) \in F$ se e solo se $T(\mu_t, Du) = \|\mu_t\|$.
Dai lemmi 3.22 e 3.23 e dal fatto che $t \to \mu_t$ è Borel misurabile (si ricordi la definizione di disintegrazione) segue che

$$\mathcal{F} : M \times S \ni (t, u) \to (T(\mu_t, Du) - \|mu_t\|) \in \mathbf{R}$$

è una funzione di Borel. Visto che $F = \mathcal{F}^{-1}(0)$, F è un insieme di Borel. Siamo allora nelle condizioni di applicare un teorema di selezione noto come teorema di Aumann (vedere per esempio [**12**] Theorem III.22) e concludere che si può scegliere $t \to u_t$ di Borel.

Passo 2 Se prendiamo una funzione $c \in L^1(M, \lambda)$ positiva tale che $\int c d\lambda = 1$, tenendo conto del lemma 3.21 si può verificare che la funzione

$$u(x) = \int_M c(t) u_t(x) d\lambda(t)$$

è ben definita, appartiene a S e $Du = \int_M c(t) Du_t(x) d\lambda(t)$. Quindi

$$|Du| \geq \frac{\partial u}{\partial e} = \int c(t) \frac{\partial u_t}{\partial e} d\lambda(t) \geq a \int c(t) |Du_t| d\lambda(t)$$

e in particolare, se per un boreliano B vale $|Du|(B) = 0$, allora $|Du_t|(B) = 0$ per λ q.o. t.
Concludiamo che $\mu(B) = 0$ (perché $\mu_t << Du_t$ e μ è l'integrazione di $t \to \mu_t$): perciò $\mu << Du$ e $\mu \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n, X)$.

$\square$

LEMMA 3.24. *Sia (S, ν) un insieme $\mathcal{H}^{n-1}$ rettificabile orientato di $\mathbf{R}^n$ tale che $\nu(x)$ appartiene alla parte interna di $X(e, a)$ per $\mathcal{H}^{n-1}$ q.o. $x \in S$. Allora possiamo trovare una successione (A_n) di insiemi aperti con bordi lipschitziani e normali interne ν_n tali che:*

- *$\nu_n(x) \in X(e, a)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\mathcal{H}^{n-1}$ q.o. $x \in \partial A_n$;*
- *gli insiemi ∂A_n ricoprono $\mathcal{H}^{n-1}$ quasi tutto S.*

Dim. Innanzitutto notiamo che è sufficiente dimostrare il lemma nel caso in cui S sia un sottinsieme di una varietà orientata V di classe C^1.
Fissiamo un x per cui la normale $\nu(x)$ è nella parte interna di $X(e, a)$. Osserviamo che $\nu(x)$ è ortogonale allo spazio tangente a V in x, quindi esiste un intorno aperto B di x e un'orientazione continua ν_1 di $V \cap B$ in maniera tale che ν_1 sia sempre nella parte interna di $X(e, a)$. Allora ν coincide con ν_1 in $\mathcal{H}^{n-1}$ q.o. x di $S \cap B$.
Perciò possiamo trovare $r > 0$ e un aperto $D \subset B_r(x)$ tali che $B_r(x) \subset B$ e $\partial D \cap B_r(x) = V \cap B_r(x)$: allora ν_1 è la normale interna a ∂D. Possiamo scegliere $t \in B_r(x) \backslash D$ tale che x appartenga al cono aperto

$$C = \{y | < y - t, e >> \sqrt{1 - a^2} |y - t|\}$$

e $\partial D \cap C$ sia relativamente compatto in $B_r(x)$. Notiamo che C è un aperto con frontiera lipschitziana e la normale interna a ∂C appartiene sempre a

$X(e,a)$. A questo punto prendiamo $A = \{y \in C | y \notin B_r(x) \text{ o } y \in D\}$: esso è un insieme aperto con bordo lischitziano e la normale interna alla sua frontiera appartiene a $X(e,a)$ $\mathcal{H}^{n-1}$ quasi dappertutto. Con una quantità numerabile di insiemi siffatti si può coprire $\mathcal{H}^{n-1}$ quasi tutto S.

$\square$

Dim. del teorema 3.18 (4) Dato (S,ν) prendiamo gli insiemi (A_n) come nel lemma precedente. e chiamiamo u_n la funzione caratteristica di A_n. Allora $u_n \in BV_{loc}(\mathbf{R}^n)$ e

$$Du_n = \nu_n \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial A_n.$$

Ne segue che $Du_n \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n, X(e,a))$. Se per ogni m poniamo

$$S_m = (S \cap \partial A_m) \backslash \left(\bigcup_{n<m} \partial A_n \right).$$

avremo $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner S_m \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n, X(e,a))$ e quindi $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner S = \sum_m \mathcal{H}^{n-1} \llcorner S_m \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n, X(e,a))$.

$\square$

Dim. del teorema 3.18 (5) Per ogni intero n poniamo che

- X_n sia il cono $X(e, a - 1/n)$;
- B_n l'insieme degli x per cui $E(\mu,x) \cap X_n \neq \{0\}$ e $E(\mu,x) \cap X_{n-1} = \{0\}$;
- $\mu_n = \mu \llcorner B_n$.

Gli insiemi B_n sono misurabili e disgiunti a due a due e $\mu = \sum \mu_n$.
A questo punto fissiamo n. Notiamo che $E(\mu_n, X) \cap X_n = E(\mu,x) \cap X_n \neq \{0\}$ per μ_n q.o. x e quindi $E(\mu_n,x) \cap X_n \cap S^{n-1} \neq \emptyset$ e l'applicazione $x \to E(\mu_n,x) \cap X_n \cap C =$ è μ_n misurabile. Possiamo allora trovare una funzione misurabile $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ tale che $f(x) \in E(\mu_n,x) \cap X_n$ e $|f(x)| = 1$ per μ_n q.o. x. Per il teorema 3.13 esiste una funzione $u \in BV_{loc}(\mathbf{R}^n)$ tale che $Du = f\mu_n + \theta$, dove θ è singolare rispetto a μ_n.
Prendiamo allora B tale che $\mu(\mathbf{R}^n \backslash B) = 0$ e $|\theta|(B) = 0$; dalla formula di coarea otteniamo

$$f\mu_n = Du \llcorner B = \int_{\mathbf{R}} (Du_t \llcorner B) dt = \int_{\mathbf{R}} \nu_t \mathcal{H}^{n-1} \llcorner (S_t \cap B) dt$$
$$\mu_n = |Du \llcorner B| = \int_{\mathbf{R}} |Du_t \llcorner B| dt = \int_{\mathbf{R}} (\mathcal{H}^{n-1} \llcorner (S - t \cap B)) dt.$$

Quindi, poiché $f\mu_n \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n, X_n)$, si ha $\nu_t \mathcal{H}^{n-1} \llcorner (S_t \cap B) \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n, X)$: in particolare $\nu_t(x)$ appartiene alla parte interna di $X(e,a)$ per $\mathcal{L}^1$ q.o. t e $\mathcal{H}^{n-1}$ q.o. $x \in S_t \cap B$. Da 3.18 (4) deduciamo che $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner (S_t \cap B) \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n, X(e,a))$ per $\mathcal{L}^1$ q.o. t; da 3.18 (3) otteniamo $\mu_n \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n, X(e,a))$. Ma allora, visto che $\mu = \sum \mu_n$, la dimostrazione è terminata.

$\square$

5. Misure rettificabili e teorema rank-one

In questa ultima sezione introdurremo il concetto di misura rettifcabile e dimostreremo alcune delle sue proprietà. Inoltre, data una funzione u a variazione limitata e una misura rettificabile μ, indagheremo sulle relazioni tra $E(\mu, x)$ e la struttura della parte di Du assolutamente continua rispetto a μ. Basandoci poi su quello che abbiamo dimostrato nella terza sezione otterremo il teorema rank-one come corollario.
Prendiamo una misura μ della forma $f\mathcal{H}^{n-1}$: abbiamo già visto che, se $S = \{x | f(x) \neq 0\}$ è un insieme rettificabile, allora $E(\mu, x)$ è l'ortogonale di Tan (S, x) per μ q.o. x. Supponiamo invece che S sia un insieme puramente non rettificabile, ovvero che ogni suo sottinsieme a misura $\mathcal{H}^{n-1}$ nonnulla è non rettificabile. Tale condizione si può anche esprimere come:

$$\mathcal{H}^{n-1}(R \cap S) = 0 \qquad \forall R \subset \mathbf{R}^n \ \mathcal{H}^{n-1}\text{rettificabile.}$$

Fissata una funzione $u \in BV$, se chiamiamo F_t i suoi sopralivelli e R_t le loro frontiere ridotte, dalla formula di coarea abbiamo che

$$|Du|(S) = \int_{\mathbf{R}} \mathcal{H}^{n-1}(R_t \cap S)dt = 0.$$

Quindi $Du \perp \mu$ e $E(\mu, x) = \{0\}$ per μ q.o. x. In più sappiamo anche che, se una misura μ è singolare rispetto a $\mathcal{L}^n$, allora $E(\mu, x)$ ha dimensione 1 o 0 per μ quasi ogni x. Tutto ciò giustifica la seguente definizione di misura rettificabile.

DEFINIZIONE 3.25. Sia μ una misura positiva su $\mathbf{R}^n$ singolare rispetto a $\mathcal{L}^n$. Allora diciamo che μ è *rettificabile* quando dim $(E(\mu, x)) = 1$ per μ q.o. x e che è *puramente non rettificabile* se dim $(E(\mu, x)) = 0$ per μ q.o. x.
Nel caso in cui μ sia rettificabile diciamo che una funzione di Borel $\nu : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ è un'orientazione per μ se $|\nu(x)| = 1$ e $E(\mu, x)$ è generato da $\nu(x)$ per μ q.o. x.

Con i risultati delle precedenti sezioni diamo ora una caratterizzazione delle misure rettificabili.

PROPOSIZIONE 3.26. *Sia μ una misura positiva su $\mathbf{R}^n$. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

1. *dim $(E(\mu, x)) > 0$ per μ q.o. x;*
2. *$\mu = |Du| \llcorner B$ per qualche $u \in BV(\mathbf{R}^n)$ e qualche insieme di Borel $B \subset \mathbf{R}^n$;*
3. *$\mu << |Du|$ per qualche $u \in BV(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$;*
4. *esiste una disintegrazione $\mathbf{R} \ni t \to \mu_t \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^+)$ tale che, per $\mathcal{L}^1$ q.o. t, $\mu_t = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner S_t$, con S_t rettificabile;*

5. *esiste una misura positiva λ su uno spazio topologico separabile localmente compatto M e una disintegrazione $M \ni t \to \mu_t \in \mathcal{M}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^+)$ relativa a λ, tali che, per λ q.o. $t \in M$, dim $(E(\mu_t, x)) > 0$ per μ_t q.o. x.*

Dim. Dividiamo la dimostrazione in due passi

Passo 1 Dimostriamo che (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1).
(1) $\Rightarrow$ (2). Poiché dim $(E(\mu, x)) > 0$, $E(\mu, x) \cap S^{n-1} \neq \emptyset$ per μ q.o. x e quindi, per il teorema di selezione misurabile, possiamo trovare una funzione $f \in L^1(\mu, \mathbf{R}^n)$ tale che $|f(x)| = 1$ e $f(x) \in E(\mu, x)$ per μ q.o. x. A questo punto applichiamo il teorema 3.13 per concludere.
(2) $\Rightarrow$ (3) è banale.
(3) $\Rightarrow$ (1) Fissiamo una base ortonormale $\{e_1, ...e_m\}$ di $\mathbf{R}^m$ e poniamo che $u_i(x)$ sia la proiezione di $u(x)$ su e_i. Allora ogni u_i è una funzione BV e quindi dim $(E(|Du_i|, x)) > 0$ per Du_i q.o. x. Dal fatto che $\mu << |Du_1| + ... + |Du_m|$ e dalla proposizione 3.11 concludiamo che dim $(E(\mu, x)) > 0$ per μ q.o. x.

Passo 2 Dimostriamo che (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (1).
(1) $\Rightarrow$ (2) l'abbiamo già dimostrato.
(2) $\Rightarrow$ (4). Visto che $\mu = |Du| \llcorner B$ applichiamo la formula di coarea a $|Du|$ (ottenendo, tra l'altro, che gli S_t sono le intersezioni tra B e le frontiere ridotte dei sottolivelli di u).
(4) $\Rightarrow$ (5) è banale.
(5) $\Rightarrow$ (1). Copriamo $\mathbf{R}^n \backslash \{0\}$ con le parti interne di coni convessi chiusi $X_1, ..., X_k$. Fissiamo allora i. Per ogni $t \in M$, chiamiamo B_t^i l'insieme di tutti gli x per cui $E(\mu_t, x)$ interseca la parte interna di X_i. Poniamo

$$\mu_t^i = \mu_t \llcorner B_t^i$$
$$\mu^i = \int_M \mu_t^i d\lambda.$$

Allora $\mu << \sum_i \mu_i$ e quindi, da 3.11, per ogni t otteniamo che B_t^i copre μ_t^i quasi tutto $\mathbf{R}^n$. Quindi $\mu_t^i \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n, X_i)$, da cui deduciamo che $\mu^i \in \mathcal{E}(\mathbf{R}^n, X_i)$ e cioè che $E(\mu_i, x) \neq \{0\}$ per μ^i q.o. x. Visto che $\mu << \sum_i \mu_i$ otteniamo che vale la (1).

$\square$

Fissata una misura positiva μ singolare rispetto a $\mathcal{L}^n$ possiamo decomporla in una parte rettificabile e una puramente non rettificabile. Basta infatti prendere l'insieme B degli x per cui dim $(E(\mu, x)) = 1$ e porre $R\mu = \mu \llcorner B$ e $S\mu = \mu \llcorner (\mathbf{R}^n \backslash B)$. E' semplice verificare che tale decomposizione è unica, ovvero che, se scriviamo $\mu = \mu_1 + \mu_2$ con μ_1 rettificabile e μ_2 puramente non rettificabile, abbiamo necessariamente $\mu_1 = R\mu$ e $\mu_2 = S\mu$.
Vediamo ora le proprietà più immediate di tale decomposizione.

PROPOSIZIONE 3.27. *Siano μ e λ due misure positive su $\mathbf{R}^n$, singolari rispetto a $\mathcal{L}^n$ e tali che $\mu << \lambda$. Allora*

1. *$R\lambda << R\mu$, $S\lambda << S\mu$ e $E(R\lambda, x) = E(R\mu, x)$ per $R\lambda$ q.o. x;*

2. *se $\mu << \mathcal{H}^{n-1} \llcorner S$ e S è un insieme rettificabile, μ è rettificabile e $E(\mu, x)$ è l'ortogonale di Tan (S, x) per μ q.o. x;*

3. *se μ è concentrata su un insieme puramente non rettificabile allora μ è puramente non rettificabile;*

4. *se $\mu << |Du|$ per qualche $u \in BV(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, allora μ è rettificabile e $E(\mu, x)$ è l'ortogonale del nucleo di $[dDu/d\mu](x)$ per μ q.o. x; in particolare la dimensione del nucleo di $[dDu/d|Du_s|](x)$ è $n-1$ per $|Du_s|$ q.o. x;*

5. *quando μ è puramente non rettificabile μ è singolare rispetto alla derivata di qualsiasi funzione BV.*

Dim. I punti (1),(2) e (3) seguono facilmente da quanto abbiamo già visto, mentre il punto (5) è una facile conseguenza del (4). Ci resta da dimostrare proprio quest'ultimo.

Scriviamo $Du = f\mu + \theta$, fissiamo una base ortonormale $\{e_1, ..e_m\}$ di $\mathbf{R}^m$ e definiamo u_i come nella proposizione precedente. Allora $u_i = f_i\mu + \theta_i$ e $f_i(x)$ è dato da ${}^t f(x) \cdot e_i$ (ricordiamo che $f(x)$ è una applicazione lineare: se fissiamo anche una base $\{f_1, ...f_n\}$ di $\mathbf{R}^n$ e scriviamo la matrice di $f(x)$ relativa alle due basi fissate, ${}^t f(x) \cdot e_i$ non è altro che l'i-esimo vettore riga della matrice).
Dalla proposizione 3.11 sappiamo che $f_i(x) \in E(\mu, x)$ per μ q.o. x e per ogni i: ma gli $f_i(x)$ generano proprio il perpendicolare del nucleo di $f(x)$. Abbiamo quindi un'inclusione. Per vedere l'altra osserviamo che $f(x) \neq 0$ per μ q.o. x e quindi la dimensione di $\mathrm{Ker}(F(x))$ è minore o uguale a $(n-1)$: perciò il suo perpendicolare ha dimensione maggiore o uguale a 1. Visto che dim $(E(\mu, x)) = 1$ per μ q.o. x otteniamo anche l'altra inclusione.
Inoltre concludiamo che il nucleo di $f(x)$ ha dimensione $n-1$ μ q.o: scegliendo $\mu = |Du_s|$ otteniamo che il nucleo di $[\mathrm{d}Du_s/\mathrm{d}|Du_s|]$ ha dimensione $n-1$ quasi ovunque.

□

Quest'ultima constatazione è proprio la proprietà rank-one che ci siamo prefissati di dimostrare all'inizio di questo capitolo. La rienunciamo nel seguente teorema.

TEOREMA 3.28. **(Teorema rank-one)** *Se u è una funzione $BV(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ allora la derivata di Radon-Nikodym di Du rispetto alla variazione totale della sua parte singolare è $|Du_s|$ quasi ovunque una matrice di rango 1.*

CAPITOLO 4

I funzionali J^β

Iniziamo questo capitolo con una definizione rigorosa di J^β per funzioni C^1 a tratti.

DEFINIZIONE 4.1. Sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^2$ e C^1_t lo spazio delle funzioni reali u su Ω che godono delle seguenti proprietà:

- u è lipschitziana;
- esistono $A_1, ...A_n$ insiemi aperti con bordo lipschitziano, disgiunti a due a due e le cui chiusure coprono Ω, tali che $f|_{A_i}$ è C^1 $\forall i$;
- la derivata di $f|_{A_i}$ è continua fino al bordo.

Indichiamo con $J_{\nabla u}$ l'insieme $(\cup_i \partial A_i)\backslash\partial\Omega$ (si noti che ∇u è $BV(\Omega)$ e che $J_{\nabla u}$ è proprio l'insieme di salto di ∇u). Allora $\mathcal{H}^1$ q.o. x in $J_{\nabla u}$ è di frontiera per esattamente due insiemi A_j e A_k. Dopo aver fissato un'orientazione per $J_{\nabla u}$ poniamo, per tali x,

$$[\nabla u]^+_-(x) = \lim_{\substack{y\to x\\ y\in A_j}} \nabla u(y) - \lim_{\substack{y\to x\\ y\in A_k}} \nabla u(y),$$

dove A_j è l'insieme a "destra" di $J_{\nabla u}$ Il funzionale J^β è un'applicazione da C^1_t in $\mathbf{R}$ data da

$$\int_{(\cup_i\partial A_i)\backslash\partial\Omega} |[\nabla u]^+_-(x)]|^\beta d\mathcal{H}^1.$$

Come già avevamo accennato nell'introduzione, i J^β sembrano essere strettamente connessi allo studio del comportamento asintotico di funzionali del tipo

$$F_\epsilon(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\epsilon|\nabla^2 u|^2 + \frac{(1-|\nabla u|^2)^{\beta-1}}{\epsilon}\right) dx.$$

In particolare nelle prime sezioni focalizzeremo la nostra attenzione sul caso $\beta = 3$: lo studio del comportamento asintotico delle F_ϵ in tale caso è stato per la prima volta proposto da Aviles e Giga 10 anni fa [**8**], in connessione con la teoria dei cristalli liquidi; più recentemente il problema è stato ripreso da Gioia e Ortiz in [**25**] nel tentativo di fornire un modello per le energie di deformazione di pellicole sottili. In tale modello ϵ è proporzionale allo spessore della pellicola, mentre u rappresenta il discostamento della pellicola dalla posizione orizzontale. Utilizzando la teoria di Von Kármán, Ortiz e Gioia hanno dimostrato che (sotto ragionevoli ipotesi di isotropia) l'energia

di avvolgimento della pellicola è data da $\epsilon^2|\nabla^2 u|^2$, mentre quella elastica è rappresentata da $(1-|\nabla u|^2)^2$.
La Γ-convergenza sembrerebbe l'approccio più naturale al problema, vista anche la stretta analogia con il funzionale di Modica e Mortola (che è stato uno dei primi esempi dell'efficacia dei Γ-limiti, vedere per esempio [**23**], [**22**]). In concreto potremmo affermare che, nel caso $\beta = 3$, il nostro problema è del tipo Modica-Mortola vettoriale, ovvero potremmo prendere in considerazione l'idea di studiare il comportamento asintotico di

$$G_\epsilon(v) = \int_\Omega \epsilon|\nabla v|^2 + \frac{(1-|v|^2)^2}{\epsilon} dx),$$

dove le v sono mappe da $\mathbf{R}^2$ in $\mathbf{R}^2$ che soddisfano la condizione $\operatorname{rot} v = 0$ (chiaramente ciò equivale al problema di iniziale a patto che Ω sia semplicemente connesso).
Noi non adotteremo questo punto di vista e tenteremo di applicare le tecniche della Γ-convergenza ai funzionali F_ϵ nel caso $\beta = 3$. In tale ottica uno degli obiettivi principali sarà quello di trovare un candidato Γ-limite in uno spazio che assicuri compattezza per i suoi sottolivelli ed equicoercività per gli F_ϵ (vedere l'ultima sezione del capitolo 2).
Innanzitutto notiamo che, in qualsiasi contesto ragionevole si voglia lavorare, le funzioni u ammissibili per il problema limite dovranno soddisfare la condizione eikonale quasi ovunque, ovvero

$$|\nabla u| = 1 \qquad \mathcal{L}^2\text{-q.o. in } \Omega.$$

Inoltre, alcuni ragionamenti euristici suggeriscono fortemente che il funzionale limite debba concentrare l'energia su linee: tra essi sono rimarchevoli le somiglianze con il Modica-Mortola e una congettura di Aviles e Giga. In particolare quest'ultima suggerisce che J^β come funzionale limite è un candidato ragionevole: diventerebbe quindi molto importante trovare qual è lo spazio adatto per il problema di minimo relativo a J^β con le opportune condizioni al contorno.
Perciò il quadro generale che si delinea può essere diviso in due parti, strettamente interconnesse.

(a) Da un lato diventa interessante studiare una opportuna generalizzazione del funzionale J^β relativa al caso in cui le funzioni u di C^1_t soddisfino anche la condizione eikonale: il nostro obiettivo diventerebbe poter applicare il metodo diretto del calcolo delle variazioni per dimostrare l'esistenza del minimo per J^β (sotto opportune condizioni al bordo). In particolare il problema che terremo sempre presente come punto di riferimento avrà come condizioni $u = 0$ su $\partial\Omega$ e $u \geq 0$ su Ω.

(b) Dall'altro lato si vorrebbe risolvere il problema della Γ-convergenza, ovvero ambientare il problema nel giusto contesto e ottenere una stima dal basso per l'energia, una successione "ottimale" per ogni funzione ammissibile e un teorema di equicoercività.

In questo capitolo cominceremo ad esaminare i due aspetti delineati e in particolare

1. illustreremo la congettura di Aviles e Giga;

2. esamineremo l'importanza cruciale della condizione sul rotore e sottolineremo le differenze significative con la versione vettoriale del problema di Modica e Mortola;

3. enunceremo alcune congetture sui J^β ed in particolare vedremo un'interessante applicazione del teorema *rank one* nel caso $\beta = 1$ (rifacendoci a [**9**]);

4. estenderemo J^β alle funzioni che hanno gradiente BV e vedremo una rappresentazione di J^3 che ci porterà ad un risultato di semicontinuità (vedere [**10**]);

5. dimostreremo che il risultato di semicontinuità non è più vero nel caso $\beta > 3$ (confutando, sempre per $\beta > 3$, la congettura di Aviles e Giga).

Nei prossimi due capitoli sposteremo la nostra attenzione definitivamente sul caso $\beta = 3$, proponendo una generalizzazione di J^3 con cui otteniamo semicontinuità e compattezza: in tale contesto troveremo anche una stima dal basso per l'energia, il teorema di equicoercività e le successioni ottimali per un sottoinsieme delle funzioni ammissibili.

1. L'argomento di Aviles e Giga

Esamineremo ora in dettaglio l'argomento euristico che Aviles e Giga hanno portato a favore dell'ipotesi che l'energia asintotica per la famiglia $\{F_\epsilon\}$ sia J^β.

Fissiamo per ora le idee esaminando il caso $\beta = 3$: gli altri casi verranno trattati in maniera analoga. Per usare la Γ-convergenza avremo bisogno di uno spazio topologico X che contenga H^2 (che è lo spazio naturale in cui ambientare gli F_ϵ). Si può però osservare che tale scelta dipende fortemente dalla topologia che si pone su $H^2(\Omega)$: infatti, una volta scelta la topologia, la cosa più naturale è prendere, come X, il completamento di H^2.

Diventa allora cruciale la domanda: quale tipo di convergenza usare su H^2? La nostra scelta cadrà sulla topologia $W^{1,p}$ forte, dove p è minore dell'esponente dato dai teoremi di immersione: perciò lo spazio topologico X sarà il completamento di H^2 con la topologia in questione, ovvero $W^{1,p}$ stesso.

Riformuliamo quindi il problema in base a tale scelta. Abbiamo una famiglia di funzionali F_ϵ su $W^{1,p}(\Omega)$ cosí definiti:

$$F_\epsilon(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\epsilon|\nabla^2 u|^2 + \frac{(1-|\nabla u|^2)^2}{\epsilon}\right) dx & \text{se } u \in H^2 \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La teoria della Γ-convergenza ci fornisce, per ogni successione infinitesima ϵ_k, due funzionali (il $\Gamma-\liminf$ e il $\Gamma-\limsup$) che, se coincidono, ci danno il funzionale asintotico. Pertanto, supponendo che essi coincidano, le funzioni "ammissibili" per l'energia limite saranno quelle per le quali il $\Gamma-\limsup$ è finito. In particolare una $f \in W^{1,p}(\Omega)$ sarà ammissibile se esiste una successione $(u_k) \subset H^2$ tale che:

1. u è il limite in $W^{1,p}(\Omega)$ di (u_k);
2. esiste ed è finito il $\lim_k F_{\epsilon_k}(u_k)$.

E' facile osservare che tutte le u ammissibili dovranno soddisfare il vincolo eikonale. Infatti, sia $u \in W^{1,p}$ che non soddisfi l'equazione eikonale e supponiamo di prendere una successione (u_k) che tenda a u. Poniamo

$$A_k^\delta = \{x|(1-|\nabla u_k(x)|^2)^2 \geq \delta\} :$$

esisterà allora un $\delta > 0$ per cui

$$\liminf_{k\to 0} \mathcal{L}^2(A_k^\delta) > 0.$$

Ma ciò ci dice che, comunque si prenda una successione infinitesima ϵ_k, avremo

$$\liminf_{k\to 0} \int_\Omega \frac{(1-|\nabla u|^2)^2}{\epsilon_k} dx \geq \liminf_{k\to 0} \frac{\delta \mathcal{L}^2(A_k^\delta)}{\epsilon_k} = +\infty$$

e quindi che $\liminf_k F_{\epsilon_k}(u_k) = +\infty$.

Mostreremo ora che tutti gli "spigoli" che soddisfano l'equazione eikonale sono ammissibili. Chiamiamo *spigolo* una funzione reale u per cui esiste una partizione di $\mathbf{R}^2$ in due semipiani π_1 e π_2 tali che

- $u|_{\pi_i}$ è affine;
- $|\nabla u|_{\pi_i}| = 1$;
- u è continua ma non differenziabile.

Per comodità chiameremo v_1 e v_2 i valori del gradiente di u in π_1 e π_2 e r la retta che divide $\mathbf{R}^2$ nei due piani. Osserviamo che la condizione di continuità vincola le proiezioni di v_1 e v_2 lungo la direzione di r a essere uguali; se si sfrutta anche l'informazione che v_1 e v_2 hanno modulo 1 si deduce che v_2 è la riflessione di v_1 lungo la retta r (vedere figura 1).

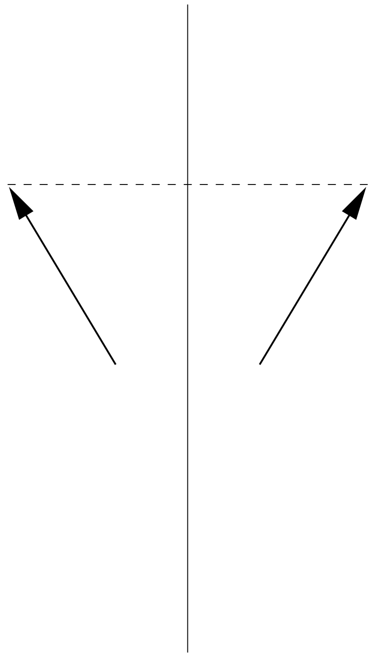


Fig. 1

In base a quanto detto, data una (ϵ_k) infinitesima, cercheremo ora una successione approssimante (u_k) per cui $(F_{\epsilon_k}(u_k))$ è limitata. In particolare, sfrutteremo l'invarianza di ∇u per traslazioni lungo r cercando le u_k proprio tra le funzioni invarianti per le stesse traslazioni.
Vediamo in primo luogo come si comportano i funzionali quando vengono "riscalati" lungo una direzione.

Definizione 4.2. Siano v_1 e v_2 i due valori del gradiente di uno spigolo. Per comodità poniamoci in un sistema cartesiano per cui $v_1 = (-k_1, k_2)$, $v_2 = (k_1, k_2)$. Chiamiamo $\mathcal{S}$ la famiglia di funzioni $v \in C^2(\mathbf{R} \times [a, b])$ che soddisfano le seguenti proprietà:
(a) $\partial_2 v \equiv k_2$
(b) $\nabla u(\cdot, x_2) = \nabla u(\cdot, 0)$ per ogni $x_2 \in \mathbf{R}$

$$\text{(c)} \quad \begin{aligned} &\lim_{x_1 \to +\infty} \partial_1 v(0, x_1) = -k_1 \\ &\lim_{x_1 \to -\infty} \partial_1 v(0, x_1) = k_1 \\ &\lim_{|x_1| \to \infty} \partial_{11} v(0, x_1) = 0. \end{aligned}$$

(In sostanza per ogni $v \in \mathcal{S}$ esiste una $f \in C^2(\mathbb{R})$ tale che $v(x_1, x_2) = k_2 x_2 + f(x_1)$ e che soddisfa ovvie condizioni per x_1 che tende ad infinito.)

Lemma 4.3. *Prendiamo una* $u \in \mathcal{S}$ *e poniamo*
(a) $u^\rho(x) = u(0, x_2) + \rho(u(x_1/\rho, x_2) - u(0, x_2))$*;*

(b) $\Omega_\rho = \{x \in \mathbf{R}^2 | (\rho x_1, x_2) \in \Omega\}$.
Avremo allora che

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\tfrac{(1-|\nabla u^\epsilon|^2)^2}{\epsilon} + \epsilon |\nabla^2 u^\epsilon|^2 \right) dx = \\ \int_{\Omega_\epsilon} ((1-|\nabla u|^2)^2 + |\nabla^2 u|^2) dx.\end{aligned} \tag{1.1}$$

La dimostrazione del lemma è una banale applicazione della formula di cambiamento di variabile.

Lemma 4.4. *Su $\mathcal{S}$ definiamo il funzionale F come*

$$F(u) = \int_{\mathbf{R}\times[a,b]} (1-|\nabla v|^2)^2 + |\nabla^2 u|^2) dx.$$

Allora il minimo di F su $\mathcal{S}$ esiste ed è dato da

$$m = \frac{4}{3} \mathcal{L}^1([a,b]) |k_1|^3.$$

Dim. Notiamo innanzitutto che, senza perdere di generalità, possiamo supporre $k_1 \geq 0$. Con semplici calcoli ci riduciamo al problema di minimizzare

$$\mathcal{L}^1([a,b]) \int_{-\infty}^{+\infty} (((f')^2 - k_1^2)^2 + (f'')^2) dx_1$$

sulla classe delle $f \in C^2(\mathbf{R})$ per le quali vale

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to+\infty} f'(t) = -k_1 \\ &\lim_{t\to-\infty} f'(t) = k_1 \\ &\lim_{t\to\infty} f''(t) = 0. \end{aligned}$$

Notiamo che la disuguaglianza di Young ci dà

$$((f')^2 - k_1^2)^2 + (f'')^2 \geq 2|(f')^2 - k_1^2||f''|$$

con il segno di uguaglianza valido se e solo se

$$((f')^2 - k_1^2)^2 = (f'')^2.$$

Proprio da tale disuguaglianza e dalla formula di cambiamento di variabile $\xi = f'$ otteniamo

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}^1([a,b]) \int_{-\infty}^{+\infty} (((f')^2 - k_1^2)^2 + (f'')^2) dx_1 \\ \geq \;& 2\mathcal{L}^1([a,b]) \int_{-\infty}^{+\infty} |(f')^2 - k_1^2)|f'' dx_1 \\ \geq \;& 4 \int_0^{|k_1|} |\xi^2 - k_1^2| d\xi = \frac{4}{3}\mathcal{L}^1([a,b])|k_1|^3. \end{aligned}$$

Cercheremo quindi di mostrare che esiste una w che soddisfa le condizioni precedenti e per cui nell'epsressione precedente vale ogni volta il segno di uguaglianza.

Vogliamo quindi che la w sia convessa, simmetrica, di classe C^2 e soddisfi

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to+\infty} w'(t) = -k_1\\
&\lim_{t\to-\infty} w'(t) = k_1\\
&((w')^2 - k_1^2)^2 = (w'')^2.
\end{aligned}$$

Ma allora essa dovrà soddisfare

$$k_1^2 - (w')^2 \geq 0$$

e $w'' \geq 0$. Quindi la w cercata risolverà l'equazione

$$k_1^2 - (w')^2 = w'';$$

ponendo $\xi = w'$, si tratterà di risolvere

$$k_1^2 - \xi^2 = \xi',$$

che è un'equazione a variabili separabili. Risolvendo

$$\int \frac{d\xi}{k_1^2 - \xi^2} = C + t$$

otteniamo una classe di soluzioni; da calcoli elementari abbiamo che tale classe si scrive come

$$\xi = \frac{k_1(C_1 e^{2k_1 t} - 1)}{C_1 e^{2k_1 t} + 1}.$$

Ricordiamo che $\xi = w'$ e che cercavamo una w simmetrica; pertanto dobbiamo imporre $\xi(t) = -\xi(-t)$ che ci dà $C_1 = 1$. La w cercata è perciò una primitiva di

$$\frac{k_1(e^{2k_1 t} - 1)}{e^{2k_1 t} + 1}.$$

A questo punto siamo pronti per concludere; osserviamo infatti che valgono le uguaglianze

$$((w')^2 - k_1^2)^2 = (w'')^2 = |(w')^2 - k_1^2||w''| = (k_1^2 - (w')^2)w'';$$

inoltre w' è strettamente crescente e quindi applicando la formula di cambiamento di variabile abbiamo

$$2\mathcal{L}^1([a,b]) \int_{-\infty}^{+\infty} (k_1^2 - (w')^2)w'' dx_1 = 4 \int_0^{k_1} (k_1^2 - \xi^2) d\xi.$$

Ciò completa la dimostrazione □

Siamo allora pronti per mostrare che gli spigoli sono funzioni ammissibili. Fissiamo una u che sia uno spigolo, supponiamo per comodità che abbia come linea di frattura l'asse y e prendiamo come aperto un qualsiasi rettangolo R del tipo $(-\delta, \delta) \times (a, b)$. Inoltre scegliamo una v punto di minimo per il funzionale come nel lemma precedente, in maniera tale che valga

$$\lim_{x_1\to\infty} u(x_1, x_2) - v(x_1, x_2) = 0 \qquad \forall x_2.$$

Tale scelta è possibile perché la funzione v è simmetrica rispetto all'asse x_2 e convessa (infatti queste condizioni ci dicono che la w caratterizzata dal lemma 4.4 ha come asintoti due rette del tipo $(a + k_1 t)$ e $(a - k_1 t)$; la w è determinata a meno di costanti: quindi per ogni a c'è proprio una f che ha quelle due rette come asintoti; ponendo $a = u(0,0)$ otteniamo la w, e quindi la v, cercate). A questo punto si verifica facilmente che $v^\epsilon|_R \in H^2(R)$ e che, visti i due lemmi 1.1 e 4.4,

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(v^\epsilon|_R) \quad &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_R \left(\frac{(1-|\nabla v^\epsilon|^2)^2)}{\epsilon} + \epsilon|\nabla^2 v^\epsilon|^2\right) dx \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^b \int_{-\frac{\delta}{\epsilon}}^{\frac{\delta}{\epsilon}} ((1-(w')^2)^2 + (w'')^2) dx \\ &= \frac{1}{6}\mathcal{H}^1 J_{\nabla u} |[\nabla u]_-^+|^3\end{aligned}$$

(ricordiamo che le v^ϵ sono le "riscalate" della v lungo x_1: vedere l'enunciato del lemma 1.1).
In sostanza abbiamo trovato una famiglia di funzioni $(v^\epsilon) \subset H^2$ tale che $\lim_\epsilon F_\epsilon(v^\epsilon) = J^3(u)/6$. A questo punto è semplice vedere che lo stesso risultato vale anche se si prende un dominio Ω che abbia un bordo sufficientemente regolare. Prima di entrare nei dettagli, osserviamo che possiamo perturbare leggermente le v^ϵ in maniera che coincidano con u al di fuori della striscia $(-\epsilon\log(1/\epsilon), +\epsilon\log(1/\epsilon))$. Fissiamo infatti un δ e, per ϵ sufficientemente grande, definiamo v_ϵ nella seguente maniera:

1. v_ϵ coincide con v nella striscia $\big[-\log(1/\epsilon) + \delta, +\log(1/\epsilon) - \delta\big] \times \mathbf{R}$;
2. v_ϵ coincide con u fuori dalla striscia $\big[-1/\log(\epsilon), +1/\log(\epsilon)\big] \times \mathbf{R}$;
3. nella striscia rimanente raccordiamo i due pezzi con una funzione del tipo $k_2 x_2 + g_\epsilon(x_1)$, dove g_ϵ è una parabola; ovviamente raccorderemo in maniera tale da rendere continuo il gradiente di u_ϵ.

A questo punto non è difficile vedere che

$$\begin{aligned}&\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}\times[a,b]} ((1-|\nabla v_\epsilon^2|^2) + |\nabla^2 v_\epsilon|^2) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}\times[a.b]} ((1-|\nabla v|^2)^2 + |\nabla^2 v|^2) dx.\end{aligned}$$

Infatti, l'unica cosa da verificare è che

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{S_\epsilon} ((1-|\nabla v_\epsilon|^2)^2 + |\nabla^2 v_\epsilon|^2) dx = 0,$$

dove S_ϵ è

$$\Big(\big[-\log(1/\epsilon), -\log(1/\epsilon) + \delta\big] \cup \big[\log(1/\epsilon) - \delta, \log(1/\epsilon)\big]\Big) \times [a, b].$$

Osserviamo che la misura degli insiemi su cui stiamo integrando è costante e che:

(a) $(|1-|\nabla v_\epsilon|^2)^2$ tende a 0 perché $|\nabla v_\epsilon|$ tende a 1;

(b) $|\nabla^2 v_\epsilon|^2 = |w'\big(\log(1/\epsilon)-\delta\big) - k_1|^2/\delta^2$ e quindi tende anch'esso a 0.

Quindi la famiglia (v_ϵ^ϵ) è proprio la famiglia cercata (è infatti banale verificare che le riscalate delle v_ϵ coincidono con u fuori da una striscia di larghezza $2\epsilon\log(1/\epsilon)$).
Possiamo quindi enunciare il

TEOREMA 4.5. *Supponiamo che u sia uno spigolo con frattura lungo la retta r e che Ω sia un aperto limitato che soddisfi la condizione*

(a) $\forall x \in \partial\Omega \cap r$ esistono due coni non degeneri con vertice in x, l'uno contenuto in Ω e l'altro contenuto in $\mathbf{R}^2 \backslash \Omega$.

Allora esiste una famiglia di funzioni $(u_\epsilon) \subset H^2(\Omega)$ tale che

$$\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(u_\epsilon) = \frac{1}{6}J^3(u).$$

Dim. In sostanza abbiamo già dimostrato il teorema nel caso in cui Ω sia un rettangolo con un lato parallelo a r. Osserviamo innanzitutto che $\partial\Omega\cap r$ è un insieme compatto che, vista la condizione (a), non ha punti di accumulazione: concludiamo che è composto da un numero finito (ed in particolare da un numero pari) di punti.
Per fissare le idee supponiamo che i punti siano due e che la retta r sia data dall'asse x_2: non ci sono differenze sostanziali con il caso generale. Possiamo allora scrivere $\Omega \cap r = \{0\} \times (a,b)$; inoltre, per non appesantire troppo la notazione, indicheremo con J_ϵ l'intervallo $\big(-\epsilon\log(1/\epsilon), \epsilon\log(1/\epsilon)\big)$.
Ora, dalla condizione (a) discende facilmente che le differenze simmetriche tra gli insiemi $\Omega\cap[J_\epsilon\times(a,b)]$ e $J_\epsilon\times(a,b)$ sono definitivamente contenute in rettangoli del tipo $J_\epsilon \times I$, dove l'intervallo I può essere scelto piccolo a piacere.
Ne segue allora che, prendendo come u_ϵ le funzioni v_ϵ^ϵ sopra definite, vale

$$\begin{aligned}
&\left|\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(u_\epsilon) - \frac{1}{6}J^3(u)\right| \\
= &\left|\lim_{\epsilon\to 0}(F_\epsilon(u_\epsilon) - \int_{J_\epsilon\times(a,b)}\left(\frac{(1-|\nabla u_\epsilon|^2)^2}{\epsilon} + \epsilon|\nabla^2 u_\epsilon|^2\right)dx\right| \\
\geq &\left|\lim \int_{J_\epsilon\times I}\left(\frac{(1-|\nabla u_\epsilon|^2)^2}{\epsilon} + \epsilon|\nabla^2 u_\epsilon|^2\right)dx\right| \\
= &\frac{1}{6}|[\nabla u]_-^+|^3\mathcal{L}^1(I)
\end{aligned}$$

Dal fatto che I è arbitrariamente piccolo ne deduciamo la tesi.

□

Siamo quindi arrivati alla conclusione che, a patto di scegliere una topologia ragionevole su cui fare il $\Gamma-\lim$, gli spigoli saranno tra le funzioni ammissibili. Inoltre abbiamo acquisito il linguaggio necessario per formulare la congettura di Aviles e Giga, che possiamo spezzare in due parti:

(AG1) le (u_{ϵ_k}) sono, in realtà, successioni ottimali (e quindi danno $\lim_\epsilon F_\epsilon(u_\epsilon) = \Gamma-\limsup_\epsilon F_\epsilon(u)$);

(AG2) il funzionale $J^3/6$ è il $\Gamma-$limite degli F_ϵ.

Riformuliamo ora il problema iniziale come lo studio della versione vettoriale del Modica Mortola col vincolo irrotazionale, ovvero lo studio di

$$M_\epsilon(v) = \int_\Omega \left(\frac{1-|v|^2)^2}{\epsilon} + \epsilon|\nabla v|^2 \right) dx$$

sulle mappe $v : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ che soddisfano $\mathrm{rot}\, v = 0$ (ovviamente tale riformulazione è lecita su domini semplicemente connessi!).
Siamo allora in grado di apprezzare il ruolo cruciale della condizione che v è irrotazionale. Qualora essa mancasse, l'idea di trovare le buone approssimazioni per le funzioni costanti a tratti che assumono due valori (e che hanno modulo 1) diventa molto più fruttuosa.
Senza scendere troppo nei dettagli, osserviamo che le famiglie approssimanti si possono costruire con mappe regolari v_ϵ a valori in S^1 (mentre prima ciò ci era impedito proprio dalla condizione $\mathrm{rot}\, v = 0$). In tal guisa le $G_\epsilon(v_\epsilon)$ non "pagano" la parte sinistra del funzionale e nulla ci vieta di rendere infinitesima anche la parte destra, facendo scoppiare $|\nabla v|^2$ più lentamente di $1/\epsilon$.
Ciò ci porta a concludere che il funzionale nullo è proprio il $\Gamma-\lim$ sulle funzioni costanti a tratti e a due valori; non solo, l'argomento si può adattare facilmente al caso generale di tutte le funzioni costanti a tratti, che sono una classe densa in energia. Quindi, in definitiva, concludiamo che il funzionale identicamente nullo è il Γ-limite dei G_ϵ. Vedremo che per gli F_ϵ non vale un discorso analogo, ovvero il $\Gamma-\liminf$ è diverso da 0: il motivo di tale differenza sta proprio nella condizione $\mathrm{rot}\, v = 0$.

2. La funzione distanza è un minimo?

Passiamo ora a esaminare più da vicino i funzionali J^β. Un problema che si pone naturalmente è quello dell'esistenza del minimo per J^β quando si impongono particolari condizioni al contorno. Un esempio di particolare interesse è il problema di minimo relativo alla classe delle u che che sono costantemente nulle sul bordo di un aperto Ω.
Utilizzando il contesto introdotto all'inizio del capitolo, ci stiamo chiedendo se, dato un aperto Ω limitato, nella classe $\mathcal{S}$ delle funzioni C^1 a tratti, identicamente nulle su $\partial\Omega$ e che soddisfano la condizione eikonale, esiste il minimo di J^β. Da quanto abbiamo visto nel capitolo 2 possiamo facilmente generalizzare J^β alle funzioni lipschitziane u il cui gradiente è in $BV(\Omega, \mathbf{R}^2)$.

In tal caso possiamo infatti sfruttare il teorema di struttura per funzioni BV per definire J^β come

$$\int_{J_{\nabla u}} |[\nabla u]_-^+|^\beta d\mathcal{H}^1.$$

In più osserviamo che (in analogia al caso affine a tratti) per $\mathcal{H}^1$ q.o. $x \in J_{\nabla u}$ deve valere che $(\nabla u^+(x) - \nabla u^-(x))$ è un vettore colineare con $\nu(x)$. Infatti D^2u è una matrice simmetrica di misure, da cui segue banalmente che anche la sua parte di salto è una matrice simmetrica di misure. Visto che la parte di salto si scrive come

$$(\nabla u^+ - \nabla u^-) \otimes \nu \mathcal{H}^1 \llcorner J_{\nabla u}$$

la matrice $(\nabla u^+(x) - \nabla u^-(x)) \otimes \nu(x)$ è simmetrica per $\mathcal{H}^1$ q.o. x. Ciò è possibile solo se $(\nabla u^+(x) - \nabla u^-(x))$ è nel sottospazio generato da $\nu(x)$.
Una congettura avanzata sempre da Aviles e Giga in [**9**] è che, nel caso in cui il dominio Ω sia convesso, il minimo esista e venga raggiunto dalle soluzioni viscose dell'equazione eikonale, che altro non sono (a meno di un segno) che la funzione distanza da $\partial\Omega$. Il problema è ancora totalmente aperto; gli unici risultati noti sono proprio in [**9**], dove Aviles e Giga dimostrano che:

(a) la funzione $\varphi(x) = \text{dist }(x, \partial\Omega)$ è punto di minimo per J^1 nella classe delle affini a tratti che sono identicamente nulle su bordi di poligoni convessi;

(b) esiste un aperto Ω semplicemente connesso ma non convesso in cui la funzione φ non è minimo per J^1.

Per dimostrare (a) un'idea chiave è che, quando u è affine a tratti, l'hessiano di u è una matrice di misure concentrate sulle linee di frattura di ∇u e che quindi J^1 è proprio la variazione totale dell'hessiano. L'altro ingrediente fondamentale della dimostrazione è il teorema del rango 1. Infatti esso ci dice che, per ogni u che soddisfa l'equazione eikonale, $[\mathrm{d}D^2u/\mathrm{d}|D^2u|]$ (la derivata di Radon Nikodym di Hu rispetto alla sua variazione totale) è una matrice di rango al più 1 in ogni punto, da cui concludiamo che $|D^2u| = |\Delta u|$.
Riassumiamo nel seguente lemma l'ultima osservazione.

Lemma 4.6. *Se u è una funzione lipschitziana che soddisfa l'equazione eikonale, con $\nabla u \in BV(\Omega, \mathbf{R}^2)$, allora $|D^2u| = |\Delta u|$ come misure.*

Dim. Chiamiamo $H(x)$ la derivata di Radon Nykodim in x di D^2u rispetto alla sua variazione totale. Valgono allora le seguenti identità (ovviamente nel senso delle misure):

$$\partial_{ij}u = H_{ij}|D^2u|$$
$$\Delta u = \partial_{11}u + \partial_{22}u = \text{tr } H \ |D^2u|$$

e quindi

$$|\Delta u| = |\text{tr } H||D^2u|.$$

A questo punto scriviamo $H(x) = H_a(x) + H_s(x)$, dove la prima è la derivata della parte assolutamente continua e la seconda della parte singolare; in maniera analoga indichiamo con $\partial_{ij}^a u\mathcal{L}^2$ la parte assolutamente continua di $\partial_{ij}u$. Per quanto riguarda tale parte possiamo differenziare l'equazione eikonale usando la classica regola di derivazione composta:

$$2\partial^a_{11}u\partial_1 u + 2\partial^a_{12}\partial_2 u = 0$$
$$2\partial^a_{21}u\partial_1 u + 2\partial^a_{22}\partial_2 u = 0.$$

Riscrivendo queste due equazioni come $H_a u \cdot \nabla u = 0$ concludiamo che rank $H(x) \leq 1$ $\mathcal{L}^2$ quasi ovunque. Visto che il teorema di Alberti ci dice che $H_s u(x)$ ha rango al più 1 $|D^2_s u|$ quasi ovunque, concludiamo che rank $H(x) \leq 1$ per $|D^2 u|$ q.o. x. Concludiamo che $|\mathrm{tr}\ H| = |H| = 1$ e quindi che

$$|\Delta u| = |\mathrm{tr}\ H| d|D^2 u| = |D^2 u|.$$

□

Per concludere la dimostrazione di (a) abbiamo bisogno del seguente lemma.

LEMMA 4.7. *Sia u come nel lemma precedente, con in più le condizioni $u \geq 0$ in Ω e $u \equiv 0$ su $\partial\Omega$, dove Ω è un aperto limitato con bordo lipschitziano. Allora*

$$(-\Delta u)(\Omega) = \int_\Omega -d\Delta u \geq \mathcal{H}^1(\partial\Omega).$$

Se u coincide con la funzione dist $(\cdot, \partial\Omega)$ in un intorno di $\partial\Omega$ allora vale l'uguaglianza.

Dim. Se u fosse regolare potremmo integrare per parti e ottenere:

$$\int_\Omega (-\Delta u) d\mathcal{L}^2 = \int_\Omega (-\nabla \cdot (\nabla u)) d\mathcal{L}^2 = \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \nu d\mathcal{H}^1 \geq \mathcal{H}^1(\partial\Omega)$$

e nell'ultimo passaggio varrebbe l'uguaglianza se e solo se $\partial u/\partial\nu = 1$, nel qual caso concluderemmo che u coincide con la funzione distanza in un intorno di $\partial\Omega$.
Vediamo come affrontare il caso generale.

Passo 1 $\forall \alpha \geq 0$ poniamo

$$E_\alpha = \{x \in \Omega | u(x) \geq \alpha\}.$$

Osserviamo che che la famiglia E_α è formata da insiemi chiusi ed è crescente in α; inoltre $\cup_{\alpha>0} E_\alpha = \Omega$. Possiamo allora scrivere

$$\int_\Omega -d\Delta u = \lim_{\alpha\to 0} \int_{E_\alpha} -d\Delta u$$

o anche

$$\int_\Omega -d\Delta u = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^\epsilon d\alpha \int_{E_\alpha} -d\Delta u.$$

Passo 2 Vogliamo dimostrare che, per ϵ sufficientemente piccolo, vale l'identità

$$\int_0^\epsilon d\alpha \int_{E_\alpha} -d\Delta u = \mathcal{L}^2(\Omega \backslash E_\epsilon).$$

Sia $\psi \in C^2(\Omega)$ con gradiente limitato. Poichè u è lipschitziana, la formula di coarea ci dà

$$\int_{\Omega\setminus E_\epsilon} \nabla\psi\cdot\nabla u = \int_0^\epsilon d\alpha \int_{\partial E_\alpha} \nabla\psi\cdot\frac{\nabla u}{|\nabla u|}d\mathcal{H}^1 \tag{2.1}$$

(notiamo che i ∂E_α sono proprio gli insiemi di livello di u).
Visto che $|\nabla u| = 1$ $\mathcal{L}^2$ quasi ovunque, per $\mathcal{L}^1$ q.o. α si ha

$$|\nabla u(x)| = 1 \text{ per } \mathcal{H}^1 \text{ q.o. } x\in\partial E_\alpha$$

e, sempre trascurando un insieme a misura nulla di α, possiamo supporre che i ∂E_α siano insiemi a perimetro finito. Chiamiamo χ_{E_α} la funzione caratteristica di E_α e scriviamo

$$\int_{\partial E_\alpha} \nabla\psi\cdot\frac{\nabla u}{|\nabla u|}d\mathcal{H}^1 = \int_\Omega \nabla\psi\cdot d\nabla\chi_{E_\alpha} = \int_{E_\alpha}(-\Delta\psi)d\mathcal{L}^2,$$

dove l'ultima uguaglianza è stata ottenuta integrando per parti. Tenendo presente la 2.1 otteniamo

$$\int_{\Omega\setminus E_\epsilon} \nabla\psi\cdot\nabla u d\mathcal{L}^2 = \int_0^\epsilon d\alpha\int_{E_\alpha} -\Delta\psi d\mathcal{L}^2. \tag{2.2}$$

Pur non potendo porre $\psi = u$, possiamo però regolarizzare la u e ottenere l'uguaglianza 2.2 con $\psi = u$. Infatti, regolarizzando per convoluzione (ed estraendo sottosuccessioni) possiamo trovare una successione $(\psi_j)\subset C^2(\Omega)$, tale che

$(a)\ \lim_{j\to\infty}\int_\Omega |\nabla\psi_j - \nabla u| d\mathcal{L}^2 = 0$

$(b) \nabla\psi_j \to \nabla u$ quasi ovunque

$(c)\ \sup_{j\geq 1}\sup_\Omega |\nabla\psi_j| < \infty$

$(d)\ \lim_{j\to\infty}\int_\Omega |\Delta\psi_j| d\mathcal{L}^2 = \int_\Omega d|\Delta u|$

$(e) \Delta\psi_j\mathcal{L}^2 \to \Delta u,\quad |\Delta\psi_j|\mathcal{L}^2 \to |\Delta u|$ debolmente come misure.

A patto di scartare un insieme numerabile di α avremo che

$$|\Delta u|(\partial E_\alpha) = 0$$

e dalla proposizione 2.3 del capitolo 2 deduciamo che

$$\lim_{j\to\infty}\int_{E_\alpha}(-\Delta\psi_j)d\mathcal{L}^2 = \int_{E_\alpha} -d\Delta u. \tag{2.3}$$

Inoltre abbiamo anche

$$\lim_{j\to\infty}\int_{\Omega\setminus E_\epsilon}(\nabla\psi_j\cdot\nabla u)d\mathcal{L}^2 = \int_{\Omega\setminus E_\epsilon}|\nabla u|^2 d\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(\Omega\setminus E_\epsilon).$$

Visto che

$$\sup_{\alpha,j}\int_{E_\alpha}|\Delta\psi_j|d\mathcal{L}^2$$

è finito, possiamo applicare il teorema di convergenza dominata per ottenere che

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}\int_0^\epsilon\int_{E_\alpha}(-\Delta\psi_j)d\mathcal{L}^2 &= \int_0^\epsilon d\alpha \lim_{j\to\infty}\int_{E_\alpha}(-\Delta\psi_j)d\mathcal{L}^2\\ &= \int_0^\epsilon d\alpha\int_{E_\alpha}-d\Delta u.\end{aligned}$$

A questo punto, tenendo presente la 2.2, concludiamo

$$\int_0^\epsilon d\alpha\int_{E_\alpha}-d\Delta u = \lim_{j\to\infty}\int_{\Omega\setminus E_\epsilon}\nabla\psi_j\cdot\nabla u d\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}^2(\Omega\setminus E_\epsilon). \tag{2.4}$$

Passo 3. Visto che u è lipschitziana di costante 1 in Ω, l'insieme $\Omega\setminus E_\epsilon$ contiene

$$F_\epsilon = \{x\in\Omega|\text{dist }(x,\partial\Omega)<\epsilon\}.$$

Visto che $\partial\Omega$ è lipschitziano, abbiamo

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mathcal{L}^2(F_\epsilon)}{\epsilon} = \mathcal{H}^1(\partial\Omega).$$

Dai passi 1 e 2 abbiamo allora che

$$\int_\Omega -d\Delta u = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mathcal{L}^2(\Omega\setminus E_\epsilon)}{\epsilon} \geq \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\mathcal{L}^2(F_\epsilon)}{\epsilon} = \mathcal{H}^1(\partial\Omega).$$

Concludiamo la dimostrazione osservando che, qualora u fosse la funzione distanza in un intorno di $\partial\Omega$, allora $F_\epsilon = \Omega\setminus E_\epsilon$ definitivamente e quindi sopra varrebbe l'uguaglianza.

□

TEOREMA 4.8. *Sia Ω un aperto limitato convesso. Denotiamo con $\mathcal{A}^+$ le funzioni u lipschitziane su Ω tali che*

(a) u soddisfa l'equazione eikonale;

(b) ∇u è a variazione limitata e D^2u non ha parte né assolutamente continua né parte cantoriana;

(c) $u|_{\partial\Omega} = 0$ e $u|_\Omega \geq 0$.

Allora J^1 assume minimo su $\mathcal{A}^+$ unicamente in $\varphi_0(x) = dist\ (x,\partial\Omega)$.

Dim. Chiaramente, se $u\in\mathcal{A}+$, allora $J^1(u) = \|D^2u\|$. Dai lemmi precedenti sappiamo che

$$\|D^2u\| = \|\Delta u\| \geq \int_\Omega -d\Delta u \geq \mathcal{H}^1(\partial\Omega).$$

Supponiamo che per una certa u valga

$$\|\Delta u\| = \int_\Omega -d\Delta u.$$

Ne deduciamo che $-\Delta u$ è una misura positiva. Ma allora, visto il primo lemma che abbiamo dimostrato, la derivata di Radon-Nykodim di D^2u rispetto

alla sua variazione totale è una matrice semidefinita positiva. Ciò implica che la funzione u è concava e, visto che la funzione u soddisfa l'equazione eikonale, essa non può che coincidere con φ_0.
Dal lemma precedente sappiamo che per φ_0 vale anche l'ultima uguaglianza e questo conclude la dimostrazione. $\square$

3. Un controesempio con Ω non convesso

Vedremo ora un esempio di dominio limitato semplicemente connesso ma non convesso in cui la funzione distanza non è minimo per J^1. Poniamo

$$D_l = \{(x_1, x_2) | |x_2| < l, 0 < x_1 < 2l\}$$
$$D = \{(x_1, x_2) | |x_2| < \frac{1}{2}, -1 < x_1 < 0\}$$

e sia Ω_l la parte interna di $\overline{D} \cup \overline{D_l}$; inoltre assumeremo sempre che $l > 1/2$. Ovviamente Ω_l è limitato, semplicemente connesso, ma non convesso.
Consideriamo ora le seguenti tre soluzioni dell'equazione eikonale:

$$\varphi_0(x) = \text{dist } (x, \partial\Omega_l)$$
$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -\text{dist } (x, \partial D) & \text{per } x \in \overline{D} \\ \text{dist } (x, \partial D_l) & \text{per } x \in \overline{D_l} \end{cases}$$
$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \text{dist } (x, \partial D) & \text{per } x \in \overline{D} \\ \text{dist } (x, \partial D_l) & \text{per } x \in \overline{D_l} \end{cases}$$

L'insieme dei punti di discontinuità di $\nabla\varphi_1$ è dato da

$$L_1 = \{x_2 = l - x_1, 0 < x_1 < 2l\}$$
$$L_2 = \{x_2 = x_1 - l, 0 < x_1 < 2l\}$$
$$L_3 = \{x_2 = -1/2 - x_1, -1 < x_1 < 0\}$$
$$L_4 = \{x_2 = 1/2 + x_1, -1 < x_1 < 0\}$$

e l'ampiezza dei salti è ovunque $\sqrt{2}$. Per facilitare calcoli futuri, decomponiamo $J_{\nabla\varphi_1}$ in

$$\begin{array}{ll} \Sigma_1^+ = L_3 \cap R_1 & \Sigma_1^- = L_4 \cap R_1 \\ \Sigma_2^+ = L_1 \cap R_3 & \Sigma_2^- = L_2 \cap R_3 \\ \Sigma_1^+ = L_2 \cap R_5 & \Sigma_3^- = L_1 \cap R_5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} S_1^+ = L_4 \cap R_2 & S_1^- = L_3 \cap R_2 \\ S_2^+ = L_1 \cap R_4 & S_2^- = L_2 \cap R_4 \end{array}$$

dove

$$\begin{array}{ll} R_1 = \{-1 < x_1 < -1/2\} & R_2 = \{-1/2 < x < 0\} \\ R_3 = \{0 < x_1 < l - 1/2\} & R_4 = \{-1/2 < x_1 < l\} \\ R_5 = \{l < x_1 < 2l\} & \end{array}$$

(vedere figura). $J_{\nabla\varphi_2}$ è ovviamente composto da $J_{\nabla\varphi_1} \cup C$, dove $C = \{x_1 = 0, |x_2| < 1/2\}$ (e su C il modulo della differenza tra le tracce è 2). Infine, le linee di salto di $\nabla\varphi_0$ sono

$$\Sigma_i^+ \cup \Sigma_i^- \qquad \text{per } i = 1, 2, 3$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \{x_2 = 0\} \cap R_2 \\
\Gamma_2 &= \{x_2 = 0\} \cap (R_3 \cup R_4) \\
\Gamma^+ &= \{x_1^2 + (x_2 - 1/2)^2 = (l - x_2)^2, x_2 > 0\} \cap R_4 \\
\Gamma^- &= \{x_1^2 + (x_2 + 1/2)^2 = (l + x_2)^2, x_2 < 0\} \cap R_4
\end{aligned}$$

(vedere figura 2).

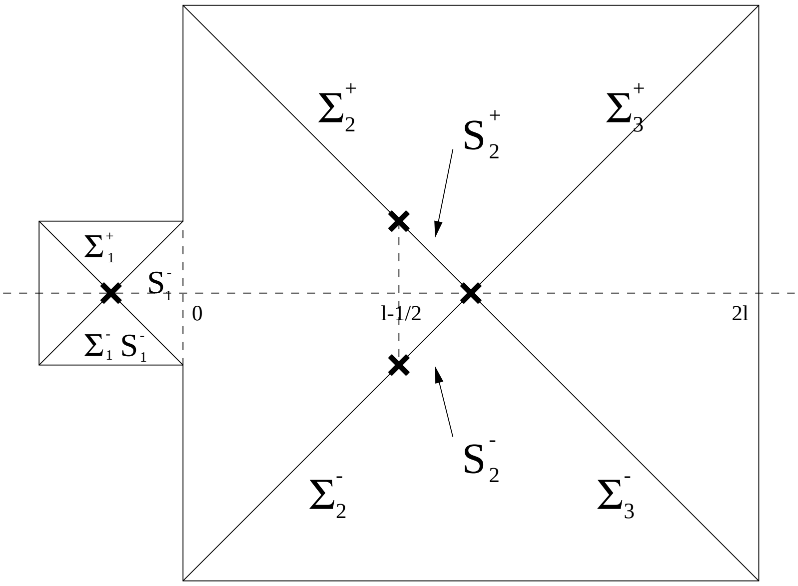


Fig. 2

Per comodità di notazione indicheremo con $J^\beta(\varphi, B)$ l'integrale

$$\int_{J_{\nabla\varphi} \cap B} |\nabla\varphi + -\nabla\varphi^-|^\beta d\mathcal{H}^1$$

e continueremo a scrivere $J^\beta(\varphi)$ quando $B = \Omega$.
Vogliamo quindi calcolare le differenze $J^\beta(\varphi_0) - J^\beta(\varphi_1)$ e $J^\beta(\varphi_0) - J^\beta(\varphi_2)$. Vista la simmetria delle funzioni rispetto all'asse x_1, ci limiteremo a calcolare l'energia sulle linee di salto che si trovano nel semipiano $\{x_2 \geq 0\}$. E' semplice vedere che $J^\beta(\varphi_0, \Sigma_i^+) = J^\beta(\varphi_1, \Sigma_i^+)$ e che $J^\beta(\varphi_2) - J^\beta(\varphi_1) = J^\beta(\varphi_2, C) = 2^\beta$.

PROPOSIZIONE 4.9. 1. *$J^\beta(\varphi_0, \Gamma_1) = 2^{\beta-1}$;*

2. *per $\beta > 1$*

$$\lim_{l\to\infty} J^\beta(\varphi_0, \Gamma_2) = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + 1/4)^{\beta/2}} \geq \frac{1}{\beta - 1} 2^{\beta-1};$$

3. *per $\beta \leq 1$ $J^\beta(\varphi_0, \Gamma_2) = +\infty$;*

4. $J^\beta(\varphi_0, \Gamma^+)$ *tende a* $2^{(\beta-1)/2}$ *per* l *che tende a* ∞*;*

5. $J^\beta(\varphi_1, S_i^+) = 2^{(\beta-1)/2}$.

Dim. (1) Ovviamente su Γ_1 $|[\nabla\varphi_0]_-^+| = 2$ e, visto che la lunghezza di Γ_1 è $1/2$, la tesi segue facilmente.

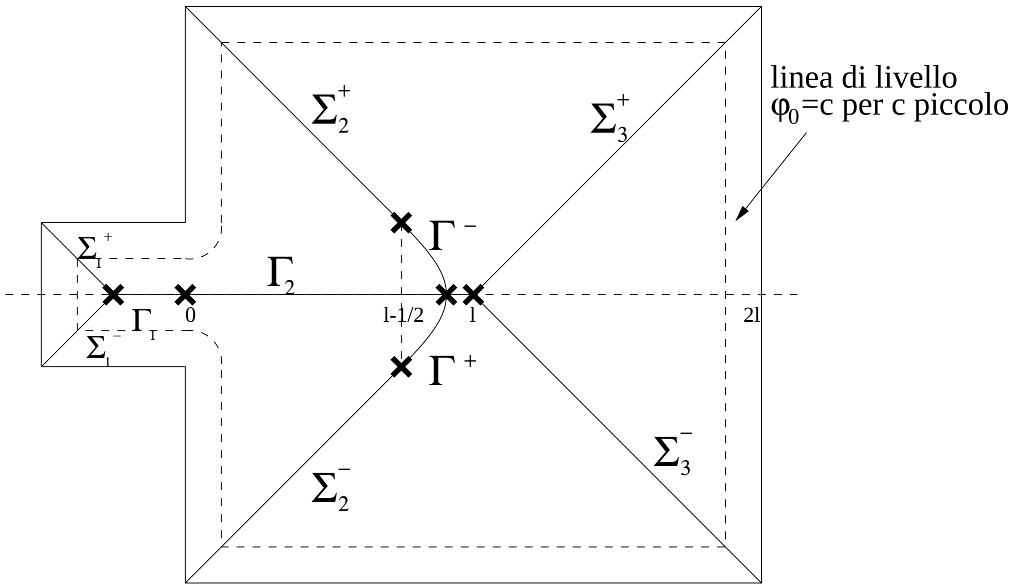


Fig. 3

$(2), (3)$ Le curve di livello di φ_0 (vedere Fig 3) nel semipiano $\{x_2 \geq 0\}$ e nelle vicinanze dei punti di Γ_2 sono archi di cerchi centrati in $(0, 1/2)$. Quindi, la componente normale a Γ_2 di $\nabla\varphi_0^+$ è

$$\frac{1}{2(x^2 + 1/4)^{1/2}}.$$

Perciò

$$J^\beta(\varphi_0, \Gamma_2) = \int_0^l \frac{dx}{(x^2+1/4)^{\beta/2}} \geq \int_0^l \frac{dx}{(x+1/2)^\beta} = \frac{1}{\beta-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{1-\beta}\Bigg|_l^0$$

e facendo tendere l a ∞ segue la tesi.

(4) Ricordiamo che Γ^+ è dato dai punti che sono equidistanti da $(0, 1/2)$ e dalla linea $x_2 = l$ e quindi Γ^+ è una parabola data da

$$(2l-1)x_2 = -x_1^2 + l^2 - 1/4,$$

che per comodità di notazione scriveremo come

$$x_2 = y(x_1) = -\frac{x_1^2 - l^2 + 1/4}{2l-1};$$

inoltre, da un lato di Γ^+ le linee di livello sono parallele a $x_2 = l$ e quindi $\nabla\varphi_0^+ = (0,1)$. Abbiamo allora che il salto è:

$$2|\nabla\varphi_0^+ \cdot \nu(x)|$$

dove $\nu(x)$ è la normale a Γ^+, ovvero

$$\frac{1}{(1+y'(x_1)^2)^{1/2}}(-y'(x_1),1).$$

Concludiamo che il salto è

$$\frac{2}{(y'(x_1)^2+1)^{1/2}}$$

A questo punto, tenendo presente che il punto di intersezione tra Γ^+ e l'asse x_1 avviene per $x_1 = (l^2-1/4)^{1/2}$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} J^\beta \quad &= \int_{\Gamma^+} \left(\frac{2}{((y')^2+1)^{1/2}}\right)^\beta d\mathcal{H}^1 \\ &= \int_l -1/2(l^2-1/4)^{1/2} \left(\frac{2}{((y')^2+1)^{1/2}}\right)^\beta ((y')^2+1)dx. \end{aligned}$$

Osserviamo che

$$y'(x_1)^2+1 = \left(\frac{-2x_1}{2l-1}\right)^2 + 1$$

e visto che per noi x è compreso tra $l-1/2$ e l, tale espressione tende a 2 per $x_1 \to \infty$. Inoltre

$$(l^2-1/4)^{1/2} - (l-1/2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(l^2-1/4)^{1/2}+2l}$$

che tende a $1/2$ per $l \to \infty$. Da ciò concludiamo la tesi.

(4) Visto che il salto su S_i^+ è $\sqrt{2}$ e la lunghezza è $1/\sqrt{2}$, l'affermazione è banale.

$\square$

Proposizione 4.10. 1. *$\lim_{l\to\infty}(J^\beta(\varphi_0) - J^\beta(\varphi_1)) = \infty$ per $0 < \beta \le 1$;*

2. *$\lim_{l\to\infty}(J^\beta(\varphi_0) - J^\beta(\varphi_2)) = \infty$ per $0 < \beta \le 1$;*

3. *$\lim_{l\to\infty}(J^\beta(\varphi_0) - J^\beta(\varphi_1)) > 0$ per $\beta > 1$;*

4. *$\lim_{l\to\infty}(J^\beta(\varphi_0) - J^\beta(\varphi_2)) = \infty$ per $1 < \beta < \beta_0$, dove $\beta_0 > 4/3$.*

Dim. Applicando la proposizione precedente troviamo

$$T = \lim_{l\to\infty}(J^\beta(\varphi_0) - J^\beta(\varphi_1)) = 2^{\beta-1} - 2\cdot 2^{(\beta-1)/2} + \lim_{l\to\infty} J^\beta(\varphi_0, \Gamma_2).$$

Se $\beta \le 1$ l'ultimo limite tende a ∞ e quindi segue la (1). Inoltre, visto che $J^\beta(\varphi_2) - J^\beta(\varphi_1) = 2^\beta$, segue anche la (2).

Se $\beta > 1$, applicando la (3) della proposizione precedente, troviamo

$$\lim_{l\to\infty} J^\beta(\varphi_0, \Gamma_2) \geq \frac{1}{\beta - 1} 2^{\beta-1}$$

e quindi

$$T \geq 2 \cdot 2^{(\beta-1)/2} \left[2^{(\beta-3)/2} \frac{\beta}{\beta - 1} - 1 \right].$$

L'espressione dentro parentesi quadre assume minimo per β_1 che risolve

$$-\frac{1}{\beta_1 - 1} + \frac{1}{2}(\log 2)\beta_1 = 0$$

e si vede facilmente che tale minimo è strettamente positivo. Ciò dimostra la (3) e con la stessa stima si può verificare anche la (4). $\square$

4. La rappresentazione di J^3

Abbiamo visto che i funzionali J^β hanno una semplice generalizzazione nello spazio delle funzioni u il cui gradiente è una funzione a variazione limitata. Viste le buone proprietà di tali funzioni si potrebbe pensare di attaccare il problema dell'esistenza del minimo (chiaramente con condizioni al contorno) usando il metodo diretto del calcolo delle variazioni. Perciò una delle prime domande che ci si può porre è: rispetto a quale topologia J^β è semicontinuo inferiormente?

Aviles e Giga in [**10**], sfruttando dei campi vettoriali introdotti da Jin e Kohn in [**18**] e [**19**], hanno trovato una rappresentazione di J^3 con cui dimostrano la semicontinuità per la convergenza L^1 dei gradienti. Come vedremo nel prossimo capitolo, tale rappresentazione, opportunamente riformulata ed estesa, sarà uno degli ingredienti fondamentali per individuare uno spazio di funzioni in cui estendere naturalmente J^3 e applicare il metodo diretto del calcolo delle variazioni. In questo paragrafo seguiremo la dimostrazione originale, mentre nel paragrafo successivo risponderemo affermativamente a una congettura avanzata in [**10**] mostrando che per $\beta > 3$ non c'è semicontinuità nello stesso contesto.

D'ora in poi lavoreremo sempre con funzioni $u \in \mathcal{A}$ (ovvero con funzioni che soddisfano l'equazione eikonale e che hanno gradiente BV) mentre con ξ e η intenderemo sempre una coppia di vettori ortonormali di $\mathbf{R}^2$. In realtà i campi vettoriali di cui parleremo sono stati introdotti da Jin e Kohn più in generale per funzioni lispchitziane che non soddisfano necessariamente l'equazione eikonale: essi permettono (come vedremo nei prossimi capitoli) di dare una stima dal basso per il $\Gamma-\liminf$ degli F_ϵ nel caso $\beta = 3$. Tuttavia, visto che nei prossimi capitoli inseriremo tali campi in un contesto più ampio e ne discuteremo alcune sorprendenti proprietà, preferiamo rimandare la loro definizione più generale al momento in cui ne faremo uso e illustrare qui solo il caso particolare in cui u soddisfa l'equazione eikonale.

DEFINIZIONE 4.11. Data $u \in \mathcal{A}$ e (ξ, η) coppia di vettori ortonormali di $\mathbf{R}^2$ chiamiamo $\Sigma_{\xi\eta}u$ il campo vettoriale

$$\frac{2}{3}(u_\xi^3\xi - u_\eta^3\eta).$$

Si può verificare facilmente che, qualora ∇u fosse regolare (ad esempio $W^{1,1}$), tali campi hanno divergenza nulla. Infatti, potendo applicare la formula classica di derivazione delle funzioni composte, varrebbero le identità

$$u_{\xi\xi}u_\xi + u_{\eta\xi}u_\eta = 0$$
$$u_{\xi\eta}u_\xi + u_{\eta\eta}u_\eta = 0$$

(ottenute derivando l'equazione eikonale) e potremmo anche scrivere

$$\nabla \cdot \Sigma_{\xi\eta}u = \frac{2}{3}(\partial_\xi(u_\xi^3) - \partial_\eta(u_\eta^3)) = 2u_{\xi\xi}u_\xi^2 - 2u_{\eta\eta}u_\eta^2.$$

Combinando le tre uguaglianze otteniamo

$$\nabla \cdot \Sigma_{\xi\eta}u = -2u_{\eta\xi}u_\eta u_\xi + 2u_{\xi\eta}u_\xi u_\eta = 0.$$

La situazione è invece ben diversa nel caso in cui u è affine a tratti (e quindi D^2u è formata solo dalla parte di salto). Chiariamo il discorso con il seguente lemma.

LEMMA 4.12. *Fissati ξ e η, $6|\nabla \cdot \Sigma_{\xi\eta}u| \leq |[\nabla u]_-^+|^3\mathcal{H}^1 \llcorner J_{\nabla u}$ come misure.*

Dim. Dovendo calcolare derivate di funzioni composte, alla base di questa dimostrazione troviamo ovviamente la regola di Vol'pert. Tanto per cominciare essa ci dice che l'espressione al primo membro dell'uguaglianza è BV (l'elevamento alla terza potenza non è certo una funzione lipschitziana in $\mathbf{R}$; tuttavia lo è la sua restrizione a un qualsiasi sottoinsieme compatto di $\mathbf{R}$ e u_ξ e u_η hanno proprio $[-1,1]$ come codominio essenziale, visto che u soddisfa l'equazione eikonale). In secondo luogo sappiamo di poter calcolare $(\nabla \cdot \Sigma_{\xi\eta}u)\llcorner(\Omega\backslash J_{\nabla u})$ nella maniera usuale (regola di Vol'pert) per la parte assolutamente continua e per la parte cantoriana e quindi (visti i calcoli di sopra) concludiamo che

$$(\nabla \cdot \Sigma_{\xi\eta}u)\llcorner(\Omega\backslash J_{\nabla u}) = 0.$$

Resta ora da vedere cosa succede su $J_{\nabla u}$. Abbiamo

$$\int_{A\cap J_{\nabla u}} d|\nabla \cdot \Sigma_{\xi\eta u}u| = \frac{2}{3}\int_{A\cap J_{\nabla u}} |((u_\xi^+)^3 - (u_\xi^-)^3)\nu_\xi - ((u_\eta^+)^3 - (u_\eta^-)^3)\nu_\eta| d\mathcal{H}^1$$

$$\int_{A\cap J_{\nabla u}} |[\nabla u]_-^+|^3 d\mathcal{H}^1 = \int_{A\cap J_{\nabla u}} ((u_\xi^+ - u_\eta^-)^2 + (u_\eta^+ - u_\eta^-)^2)^{3/2} d\mathcal{H}^1$$

e rimane quindi da mostrare che

$$4|P| = 4|((u_\xi^+)^3 - (u_\xi^-)^3)\nu_\xi - ((u_\eta^+)^3 - (u_\eta^-)^3)\nu_\eta| \leq ((u_\xi^+ - u_\eta^-)^2 + (u_\eta^+ - u_\eta^-)^2)^{3/2}.$$

A questo punto non si tratta che di fare un noioso calcolo trigonometrico che riportiamo per completezza. Poniamo

$$\nu = (\cos\sigma, \sin\sigma) \qquad \nabla u^+ = (\cos(\sigma + \theta), \sin(\sigma + \theta))$$

in modo tale che

$$\begin{aligned}\nabla u^- &= (\cos(\sigma-\pi-\theta), \sin(\sigma-\pi-\theta)) \\ &= (-\cos(\sigma-\theta), -\sin(\sigma-\theta)).\end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned}(u_\xi^+)^3 &= \cos^3(\sigma+\theta) = \cos(\sigma+\theta)(1-\sin^2(\sigma+\theta)) \\ &= \frac{1}{2}\cos(\sigma+\theta)(1+\cos 2(\sigma+\theta))\end{aligned}$$

$$(u_\xi^-)^3 = -\cos^3(\sigma-\theta) = -\frac{1}{2}\cos(\sigma-\theta)(1+\cos 2(\sigma-\theta)).$$

$$\begin{aligned}(u_\xi^+)^3-(u_\xi^-)^3 &= \frac{1}{2}\{\cos(\sigma+\theta)+\cos(\sigma-\theta) \\ &\quad +\cos(\sigma+\theta)\cos 2(\sigma+\theta)+\cos(\sigma-\theta)\cos 2(\sigma-\theta)\} \\ &= \frac{1}{2}\{2\cos\sigma\cos\theta+\frac{1}{2}\{\cos 3(\sigma+\theta)+\cos(-\sigma-\theta))\} \\ &\quad +\frac{1}{2}\{\cos 3(\sigma-\theta))+\cos(\theta-\sigma))\}\} \\ &= \frac{1}{2}\{3\cos\sigma\cos\theta+\cos 3\sigma\cos 3\theta\}\end{aligned}$$

e con analoghi calcoli

$$(u_\eta^+)^3-(u_\eta^-)^3 = \frac{1}{2}\{3\sin\sigma\cos\theta-\sin 3\sigma\cos 3\theta\}.$$

Quindi

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2}\{3\cos\sigma\cos\sigma\cos\theta-3\sin\sigma\sin\sigma\cos\theta \\ &\quad +\cos 3\sigma\cos 3\theta\cos\sigma-(-\sin 3\sigma\cos 3\theta)\sin\sigma\} \\ &= \frac{1}{2}\{3\cos\theta\cos 2\sigma+\cos 3\theta\cos(3\sigma-\sigma)\} \\ &= \frac{1}{2}\cos 2\sigma\{3\cos\theta+\cos 3\theta\} = \frac{4}{2}\cos 2\sigma\cos^3\theta,\end{aligned}$$

e, poiché

$$\begin{aligned}|[\nabla u_-^+|^2 &= (\cos(\sigma+\theta)+\cos(\sigma-\theta))^2+(\sin(\sigma+\theta+\sin(\sigma-\theta))^2 \\ &= (2\cos\sigma\cos\theta)^2+(2\sin\sigma\cos\theta)^2 = 4\cos^2\theta,\end{aligned}$$

abbiamo

$$3|P| = 8|\cos 2\sigma||\cos^3\theta| \leq 8|\cos^3\theta| = |[\nabla u]_-^+|^3.$$

$\square$

Notiamo che i calcoli appena fatti ci danno una preziosa informazione in più rispetto all'enunciato iniziale: se scriviamo

$$6|\nabla\cdot\Sigma_{\xi\eta}u| = g_{\xi\eta}\mathcal{H}^1 J_{\nabla u},$$

per $\mathcal{H}^1$ q.o. $x \in J_{\nabla u}$ esistono ξ e η tali che $g_{\xi\eta}(x) = |[\nabla u]_-^+(x)|^3$.

LEMMA 4.13. *Fissati ξ e η e posto che $\sigma : J_{\nabla u} \to [-\pi, \pi)$ soddisfi*

$$\begin{aligned}\nu(x)\cdot\xi &= \cos(\sigma(x))\\ \nu(x)\cdot\eta &= \sin(\sigma(x)),\end{aligned}$$

vale

$$6|\nabla\cdot\Sigma_{\xi\eta}u|(A) = \int_{J_{\nabla u}\cap A} |\cos 2\sigma||[\nabla u]^+_-|^3 d\mathcal{H}^1.$$

A questo punto possiamo dimostrare il teorema di rappresentazione.

TEOREMA 4.14. **(Teorema di rappresentazione)**
Chiamiamo decomposizione *di Ω il dato di*

- *un numero finito di sottoinsiemi di Borel $\{A_i\}_{i=1}^m$ che sono disgiunti a due a due e ricoprono Ω;*

- *una coppia di vettori ortonormali ξ_i e η_i associata a ciascun insieme A_i.*

Se indichiamo con Λ la famiglia di tutte le decomposizioni di Ω abbiamo

$$J^3(u) = 6\sup\left\{\sum_{i=1}^m |\nabla\cdot\Sigma_{\xi_i\eta_i}|u(A_i) \ \textit{con}\ \{A_i,\xi_i,\eta_i\}\in\Lambda\right\}.$$

Dim. Visti i lemmi precedenti è sufficiente dimostrare che, per ogni $\delta > 0$, esiste una decomposizione per cui

$$\int_{J_{\nabla u}} |[\nabla u^+_-|^3 d\mathcal{H}^1 \le \sum_{i=1}^m \int_{J_{\nabla u}\cap A_i} |[\nabla u^+_-|^3|\cos 2\sigma_i| d\mathcal{H}^1 + \delta,$$

dove le σ_i sono le funzioni definite nel lemma 4.13 rispetto a ξ_i e η_i.
$J_{\nabla u}$ è rettificabile e quindi esiste una quantità numerabile S_i di sottoinsiemi compatti di varietà C^1 e un insieme S_0 $\mathcal{H}^1$ trascurabile tali che

$$J_{\nabla u} = \bigcup_{i=0}^\infty S_i.$$

Per ogni $1 > \omega > 0$ e per ogni l possiamo trovare una decomposizione $\{A_i^l, \xi_i^l, \eta_i^l\}$ di S_l tale che gli angoli σ_i^l siano compresi nell'intervallo $(-\omega,\omega)$. Avremo allora, usando il lemma 4.13,

$$\begin{aligned}\int_{S_l} |[\nabla u]^+_-|^3 d\mathcal{H}^1 \quad &\le \frac{6}{\cos 2\omega}\sigma_i|\nabla\cdot\Sigma_{\xi_i^l,\eta_i^l}u|(S_i^l)\\ &\le |\nabla\cdot\Sigma_{\xi_i^l,\eta_i^l}u|(S_i^l) + \left(\frac{1}{\cos 2\omega}-1\right)\int_{S_l}|[\nabla u]^+_-|^3 d\mathcal{H}^1.\end{aligned}$$

Ora, prendiamo N tale che

$$\int_{J_{\nabla u}} |[\nabla u]^+_-|^3 d\mathcal{H}^1 \le \sum_{l=1}^N \int_{S_l} |[\nabla u]^+_-|^3 d\mathcal{H}^1 + \delta/2,$$

e consideriamo la decomposizione di Ω data dall'unione di $\{\Omega\backslash(\cup_{l=1}^N S_l), e_1, e_2\}$ con le varie decomposizioni di S_l per l da 1 a N (e_1, e_2 sono i vettori della base canonica, ma in realtà qualsiasi scelta va bene per i nostri scopi). Allora dalle disuguaglianze precedenti si ottiene:

$$\begin{aligned}\int_{J_{\nabla u}} |[\nabla u]_-^+|^3 d\mathcal{H}^1 \quad &\leq \sum_{l=1}^N \sum_i |\nabla \cdot \Sigma_{\xi_i^l,\eta_i^l} u|(S_i^l) \\ &+ \left(\frac{1}{\cos 2\omega} - 1\right) \int_{J_{\nabla u}} |[\nabla u]_-^+|^3 d\mathcal{H}^1 + \delta/2.\end{aligned}$$

Scegliendo ω sufficientemente piccolo si ottiene la disuguaglianza cercata. $\square$

Supponiamo a questo punto che una successione $(u_n) \subset \mathcal{A}$ converga in $W^{1,1}$ a una $u \in \mathcal{A}$. Allora le matrici hessiane $D^2 u_n$ convergeranno debolmente, nel senso delle misure, a $D^2 u$ e la stessa cosa si potrà dire per $\nabla \cdot \Sigma_{\xi\eta} u_n$. In particolare, quindi, per ogni insieme aperto $B \subset \Omega$ potremo scrivere

$$\liminf_{n\to\infty} |\nabla \cdot \Sigma_{\xi\eta} u_n|(B) \geq |\nabla \cdot \Sigma_{\xi\eta} u|(B).$$

Dal teorema di rappresentazione deduciamo allora immediatamente

$$\liminf_{n\to\infty} J^3(u_n) \geq J^3(u).$$

5. Un controesempio alla semicontinuità per $\beta > 3$

Come al solito Ω denoterà un aperto limitato e $\mathcal{A}$ la classe delle funzioni u che soddisfano l'equazione eikonale in Ω e il cui gradiente è una funzione a variazione limitata. Vedremo che, per ogni $p < \infty$, J^β non è semicontinuo per la convergenza $W^{1,p}$ forte se $\beta > 3$.
Più in dettaglio, fissato β, costruiremo una successione $(v_n) \subset \mathcal{A}$ che converge a uno spigolo $v \in \mathcal{A}$ in $W^{1,p}$ per ogni p e tale che

$$\liminf_{n\to\infty} J^\beta(v_n) < J^\beta(v).$$

Il "mattone" essenziale con cui costruiremo la successione (v_n) verrà descritto nel seguente lemma.

LEMMA 4.15. *Sia $R = (-a,a) \times (-b,b)$ un rettangolo e assumiamo l'esistenza di $v \in \mathcal{A}(R)$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$ tali che:*

(a) la traccia $\nabla^* v$ di ∇v su ∂R soddisfi

$$\begin{aligned}\nabla^* v(x_1, b) &= \nabla^* v(x_1, -b) \qquad \textit{per } \mathcal{L}^1 \textit{ q.o. } x \in (-a,a) \\ \nabla^* v(\pm a, x_2) &= (\pm\cos\varphi, \sin\varphi) \qquad \textit{per } \mathcal{L}^1 \textit{ q.o. } x \in (-a,a);\end{aligned}$$

(b)

$$\int_{J_{\nabla v}} |[\nabla v]_-^+|^\beta d\mathcal{H}^1 < 2b(2\cos\varphi)^\beta.$$

Allora J^β non è semicontinuo in nessun aperto Ω rispetto alla topologia $W^{1,p}$ forte.

Dim. Senza perdere di generalità, per riscalamenti e traslazioni, possiamo supporre che Ω contenga il rettangolo $(-a,a)\times(-b,b)$; chiamiamo u lo spigolo che ha la retta $\{x_1=0\}$ come frattura e tale che $\nabla u=(\cos\varphi,\sin\varphi)$ su $\{x_1>0\}$ e $\nabla u=(-\cos\varphi,-\sin\varphi)$ su $\{x_1<0\}$. Per ogni intero $h\geq 1$ dividiamo la striscia $(-a/h,a/h)\times(-b,b)$ in h rettangoli R_i con centri $(0,y_i)$ e lunghezze dei lati $2a/h, 2b/h$. Allora possiamo definire:

$$u_h(x_1,x_2):=\begin{cases} u(x_1,x_2) & \text{se } |x_1|\geq a/h;\\ v(hx_1,hx_2+y_i) & \text{se } (x_1,x_2)\in R_i\end{cases} .$$

Dalle condizioni sulla traccia di ∇v, il gradiente di u_h non ha salti su ∂R_i, quindi $J^\beta(u_h)-J^\beta(u)$ è dato da:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{h}\left\{\int_{R_i\cap J_{\nabla u}}|\nabla^+u-\nabla^-u|^\beta\,d\mathcal{H}^1-\int_{R_i\cap J_{\nabla u}}|\nabla^+u-\nabla^-u|^\beta\,d\mathcal{H}^1\right\}\\ =\;&\int_R|\nabla^+v-\nabla^-v|^\beta\,\mathcal{H}^1-2b(2\cos\varphi)^\beta<0\ .\end{aligned}$$

Poiché (u_h) converge a u abbiamo trovato il controesempio che cercavamo. $\square$

Mostriamo ora che il mattone v del lemma precedente esiste.

Proposizione 4.16. *J^β non è semicontinuo su $\mathcal{A}$ rispetto alla topologia $W^{1,p}$ forte.*

Dim. Consideriamo la funzione $\overline{v}(x_1,x_2)=-|x_1|$ sulla striscia $\mathbf{R}\times(-b,b)$. Fissiamo un angolo $\theta\in(0,\pi/4)$ e costruiamo la funzione $v_\theta:\mathbf{R}\times(-b,b)\to\mathbf{R}$ in maniera tale che il gradiente sia discontinuo lungo gli spigoli nella figura qui sotto e coincida con $\overline{v}$ fuori dal quadrilatero $ABCD$.

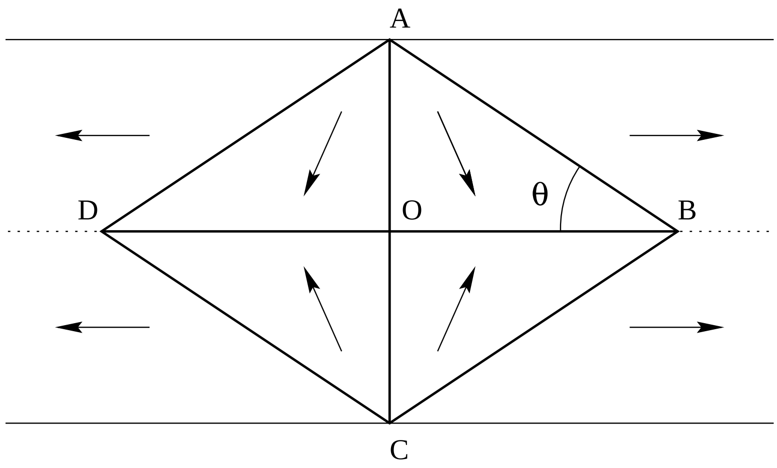


Fig. 4 Il gradiente della funzione v

Poniamo $F(\theta) = J^\beta(v_\theta)$: il nostro scopo sarà studiare la funzione F nell'intervallo $(0, \pi/4)$ per dimostrare che in qualche θ_0

$$J^\beta(v_{\theta_0}) = F(\theta_0) < 2^{\beta+1}b = J^\beta(\overline{u}).$$

A questo punto, ponendo $\varphi = 0$, $v = v_{\theta_0}$ e R uguale al rettangolo $ABCD$ nel lemma di sopra, concluderemmo che J^β non è semicontinuo.
Tenendo presente le proprietà di simmetria del gradiente di v_{θ_0} lungo le "fratture" (osserviamo che v_θ è localmente uno spigolo in tutti i punti distinti da A, B, C, D e O), otteniamo:

$$\begin{aligned} F(\theta) &= b\left[2^{\beta+2}(\sin\theta)^{\beta-1} + 2^{\beta+1}(\cos 2\theta)^\beta + 2^{2\beta+1}(\sin\theta)^{\beta-1}(\cos\theta)^{\beta+1}\right] \\ &= 2^{\beta+1}b\left[2(\sin\theta)^{\beta-1} + (\cos 2\theta)^\beta + 2^\beta(\sin\theta)^{\beta-1}(\cos\theta)^{\beta+1}\right] \quad . \end{aligned}$$

Abbiamo immediatamente che

$$\lim_{\theta \downarrow 0} F(\theta) = 2^{\beta+1}b = J_\beta(\widetilde{u}) \quad .$$

Siamo interessati al valore di F nei pressi dello 0: effettuiamo allora il cambio di variabile $t = \sin\theta$ e dividiamo per la costante $2^{\beta+1}b$, riducendoci a studiare la funzione

$$\begin{aligned} f(t) := \frac{F(\arcsin t)}{2^{\beta+1}b} &= 2t^{\beta-1} + (1-2t^2)^\beta + 2^\beta t^{\beta-1}(1-t^2)^{\frac{\beta+1}{2}} \\ &= 2t^{2+\varepsilon}(1 + 2^{3+\varepsilon}t^{2+\varepsilon}(1-t^2)^{2+\frac{\varepsilon}{2}}) + (1-2t^2)^{3+\varepsilon} \quad , \end{aligned}$$

(dove abbiamo messo $3+\varepsilon$ al posto di β). Vogliamo mostrare che esiste un $t_0 > 0$ tale che $f(t_0) < f(0) = 1$.
E' semplice vedere che le prime due derivate del primo termine dell'ultima riga in $t = 0$ scompaiono a causa del fattore $t^{2+\epsilon}$. Quindi dobbiamo considerare solo il termine $g(t) = (1-2t^2)^{3+\epsilon}$, le cui derivate sono

$$\begin{aligned} g'(t) &= -4t(3+\varepsilon)(1-2t^2)^{2+\varepsilon} \\ g''(t) &= -4(3+\varepsilon)(1-2t^2)^{2+\varepsilon} + 16t^2(3+\varepsilon)(2+\varepsilon)(1-2t^2)^{1+\varepsilon} \quad . \end{aligned}$$

Perciò $f'(0) = g'(0) = 0$ e $f''(0) = g''(0) = -4(3+\varepsilon) < 0$. Ne segue che la funzione f è strettamente decrescente in un intervallo destro di $t = 0$ e quindi esiste un $t_0 > 0$ sufficientemente piccolo tale che $f(t_0) < f(0) = 1$. $\square$

CAPITOLO 5

Lo spazio di Aviles e Giga

Tenendo conto del teorema di rappresentazione, se i sottolivelli di J^3 fossero compatti in $\mathcal{A}$ per la topologia $W^{1,1}$ forte (o $W^{1,p}$ per qualche $p < \infty$), potremmo usare il metodo diretto del calcolo delle variazioni per concludere che esiste il minimo del problema

$$\begin{aligned} &\int_\Omega |[\nabla u]_-^+|^3 d\mathcal{H}^1 \\ &u|_{\partial\Omega} \equiv 0 \\ &u|_\Omega \geq 0. \end{aligned}$$

In uno dei paragrafi di questo capitolo mostreremo che esistono successioni $(u_n) \subset \mathcal{A}$ per cui la variazione totale di $D^2 u_n$ tende ad ∞ mentre $(J^3(u_n))$ è limitata. Ciò nonostante vedremo che nel nostro esempio (u_n) converge lo stesso in L^1 a una u per la quale, anche se il gradiente non sarà in BV_{loc}, tuttavia le divergenze dei campi $\Sigma_{\xi\eta}$ sono ugualmente delle misure a variazione limitata.
Ciò ci ha suggerito la definizione di un nuovo spazio, che abbiamo chiamato spazio di Aviles e Giga, che in sostanza è la classe più ampia di funzioni su cui si può estendere J^β usando il teorema 4.14. In questo spazio di funzioni, con la topologia di sottospazio di $W^{1,3}$, J^β continua ad essere semicontinuo inferiormente; in più, però, guadagneremo la compattezza dei sottolivelli e saremo in grado di concludere l'esistenza del minimo.
Prima di vedere in dettaglio le dimostrazioni di questi fatti sarà utile introdurre i campi vettoriali di Jin e Kohn (più generali di quelli di Aviles e Giga) e rivedere più in generale il teorema di rappresentazione alla luce di alcune interessanti proprietà di tali campi. Da una parte esse ci saranno utili per dimostrare il teorema di compattezza, dall'altra l'uso dei campi di Jin e Kohn ci permetterà di inserire la stima dal basso per l'energia (dimostrata in [**19**]) in un contesto più ampio. Vedremo poi più in seguito come ciò ci dia la disuguaglianza del $\Gamma-\liminf$ e un teorema di equicoercività; in particolare la prima dimostrerà l'ottimalità delle successioni introdotte nel capitolo precedente per approssimare gli spigoli. Perciò il quadro che verrà delinenadosi $-$ disuguaglianza del $\Gamma-\liminf$, disuguaglianza del $\Gamma-\limsup$ per gli spigoli (e quindi anche per tutte le funzioni affini a tratti, come vedremo più avanti), equicoercività $-$ porterà a pensare che sia proprio questo il contesto giusto in cui utilizzare la Γ-convergenza.

1. Definizione di $AG(\Omega)$ e $AG_e(\Omega)$

Innanzitutto ridefiniamo i campi $\Sigma_{\xi\eta}u$ nel caso più generale di una $u \in W^{1,3}(\Omega)$, togliendo il vincolo eikonale.

DEFINIZIONE 5.1. Se $u \in W^{1,3}(\Omega)$ e ξ e η è una coppia di vettori ortonormale di $\mathbf{R}^2$ (per comodità chiederemo ogni volta che ξ e η formino una base ortonormale orientata come la base canonica (e_1,e_2)), allora

$$\Sigma_{\xi\eta}u = u_\xi \left(1 - u_\eta^2 - \frac{1}{3}u_\xi^2\right) \xi - u_\eta \left(1 - u_\xi^2 - \frac{1}{3}u_\eta^2\right) \eta.$$

Nel seguito, quando non ci saranno ambiguità, ometteremo la u nella scrittura $\Sigma_{\xi\eta}u$

Si vede facilmente che, imponendo $|\nabla u| = 1$ quasi ovunque, i nuovi campi coincidono con quelli del capitolo precedente. A questo punto, tenendo presente il teorema di rappresentazione e gli scopi delineati all'inizio del capitolo, siamo pronti per definire lo spazio di Aviles e Giga.

DEFINIZIONE 5.2. Diciamo che $u \in W^{1,3}(\Omega)$ appartiene a $AG(\Omega)$ se, per ogni coppia (ξ,η) di vettori ortonormali, $\operatorname{div}\Sigma_{\xi\eta}$ è (nel senso delle distribuzioni) una misura su Ω.
Indichiamo con $AG_e(\Omega)$ l'insieme delle $u \in AG(\Omega)$ che soddisfano l'equazione eikonale.

Nel seguito del paragrafo indicheremo con e_1 e e_2 i due vettori della base canonica e con ϵ_1 e ϵ_2 i due vettori che si ottengono ruotando di $\pi/4$ in senso antiorario e_1 e e_2. Perciò, possiamo scrivere

$$\epsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2 \qquad \epsilon_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}e_2.$$

Inoltre per comodità di notazione scriveremo (α,β) al posto di $\alpha e_1 + \beta e_2$.
Nel prossimo lemma enunceremo una proprietà cruciale e curiosa dei $\Sigma_{\xi\eta}$, che si ottiene da calcoli trigonometrici elementari.

TEOREMA 5.3. *Per ogni $u \in W^{1,3}(\Omega)$, se*

$$\xi = (\cos\theta, \sin\theta)$$
$$\eta = (-\sin\theta, \cos\theta),$$

allora

$$\Sigma_{\xi\eta} = \cos 2\theta \Sigma_{e_1e_2} + \sin 2\theta \Sigma_{\epsilon_1\epsilon_2}.$$

Vediamo le conseguenze più immediate di tale proprietà. Innanzitutto per verificare che $u \in AG(\Omega)$ basterà accertarsi che due qualsiasi dei campi di vettori $\Sigma_{\xi,\eta}$ abbiano le divergenze rappresentabili da misure. In secondo luogo, il teorema di rappresentazione ci dice che, per $u \in AG_e(\Omega)$, possiamo scrivere J^3 come l'estremo superiore, sulle decomposizioni $\{\Omega_i, \xi_i, \eta_i\}$ di Borel di Ω, di espressioni del tipo

$$\sum_i |\operatorname{div}(\cos 2\theta_i \Sigma_{e_1e_2} + \sin 2\theta_i \Sigma_{\epsilon_1\epsilon_2})|(\Omega_i),$$

dove θ_i è l'angolo formato da ξ_i e e_1. Possiamo riscrivere tale espressione come

$$\sum_i |\nu_i \cdot (\operatorname{div}\Sigma_{e_1 e_2}, \operatorname{div}\Sigma_{\epsilon_1\epsilon_2})|(\Omega_i)$$

e prendere il sup sulle partizioni finite di Borel di Ω e su tutte le possibili scelte dei ν_i sulla circonferenza unitaria. Non è difficile riconoscere in quest'ultima formulazione la variazione totale su Ω del vettore di misure $(\operatorname{div}\Sigma_{e_1e_2}, \operatorname{div}\Sigma_{\epsilon_1\epsilon_2})$.
Tirando le somme, se chiamiamo I l'applicazione

$$I : AG(\Omega) \ni u \to Iu = (I^1 u, I^2 u) = (\operatorname{div}\Sigma_{e_1e_2}, \operatorname{div}\Sigma_{\epsilon_1\epsilon_2}) \in [\mathcal{M}(\Omega)]^2,$$

dal teorema precedente e da quello di rappresentazione deduciamo il seguente

TEOREMA 5.4. *$|I|$ coincide con J^3 su $AG_e(\Omega)$. Inoltre, se $(u_h) \subset AG(\Omega)$ converge nella topologia forte di $W^{1,3}(\Omega)$ a u e la succesione $(|Iu_h|)$ è limitata, allora $u \in AG(\Omega)$, le misure $I(u_h)$ convergono *debolmente a Iu e*

$$|Iu| \leq \liminf_{h\to\infty} |Iu_h|.$$

Dim. Visto che i campi $\Sigma_{\xi\eta}u_h$ convergono in L^1 a $\Sigma_{\xi\eta}u$, le loro divergenze convergono alla divergenza di $\Sigma_{\xi\eta}$ nel senso delle distribuzioni. Visto che la successione $(|I^1 u_h|)$ è limitata, $I^1 u$ è una misura alla quale le $I^1(u_h)$ convergono *debolmente. In maniera analoga si dimostra la stessa cosa anche per I^2.

□

Concludiamo quindi che J^3 è semicontinuo su $AG_e(\Omega)$.
Vediamo ora di calcolare $|Iu|$ nel caso in cui ∇u sia una funzione a variazione limitata. Innanzitutto scriveremo i campi vettoriali in gioco nelle coordinate canoniche:

$$\Sigma_{e_1e_2}u = \left(u_1(1 - u_2^2 - \frac{1}{3}u_1^2), -u_2(1 - u_1^2 - \frac{1}{3}u_2^2)\right) \tag{1.1}$$

$$\Sigma_{\epsilon_1\epsilon_2}u = \left(u_2 - \frac{2}{3}u_2^3, u_1 - \frac{2}{3}u_1^3\right). \tag{1.2}$$

A questo punto, se ∇u appartenesse a uno spazio di Sobolev, le divergenze puntuali dei campi sarebbero

$$\begin{aligned} I^1 u \quad &= u_{11}(1 - u_2^2 - \frac{1}{3}u_1^2) + u_1(-2u_{21}u_2 - \frac{2}{3}u_{11}u_1) \\ &-u_{22}(1 - u_1^2 - \frac{1}{3}u_2^2) + u_1(-2u_{12}u_1 - \frac{2}{3}u_{22}u_2) \\ &= (1 - |\nabla u|^2)(u_{11} - u_{22}) \\ I^2 u \quad &= u_{21} - 2u_{21}u_2^2 + u_{12} - 2u_{12}u_1^2 = 2(1 - |\nabla u|^2)u_{12}. \end{aligned}$$

Assumendo un' integrabilità sufficiente per le derivate seconde tali espressioni diventano integrabili e quindi rappresentano le divergenze dei campi anche in senso distribuzionale.

Proposizione 5.5. *Se* $u \in W^{2,4/3}_{loc}(\Omega)$ *allora*

$$I^1 u = (1 - |\nabla u|^2)(u_{11} - u_{22})\mathcal{L}^2$$
$$I^2 u = 2(1 - |\nabla u|^2)u_{12}\mathcal{L}^2$$
$$|Iu| = |1 - |\nabla u|^2||\lambda_1 - \lambda_2|\mathcal{L}^2,$$

dove λ_1 *e* λ_2 *sono gli autovalori di* $\nabla^2 u$.

Dim. Il teorema di immersione di Sobolev implica che $|\nabla u| \in L^4_{loc}(\Omega)$ e quindi, dalla disuguaglianza di Hölder, segue che $(1 - |\nabla u|^2)|\nabla^2 u|$ è localmente integrabile in Ω. Tramite regolarizzazione (e visti i calcoli fatti sopra) si conclude che

$$\operatorname{div} \Sigma_{e_1 e_2} u = (1 - |\nabla u|^2)(u_{11} - u_{22})\mathcal{L}^2$$
$$\operatorname{div} \Sigma_{\epsilon_1 \epsilon_2} u = 2(1 - |\nabla u|^2)u_{12}\mathcal{L}^2.$$

L'ultima uguaglianza che dobbiamo dimostrare segue dalle prime due e dal fatto che, se A e una matrice simmetrica 2×2, allora il modulo della differenza tra i due autovalori si può anche esprimere con

$$\sqrt{|A_{11} - A_{22}|^2 + 4|A_{12}|^2}\ .$$

□

Analizziamo ora il caso in cui ∇u è BV. Per comodità di notazione indicheremo con $D^2 u$ la matrice delle misure che rappresenta l'hessiano e con $\nabla^2 u$ la derivata di Radon-Nykodim della parte assolutamente continua di $D^2 u$ rispetto alla sua variazione totale. Con $D^2 u = D^2_a u + D^2_j u + D^2_c u$ indicheremo la solita decomposizione.
Chiaramente dovremo applicare la regola di Vol'pert. Perciò, per quanto riguarda la parte cantoriana e quella assolutamente continua, otteniamo che

$$I^1 u \llcorner (\Omega \setminus J_{\nabla u}) = \left(1 - |\widetilde{\nabla u}|^2\right)(D_{11} u - D_{22} u) \llcorner (\Omega \setminus J_{\nabla u}) \tag{1.3}$$

$$I^2 u \llcorner (\Omega \setminus J_{\nabla u}) = 2\left(1 - |\widetilde{\nabla u}|^2\right) D_{12} u \llcorner (\Omega \setminus J_{\nabla u})\ , \tag{1.4}$$

dove con $\widetilde{\nabla u}$ intendiamo il rappresentante preciso di ∇u.
Per quanto riguarda la parte di salto avremo che

$$\operatorname{div}\Sigma_{\xi\eta} u \llcorner J_{\nabla u} = \left\{ [\langle \Sigma_{\xi\eta} u, \xi \rangle]^+_- \langle \xi, \nu_{\nabla u} \rangle - [\langle \Sigma_{\xi\eta} u, \eta \rangle]^+_- \langle \eta, \nu_{\nabla u} \rangle \right\} \mathcal{H}^1 \llcorner J_{\nabla u} \tag{1.5}$$

(per ogni base ortonormale (ξ, η)).
Dobbiamo quindi calcolare, per $a, b \in \mathbf{R}^2$ e per $\nu \in \mathbf{S}^1$, l'estremo superiore di

$$\begin{aligned} &\left[a_\xi \left(1 - a_\eta^2 - \frac{1}{3}a_\xi^2\right) - b_\xi \left(1 - b_\eta^2 - \frac{1}{3}b_\xi^2\right)\right] \langle \xi, \nu \rangle \\ - &\left[a_\eta \left(1 - a_\xi^2 - \frac{1}{3}a_\eta^2\right) - b_\eta \left(1 - b_\xi^2 - \frac{1}{3}b_\eta^2\right)\right] \langle \eta, \nu \rangle \end{aligned} \tag{1.6}$$

al variare di tutte le basi ortonormali (ξ,η). Chiamiamo $\Psi(a,b,\nu)$ l'estremo superiore in questione e poniamo

$$\Phi(a,b) := \Psi\left(a, b, \frac{b-a}{|b-a|}\right) \qquad \forall a,\, b \in \mathbf{R}^2,\ a \neq b\ .$$

LEMMA 5.6. *Sia Φ definita come sopra. Allora*

$$\Phi(a,b) = \frac{1}{6}|a-b|\left|6-3|a|^2-3|b|^2+|a-b|^2\right|\ .$$

Dim. Prima di tutto calcoliamo l'espressione in 1.6 con $\nu = (a-b)/|a-b|$ nel seguente sistema cartesiano: il vettore unitario e_1, che ci definisce l'asse x_1, è perpendicolare a $a-b$ e tale che $\langle a, e_1\rangle \geq 0$; il vettore unitario e_2 è, ovviamente, perpendicolare a e_1 e tale che $\langle a, e_2\rangle \geq 0$. In questo sistema di coordinate abbiamo che

$$a = (r,s)\ ,\quad b = (r,-t)\ ,\quad \xi = (x,y)\ ,\quad \eta = (-y,x)\ ,$$

dove r, s, t, x, y sono dei numeri reali che soddisfano $r \geq 0, s \geq 0, t \geq 0$ e $x^2+y^2 = 1$. A questo punto sostituiamo $a_\xi = rx+sy$, $b_\xi = rx-ty$, $a_\eta = -ry+sx$, $b_\eta = -ry-tx$, $\langle\xi,\nu\rangle = y$ e $\langle\eta,\nu\rangle = x$ in (1.6) per ottenere:

$$\begin{aligned}
& y\Bigg[(rx+sy)\left(1-(sx-ry)^2-\frac{(rx+sy)^2}{3}\right)\\
- \quad & (rx-ty)\left(1-(-tx-ry)^2-\frac{(rx-ty)^2}{3}\right)\Bigg]\\
- \quad & \Bigg[x(sx-ry)\left(1-(rx+sy)^2-\frac{(sx-ry)^2}{3}\right)\\
+ \quad & (tx+ry)\left(1-(rx-ty)^2-\frac{(tx+ry)^2}{3}\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

e una serie di calcoli elementari danno

$$(y^2-x^2)\frac{s+t}{3}\left(3-\frac{3}{2}(r^2+s^2)-\frac{3}{2}(r^2+t^2)+\frac{(s+t)^2}{2}\right)\ .$$

Allora è ovvio che il massimo di tale espressione è

$$\frac{1}{6}|s+t|\left|6-3(r^2+s^2)-3(r^2+t^2)+(s+t)^2\right|\ .$$

Infine osserviamo che $s+t = |a-b|$, $r^2+s^2 = |a|^2$ e $r^2+t^2 = |b|^2$; ciò completa la dimostrazione. $\square$

Concludiamo allora con un nuovo teorema di rappresentazione.

TEOREMA 5.7. **(Nuovo teorema di rappresentazione)**
Sia $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ tale che ∇u è a variazione limitata. Allora $u \in AG(\Omega)$ e

$$\begin{aligned}
|Iu| \quad = \quad & \left|1-|\nabla u|^2\right| |\lambda_1-\lambda_2|\mathcal{L}^2 + \left|1-|\widetilde{\nabla u}|^2\right| |D_c^2 u|\\
+ \quad & \frac{1}{6}|\nabla^+ u-\nabla^- u|\left|6-3|\nabla^+ u|^2-3|\nabla^- u|^2+|\nabla^+ u-\nabla^- u|^2\right| \mathcal{H}^1 \llcorner J_{\nabla u}\ ,
\end{aligned}$$

dove i λ_i sono gli autovalori di $\nabla^2 u$.

Dim. Sia $D^2u = H|D^2u|$ e poniamo $A = \Omega\setminus J_{\nabla u}$ (osserviamo che $H(x) = \nabla^2(x)/|\nabla^2 u(x)|$ per $\mathcal{L}^2$ q.o. x, mentre, per il teorema rank one, il rango di $H(x)$ è 1 per $|D^2_c u|$ q.o. x). Da 1.3 e 1.4 abbiamo

$$I^1 u \llcorner A = \left(1 - |\widetilde{\nabla u}|^2\right)(H_{11} - H_{22})|D^2u| \llcorner A$$
$$I^2 u \llcorner A = 2\left(1 - |\widetilde{\nabla u}|^2\right) H_{12}|D^2u| \llcorner A$$

e quindi, ragionando come in 5.5,

$$|Iu| \llcorner A = \left|1 - |\widetilde{\nabla u}|^2\right| |\mu_1 - \mu_2||D^2u| \llcorner A$$

dove μ_1, μ_2 sono gli autovalori di H; poiché la norma di H è 1, la differenza $|\mu_1 - \mu_2|$ è 1 $|D^2_c u|$-q.o. in Ω ed è $|\lambda_1 - \lambda_2|/|\nabla^2 u|$ $\mathcal{L}^2$-q.o. in Ω; visto che

$$|D^2u| \llcorner A = |\nabla^2 u|\mathcal{L}^2 + |D^2_c u|$$

la rappresentazione di $|Iu| \llcorner A$ segue facilmente.
Per completare la dimostrazione, osserviamo che 1.5 dà

$$|Iu| \llcorner J_{\nabla u} = \Psi(\nabla^+ u, \nabla^- u, \nu_{\nabla u})\mathcal{H}^1 \llcorner J_{\nabla u}$$

visto che $|Iu| = \sup|\operatorname{div}\Sigma_{\xi\eta} u|$ su tutte le basi ortonormali (ξ, η) di $\mathbf{R}^2$. Visto che Ψ è dispari rispetto a ν e che $\nu_{\nabla u}$ è parallelo a $[\nabla u]^+_-$, dai calcoli del lemma precedente segue la rappresentazione di $|Iu|(J_{\nabla u})$.

$\square$

2. AG contiene funzioni il cui gradiente non è BV_{loc}

Un banale corollario del teorema di rappresentazione della sezione precedente ci permette di recuperare (leggermente rafforzato) il teorema di rappresentazione del capitolo 4. D'ora in poi, per semplificare la notazione, indicheremo con $AG_e(\Omega)$ le funzioni di $AG(\Omega)$ che soddisfano l'equazione eikonale.

Teorema 5.8. *Se u soddisfa l'equazione eikonale e $\nabla u \in BV(\Omega, \mathbf{R}^2)$ allora $u \in AG_e(\Omega)$ e*

$$|Iu| = \frac{1}{6}|[\nabla u]^+_-|^3 \mathcal{H}^1 \llcorner J_{\nabla u}.$$

Non è vero il viceversa: in questa sezione esibiremo una funzione che appartiene a $AG_e(\Omega)$ per ogni aperto limitato Ω di $\mathbf{R}^2$ e tale che ∇u non appartiene a $BV_{loc}(\mathbf{R}^2)$.
Prima di tutto, per ogni intero $n \geq 1$ definiamo

$$\theta_n = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{2} \ ;$$

in secondo luogo costruiamo un rombo R_0^n i cui vertici, che chiameremo A_n,B_n,C_n e D_n, hanno le seguenti coordinate:

$$A_n = \left(-1 - \frac{1}{n}, 0\right) \quad , \qquad B_n = \left(0, \left(1 + \frac{1}{n}\right)\tan\theta_n\right)$$

$$C_n = \left(1 + \frac{1}{n}, 0\right) \quad , \qquad D_n = \left(0, -\left(1 + \frac{1}{n}\right)\tan\theta_n\right) \quad .$$

Tra R_0^n e R_0^{n+1} costruiamo i rombi R_i^n $(1 \leq i \leq 2[(n+1)/2])$ (omotetici a R_0^n) nel seguente modo (vedi Fig. 5): ponendo $m_n = \theta_n/[(n+1)/2]$, le coordinate dei vertici di R_i^n saranno

$$\begin{aligned}
A_i^n &= \left(-1 - \frac{1}{n} + i m_n, 0\right) \\
C_i^n &= \left(1 + \frac{1}{n} - i m_n, 0\right) \\
B_i^n &= \left(0, \left(1 + \frac{1}{n} - i m_n\right)\tan\theta_n\right) \\
D_i^n &= \left(0, -\left(1 + \frac{1}{n} - i m_n\right)\tan\theta_n\right).
\end{aligned}$$

A questo punto definiamo il campo vettoriale a_n.
Disegniamo R_i^k $(1 \leq k \leq n, 0 \leq i \leq 2[(n+1)/2]$ e gli assi $\{x_i = 0\}$: tali linee dividono $\mathbf{R}^2$ in un numero finito di componenti connesse. Poniamo $a_n = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})/2$ sulla componente connessa illimitata che sta nel primo quadrante e poi estendiamola a tutto $\mathbf{R}^2$ per riflessione lungo le linee disegnate (con in più la condizione che $|a_n| = 1$).
La funzione $a_n : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ è costante a tratti e simmetrica rispetto a entrambi gli assi. Vediamo quali sono i valori di a_n nelle regioni del primo quadrante; se chiamiamo φ_n l'angolo formato da a_n e l'asse x_1 abbiamo:
- $\varphi_n = \pi - 1/(k+1)$ nella zona che sta tra R_{2i}^k e R_{2i+1}^k;
- $\varphi_n = \pi - 1/k$ nella regione tra R_{2i-1}^k e R_{2i}^k;
- $\varphi_n = \pi - 1/(k+1)$ nella regione tra $R_{2[(n+1)/2]}^k$ e R_0^{k+1}.

E' semplice verificare che il campo a_n è un gradiente. Poniamo allora che u_n sia la funzione tale che $\nabla u_n = a_n$ e $u_n(0,0) = 0$. Si ha che $u_n \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbf{R}^2)$ e $|\nabla u_n| = 1$ $\mathcal{L}^2$−q.o.; quindi esiste una funzione $u \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbf{R}^2)$ tale che $u_n \to u$ in $W_{loc}^{1,p}(\mathbf{R}^2)$ per ogni $p < \infty$. Per ogni intorno U del segmento $L = \{|x_1| \leq 1, x_2 = 0\}$ abbiamo $\nabla u|_{\mathbf{R}^2 \setminus U} \equiv \nabla u_n|_{\mathbf{R}^2 \setminus U}$ definitivamente. Questo significa che $\nabla u \in BV_{loc}(\mathbf{R}^2 \setminus U, \mathbf{R}^2)$ e quindi che $u \in AG_{loc}(\mathbf{R}^2 \setminus U)$. Mostriamo che $u \in AG(U)$ per ogni aperto limitato U.
Visto che $\nabla u_n \to \nabla u$ $\mathcal{L}^2$-q.o. in $\mathbf{R}^2$, abbiamo $(\partial_\xi u_n)^3 \to (\partial_\xi u)^3$ $\mathcal{L}^2$ quasi ovunque per ogni $\xi \in \mathbf{R}^2$. Allora $\operatorname{div} \Sigma_{\xi\eta} u_n$ converge a $\operatorname{div} \Sigma_{\xi\eta} u$ nel senso delle distribuzioni per ogni base ortonormale (ξ, η) di $\mathbf{R}^2$.

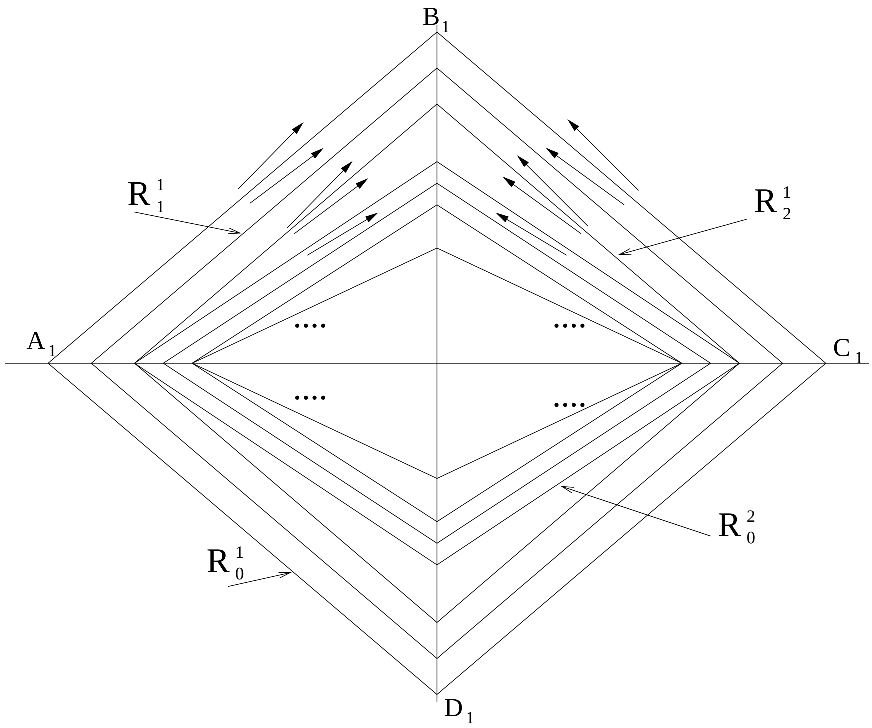


Fig. 5: il campo vettoriale $a_n/3$

Osserviamo che, per ogni coppia di vettori unitari a,b, abbiamo $|a-b| = 2|\sin(\varphi/2)|$, dove φ è l'angolo compreso tra essi. Quindi il teorema 5.8 dà

$$
\begin{aligned}
6\,|\mathrm{div}\,\Sigma_{\xi\eta}u_n|\,(U) \leq 6|Iu_n|(U) = \int_{J_{\nabla u_n}} \left|[\nabla u_n]_-^+\right|^3\, d\mathcal{H}^1 \\
\leq \quad 8\mathcal{H}^1\left(\{x_1x_2=0\}\cap U\}\right) + 8\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{2\left[\frac{k+1}{2}\right]} \mathcal{H}^1(U\cap\partial R_i^k)\sin^3\left(\frac{1}{2k(k+1)}\right)^3 \\
\leq \quad k_1 + k_2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+2}{(k(k+1))^3}
\end{aligned}
$$

dove k_1 e k_2 sono due costanti. Questo dimostra che $\mathrm{div}\,\Sigma_{\xi\eta}u$ è una misura a variazione totale limitata in U.
E' semplice dimostrare che $\nabla u \notin BV(U,\mathbf{R}^2)$ ogni volta che $U\cap L\neq\emptyset$. Infatti, se chiamiamo U_n l'insieme aperto delimitato da R_0^n, abbiamo che $\nabla u|_{U\setminus\overline{U_n}} \equiv \nabla u|_{U\setminus\overline{U_n}}$. Quindi $\nabla u \in BV(U\setminus\overline{U_n}),\mathbf{R}^2$ e

$$
\begin{aligned}
|D\nabla u|(U\setminus\overline{U}_n) = |D\nabla u_n|(U\setminus\overline{U}_n) \geq \int_{(U\setminus\overline{U}_n)\cap J_{\nabla u_n}} \left|[\nabla u_n]_-^+\right|\, d\mathcal{H}^1 \\
\geq \quad k_3\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=0}^{2\left[\frac{k+1}{2}\right]}\frac{\mathcal{H}^1(U\cap\partial R_i^k)}{k(k+1)} \quad .
\end{aligned}
$$

Visto che $U \cap L$ è non vuoto esiste una costante positiva a tale che $\mathcal{H}^1(U \cap \partial R_i^k) \geq a)$ se k è abbastanza grande. Questo implica che $\nabla u \notin BV(U, \mathbf{R}^2)$.

3. Una disuguaglianza di tipo Jensen

Per rendere più comoda la dimostrazione del teorema di compattezza ci occuperemo in questo e nel prossimo paragrafo di due lemmi che (insieme alle misure di Young e alla tecnica del blow-up) sono gli ingredienti principali della dimostrazione.

LEMMA 5.9. *Per ogni misura di probabilità μ in $[-1,1]$ abbiamo*

$$\int_I t^3\, d\mu(t) \geq \left(\int_I t\, d\mu(t)\right)^3$$

purché $\lambda = \int_I t\, d\mu(t)$ soddisfi $2\lambda^3 + 3\lambda^2 \geq 1$.

Dim. Sia λ tale che $2\lambda^3 + 3\lambda^2 \geq 1$ e chiamiamo $\mathcal{M}$ l'insieme delle misure di probabilità in I; inoltre poniamo

$$A := \left\{\mu \in \mathcal{M} : \int_I t\, d\sigma(t) = \lambda\right\} \quad .$$

Dimostreremo che il minimo di $\mu \to \int_I t^3 d\mu(t)$ su A è λ^3. Poiché se $\lambda = -1$ A è formato da un solo elemento, nel resto della dimostrazione assumeremo $\lambda > -1$. Chiamiamo A' la famiglia delle $\mu \in A$ il cui supporto è $\{-1\} \cup [0,1]$. Dimostriamo innanzitutto che l'estremo inferiore di $\mu \to \int_I t^3 d\mu(t)$ in A' è uguale all'estremo inferiore in A. Infatti, se $\mu \in A$, possiamo porre

$$\tilde{\mu} := -\int_{[-1,0)} t\, d\mu(t)\delta_{-1} + a\delta_0 + \mu \llcorner (0,1]$$

con

$$a := 1 - \mu\left((0,1]\right) + \int_{[-1,0)} t\, d\mu(t) = \mu\left([-1,0]\right) + \int_{[-1,0)} t\, d\mu(t) \geq 0 \quad .$$

Per costruzione $\tilde{\mu} \in A'$ e

$$\int_I t^3\, d(\mu - \tilde{\mu})(t) = \int_{[-1,0)} t^3\, d(\mu - \tilde{\mu})(t) = \int_{[-1,0)} (t^3 - t)\, d\mu(t) \geq 0 \quad .$$

Chiamiamo A'' il sottinsieme delle A' costituito da tutte le misure il cui supporto è $\{-1, a\}$ per qualche $a \geq 0$; l'estremo inferiore di $\mu \to \int_I t^3 d\mu(t)$ in A' è uguale all'estremo inferiore in A'. Questo perché possiamo porre

$$\tilde{\mu} := \mu \llcorner \{-1\} + \mu\left((-1,1]\right)\delta_a$$

con

$$a := \frac{1}{\mu\left((-1,1]\right)} \int_{(-1,1]} t\, d\mu(t)$$

per ottenere una misura $\tilde{\mu} \in A''$ tale che, per la disuguaglianza di Jensen,

$$\int_I t^3\, d\tilde{\mu}(t) \leq \int_I t^3\, d\mu(t).$$

Sia $\mu \in A''$ e poniamo $k = \mu(\{-1\})$; allora

$$a = \frac{\lambda + k}{1 - k}$$

e, poiché $|a| \leq 1$, otteniamo che $k \leq (1-\lambda)/2 < 1$. Quindi ci rimane solo da dimostrare che

$$F(k) := (1-k)\left(\frac{\lambda + k}{1-k}\right)^3 - k \qquad k \in [0, \frac{1-\lambda}{2}]$$

raggiunge il suo minimo per $k = 0$. In realtà calcoli elementari mostrano che F è convessa e, visto che

$$F'(0) = 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 1 \geq 0,$$

la tesi segue facilmente. $\square$

4. Decomposizione di Hodge

Il secondo ingrediente della dimostrazione del teorema di compattezza è la decomposizione di Hodge insieme con il troncamento dei gradienti. Avremmo potuto sfruttare alcuni recenti risultati contenuti in [**17**] e [**20**], ma abbiamo preferito dare una dimostrazione elementare dei teoremi di cui avremo bisogno, senza usare l'analisi di Fourier e il teorema dei moltiplicatori di Mihlin. In questo paragrafo B_1 indicherà la palla unitaria di $\mathbf{R}^2$.

Teorema 5.10. **(Decomposizione di Hodge)** *Per ogni $v \in L^1(B_1, \mathbf{R}^2)$ tale che* $\mathrm{rot}\, v$ *sia una misura finita su B_1 e per ogni $C > 1$ esiste una $\varphi \in W^{1,1}(B_1)$ tale che*

$$\int_{B_1} |v - \nabla\varphi|\, dx \leq C|\mathrm{rot}\, v|(B_1) \quad . \tag{4.1}$$

Dim. Supponiamo che v sia di classe C^∞, poniamo $u(x) = v(x) - v(0)$ e definiamo $\phi \in C^\infty(B_1)$ come

$$\phi(x) := \int_0^1 \langle u(tx), x\rangle\, dt \quad .$$

Avremo che

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x_1}(x) &= \int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(tx)tx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}(tx)tx_2 + u_1(tx)\, dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(tx)tx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}(tx)tx_2 + u_1(tx)\, dt - \int_0^1 \mathrm{rot}\, u(tx)tx_2\, dx \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt}[tu_1(tx)]\, dt - \int_0^1 \mathrm{rot}\, u(tx)tx_2\, dx = u_1(x) - \int_0^1 \mathrm{rot}\, u(tx)tx_2\, dx \quad . \end{aligned}$$

Un calcolo analogo per $\partial\phi/\partial x_2$ dimostra che

$$\begin{aligned}
\|u-\nabla\phi\|_1 &\le \int_0^1\int_{B_1} t|x||\mathrm{rot}\,u|(tx)\,dxdt = \int_0^1\int_{B_t}\frac{|y|}{t^2}|\mathrm{rot}\,u|(y)\,dy\,dt\\
&= \int_{B_1}\int_0^1 \chi_{B_t}(y)\frac{|y|}{t^2}|\mathrm{rot}\,u|(y)\,dtdy = \int_B\left(\int_{|y|}^1\frac{|y|}{t^2}\,dt\right)|\mathrm{rot}\,u|(y)\,dy\\
&= \int_{B_1}(1-|y|)|\mathrm{rot}\,u|(y)\,dy \le \int_{B_1}|\mathrm{rot}\,v|(y)\,dy \quad .
\end{aligned}$$

Quindi $\varphi(x)=\phi(x)+\langle v(0),x\rangle$ soddisfa (4.1) con $C=1$.
Nel caso generale fissiamo $\delta>0$ e $\tau>1$ tali che $\tau+2\delta\le C$ e troviamo $t\in(1,\tau]$ tale che $v_t(x)=v(x/t)$ soddisfi

$$\int_{B_1}|v_t-v|\,dx<\delta|\mathrm{rot}\,v|(B_1)$$

(notiamo che il caso $|\mathrm{rot}\,v|(B)=0$ è banale). La funzione $v_t*\rho_\epsilon$ è C^∞ in B non appena $\epsilon<t-1$; scegliamo allora $\epsilon<t-1$ sufficientemente piccolo perché valga

$$\int_{B_1}|v_t*\rho_\epsilon-v_t|\,dx<\delta|\mathrm{rot}\,v|(B_1).$$

Dalla costruzione precedente troviamo $\varphi\in C^\infty(B_1)$ tale che

$$\begin{aligned}
\int_{B_1}|v_t*\rho_\epsilon-\nabla\varphi|\,dx &\le |\mathrm{rot}\,(v_t*\rho_\epsilon)|(B_1)=|(\mathrm{rot}\,v_t)*\rho_\epsilon|(B_1)\\
&\le |\mathrm{rot}\,v_t|(B_t)=t|\mathrm{rot}\,v|(B_1)\le\tau|\mathrm{rot}\,v|(B_1) \quad .
\end{aligned}$$

Tenendo presente le scelte fatte per t e ϵ otteniamo la tesi. □

Corollario 5.11. *Esiste una costante c con le seguenti proprietà: per $v\in L^1(B_1,\mathbf{R}^2)$ tale che $\mathrm{rot}\,v$ è una misura finita in B_1 e $\lambda>0$ esiste una $\phi\in W^{1,\infty}(B_{1/3})$ e un insieme di Borel $E\subset B_{1/3}$ tali che $\|\nabla\phi\|_\infty\le c\lambda$,*

$$\mathcal{L}^2(E)\le\frac{c}{\lambda}\left[\int_{B_1}(|v|-\lambda)^+\,dx+|\mathrm{rot}\,v|(B_1)\right]$$

e

$$\int_{B_{1/3}}|v-\nabla\phi|\,dx\le c\left[|\mathrm{rot}\,v|(B_1)+\int_E|v|\,dx+\int_{B_1}(|v|-\lambda)^+\,dx\right] \quad . \tag{4.2}$$

Dim. Denoteremo con c_i alcune costanti che dipenderanno solo dalla dimensione (che in questo caso è 2). Per ogni funzione $f\in L^1(B_1)$ chiameremo Mf la sua funzione massimale locale definita da:

$$Mf(x):=\sup\left\{\frac{\int_{B_\varrho(x)}|f|\,dy}{\pi\varrho^2}:\ B_\varrho(x)\subset B_1\right\}\qquad x\in B_1 \quad .$$

Useremo la stima debole L^1

$$\mathcal{L}^2\left(\{Mf>\lambda\}\right)\le\frac{c_1}{\lambda}\int_{B_1}|f|\,dx\qquad\forall\lambda>0 \tag{4.3}$$

che è una conseguenza diretta della definizione di Mf e del teorema di ricoprimento di Besicovitch.
Sia φ la funzione data dal teorema 5.10 con $C = 2$ e poniamo

$$F := \left\{x \in B_{1/3} : \ M|\nabla\varphi|(x) \leq 3\lambda\right\} \quad .$$

Ricordiamo la stima

$$\frac{1}{\pi\varrho^2}\int_{B_\varrho(x)} \frac{|\varphi(z) - \tilde{\varphi}(x)|}{|z-x|}\,dz \leq \int_0^1 \frac{\int_{B_{t\varrho}(x)}|\nabla\varphi|}{\pi(t\varrho)^2}\,dt \leq M|\nabla\varphi|(x),$$

che vale per ogni palla $B_\varrho(x) \subset B_1$ centrata in qualche punto $x \in B_1 \setminus S_\varphi$ (vedere (2.5) e il teorema 2.3 di [**3**]). Questa stima implica che la restrizione di $\tilde{\varphi}$ a $F\backslash S_\varphi$ è una funzione lipschitziana con costante di Lipschitz minore di $c_2\lambda$; chiamiamo allora ϕ una qualsiasi estensione lipschitziana di $\tilde{\varphi}$ a tutta la palla $B_{1/3}$. Per costruzione ϕ coincide $\mathcal{L}^2$ quasi ovunque con φ in F.
Poniamo $E = B_{1/3}\backslash F$: visto che

$$M(|\nabla\varphi|) \leq \lambda + M((|v| - \lambda)^+) + M(|v - \nabla\varphi|),$$

da (4.3) deduciamo

$$\mathcal{L}^2(E) \leq \frac{c_1}{\lambda}\left[\int_{B_1} (|v| - \lambda)^+ \ dx + 2|\mathrm{rot}\, v|(B_1)\right] \quad .$$

Concludiamo dimostrando (4.2). Infatti, visto che $v = \nabla\varphi + \epsilon$ con $\|\epsilon\|_1 \leq 2|\mathrm{rot}\, v|(B_1)$, dobbiamo solo stimare la norma L^1 di $|\nabla\varphi - \nabla\phi|$ su $B_{1/3}$. Perciò, la stima

$$\begin{aligned}\int_{B_{1/3}} |\nabla\varphi - \nabla\phi|\,dx &= \int_E |\nabla\varphi - \nabla\phi|\,dx \leq \int_E |\epsilon| + |v| + c_2\lambda\,dx \\ &\leq \int_E |v| + c_2\lambda\,dx + 2|\mathrm{rot}\, v|(B_1)\end{aligned}$$

conclude la dimostrazione. □

5. Il teorema di compattezza

Terminiamo il capitolo enunciando e dimostrando il teorema di compattezza.

TEOREMA 5.12. **(Compattezza)** *Siano $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ aperto e limitato e (u_h) una successione di $AG(\Omega)$ tale che*

(i) *le variazioni totali di $|Iu_h|(\Omega)$ e $\|u_h\|_1$ sono equilimitate;*
(ii) *$|\nabla u_h| \to 1$ in $L^3(\Omega)$.*

Allora (u_h) ha una successione che converge fortemente in $W^{1,3}(\Omega)$ a $u \in AG_e(\Omega)$.

Osserviamo che da esso discende facilmente che i sottolivelli di J^3 sono compatti in $AG_e(\Omega)$. L'ultimo ingrediente tecnico di cui avremo bisogno per dimostrare il teorema è il teorema fondamentale sulle misure di Young enunciato nel secondo capitolo 2 (teorema 2.26). Proveremo innanzitutto il teorema con le ulteriori ipotesi che Ω sia la palla unitaria B_1, $|Iu_h|(B_1)$ tenda a 0 e (u_h) converga uniformemente a una funzione lineare u; da questo caso particolare otterremo quello generale con un argomento di blow-up. Useremo l'informazione che $|Iu_h|(B_1)$ è infinitesima per approssimare i campi $\Sigma_{e_1 e_2} u$ e $\Sigma_{\epsilon_1 \epsilon_2} u$ con campi che siano gradienti ruotati di $\pi/2$. Da questa approssimazione ricaveremo una formula di integrazione per parti che mostrerà che la u soddisfa l'equazione eikonale.

Proposizione 5.13. *Sia $(v_h) \subset AG(B_1)$ una successione tale che*

(a) $|\nabla v_h|$ *converge in* $L^3(B_1)$ *a* 1;
(b) $|Iv_h|(B_1) \to 0$ *per* $h \to \infty$;
(c) (v_h) *converge uniformemente in* B_1 *a una funzione lineare* $u(x) = \langle L, x\rangle$.

Allora $|L| = 1$.

Dim. A meno di rotazioni possiamo supporre che $L = (\alpha, 0)$, con $0 \leq \alpha \leq 1$. Possiamo anche supporre (a meno di estrarre sottosuccessioni) che $|\nabla v_h|$ converga a 1 $\mathcal{L}^2$-q.o. e che (∇u_h) generi una misura di Young (ν_x). Se poniamo

$$\beta(x) := \int_{\mathbf{R}^2} p_1^3 \, d\nu_x(p)$$
$$\gamma(x) := \int_{\mathbf{R}^2} p_2^3 \, d\nu_x(p)$$

l'equiintegrabilità di $|\nabla v_h|^3$ implica che v_{h1}^3 e v_{h2}^3 convergono *debolmente a β e γ in $L^\infty(B_1)$. Inoltre, da

$$\int_{B_1} \left(\int_{\mathbf{R}^2} \left|1 - |p|^2\right| \, d\nu_x(p) \right) dx = \lim_{h\to\infty} \int_{B_1} \left|1 - |\nabla v_h|^2\right| \, dx = 0,$$

segue che le misure ν_x hanno i supporti contenuti nella circonferenza unitaria per $\mathcal{L}^2$-q.o. $x \in B_1$ e quindi β e γ sono funzioni limitate.
Dividiamo il resto della dimostrazione in due passi.

Passo 1. Vogliamo dimostrare che

$$\beta(x_0)\left(\alpha - \frac{2}{3}\beta(x_0)\right) \geq \frac{1}{3} \tag{5.1}$$

per ogni punto $x_0 = (x_{01}, x_{02}) \in B_{1/3}$ di Lebesgue per β e per γ. Definiamo i campi vettoriali

$$\begin{aligned} \Psi_h(x) &:= \left(v_{h2}(1 - v_{h1}^2 - \frac{1}{3}v_{h2}^2), v_{h1}(1 - v_{h2}^2 - \frac{1}{3}v_{h1}^2)\right) \\ \Phi_h(x) &:= (v_{h1} - \frac{2}{3}v_{h1}^3, -v_{h2} + \frac{2}{3}v_{h2}^3) \ . \end{aligned}$$

Osserviamo che da calcoli elementari abbiamo che che lo jacobiano della matrice M_h che ha Ψ_h, Φ_h come colonne è

$$-\frac{2}{9}(v_{h1}^2 + v_{h2}^2)^3 + (v_{h1}^2 + v_{h2}^2)^2 - (v_{h1}^2 + v_{h2}^2)$$

e quindi $\det M_h$ converge a $-2/9$ $\mathcal{L}^2$-q.o. in B_1.

Poiché le componenti di Ψ_h sono polinomi di terzo grado nelle derivate parziali di v_h, esiste una costante λ_0 tale che $|\Psi_h| \leq \lambda_0(1+|\nabla v_h|^3)$; visto che Ψ_h è la rotazione di $\Sigma_{e_1 e_2} v_h$ di un angolo di $\pi/2$, abbiamo che

$$|\mathrm{rot}\,\Psi_h| = |\mathrm{div}\,\Sigma_{e_1 e_2} v_h| \leq |I v_h|$$

e quindi, dal Corollario 5.11 con $\lambda = 2\lambda_0$, possiamo scrivere Ψ_h in $B_{1/3}$ come $\nabla \psi_h + \epsilon_h$, dove:

- le funzioni $\psi_h \in W^{1,\infty}(B_{1/3})$ hanno $\|\nabla \psi_h\|_\infty \leq 2c\lambda_0$;
- le ϵ_h soddisfano
$$\int_{B_{1/3}} |\epsilon_h|\, dx \leq c\left[|I v_h|(B_1) + \int_{E_h} |\Psi_h|\, dx + \int_{B_1} (|\Psi_h| - \lambda)^+\, dx\right];$$
- le misure degli insiemi di Borel $E_h \subset B_{1/3}$ possono essere stimate con
$$\frac{c}{\lambda}\left[\int_{B_1} (|\Psi_h| - \lambda)^+\, dx + |I v_h|(B_1)\right] .$$

Poiché $|\Psi_h| - \lambda \leq \lambda_0(|\nabla v_h|^3 - 1)$, la convergenza forte in L^1 di $|\nabla u_h|^3$ a 1 implica che $\mathcal{L}^2(E_h)$ tende a 0 per h che tende a ∞ e che anche

$$\int_{B_1} (|\Psi_h| - \lambda)^+\, dx$$

è infinitesimo. Ciò, insieme all'equiintegrabilità delle $|\Psi_h|$ (che discende dall'equiintegrabilità di $|\nabla u_h|^3$), dà che $\int_{B_{1/3}} |\epsilon_h| dx$ tende a 0 per $h \to \infty$. Visto che le Ψ_h convergono debolmente in $L^1(B_1, \mathbf{R}^2)$ a $(2\gamma/3, 2\beta/3)$, se normalizziamo le ψ_h imponendo $\psi_h(x_0) = 0$ otteniamo che ψ_h converge uniformemente in $\overline{B}_{1/3}$ a una funzione ψ_∞ che vale 0 in x_0 e ha come gradiente $\frac{2}{3}(\gamma, \beta)$. La nostra scelta di x_0 dà

$$\psi_\infty(x) = \frac{2}{3}\gamma(x_0)(x_1 - x_{01}) + \frac{2}{3}\beta(x_0)(x_2 - x_{02}) + o(|x - x_0|) .$$

Con un argomentazione simile, dal fatto che Φ_h è la rotazione di angolo $\pi/2$ di $\Sigma_{\epsilon_1 \epsilon_2} v_h$, possiamo scrivere Φ_h in $B_{1/3}$ come $\nabla \phi_h + \eta_h$ con $\eta_h \to 0$ in $L^1(B_1, \mathbf{R}^2)$ e (ϕ_h) equilimitate in $W^{1,\infty}(B_1)$. Poiché Φ_h converge in $L^1(B_1, \mathbf{R}^2)$ a $(\alpha - 2\beta/3, 2\gamma/3)$ per $h \to \infty$, la stessa cosa è vera per $\nabla \phi_h$ in $B_{1/3}$. Possiamo anche supporre (a meno di estrarre sottosuccessioni) che ϵ_h e η_h convergano a 0 $\mathcal{L}^2$-q.o. in $B_{1/3}$.

Consideriamo ora la funzione (a valori in $\mathbf{R}^2$) data da $\varphi_h = (\psi_h, \phi_h)$; questa famiglia di applicazioni è limitata in $W^{1,\infty}(B_{1/3}, \mathbf{R}^2)$ e

$$\lim_{h\to\infty} \det \nabla \varphi_h(x) = -\frac{2}{9} \qquad \text{per } \mathcal{L}^2\text{-q.o. } x \in B_{1/3} . \tag{5.2}$$

Sia $\varrho \in (0,1/3]$ e poniamo $g(x) = (\varrho - r)^+$, con $r = |x - x_0|$; possiamo passare al limite per $h \to \infty$ nell'identità

$$\begin{aligned} -\int_{B_\varrho(x_0)} g \det \nabla\varphi_h \, dx &= -\int_{B_\varrho(x_0)} g \operatorname{div}(\psi_h \phi_{h2}, -\psi_h \phi_{h1}) \\ &= \int_{B_\varrho(x_0)} \psi_h (g_1 \phi_{h2} - g_2 \phi_{h1}) \, dx \\ &= -\int_{B_\varrho(x_0)} \frac{\psi_h}{r} \left((x_1 - x_{01})\phi_{h2} - (x_2 - x_{02})\phi_{h1}\right) \, dx \end{aligned}$$

e usare (5.2) e la nostra scelta di x_0 per ottenere

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\int_{B_\varrho(x_0)} (\varrho - r) \, dx &= \beta(x_0)\left(\alpha(x_0) - \frac{2}{3}\beta(x_0)\right)\int_{B_\varrho(x_0)} \frac{x_2^2 - x_{02}^2}{r} \, dx \\ &+ \left(\alpha - \frac{2}{3}\beta(x_0)\right)\frac{2\gamma(x_0)}{3}\int_{B_{1/3}} \frac{(x_1 - x_{01})(x_2 - x_{02}}{r} \, dx \\ &- \frac{2}{3}\gamma^2(x_0)\int_{B_\varrho(x_0)} \frac{x_1^2 - x_{01}^2}{r} \, dx + o(\varrho^3) \ . \end{aligned}$$

Visto che

$$\int_{B_\varrho(x_0)} (\varrho - r) \, dx = \int_{B_\varrho(x_0)} \frac{x_2^2 - x_{02}^2}{r} \, dx = \frac{\pi \varrho^3}{3}$$

e

$$\int_{B_\varrho(x_0)} \frac{(x_1 - x_{01})(x_2 - x_{02})}{r} \, dx = 0$$

la disuguaglianza 5.1 segue banalmente.

Passo 2. Dimostriamo ora che $\alpha = 1$. Fissiamo x_0 in 5.1 e poniamo $\beta = \beta(x_0)$. In primo luogo osserviamo che $\alpha \geq 2\sqrt{2}/3$, altrimenti il polinomio

$$P(\beta) := -\frac{2}{3}\beta^2 + \alpha\beta$$

sarebbe sempre strettamente minore di $1/3$.
Visto che $|\nabla u_h|$ converge in $L^3(B_1)$ a 1, il supporto della misura ν è contenuto in ∂B_1, quindi la misura $\mu(B) = \nu(B \times \mathbf{R})$ ha il supporto in $[-1,1]$. Usando le uguaglianze

$$\beta = \int_{\mathbf{R}} t^3 \, d\mu(t) \ , \qquad \alpha = \int_{\mathbf{R}} t \, d\mu(t)$$

e la disuguaglianza

$$3\alpha^2 + 2\alpha^3 \geq 3 \cdot \frac{8}{9} > 1$$

dal Lemma 5.9 concludiamo che $\beta \geq \alpha^3$. Poiché P raggiunge il suo massimo in $3\alpha/4$ e $\alpha^3 \geq 3\alpha/4$ per $\alpha \geq 2\sqrt{2}/3$, otteniamo

$$\frac{1}{3} \leq P(\beta) \leq P(\alpha^3) = \alpha^4 - \frac{2}{3}\alpha^6 \ .$$

E' semplice verificare che la funzione $f(\alpha) = \alpha^4 - 2\alpha^6/3$ è strettamente crescente in $[0,1]$: quindi $f(\alpha) \geq f(1) = 1/3$ implica $\alpha = 1$. $\square$

Dimostrazione del teorema 5.12 A meno di estrarre sottosuccessioni possiamo supporre che (u_h) converga debolmente a una certa funzione $u \in W^{1,3}(\Omega)$. La semicontinuità debole di $u \to |\nabla u|^3$ implica che $|\nabla u| \leq 1$ $\mathcal{L}^2$ quasi ovunque in Ω. Per provare la convergenza forte di (u_h) dobbiamo solo mostrare che u soddisfa l'equazione eikonale. Infatti, passando al limite nell'identità

$$\int_\Omega |\nabla u_h - \nabla u|^2 \, dx = 2\int_\Omega (1 - \langle \nabla u_h, \nabla u \rangle) \, dx + \int_\Omega |\nabla u_h|^2 - 1 \, dx$$

otteniamo che (∇u_h) converge fortemente a ∇u in $L^2(\Omega, \mathbf{R}^2)$ e quindi, essendo $|\nabla u_h|^3$ equiintegrabili, avremmo la convergenza forte anche in $L^3(\Omega, \mathbf{R}^2)$. Fissiamo un punto $x_0 \in \Omega$ (in cui faremo un blow-up) che soddisfi

(i) $\mu\left(B_\varrho(x_0)\right)/\varrho^2$ è limitata per $\varrho \downarrow 0$;
(ii) x_0 è un punto di Lebesgue per ∇u.

Dimostriamo che $|\nabla u(x_0)| = 1$.
Definiamo le funzioni riscalate

$$u_h^\varrho(y) = \frac{1}{\varrho} u_h(x_0 + \varrho y) \qquad\qquad y \in B_1, \ \varrho > 0$$

e osserviamo che $\nabla u_h^\varrho(y) = \nabla u_h(x_0 + \varrho y)$. Visto che

$$\limsup_{h\to\infty} |Iu_h^\varrho|(B_1) = \limsup_{h\to\infty} \varrho^{-1} |Iu_h| \left(B_\varrho(x_0)\right) \leq \varrho^{-1} \mu\left(\overline{B}_\varrho(x_0)\right) \quad ,$$

per $\varrho_i = 1/i$ possiamo trovare, per la condizione (i), degli interi h_i abbastanza grandi perché $|Iu_{h_i}^{\varrho_i}|(B_1)$ sia infinitesima per $i \to \infty$. Analogamente, da

$$\lim_{h\to\infty} \int_{B_1} \left||\nabla u_h^\varrho| - 1\right|^3 \, dy = \lim_{h\to\infty} \varrho^{-2} \int_{B_\varrho(x_0)} \left||\nabla u_h| - 1\right|^3 \, dx = 0$$

(che vale per ogni $\varrho > 0$) possiamo supporre che $|\nabla u_{h_i}^{\varrho_i}|$ converga in $L^3(B_1)$ a 1. Infine, visto che per ϱ fissato ∇u_h^ϱ converge debolmente in $L^3(B_1, \mathbf{R}^2)$ a $\nabla u(x_0 + \varrho y)$, per la condizione (ii) possiamo scegliere h_i tale che $\nabla u_{h_i}^{\varrho_i}$ converga debolmente in $L^3(B_1, \mathbf{R}^2)$ a $\nabla u(x_0)$.
Allora, dalla Proposizione 5.13 con $v_i = u_{h_i}^{\varrho_i}$, concludiamo che $|\nabla u(x_0)| = 1$. $\square$

CAPITOLO 6

Altri risultati

Come abbiamo già osservato, un semplice corollario del teorema di compattezza è che il funzionale J^3 ha minimo nella classe delle u tali che $u \in AG_e$, $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ e $u|_{\Omega} \geq 0$. In questo capitolo vedremo che un'altra conseguenza dello stesso teorema è l'equicoercività dei funzionali F_ϵ.
Vedremo anche che J^3 è maggiore del $\Gamma-\liminf$ degli F_ϵ. Questo risultato dà una risposta affermativa a quella che abbiamo chiamato (nel capitolo 4) congettura AG1: la costruzione di Aviles e Giga fornisce effettivamente una successione ottimale per ogni spigolo. Allora una domanda che viene naturale porsi è se è possibile "raccordare" successioni ottimali per spigoli diversi per ottenere successioni ottimali per una qualsiasi u affine a tratti: vedremo nel secondo paragrafo che ciò è effettivamente possibile. A questo punto, quindi, basterebbe mostrare che la classe delle funzioni affini a tratti è densa in energia in $AG(\Omega)$ per ottenere anche la disuguaglianza del $\Gamma-\limsup$.
Un'altra questione interessante riguarda le proprietà fini delle funzioni AG; in particolare avanziamo la congettura che, $\forall u \in AG(\Omega)$, sia possibile trovare un insieme $J_{\nabla u}$ $\mathcal{H}^1$-rettificabile tale che ∇u sia approssimativamente continuo in ogni $x \in \Omega \backslash J_{\nabla u}$ e per $\mathcal{H}^1$-q.o. $x \in J_{\nabla u}$ esistano il limite approssimato destro e il limite approssimato sinistro. Muovendoci in questa direzione uno dei primi problemi che abbiamo affrontato, e che non siamo riusciti a risolvere, è la caratterizzazione delle $u \in AG_{loc}(\mathbf{R}^2)$ per le quali $J^3(u) = 0$. Si è fortemente tentati di pensare che le u siffatte siano solo della forma

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \pm \text{dist } (x, x_0) \\ \varphi_1(x) &= b + a \cdot x, \end{aligned}$$

con $a, x_0 \in \mathbf{R}^2$ e $b \in \mathbf{R}$, ovvero i loro grafici siano solo o coni o piani. Un'eventuale raffinamento della congettura appena proposta potrebbe essere la

(Cong2) prendiamo $u \in AG_{loc}(\mathbf{R}^2)$ e supponiamo che esistano una coppia ortonormale (ξ, η) in $\mathbf{R}^2$, una retta r e una costante $0 < k_1 \leq 2$ tali che, chiamando (ξ_1, η_1) la coppia che si ottiene ruotando (ξ, η) di $\pi/4$,

$$\begin{aligned} \Sigma_{\xi\eta} u &= k_1 \mathcal{H}^1 \llcorner r \\ \Sigma_{\xi_1\eta_1} u &= 0; \end{aligned}$$

allora u è uno spigolo che ha frattura in r.

Infine, in stretta correlazione con la questione delle proprietà fini, ma interessante di per sé per l'individuazione delle giuste condizioni al contorno, c'è il problema di impostare una teoria delle tracce per i gradienti delle $u \in AG$.

1. Disuguaglianza del $\Gamma-$liminf ed equicoercività

Per dimostrare la disuguaglianza del $\Gamma-\liminf$ ci rifaremo essenzialmente a un argomento di Kohn e Jin in [**19**] dopo aver dimostrato una stima a priori per $|\nabla u|^6$. Infine mostreremo anche come si può ottenere un risultato di equicoercività, utile (qualora si dimostrasse la Γ-convergenza degli F_ϵ) per ottenere convergenza dei minimi (vedere Teorema 2.30). Ricordiamo che Ω indica un sottoinsieme aperto e limitato di $\mathbf{R}^2$.

TEOREMA 6.1. *Per ogni $u \in W^{2,2}(\Omega)$ e per ogni $\epsilon > 0$ abbiamo*

$$\int_\Omega |\nabla u|^6 \, dx \leq \left(C + \frac{D\epsilon^2}{\mathcal{L}^2(\Omega)} \right) F_\epsilon^2(u) + E\mathcal{L}^2(\Omega), \tag{1.1}$$

(dove c,d ed e sono costanti assolute) e

$$|Iu|(A) \leq F_\epsilon(u) + C(A)\epsilon^{1/2} F_\epsilon^{1/2}(u) \|\nabla u\|_2 \tag{1.2}$$

per ogni aperto $A \subset\subset \Omega$. In particolare, $\Gamma-\lim_\epsilon F_\epsilon(u) < \infty$ implica $u \in AG_e(\Omega)$ e

$$\Gamma-\liminf_{\epsilon \to 0} F_\epsilon(u) \geq |Iu|(\Omega).$$

Dim. Sia $v = |\nabla u|$; poiché $|\nabla v| \leq |\nabla^2 u|$, usando la disuguaglianza di Young otteniamo che

$$F_\epsilon(u) \geq \int_\Omega |1 - v^2||\nabla v| = \int_\Omega |\nabla(\Phi \circ v)| \, dx$$

con $\Phi(t) = \int_0^t |1 - \tau^2| \, d\tau$. Dalla disuguaglianza di Poincaré deduciamo

$$\int_\Omega |\Phi \circ v - m|^2 \leq C_1 F_\epsilon^2(u) \tag{1.3}$$

dove m è la media di $\Phi \circ v$ su Ω. D'altra parte, usando la stima $|\Phi(t)| \leq a(1 - t^2)^2 + b$ (valida con le costanti a, b adatte) otteniamo

$$m\mathcal{L}^2(\Omega) \leq 2a\epsilon F_\epsilon(u) + 2b \ .$$

Usando la disuguaglianza 1.3, e tenendo conto dell'andamento cubico di Φ all'infinito, la disuguaglianza 1.1 segue facilmente.
La disuguaglianza 1.2 segue dal fatto che

$$\begin{aligned} I^1 u &= (1 - |\nabla u|^2)(u_{11} - u_{22})\mathcal{L}^2 \\ I^2 u &= 2(1 - |\nabla u|^2)u_{12}\mathcal{L}^2 \\ |Iu| &= |1 - |\nabla u|^2||\lambda_1 - \lambda_2|\mathcal{L}^2, \end{aligned}$$

(vedere Proposizione 5.5) e dalla rappresentazione del determinante in forma di divergenza. Infatti, per ogni $\phi \in C_c^1(\Omega)$ tale che $0 \leq \phi \leq 1$ e $\phi \equiv 1$ in

A, poiché $|\nabla^2 u|^2$ è la somma dei quadrati degli autovalori di $\nabla^2 u$ possiamo stimare $|Iu|(A)$ come

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \phi(1-|\nabla u|^2)|\lambda_1-\lambda_2|\,dx \le \frac{1}{2}\int_\Omega \phi\left[\epsilon(\lambda_1-\lambda_2)^2+\frac{\left(1-|\nabla u|^2\right)^2}{\epsilon}\right]dx\\
=\;& F_\epsilon(u)-\epsilon\int_\Omega \phi\lambda_1\lambda_2\,dx = F_\epsilon(u)-\epsilon\int_\Omega \phi\det(\nabla^2 u)\,dx\\
=\;& F_\epsilon(u)+\epsilon\int_\Omega u_x(u_{yy}\phi_x-u_{xy}\phi_y)\,dx\\
\le\;& F_\epsilon(u)+2\epsilon^{1/2}F_\epsilon^{1/2}(u)\|\nabla\phi\|_\infty\|\nabla u\|_2\ .
\end{aligned}$$

Per provare la parte finale del teorema fissiamo un aperto $A \subset\subset \Omega$ e usiamo 1.1 e 1.2 per ottenere

$$|Iu|(A) \le \liminf_{h\to\infty}|Iu_h|(A) \le \liminf_{h\to\infty} F_{\epsilon_h}(u_h)$$

per ogni $(\epsilon_h) \downarrow 0$ e per ogni successione $(u_h) \subset W^{2,2}(\Omega)$ convergente a u per le quali $F_{\epsilon_h}(u_h)$ è limitata. Infine, facendo tendere A a Ω, otteniamo $u \in AG(\Omega)$. Inoltre, per quanto già visto nel capitolo 4, u soddisfa l'equazione eikonale.

□

Teorema 6.2. **(Equicoercività)** *Siano (ϵ_h) una successione infinitesima e $(u_h) \subset W^{2,2}(\Omega)$ una successione tale che $F_{\epsilon_h}(u_h)$ è equilimitata. Allora (u_h) ha una sottosuccessione che converge fortemente in $W^{1,3}(\Omega)$ a $u \in AG_e(\Omega)$.*

Dim. Per il teorema precedente $|Iu_h|(\Omega)$ è limitata e quindi $(|\nabla u_h|)$ è limitata in $L^6(\Omega)$. Poiché $\int_\Omega(1-|\nabla u_h|^2)^2 \le c\epsilon_h$, $|\nabla u_h|$ converge a 1 in $L^2(\Omega)$; ma allora, dall'equilimitatezza in $L^6(\Omega)$ di $(|\nabla u_h|)$ otteniamo convergenza forte a 1 della successione in ogni $r < 6$: possiamo quindi applicare il teorema di compattezza e concludere la tesi.

□

2. Γ−limsup per funzioni affini a tratti

Per cominciare rileggiamo il risultato del primo paragrafo del capitolo 4 alla luce di quanto dimostrato nella sezione precedente.

Teorema 6.3. **(Γ−limite per gli spigoli)** *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbf{R}^2$ che gode della proprietà*

(a) $\forall x \in \partial\Omega \cap r$ esistono due coni non degeneri con vertice in x, l'uno contenuto in Ω e l'altro contenuto in $\mathbf{R}^2\setminus\Omega$.

Sia u uno spigolo che ha come frattura la retta r. Allora esiste una famiglia $(u_\epsilon) \subset H^2(\Omega)$ tale che

$$\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(u_\epsilon) = \frac{1}{6}J^3(u)$$

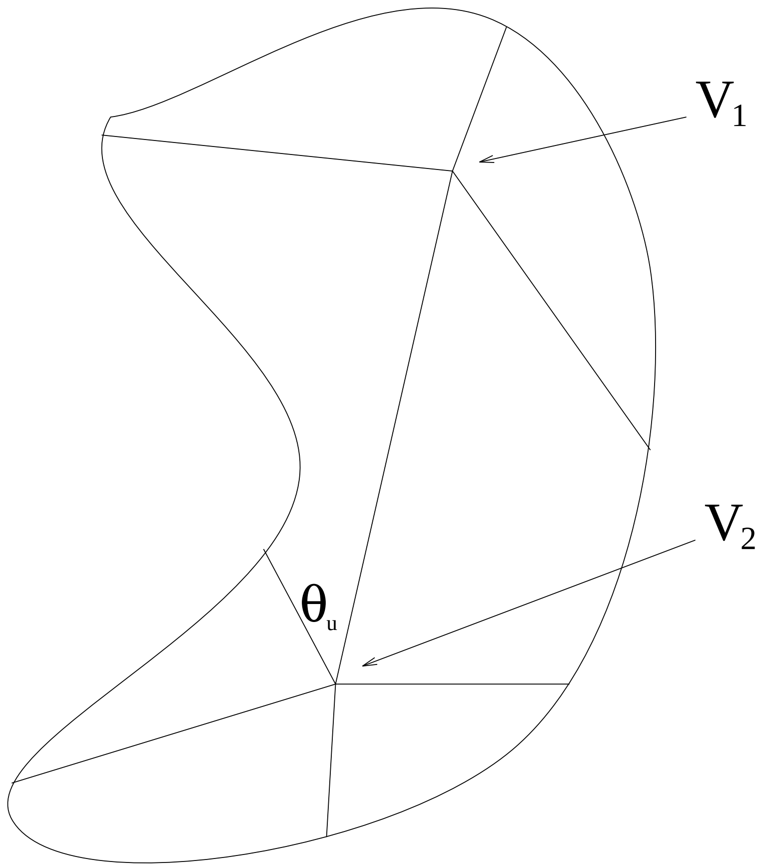


Fig. 6

e quindi

$$\Gamma-\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(u) = \frac{1}{6}J^3(u),$$

Inoltre si può scegliere (u_ϵ) in maniera tale che ogni u_ϵ coincida con u al di fuori di una striscia di ampiezza 2ϵ centrata sulla retta r.

Vediamo ora come fare per ottenere una famiglia ottimale per ogni funzione u affine a tratti a partire dalle famiglie ottimali per gli spigoli.

Supponiamo di averne fissata una. L'insieme Ω risulterà allora diviso in un numero finito $\Omega_1, \Omega_2, ...\Omega_m$ di insiemi aperti su cui ∇u è costante. Chiamiamo $J_{\nabla u}$ l'insieme che si ottiene dalla differenza $\Omega\backslash(\cup_j \Omega_j)$: osserviamo che esso è proprio l'insieme di salto per la funzione $\nabla u \in BV(\Omega, \mathbf{R}^2)$. Osserviamo anche che, proprio per questo motivo, $J_{\nabla u}$ è l'unione di un numero finito di segmenti: essi si incontrano in numero finito di vertici che chiameremo $V_1, ..., V_n$.
Fissato un vertice V_j, i segmenti che escono da lui formeranno un numero finito di angoli $\theta_{i,j}$; chiameremo θ_u l'angolo più piccolo tra i $\theta_{i,j}$, al variare sia di i che di j. La situazione è riassunta in fig 6.

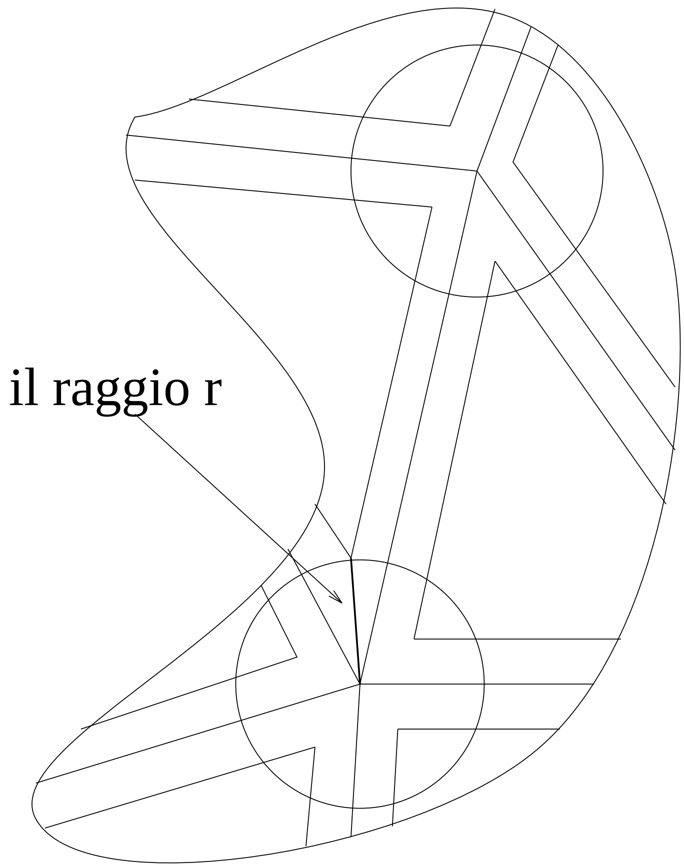


Fig. 7
Il raggio r è lungo $\epsilon \sec(\theta_u/2)$

A questo punto fissiamo anche ϵ e chiamiamo I_ϵ l'insieme $\{x|\text{dist }(x, J_{\nabla u}) \leq \epsilon\}$. Allora, a patto di prendere ϵ sufficientemente piccolo, $\Omega \backslash I_\epsilon$ sarà un aperto di Ω formato da n componenti connesse, ciascuna contenuta in un certo Ω_i. Prendiamo m palle B_i di centro V_i e raggio $\epsilon \sec(\theta_u/2)$. Sempre a patto di prendere ϵ sufficientemente piccolo, $I_\epsilon \backslash (\cup_i B_i)$ è formato da tante componenti connesse quanti sono i segmenti che formano $J_{\nabla u}$. In ciascuna di queste componenti connesse, che chiameremo I_ϵ^k, u coincide con un certo spigolo u_k (la situazione è illustrata in figura 7).

Allora definiamo v_ϵ su $\Omega \backslash (\cup_i B_i)$ nel seguente modo:

(a) v_ϵ coincide con u su $\Omega \backslash I_\epsilon$;

(b) su ciascuna I_ϵ^k u coincide con la ϵ-approssimante della famiglia ottimale per u_k a cui si fa riferimento nel Teorema 6.3.

Si vede facilmente che v_ϵ è di classe C^1 e sta in H^2. Chiaramente rimane il problema di come estenderla a tutto Ω; in realtà faremo qualcosa di leggermente diverso. Chiamiamo C_i le sfere che hanno centro in V_i e raggio doppio di B_i. A questo punto alla famiglia di insiemi aperti

$$\{C_1, ..., C_n, \Omega \backslash (\cup_i \overline{B}_i)\}$$

associamo una partizione C^∞ dell'unità $\varphi_1^\epsilon, ..., \varphi_n^\epsilon, \varphi_{n+1}^\epsilon$ tale che

- $\varphi_i^\epsilon \equiv 1$ su B_i per ogni $i \leq n$;
- $\varphi_{n+1}^\epsilon \equiv 1$ su $\Omega \backslash (\cup \overline{C}_n)$.

Possiamo allora definire u_ϵ: chiamiamo c_i^ϵ il valore medio di u_ϵ su $C_i \backslash B_i$ e poniamo

$$u_\epsilon = \sum_{i=1}^{n} c_i^\epsilon \varphi_i^\epsilon + v_\epsilon \varphi_{n+1}^\epsilon.$$

Ovviamente dobbiamo ancora mostrare che

$$\lim_{\epsilon \to 0} F_\epsilon(u_\epsilon) = \frac{J(u)}{6}.$$

Riprendiamo le notazioni

$$F_\epsilon(u, A) = \int_A \left(\frac{(1 - |\nabla u|^2)^2}{\epsilon} + \epsilon |\nabla^2 u|^2 \right) dx$$
$$J^\epsilon(u, A) = \int_{J_{\nabla u} \cap A} |[\nabla u]_-^+|^3 d\mathcal{H}^1$$

già usate in precedenza.
Allora una banale conseguenza del teorema 6.3 è che, per ogni $\delta > 0$,

$$\lim_{\epsilon \to 0} F_\epsilon(u_\epsilon, \Omega_\delta) = \frac{1}{6} J^3(u, \Omega_\delta),$$

dove

$$\Omega_\delta = \Omega \backslash \left(\cup_i \overline{B(V_i, \delta)} \right)$$

(ovviamente $B(V_i, \delta)$ è la palla di centro V_i e raggio δ). Quindi, facendo tendere δ a 0, otteniamo

$$\liminf_{\epsilon \to 0} F_\epsilon(u_\epsilon, \Omega) \geq \frac{1}{6} J^3(u, \Omega).$$

Osserviamo però che in realtà vale, sempre come conseguenza del teorema 6.3, una proposizione leggermente più forte, ovvero che

$$\lim_{\epsilon \to 0} F_\epsilon(u_\epsilon, \Omega_{c\epsilon}) = \frac{1}{6} J^3(u, \Omega),$$

dove c è un qualsiasi reale maggiore di $2 \sec(\theta_u/2)$. Allora tutto ciò che dobbiamo verificare è che

$$F_\epsilon(u_\epsilon, \cup_i \overline{B(V_i, c\epsilon)})$$

tende a 0, ovvero, dato che i vertici sono un numero finito, che

$$\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(u_\epsilon, \overline{B(V_i, c\epsilon)}) = 0.$$

per ciascun i.
Per fissare le idee supponiamo $c = 2\sec(\theta_u/2)$ e stimiamo $|\nabla u_\epsilon|$ e $|\nabla^2 u_\epsilon|$ in $B(V_i, c\epsilon)$. Avremo

- $\varphi^\epsilon_{n+1} = 1 - \varphi^\epsilon_i$;
- $u_\epsilon = c^\epsilon_i \varphi^\epsilon_i + v_\epsilon \varphi^\epsilon_{n+1}$;
- $\nabla u_\epsilon = (c^\epsilon_i - v_\epsilon)\nabla\varphi^\epsilon_i + \varphi^\epsilon_{n+1}\nabla v_\epsilon$;
- $\nabla^2 u_\epsilon = (c^\epsilon_i - v_\epsilon)\nabla^2\varphi^\epsilon_i + \nabla\varphi^\epsilon_{n+1}\otimes\nabla v_\epsilon + \varphi^\epsilon_{n+1}\nabla^2 v_\epsilon$.

Adesso dobbiamo fare un piccolo passo indietro e tornare alla scelta delle φ^ϵ_i. Dato che queste funzioni devono valere 1 su una palla di raggio $c\epsilon$ e 0 fuori da una palla di raggio $2c\epsilon$, non è difficile vedere che esse possono essere scelte in maniera tale che

$$|\nabla\varphi^\epsilon_i| \leq C\frac{1}{\epsilon}$$

$$|\nabla^2\varphi^\epsilon_i| \leq C\frac{1}{\epsilon^2},$$

dove la costante C è fissata una volta per tutte. Teniamo allora presente che, per come sono state costruite le approssimanti per gli spigoli, la v_ϵ ha il modulo del gradiente minore o uguale a 1. Ciò non vuol dire che lei è lipschitziana di costante 1, visto che che è definita su $B(V_i, 2c\epsilon)\backslash B(V_i, c\epsilon)$ e che tale insieme non è un'aperto stellato. Però è semplice vedere che $|c^\epsilon_i - v_\epsilon|$ si può stimare con un'altra costante C_2 per il fattore ϵ. Tirando le somme possiamo scrivere:

- $|\nabla u_\epsilon| \leq CC_2 + 1$;
- $|\nabla^2 u_\epsilon|^2 \leq \frac{C_3}{\epsilon^2} + C_4|\nabla^2 v_\epsilon|^2$.

Inserendo tali stime in

$$\int_{B(V_i,2c\epsilon)} \left(\frac{(1-|\nabla u_\epsilon|)^2}{\epsilon} + \epsilon|\nabla^2 u_\epsilon|^2\right) dx$$

otteniamo che esso è maggiorato da

$$C_5\epsilon + C_4\int_{B(V_i,2c\epsilon)\backslash B(V_i,c\epsilon)} \epsilon|\nabla^2 v_\epsilon|^2 dx.$$

Ci resta da controllare l'ultimo addendo. Notiamo che la zona in cui dobbiamo integrare $|\nabla^2 v_\epsilon|$ è una corona circolare. Ci ritroviamo quindi in una situazione simile a quella illustrata nella figura 8.

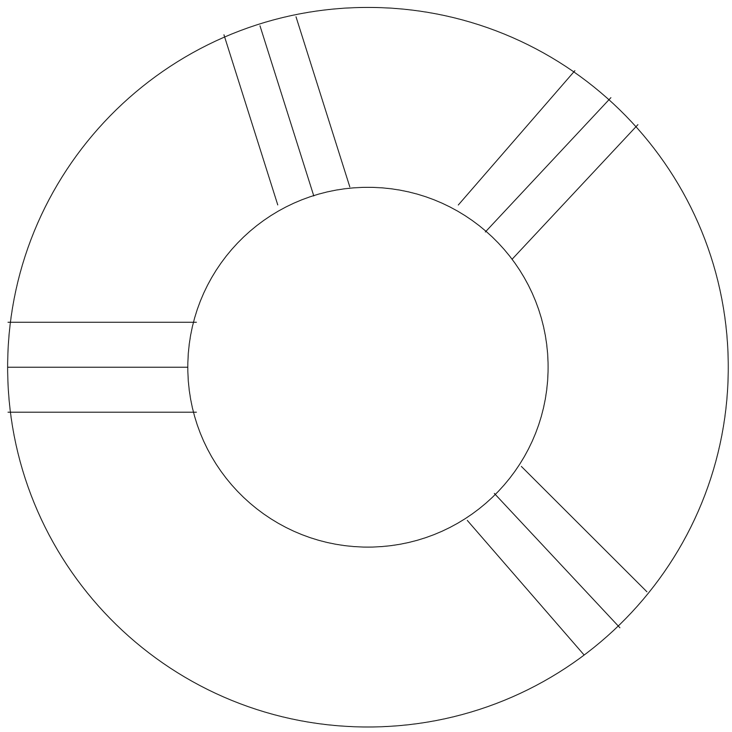


Fig. 8

Ricordiamo che la v_ϵ è lineare nelle zone esterne ai "rettangolini" (che non sono veri e propri rettangoli, essendo delimitati da segmenti e archi di circonferenza), mentre dentro di essi coincide con l'ϵ-approssimante della famiglia ottimale per opportuno spigolo. Notiamo allora che fuori dai rettangolini $|\nabla^2 v_\epsilon| = 0$. Inoltre i rettangolini sono un numero finito (numero che possiamo controllare con una costante k indipendente dal vertice V_i su cui stiamo soffermando la nostra attenzione).
Fissiamo perciò uno qualsiasi dei rettangolini: chiamiamolo R_ϵ e stimiamo

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{R_\epsilon} \epsilon |\nabla^2 v_\epsilon|^2 dx$$

con

$$\lim_{\epsilon \to 0} F_\epsilon(v_\epsilon, R_\epsilon).$$

Dobbiamo allora stimare F_ϵ su un' ϵ-approssimante di uno spigolo e su un insieme che, definitivamente, è contenuto in una qualsiasi striscia di lunghezza δ, di larghezza limitata e che è centrata sulla linea di frattura dello spigolo. Chiamiamo w_ϵ l'ϵ-approssimante in questione, w il rispettivo spigolo e I_δ una qualsiasi striscia di lunghezza delta e larghezza 1 centrata sulla frattura di w. Abbiamo

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(v_\epsilon, R_\epsilon) &= \lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(w_\epsilon, R_\epsilon)\\ &\leq \lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(w_\epsilon, I_\delta)\\ &= \frac{1}{6}J^3(w, I_\delta) \leq \frac{\delta}{3}\end{aligned}$$

e quindi, per l'arbitrarietà di δ,

$$\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(v_\epsilon, R_\epsilon) = 0.$$

Ma allora da quanto abbiamo già osservato prima abbiamo che

$$\int_{B(V_i,2c\epsilon)\setminus B(V_i,c\epsilon)} \epsilon|\nabla^2 v_\epsilon|^2 dx$$

è un infinitesimo.

Riassumiamo nel seguente teorema quanto abbiamo appena dimostrato.

TEOREMA 6.4. *Se $u \in AG_e(\Omega)$ è affine a tratti e Ω gode della proprietà del teorema 6.3 allora esiste una famiglia $(u_\epsilon) \subset H^2(\Omega)$ tale che*

$$\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(u_\epsilon) = \frac{1}{6}J^3(u)$$

e quindi, tenendo presente ciò che abbiamo dimostrato nella sezione precedente,

$$\Gamma-\lim_{\epsilon\to 0} F_\epsilon(u) = \frac{1}{6}J^3(u).$$

Bibliografia

[1] G.Alberti: *Rank-one properties for derivatives of functions with bounded variation.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **123** (1993), 239–274.

[2] L. Ambrosio: *Corso introduttivo alla Teoria Geometrica della Misura ed alle superfici minime.* Quaderno SNS, Pantograf, 1997.

[3] L.Ambrosio: *On the lower semicontinuity of quasi-convex functionals in SBV.* Nonlinear Analysis, TMA, **23** (1994), 405–425.

[4] L. Ambrosio, E. De Giorgi *Un nuovo tipo di Funzionale del Calcolo delle Variazioni.* Atti Acc. Naz. dei Lincei, Rend. Cl. Sc. Fis. Mat. Natur. **LXXXII** (1988), 199-210.

[5] L. Ambrosio, C. De Lellis, C. Mantegazza: *Line energies for gradient vector fields* di prossima pubblicazione in Calculus of Variations & PDE, Springer

[6] L.Ambrosio & G.Dal Maso: *A general chain rule for distributional derivatives.* Proc. Amer. Math. Soc., **108** (1990), 691–702.

[7] L.Ambrosio, N. Fusco, D. Pallara: *Functions of bounded variations and free discontinuity problems* Oxford University Press, di prossima pubblicazione.

[8] P.Aviles & Y.Giga: *A mathematical problem related to the physical theory of liquid crystals configurations.* Proc. Centre Math. Anal. Austral. Nat. Univ., **12** (1987), 1–16.

[9] P.Aviles & Y.Giga: *The distance function and defect energy.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh A, **126** (1996), 923–938.

[10] P.Aviles & Y.Giga: *On lower semicontinuity of a defect energy obtained by a singular perturbation of a Ginzburg–Landau type energy for gradient fields.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **126** (1996), 923–938.

[11] J. M. Ball: *A version of the fundamental theorem for Young measures* in PDE's and Continuum Models of Phase Transitions (M. Racle, D. Serre, M. Slemrod, eds.), Lecture Notes in Physics **344**, Springer, 1989, 207-215.

[12] C. Castaing, M. Valadier *convex Analysis and Measurable Multifunctions.* Lecture Notes in Mathematics **580**, Springer, Berlin, 1977.

[13] G. Dal Maso: *An introduction to* Γ*-convergence.* Birkhäuser, Boston, 1993.

[14] E. De Giorgi, T. Franzoni *Su un tipo di convergenza variazionale.* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., **58** (1975), 842-850.

[15] C. Dellacherie, P. A. Meyer *Probabilities and potential.* North Holland Mathematical Sudies **29** Hermann, Paris, 1975.

[16] A.Desimone, R.W.Kohn, S.Müller & F.Otto: In preparation.

[17] I.Fonseca & S.Müller: *A-quasiconvexity, lower semicontinuity and Young measures.* Preprint, 1998.

[18] W. Jin *Singular Perturbation and the Energy of Folds* PHD Thesis, Courant Instutute, New York

[19] W. Jin, R. V. Kohn *Singular Perturbation of the Energy of Folds* Inviato al Journal of Nonlinear Science

[20] J.Kristensen: *Lower semicontinuity in spaces of weakly differentiable functions.* Math. Annalen, 1999, di prossima pubblicazione.

[21] P.A. Meyer: *Probability and potentials.* Blasidell, 1966.

[22] L.Modica: *The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion.* Arch. Rat. Mech. Anal., **98** (1987), 123–142.

[23] L.Modica & S. Mortola: *Un esempio di* Γ*-convergenza.* Boll. Un. Mat. Ital. B **14** (1977), 285–299.

[24] S.Müller: *Variational models for microstructure and phase transitions.* ???

[25] M.Ortiz & G.Gioia: *The morphology and folding patterns of bucking driven thin-film blisters.* J. Mech. Phy. Solids, **42** (1994), 531–559.

[26] A.I.Vol'pert: *Spaces* BV *and quasi-linear equations.* Math. USSR Sb., **17** (1967), 225–267.