UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II
SCUOLA POLITECNICA DELLE SCIENZE DI BASE

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E APPLICAZIONI
"RENATO CACCIOPPOLI"
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Compattezza Debole in Spazi di Banach Il Teorema di Eberlein–Šmulian

TESI DI LAUREA

RELATORE
PROF. CARLO MANTEGAZZA

CANDIDATO
GIUSEPPE VITIELLO
Matr. N87002225

ANNO ACCADEMICO 2024/2025

Indice

Introduzione

Lo studio degli spazi di Banach, nato all'inizio del XX secolo, è alla base della moderna *analisi funzionale*. A partire dalla struttura di spazio normato e completo, si possono generalizzare i metodi dell'analisi "classica" finito–dimensionale anche a spazi infinito–dimensionali, fondamentali per lo studio delle equazioni differenziali, delle equazioni integrali, del calcolo delle variazioni e della teoria della probabilità. Tra gli strumenti più importanti ci sono due risultati legati alla topologia dello spazio euclideo: l'equivalenza tra insiemi compatti e insiemi chiusi e limitati e l'equivalenza tra compattezza per ricoprimenti e compattezza per successioni. Tali risultati non possono però essere estesi al caso delle topologie indotte da norme nel caso di spazi infinito–dimensionali.

Dall'esigenza di poter utilizzare questi strumenti anche in ambito generale, nasce quindi l'idea di "indebolire" la topologia, riducendo il numero di aperti, quindi aumentando il numero di compatti. Il prezzo da pagare è una struttura meno intuitiva per quanto riguarda gli intorni e la convergenza, ma che permette, grazie al teorema di Eberlein–Šmulian, di ristabilire l'equivalenza tra compattezza per ricoprimenti e compattezza per successioni in un qualsiasi spazio di Banach equipaggiato con la topologia debole. Dunque, in ogni spazio di Banach è possibile lavorare con le successioni anche in topologie che non sono metrizzabili o non ammettono insiemi densi numerabili.

La tesi si articola in tre capitoli, parte dai fondamenti dell'analisi funzionale, arriva alla dimostrazione del teorema di Eberlein–Šmulian e si conclude mostrandone alcune applicazioni. Nel Capitolo 1 vengono richiamate le proprietà di base degli spazi di Banach. In particolare, definiamo le due topologie oggetto della tesi: la topologia debole e quella debole* e presentiamo il primo risultato fondamentale sulla topologia debole*, il teorema di Banach–Alaoglu–Bourbaki, che funge da punto di partenza per tutte le considerazioni successive riguardanti la compattezza. Il Capitolo 2 è interamente dedicato alla dimostrazione del Teorema di Eberlein–Šmulian, come presentata nel testo "classico" di Dunford e Schwartz [3]. La dimostrazione dipende da vari risultati di natura tecnica che stabiliscono collegamenti tra le proprietà di separabilità e metrizzabilità delle palle unitarie nelle topologie deboli e dal teorema di Krein–Šmulian, per caratterizzare i convessi debolmente* chiusi nello spazio duale. Il Capitolo 3 si concentra inizialmente sugli spazi riflessivi, per i quali il teorema di Eberlein–Šmulian, in combinazione col teorema di Kakutani, permette di caratterizzare, a partire da proprietà di compattezza e compattezza per successioni, la proprietà stessa di riflessività. Successivamente, mostriamo come il teorema di Eberlein–Šmulian sia fondamentale per il criterio di Dunford–Pettis, che caratterizza gli insiemi debolmente compatti degli spazi L^1 in termini di integrabilità uniforme e infine lo applichiamo allo studio degli spazi di Schur come ℓ^1, dove la compattezza debole e quella in norma coincidono.

CAPITOLO 1

Preliminari

Raccogliamo in questo primo capitolo una serie di definizioni, nozioni e risultati che ci serviranno nel seguito. Un riferimento per il materiale che segue e più in generale per tutta la tesi, è il libro di Haïm Brezis [1].

1.1. Definizioni

DEFINIZIONE 1.1 (Spazio di Banach, distanza indotta, topologia indotta). Si dice *spazio vettoriale normato* una coppia $(E, \ \|\cdot\|)$ dove E è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ è una funzione, detta *norma*, con le seguenti proprietà:

- $\|x\| \geqslant 0$ per ogni $x \in E$ e $\|x\| = 0$ se e solo se $x = 0$ (positività),
- $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$, per ogni $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ (omogeneità),
- $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, per ogni $x, y \in E$ (disuguaglianza triangolare).

La mappa $d : (x, y) \in E \mapsto \|x - y\| \in \mathbb{R}$ è una distanza su E, detta *distanza indotta dalla norma* ed E si dice *spazio di Banach* se lo spazio metrico (E, d) è completo.

È immediato vedere che se E è uno spazio vettoriale normato, la norma è una funzione continua nella topologia indotta dalla metrica.

DEFINIZIONE 1.2 (Spazio duale, biduale, preduale). Dato uno spazio di Banach E, si dice *spazio duale* e si denota con $E^\star$, l'insieme di tutti i funzionali lineari continui da E in $\mathbb{R}$. Si ha allora che $E^\star$ è anch'esso uno spazio di Banach con la norma (operatoriale)

$$\|f\|_{E^\star} = \sup_{x \in E, \ \|x\| \leqslant 1} |f(x)| \,.$$

Nel seguito, se $f \in E^\star$ e $x \in E$, scriveremo $\langle f, x\rangle$ in luogo di $f(x)$.
In modo analogo si definisce lo spazio biduale $E^{\star\star}$ con la norma

$$\|\xi\|_{E^{\star\star}} = \sup_{f \in E^\star, \ \|f\| \leqslant 1} |\langle \xi, f\rangle| \,.$$

Infine, se esiste, si dice *spazio preduale* di E uno spazio di Banach F tale che $F^\star = E$.

DEFINIZIONE 1.3 (Immersione canonica, spazio riflessivo). Dato uno spazio di Banach E, si definisce *immersione canonica* di E nel suo biduale, la funzione $J : E \to E^{\star\star}$ che associa a ogni $x \in E$ il funzionale lineare

$$Jx : f \in E^\star \mapsto \langle f, x\rangle \in \mathbb{R} \,.$$

Si verifica allora facilmente che J è un'isometria lineare iniettiva. Se J è anche suriettiva, lo spazio E viene detto *riflessivo*.

1.2. I teoremi di Hahn–Banach

Enunciamo senza dimostrazione i teoremi di Hahn–Banach in forma analitica e geometrica. Per le dimostrazioni, si veda [**1**, Capitolo 1].

TEOREMA 1.4 (Teorema di Helly–Hahn–Banach – Forma analitica). *Sia E uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Sia $p : E \to \mathbb{R}$ una funzione tale che*

$$\begin{aligned} p(\lambda x) &= \lambda p(x) && \text{per ogni } x \in E \text{ e } \lambda > 0, \\ p(x+y) &\leqslant p(x) + p(y) && \text{per ogni } x, y \in E. \end{aligned}$$

Sia $G \subseteq E$ un sottospazio vettoriale e sia $g : G \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare tale che

$$g(x) \leqslant p(x) \qquad \text{per ogni } x \in G\,.$$

Allora esiste un funzionale lineare $f : E \to \mathbb{R}$ che estende g, ossia tale che $g(x) = f(x)$ su G e

$$f(x) \leqslant p(x) \qquad \text{per ogni } x \in E\,.$$

Per enunciare i teoremi di Hahn–Banach in forma geometrica, è necessario introdurre il concetto di insiemi *separati* e *strettamente separati* da iperpiani. Nel seguito E è uno spazio vettoriale normato.

DEFINIZIONE 1.5 (Iperpiano affine). Un sottoinsieme $H \subseteq E$ si dice *iperpiano affine* se è della forma $H = \{x \in E \mid f(x) = \alpha\}$, dove f è un funzionale lineare non identicamente nullo e $\alpha \in \mathbb{R}$ è una costante.
Si mostra che un iperpiano affine H è chiuso se e soltanto se il funzionale lineare f che lo definisce come sopra, è continuo.

DEFINIZIONE 1.6 (Insiemi separati e strettamente separati). Due sottoinsiemi $A, B \subseteq E$ si dicono *separati dall'iperpiano H* se valgono le due condizioni seguenti:

$$f(x) \leqslant \alpha, \text{ per ogni } x \in A \qquad \text{e} \qquad f(y) \geqslant \alpha, \text{ per ogni } y \in B,$$

mentre si dicono *strettamente separati dall'iperpiano H* se esiste $\varepsilon > 0$ tale che valgano le due condizioni seguenti:

$$f(x) \leqslant \alpha - \varepsilon, \text{ per ogni } x \in A \qquad \text{e} \qquad f(y) \geqslant \alpha + \varepsilon, \text{ per ogni } y \in B,$$

I seguenti due teoremi di separazione stabiliscono delle condizioni affinché due sottoinsiemi di uno spazio di Banach E siano separati da un iperpiano affine chiuso. Il primo consente di separare due convessi disgiunti di cui uno è aperto, mentre il secondo consente di separare strettamente due convessi disgiunti di cui uno chiuso e l'altro compatto.

TEOREMA 1.7 (Teorema di Hahn–Banach – Prima forma geometrica). *Siano $A, B \subseteq E$ due sottoinsiemi convessi disgiunti di E con A aperto. Allora esiste un iperpiano H che separa A e B.*

TEOREMA 1.8 (Teorema di Hahn–Banach – Seconda forma geometrica). *Siano $A, B \subseteq E$ due sottoinsiemi convessi non vuoti disgiunti di E con A chiuso e B compatto. Allora esiste un iperpiano H che separa strettamente A e B.*

Da quest'ultimo teorema segue un importante corollario per i sottospazi vettoriali.

COROLLARIO 1.9. *Sia $F \subseteq E$ un sottospazio vettoriale con $\overline{F} \neq E$. Allora esiste $f \in E^\star$ non identicamente nullo tale che $\langle f, x\rangle = 0$, per ogni $x \in F$.*

1.3. Il principio di uniforme limitatezza e il teorema della mappa aperta

In questa sezione enunciamo il *teorema di Banach–Steinhaus*, o *principio di uniforme limitatezza* e alcuni suoi corollari, che permettono di stabilire quando un sottoinsieme di uno spazio di Banach E è limitato, considerando le sue immagini mediante funzionali lineari. L'importanza di questo teorema è evidente: da una condizione puntuale sul comportamento di una famiglia di operatori si può ottenere una condizione globale sulle norme degli operatori stessi. Inoltre, vediamo il *teorema della mappa aperta*, o *teorema di Banach–Schauder*: un operatore lineare, continuo e suriettivo è anche aperto. Da ciò segue la continuità dell'inverso di un operatore lineare, continuo e invertibile. Per le dimostrazioni di questi risultati, si veda [1, Capitolo 2].

DEFINIZIONE 1.10 (Norma operatoriale). Siano E, F spazi di Banach. Con $\mathscr{L}(E,F)$ indichiamo lo spazio degli operatori lineari e continui $T : E \to F$, con la *norma operatoriale*

$$\|T\|_{\mathscr{L}} = \sup_{x\in E,\ \|x\|\leqslant 1} \|Tx\| \,.$$

TEOREMA 1.11 (Teorema di Banach–Steinhaus). *Sia $\{T_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ una famiglia di operatori in $\mathscr{L}(E,F)$ tale che per ogni $x \in E$, valga*

$$\sup_{i\in\mathcal{I}} \|T_i x\| < +\infty \,,$$

allora,

$$\sup_{i\in\mathcal{I}} \|T_i\|_{\mathscr{L}} < +\infty \,.$$

Si hanno seguenti corollari.

COROLLARIO 1.12. *Sia E uno spazio di Banach e $B \subseteq E$. Se per ogni $f \in E^\star$ si ha che $f(B)$ è limitato in $\mathbb{R}$, allora B è limitato.*

COROLLARIO 1.13. *Sia E uno spazio di Banach e $B^\star \subseteq E^\star$. Se per ogni $x \in E$ si ha che $\langle B^\star, x\rangle = \{\langle b, x\rangle \mid b \in B^\star\}$ è limitato in $\mathbb{R}$, allora $B^\star$ è limitato.*

Concludiamo questa sezione enunciando il teorema della mappa aperta che implica la continuità dell'inverso di un operatore continuo invertibile.

TEOREMA 1.14 (Teorema della mappa aperta). *Siano E, F due spazi di Banach e sia $T : E \to F$ un operatore lineare continuo e suriettivo. Allora T è* aperto, *cioè l'immagine $T(U)$ di ogni aperto $U \subseteq E$ è un aperto di F.*

COROLLARIO 1.15. *Siano E, F due spazi di Banach e sia $T : E \to F$ un operatore lineare continuo e bigettivo. Allora $T^{-1} : F \to E$ è continuo.*

1.4. Topologie indotte da famiglie di funzioni

Questa sezione è dedicata alla definizione della topologia debole su uno spazio di Banach E e della topologia debole* sul suo duale $E^\star$.

DEFINIZIONE 1.16 (Topologia indotta da una famiglia di funzioni). Sia X un insieme e siano $\varphi_i : X \to Y_i$ funzioni da X in degli spazi topologici Y_i, per $i \in \mathcal{I}$. Costruiamo esplicitamente su X una topologia come segue.

(1) Consideriamo l'insieme di tutte le controimmagini degli aperti di ogni spazio Y_i per le funzioni φ_i:
$$\mathcal{U} = \left\{ \varphi_i^{-1}(\Omega) \,\middle|\, i \in \mathcal{I} \text{ e } \Omega \text{ aperto di } Y_i \right\}$$
(2) e tutte le intersezioni finite di questi insiemi,
$$\mathcal{V} = \left\{ \bigcap_{i=1}^{n} U_i \,\middle|\, U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U} \right\}.$$
(3) Costruiamo infine la famiglia τ di tutte le unioni degli insiemi in $\mathcal{V}$,
$$\tau = \left\{ \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha \,\middle|\, V_\alpha \in \mathcal{V} \right\}.$$

Segue che la famiglia τ è chiusa per unioni e intersezioni finite, dunque è una topologia che diciamo *indotta dalla famiglia di funzioni* φ_i. Inoltre, si vede facilmente che è la topologia meno fine tale che ognuna delle funzioni $\varphi_i : X \to Y_i$ è continua.

Da questa definizione, si hanno immediatamente le seguenti proprietà.

PROPOSIZIONE 1.17. *Sia τ la topologia su X indotta dalla famiglia di funzioni $\varphi_i : X \to Y_i$, per $i \in \mathcal{I}$. Allora,*
- *una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $x \in X$ se e solo se, per ogni $i \in \mathcal{I}$, si ha $\varphi_i(x_n) \to \varphi_i(x)$,*
- *una mappa $\psi : Z \to X$, con Z spazio topologico, è continua se e solo se, per ogni $i \in \mathcal{I}$, si ha $\varphi_i \circ \psi$ continua.*

Definiamo dunque le due topologie oggetto di questa sezione.

DEFINIZIONE 1.18 (Topologia debole). Sia E uno spazio di Banach. Si dice *topologia debole* e la si denota con $\sigma(E, E^\star)$, la topologia meno fine su E in cui tutte le funzioni $f \in E^\star$ sono continue (cioè quella indotta dai funzionali nel duale).
La convergenza di una successione x_n a x in $\sigma(E, E^\star)$ si denota con il simbolo $x_n \rightharpoonup x$.

DEFINIZIONE 1.19 (Topologia debole*). Sia E uno spazio di Banach. Si dice *topologia debole** e la si denota con $\sigma(E^\star, E)$, la topologia meno fine su $E^\star$ in cui ogni funzionale lineare Jx su $E^\star$, dato da $Jx(f) = \langle f, x\rangle$ (si ricordi la Definizione 1.3), per ogni $x \in E$, sono continui (cioè quella indotta dai funzionali $J(E)$ nel biduale).
La convergenza di una successione f_n a f in $\sigma(E^\star, E)$ si denota con il simbolo $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$.

OSSERVAZIONE 1.20. Dal momento che su ogni spazio sono definite due topologie e su ogni spazio duale sono definite tre topologie, vediamo le mutue proprietà di inclusione:
- su uno spazio di Banach E, la topologia debole $\sigma(E, E^\star)$ è meno fine della topologia *forte*, cioè quella indotta dalla norma,
- sullo spazio duale $E^\star$, la topologia debole* $\sigma(E^\star, E)$ è meno fine della topologia debole $\sigma(E^\star, E^{\star\star})$.

La seguente proposizione caratterizza le basi di intorni di ogni elemento di E e di $E^\star$, nelle topologie deboli.

PROPOSIZIONE 1.21. *Sia E uno spazio di Banach. Al variare di $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ e $f_1, \ldots, f_k \in E^\star$, i seguenti insiemi formano una base di intorni di $x_0 \in E$ per la topologia debole $\sigma(E, E^\star)$:*
$$V(f_1, \ldots, f_k\,; \varepsilon) = \left\{ x \in E \,\middle|\, |\langle f_i, x - x_0\rangle| < \varepsilon,\, i = 1, \ldots, k \right\}.$$

Al variare di $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ e $x_1, \dots, x_k \in E$, i seguenti insiemi formano una base di intorni di $f_0 \in E^\star$ nella topologia debole* $\sigma(E^\star, E)$:

$$V(x_1, \dots, x_k\,; \varepsilon) = \left\{ f \in E^\star \,\middle|\, |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon,\, i = 1, \dots, k \right\}.$$

OSSERVAZIONE 1.22. Per mezzo di questa descrizione degli intorni nelle topologie deboli, si conclude facilmente che la topologia debole e la topologia debole* sono di Hausdorff: per ogni coppia di punti distinti esistono due intorni disgiunti dei due punti. Per la topologia debole, questi intorni si ottengono sfruttando il Teorema 1.8, mentre, per la topologia debole*, se $f_1 \neq f_2$ allora esiste $x \in E$ tale che $\langle f_1, x\rangle \neq \langle f_2, x\rangle$, quindi possiamo trovare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\langle f_1, x\rangle < \alpha < \langle f_2, x\rangle$, da cui si ottengono i due intorni disgiunti di f_1 e f_2.

Enunciamo infine alcune proprietà riguardanti la convergenza di successioni in queste topologie (si veda [1, Proposizioni 3.5 e 3.13].)

PROPOSIZIONE 1.23. *Sia E uno spazio di Banach e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in E. Allora,*

- *$x_n \rightharpoonup x$ se e solo se $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, per ogni $f \in E^\star$,*
- *se $x_n \to x$, allora $x_n \rightharpoonup x$,*
- *se $x_n \rightharpoonup x$, allora $\|x_n\|$ limitata e $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$,*
- *se $x_n \rightharpoonup x$ e $f_n \to f$, allora $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, per ogni $f \in E^\star$.*

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $E^\star$. Allora,

- *$f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ se e solo se $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, per ogni $x \in E$,*
- *se $f_n \to f$, allora $f_n \rightharpoonup f$ allora $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$,*
- *se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$, allora $\|f_n\|$ limitata e $\|f\| \leqslant \liminf \|f_n\|$,*
- *se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ e $x_n \to x$, allora $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, per ogni $x \in E$.*

1.5. I teoremi di Mazur e Banach–Alaoglu–Bourbaki

Vediamo alcune prime proprietà importanti delle topologie deboli. In particolare, la caratterizzazione della chiusura nella topologia debole per gli insiemi convessi, il teorema di Mazur e il teorema di Banach–Alaoglu. Nel seguito E è uno spazio di Banach.

TEOREMA 1.24 (Caratterizzazione dei convessi debolmente chiusi). *Sia $F \subseteq E$ convesso. F è chiuso in $\sigma(E, E^\star)$ se e solo se è chiuso nella topologia forte.*

DIMOSTRAZIONE. Un'implicazione è banale, in quanto la topologia forte è più fine della debole (Osservazione 1.20).
Mostriamo l'implicazione inversa. Sia F un chiuso nella topologia forte e sia $x_0 \notin F$. Per il Teorema 1.8 esiste un iperpiano che separa strettamente $\{x_0\}$ e F, ossia

$$\langle f, x_0\rangle < \alpha < \langle f, y\rangle\,,$$

per ogni $y \in F$. Dunque, l'insieme $V = \{x \in E \mid \langle f, x\rangle < \alpha\}$ è un intorno di x_0 nella topologia debole, per la Proposizione 1.21, inoltre $V \cap F = \varnothing$. Allora, ogni punto di $\mathscr{C}F$ ammette un intorno aperto nella topologia $\sigma(E, E^\star)$ disgiunto da F, quindi $\mathscr{C}F$ è aperto e F è chiuso. □

Da questa caratterizzazione dei chiusi convessi segue il teorema di Mazur sulle successioni debolmente convergenti, TEOREMA 1.25 (Teorema di Mazur). *Sia* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ *una successione tale che* $x_n \rightharpoonup x$. *Allora esiste una successione* $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *di combinazioni convesse dei punti* x_n *che converge fortemente a* x.

DIMOSTRAZIONE. Sia C l'inviluppo convesso di $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, cioè l'insieme dato da tutte le combinazioni convesse di elementi di $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Per definizione di convergenza debole, $x \in \overline{\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}} = \overline{C}$. Poiché $\overline{C}$ è un chiuso della topologia debole, per il teorema precedente è anche un chiuso della topologia forte. Allora esiste una successione in C, ossia di combinazioni convesse delle x_n, che converge a x nella topologia forte. $\square$

Il teorema di Banach–Alaoglu–Bourbaki è una delle motivazioni principali per considerare la topologia debole* su uno spazio di Banach che ammetta un *preduale*, cioè un altro spazio di Banach di cui è il duale.

TEOREMA 1.26 (Teorema di Banach–Alaoglu–Bourbaki). *La palla unitaria chiusa*

$$B_{E^\star} = \{f \in E^\star \mid \|f\| \leqslant 1\}$$

è compatta nella topologia $\sigma(E^\star, E)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathbb{R}^E$ l'insieme di tutte le funzioni $\omega : E \to \mathbb{R}$ con la topologia prodotto, ricordando che la convergenza in questa topologia coincide con la convergenza puntuale. Adottiamo la notazione $\omega_x = \omega(x) \in \mathbb{R}$, per ogni $\omega \in \mathbb{R}^E$.
Dal momento che $E^\star \subseteq \mathbb{R}^E$, consideriamo l'immersione canonica $\Phi : E^\star \to \mathbb{R}^E$ data da $f \mapsto (f_x)_{x\in E} \in \mathbb{R}^E$, dove $f_x = \langle f, x\rangle$. Per la Proposizione 1.17, si ha che Φ è continua e restringendo il codominio di Φ a $\Phi(E^\star) \subseteq \mathbb{R}^E$ con la topologia di sottospazio, la mappa Φ^{-1} è continua. Ne consegue che $\Phi : E^\star \to \Phi(E^\star)$ è un omeomorfismo.
Sia dunque $K = \Phi(B_E)$, che può essere definito dalle seguenti proprietà:

$$K = \left\{ (f_x)_{x\in E} \in \mathbb{R}^E \;\middle|\; \begin{array}{cc} |f_x| \leqslant \|x\| & \text{per ogni } x \in E \\ f_{x+y} = f_x + f_y & \text{per ogni } x, y \in E \\ f_{\lambda x} = \lambda f_x & \text{per ogni } x \in E,\ \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right\}.$$

Chiamiamo K_1 l'insieme degli $(f_x)_{x\in E} \in \mathbb{R}^E$ che rispettano la prima proprietà e K_2 l'insieme degli $(f_x)_{x\in E} \in \mathbb{R}^E$ che rispettano la seconda e la terza proprietà, da cui $K = K_1 \cap K_2$. La tesi si riduce allora a mostrare che K_1 è compatto e K_2 è chiuso.
Si può chiaramente riscrivere K_1 come prodotto cartesiano di compatti,

$$K_1 = \prod_{x\in E} \big[-\|x\|,\ \|x\| \big] ,$$

dunque, per il teorema di Tychonoff ([2, Capitolo XI, Teorema 1.4]), K_1 è compatto, mentre K_2 è dato dall'intersezione

$$K_2 = \bigcap_{x,y\in E} A_{x,y} \cap \bigcap_{\lambda\in\mathbb{R}, x\in E} B_{\lambda,x} ,$$

dove gli insiemi

$$\begin{aligned} A_{x,y} &= \big\{(f_x)_{x\in E} \in \mathbb{R}^E \,\big|\, f_{x+y} - f_x - f_y = 0\big\} , \\ B_{\lambda,x} &= \big\{(f_x)_{x\in E} \in \mathbb{R}^E \,\big|\, f_{\lambda x} - \lambda f_x = 0\big\} \end{aligned}$$

sono chiusi, quindi la tesi segue. $\square$

1.6. I lemmi di Helly e Goldstine

Questa sezione è dedicata ai lemmi di Helly e Goldstine. Il primo è un risultato di natura tecnica sugli spazi di Banach, mentre il secondo mostra un'importante proprietà di densità della palla unitaria chiusa B_E quando la si "immerge" nello spazio duale $E^{\star\star}$.

LEMMA 1.27 (Lemma di Helly). *Sia E uno spazio di Banach. Siano $f_1, \dots, f_k \in E^\star$ e $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathbb{R}$, allora sono equivalenti:*

(1) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_\varepsilon \in E$ tale che $\|x_\varepsilon\| \leqslant 1$ e per ogni $i = 1, \dots, k$,

$$|\langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \gamma_i| < \varepsilon\,,$$

(2) per ogni $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$, si ha

$$\left|\sum_{i=1}^k \beta_i \gamma_i\right| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^k \beta_i f_i\right\|.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che valga la condizione (1). Fissati $\beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{R}$, sia S la somma dei loro valori assoluti. Per ipotesi, si ha dunque

$$\left|\sum_{i=1}^k \beta_i \langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \sum_{i=1}^k \beta_i \gamma_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^k |\beta_i| |\langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \gamma_i| \leqslant \varepsilon \sum_{i=1}^k |\beta_i| = \varepsilon S\,,$$

da cui

$$\left|\sum_{i=1}^k \beta_i \gamma_i\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^k \beta_i \langle f_i, x_\varepsilon \rangle\right| + \left|\sum_{i=1}^k \beta_i \langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \sum_{i=1}^k \beta_i \gamma_i\right| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^k \beta_i f_i\right\| \|x_\varepsilon\| + \varepsilon S \leqslant \left\|\sum_{i=1}^k \beta_i f_i\right\| + \varepsilon S\,.$$

La tesi segue l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.
Supponiamo ora che valga la condizione (2). Sia $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \mathbb{R}^k$ e sia $\varphi : E \to \mathbb{R}^k$ tale che

$$\varphi(x) = \big(\langle f_1, x \rangle, \dots, \langle f_k, x \rangle\big)\,.$$

La tesi è equivalente a mostrare che $\gamma \in \overline{\varphi(B_E)}$. Se per assurdo $\gamma \notin \overline{\varphi(B_E)}$, allora per il Teorema 1.8, esistono $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in \mathbb{R}^k$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x \in B_E$, si ha

$$\beta \cdot \varphi(x) < \alpha < \beta \cdot \gamma\,,$$

da cui per ogni $x \in B_E$,

$$\left\langle \sum_{i=1}^k \beta_i f_i, x \right\rangle < \alpha < \sum_{i=1}^k \beta_i \gamma_i\,,$$

e passando all'estremo superiore, concludiamo

$$\left\|\sum_{i=1}^k \beta_i f_i\right\| \leqslant \alpha < \sum_{i=1}^k \beta_i \gamma_i\,,$$

il che è assurdo. □

LEMMA 1.28 (Lemma di Goldstine). *Sia E uno spazio di Banach. Allora $J(B_E)$ è denso in $B_{E^{\star\star}}$ nella topologia $\sigma(E^{\star\star}, E^\star)$. Di conseguenza, $J(E)$ è denso in $E^{\star\star}$ nella topologia $\sigma(E^{\star\star}, E^\star)$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\xi \in B_{E^{\star\star}}$ e sia V un intorno di ξ nella topologia $\sigma(E^{\star\star}, E^{\star})$. La tesi è equivalente a mostrare che $V \cap J(B_E) \neq \varnothing$. Ricordando la Proposizione 1.21, possiamo scrivere

$$V = \{\eta \in E^{\star\star} \mid |\langle \eta - \xi, f_i \rangle| < \varepsilon \ \text{ per ogni } i = 1, \ldots, k\}$$

e detto $\gamma_i = \langle \xi, f_i \rangle$, è sufficiente verificare la seconda condizione del Lemma 1.27. Si ha dunque

$$\left| \sum_{i=1}^{k} \beta_i \gamma_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{k} \beta_i \langle \xi, f_i \rangle \right| = \left| \left\langle \xi, \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i \right\rangle \right| \leqslant \|\xi\| \left\| \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i \right\| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_i \right\|,$$

da cui la tesi. $\square$

CAPITOLO 2

Il teorema di Eberlein–Šmulian

Lo scopo di questo capitolo è provare il *teorema di Eberlein–Šmulian*, che mostra l'equivalenza tra la compattezza per ricoprimenti e la compattezza per successioni nella topologia debole di uno spazio di Banach. La dimostrazione si basa sulle proprietà delle topologie deboli di uno spazio di Banach separabile e sul *teorema di Krein–Šmulian*, un risultato di natura tecnica fondamentale, che caratterizza i convessi chiusi nella topologia debole* analizzando le loro intersezioni con palle chiuse.

2.1. Spazi separabili

DEFINIZIONE 2.1 (Spazio separabile). Uno spazio di Banach E si dice *separabile* se esiste un sottoinsieme numerabile $B \subseteq E$ tale che $\overline{B} = E$.

La proprietà di separabilità di uno spazio di Banach E è implicata da quella del suo duale.

TEOREMA 2.2. *Sia E uno spazio di Banach. Se $E^\star$ è separabile, allora anche E è separabile.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione densa in $E^\star$, che esiste per ipotesi. Dalla definizione di norma di $E^\star$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in E$ tale che $\|x_n\| = 1$ e che

$$\langle f_n, x_n \rangle \geqslant \frac{1}{2}\|f_n\| \,.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, definiamo lo spazio vettoriale L_n sul campo $\mathbb{Q}$ dei razionali generato dai primi n elementi della successione, $x_1, \dots, x_n$. Sia $L_0 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$, che è numerabile perché unione di numerabili. Definiamo poi L come lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ generato dagli elementi della successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Per costruzione, L_0 è denso in L, quindi se mostriamo la densità di L in E, abbiamo la tesi.
Sia $f \in E^\star$ tale che per ogni $x \in L$, si abbia $\langle f, x\rangle = 0$. Per la densità di $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che $\|f - f_N\| < \varepsilon$ e dal momento che $\langle f, x_N\rangle = 0$, si ha

$$\frac{1}{2}\|f_N\| \leqslant \langle f_N, x_N\rangle = \langle f_N - f, x_N\rangle \leqslant \|f - f_N\|\,\|x_N\| < \varepsilon \,,$$

dunque,

$$\|f\| \leqslant \|f - f_N\| + \|f_N\| < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon \,.$$

Dall'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ segue che $f = 0$, quindi, per il Corollario 1.9, deve essere $\overline{L} = E$ e abbiamo la tesi. □

OSSERVAZIONE 2.3. Se E è separabile, il suo duale potrebbe invece non esserlo. Lo spazio $E = L^1(0,1)$ delle funzioni sommabili secondo Lebesgue su $(0,1)$ è separabile (in particolare, le funzioni semplici date dalle combinazioni lineari finite a coefficienti razionali di caratteristiche di intervalli con estremi razionali, sono un sottoinsieme denso numerabile). Per il *teorema di rappresentazione di Riesz* (si veda [**1**, Teorema 4.14]), dal momento che $(0,1)$ è uno spazio di misura finito, sappiamo che $L^1(0,1)^\star = L^\infty(0,1)$, che tuttavia non è separabile. Infatti, se per ogni $t \in (0,1)$ definiamo le funzioni $f_t = \chi_{(0,t)}$, abbiamo che $\|f_t - f_s\|_\infty = 1$, se $t \neq s$ e se consideriamo per assurdo una successione $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ densa in $L^\infty(0,1)$, allora per ogni $t > 0$, esiste $n_t \in \mathbb{N}$ tale che

$$\|f_t - g_{n_t}\|_\infty \leqslant \frac{1}{4}\,.$$

Consideriamo dunque la funzione $\varphi : (0,1) \to \mathbb{N}$ che a ogni $t \in (0,1)$ associa $n_t \in \mathbb{N}$. Se $t \neq s$ e per assurdo, $n_t = n_s$, si ha

$$1 = \|f_t - f_s\| \leqslant \|f_t - g_{n_t}\| + \|g_{n_t} - f_s\| \leqslant \frac{1}{2}\,,$$

da cui se $t \neq s$, deve essere $n_t \neq n_s$, cioè la funzione φ è iniettiva, il che è assurdo.

I seguenti due teoremi, che possono essere visti l'uno come il duale dell'altro, mettono in relazione la separabilità di uno spazio di Banach E con la metrizzabilità della palla unitaria chiusa $B_{E^\star}$ nella topologia debole* e la separabilità del duale $E^\star$ con la metrizzabilità della palla unitaria chiusa B_E nella topologia debole.

TEOREMA 2.4. *Uno spazio di Banach E è separabile se e solo se la palla unitaria chiusa del suo duale $B_{E^\star} \subseteq E^\star$ è metrizzabile nella topologia $\sigma(E^\star, E)$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che E sia separabile e sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione densa in $B_E \subseteq E$, dunque con $\|x_n\| \leqslant 1$. Definiamo una nuova norma su $E^\star$, che denotiamo con $[\,\cdot\,]$,

$$[f] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f, x_n\rangle|$$

(le proprietà di norma di $[\,\cdot\,]$ sono facilmente verificabili). Maggiorando ogni termine $|\langle f, x_n\rangle|$ con $\|f\|\,\|x_n\| \leqslant \|f\|$, è facile vedere che $[f] \leqslant \|f\|$. Sia quindi $d(f,g) = [f-g]$ la distanza indotta da questa norma. Mostriamo che la topologia indotta τ_d coincide con la restrizione di $\sigma(E^\star, E)$ a $B_{E^\star}$, da cui la conclusione di metrizzabilità di $B_{E^\star}$.
Sia $f_0 \in B_{E^\star}$ e ricordando la Proposizione 1.21, sia

$$V = \{f \in B_{E^\star} \mid |\langle f - f_0, y_i\rangle| < \varepsilon,\ i = 1,\dots,k\}$$

un intorno di f_0 per $\sigma(E^\star, E)$, dove $\varepsilon > 0$ e $y_1, \dots, y_k \in E$ con $\|y_i\| \leqslant 1$ per ogni $i = 1,\dots,k$. Per la densità di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in B_E, per ogni $i = 1,\dots,k$, esiste $n_i \in \mathbb{N}$ tale che $\|y_i - x_{n_i}\| < \varepsilon/4$. Scegliamo allora $r > 0$ tale che per ogni $i = 1,\dots,k$, si abbia $2^{n_i} r < \varepsilon/2$ e mostriamo che

$$U = \{f \in B_{E^\star} \mid d(f, f_0) < r\} \subseteq V\,.$$

Se $f \in U$, si ha $d(f, f_0) < r$, quindi per ogni $i = 1,\dots,k$,

$$\begin{aligned}
|\langle f - f_0, y_i\rangle| &= |\langle f - f_0, y_i - x_{n_i} + x_{n_i}\rangle| \\
&\leqslant |\langle f - f_0, y_i - x_{n_i}\rangle| + |\langle f - f_0, x_{n_i}\rangle| \\
&\leqslant \|f - f_0\|\|x_i - y_{n_i}\| + 2^{n_i}[f - f_0] \\
&< 2\frac{\varepsilon}{4} + 2^{n_i} r < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

cioè $f \in U$. Questo mostra che la topologia τ_d è più fine di $\sigma(E^\star, E)$.
Vediamo il viceversa. Fissato $r > 0$, se $f_0 \in B_{E^\star}$ e $U = \{f \in B_{E^\star} \mid d(f, f_0) < r\}$, per ogni

$f \in B_{E^\star}$ tale che $|\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon$ per ogni $i = 1, \dots, k$, dove $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$, si ha (tenendo presente che $\|f - f_0\| \leqslant \|f\| + \|f_0\| \leqslant 2$)

$$\begin{aligned} d(f, f_0) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f - f_0, x_n\rangle| \\ &= \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} |\langle f - f_0, x_n\rangle| + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |\langle f - f_0, x_n\rangle| \\ &< \varepsilon \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|f - f_0\| \|x_n\| \\ &< \varepsilon + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon + \frac{1}{2^{k-1}} < r\,, \end{aligned}$$

scegliendo $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo e $k \in \mathbb{N}$ abbastanza grande. Dunque, per tale scelta, si ha

$$V = \{f \in B_{E^\star} \mid |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon,\, i = 1, \dots, k\} \subseteq \{f \in B_{E^\star} \mid d(f, f_0) < r\} = U\,,$$

da cui la topologia τ_d è meno fine di $\sigma(E^\star, E)$ e per quanto visto sopra, devono coincidere.
Supponiamo ora che $B_{E^\star}$ sia metrizzabile e sia d la distanza che induce la topologia $\sigma(E^\star, E)$ su $B_{E^\star}$. Sia $U_n = \{f \in B_{E^\star} \mid d(f, 0) < 1/n\}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$, siano

$$V_n = \{f \in B_{E^\star} \mid |\langle f, x\rangle| < \varepsilon_n \text{ per ogni } x \in \Phi_n\}$$

intorni di 0 in $\sigma(E^\star, E)$ tali che $V_n \subseteq U_n$, dove $\varepsilon_n > 0$ e Φ_n sottoinsieme finito di E (per la Proposizione 1.21). Definiamo allora $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n$ e mostriamo che il sottospazio generato da D è denso in E, per mezzo del Corollario 1.9. Se $f \in E^\star$ tale che $\langle f, x\rangle = 0$ per ogni $x \in D$, allora $f \in V_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi $f \in U_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, il che implica $f = 0$ e questo conclude la dimostrazione. □

Dal teorema appena dimostrato e dal Teorema 1.26 si conclude che se uno spazio di Banach E è separabile, la palla unitaria chiusa $B_{E^\star}$ è anche compatta per successioni in quanto compatta e metrizzabile. Dunque, tenendo presente anche il Teorema 2.2, concludiamo che nella topologia debole* di uno spazio di Banach separabile o con preduale separabile, compattezza e compattezza per successioni si equivalgono.

TEOREMA 2.5. *Dato uno spazio di Banach E, il suo duale $E^\star$ è separabile se e solo se la palla unitaria chiusa $B_E \subseteq E$ è metrizzabile nella topologia $\sigma(E, E^\star)$.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione che se $E^\star$ è separabile, allora la palla unitaria chiusa $B_E \subseteq E$ è metrizzabile, è esattamente la stessa del teorema precedente, scambiando i ruoli di E e di $E^\star$.
Supponiamo quindi che B_E sia metrizzabile. Sia d la distanza che induce la topologia $\sigma(E, E^\star)$ su B_E. Sia $U_n = \{x \in B_E \mid d(x, 0) < 1/n\}$ e ricordando la Proposizione 1.21, per ogni $n \in \mathbb{N}$, siano

$$V_n = \{x \in B_E \mid |\langle f, x\rangle| < \varepsilon_n \text{ per ogni } f \in \Phi_n\}$$

intorni di $0 \in E$ in $\sigma(E, E^\star)$ tali che $V_n \subseteq U_n$, dove $\varepsilon_n > 0$ e Φ_n è un sottoinsieme finito di $E^\star$.
Definiamo $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Phi_n$ e chiamiamo F lo spazio vettoriale generato da D che, per assurdo,

supponiamo soddisfi $\overline{F} \neq E^\star$. Allora, per ogni $g \notin \overline{F}$, per il Teorema 1.8 e il Corollario 1.9, esistono $\eta \in E^{\star\star}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $f \in F$ si ha

$$0 = \langle \eta, f \rangle < \alpha < \langle \eta, g \rangle .$$

Inoltre, moltiplicando η e g per opportuni scalari, otteniamo $\xi \in E^{\star\star}$ e $f_0 \in E^\star \setminus \overline{F}$ tali che $\|\xi\| = 1$, $\|f_0\| > 1$ e

$$\langle \xi, f_0 \rangle > 1 \quad \text{e} \quad \langle \xi, f \rangle = 0, \quad \text{per ogni } f \in F .$$

Definiamo l'insieme

$$W = \left\{ x \in B_E \,\middle|\, |\langle f_0, x \rangle| < 1/2 \right\},$$

e per assurdo, supponiamo che $V_n \not\subseteq W$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Potremmo allora costruire una successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $x_n \in V_n \setminus W \subseteq U_n \setminus W$, da cui $d(x_n, 0) < 1/n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Seguirebbe dunque che $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, 0) = 0$ ed essendo d la distanza che induce su B_E la topologia debole, si avrebbe $x_n \rightharpoonup 0$, ma poiché $x_n \notin W$,

$$\frac{1}{2} \leqslant \lim_{n\to\infty} |\langle f_0, x_n \rangle| = |\langle f_0, 0 \rangle| = 0 ,$$

il che è assurdo. Dunque deve esistere $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $V_{n_0} \subseteq W$. Dal momento che $\xi \in B_{E^{\star\star}}$ e che per il Lemma 1.28 (di Goldstine), $J(B_E)$ è denso in $B_{E^{\star\star}}$ nella topologia $\sigma(E^{\star\star}, E^\star)$, ogni aperto debole* di $B_{E^{\star\star}}$ ha intersezione non vuota con $J(B_E)$. Ricordando allora la Proposizione 1.21, consideriamo gli intorni di ξ

$$V_1 = \{\eta \in B_{E^{\star\star}} \mid |\langle \eta - \xi, f \rangle| < \varepsilon_{n_0} \text{ per ogni } f \in \Phi_{n_0}\}$$

e

$$V_2 = \{\eta \in B_{E^{\star\star}} \mid |\langle \eta - \xi, f_0 \rangle| < 1/2\} .$$

Essendo la loro intersezione $V_1 \cap V_2$ un aperto, che quindi ha intersezione non vuota con $J(B_E)$, esiste $z \in B_E$ tale che

$$|\langle f, z \rangle - \langle \xi, f \rangle| < \varepsilon_{n_0} \quad \text{per ogni } f \in \Phi_{n_0} \qquad \text{e} \qquad |\langle f_0, z \rangle - \langle \xi, f_0 \rangle| < \frac{1}{2} .$$

Poiché $\langle \xi, f \rangle = 0$ per ogni $f \in \Phi_{n_0}$, otteniamo allora

$$|\langle f, z \rangle| < \varepsilon_{n_0} \quad \text{per ogni } f \in \Phi_{n_0} \qquad \Longrightarrow \qquad z \in V_{n_0}$$

e d'altro canto, anche

$$\langle f_0, z \rangle - \langle \xi, f_0 \rangle > -\frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \langle f_0, z \rangle > \langle \xi, f_0 \rangle - \frac{1}{2} > \frac{1}{2} ,$$

da cui $z \notin W$, il che è assurdo. Dunque $\overline{F} = E^\star$, da cui $E^\star$ è separabile. □

2.2. Il teorema di Krein–Šmulian

La dimostrazione del teorema di Krein–Šmulian, che permette di caratterizzare i convessi chiusi nella topologia debole* del duale di uno spazio di Banach E, si basa su alcune proprietà degli spazi di successioni.

DEFINIZIONE 2.6 (Spazi di successioni). Data una successione $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, si definiscono le norme

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p} \qquad \text{per } 1 \leqslant p < +\infty$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|$$

e di conseguenza, gli spazi di Banach

$$\ell^p = \{x \mid \|x\|_p < +\infty\} \qquad \text{per } 1 \leqslant p < +\infty$$
$$\ell^\infty = \{x \mid \|x\|_\infty < +\infty\}$$

In particolare, denotiamo con c_0 il sottospazio vettoriale di ℓ^∞ delle successioni infinitesime, cioè

$$c_0 = \left\{x \in \ell^\infty \,\middle|\, \lim_{k\to\infty} x_k = 0\right\}.$$

Se $p \neq +\infty$, vale la seguente caratterizzazione dei duali degli spazi ℓ^p (si veda [1, Teorema 11.18], per una dimostrazione).

TEOREMA 2.7. *Per ogni $\phi \in \ell^{p\star}$, esiste un unico $u \in \ell^{p'}$, dove $p' \geqslant 1$ è l'esponente coniugato per Hölder di p, ossia $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, tale che per ogni $x \in \ell^p$, si ha*

$$\langle \phi, x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k \,.$$

Inoltre, $\|u\|_{p'} = \|\phi\|_{\ell^{p\star}}$.

Nel caso $p = +\infty$, il duale $\ell^{\infty\star}$ contiene strettamente ℓ^1. Tuttavia, si dimostra che ℓ^1 è lo spazio duale di c_0.

PROPOSIZIONE 2.8. *Per ogni $\phi \in c_0^\star$, esiste un unico $u \in \ell^1$ tale che, per ogni $x \in c_0$, si ha*

$$\langle \phi, x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k \,.$$

Inoltre, $\|u\|_1 = \|\phi\|_{c_0^\star}$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo le successioni $e_k = (0, 0, \ldots, 0, \overset{(k)}{1}, 0, 0, \ldots) \in c_0$ e sia $u_k = \langle \phi, e_k\rangle$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Vogliamo dimostrare che $u = \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è la successione di ℓ^1 che verifica la tesi. Per ogni $N \in \mathbb{N}$ fissato, abbiamo che

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} u_k x_k &= \sum_{k=1}^{N} x_k \langle \phi, e_k\rangle = \left\langle \phi, \sum_{k=1}^{N} x_k e_k \right\rangle \\
&\leqslant \|\phi\|_{c_0^\star} \|(x_1, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)\|_\infty \\
&= \|\phi\|_{c_0^\star} \sup_{k=1,\ldots,N} |x_k| \\
&\leqslant \|\phi\|_{c_0^\star} \|x\|_\infty \,.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Definiamo ora la seguente successione:

$$x_k = \begin{cases} \dfrac{u_k}{|u_k|} & \text{se } u_k \neq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e osserviamo che $\|x\|_\infty = 1$. Sostituendola nella disuguaglianza (2.1), otteniamo

$$\sum_{k=1}^{N} u_k x_k = \sum_{k=1}^{N} |u_k| \leqslant \|\phi\|_{c_0^\star} \|x\|_\infty = \|\phi\|_{c_0^\star} \,.$$

Dunque, se $N \to \infty$, dal momento che $\|\phi\|_{c_0^\star} < +\infty$, si ottiene che $u \in \ell^1$ e che $\|u\|_1 \leqslant \|\phi\|_{c_0^\star}$. Si verifica poi facilmente che il seguente insieme D è denso in c_0.

$$D = \Big\{ x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid x_k \in \mathbb{Q} \text{ per ogni } k \text{ ed esiste } k_0 \in \mathbb{N} \text{ tale che } x_k = 0 \text{ per ogni } k \geqslant k_0 \Big\} \,.$$

Poiché le successioni in D sono definitivamente nulle, si ha che $\langle \phi, x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k$ sull'insieme D e per densità, $\langle \phi, x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k$ allora anche su tutto lo spazio c_0. Da questa uguaglianza, per la disuguaglianza di Hölder, segue che

$$|\langle \phi, x\rangle| \leqslant \|u\|_1 \|x\|_\infty \,,$$

per ogni $x \in c_0$ e passando all'estremo superiore, concludiamo che $\|\phi\|_{c_0^\star} \leqslant \|u\|_1$, quindi $\|u\|_1 = \|\phi\|_{c_0^\star}$. Con lo stesso argomento di densità si ha l'unicità di u. □

TEOREMA 2.9 (Teorema di Krein–Šmulian). *Sia E uno spazio di Banach. Un convesso $C \subseteq E^\star$ è chiuso nella topologia $\sigma(E^\star, E)$ se e solo se la sua intersezione con ogni multiplo positivo della palla unitaria chiusa $B_{E^\star}$ è un chiuso nella stessa topologia.*

DIMOSTRAZIONE. Un'implicazione è banale. Supponiamo che per ogni $r \in \mathbb{R}$, l'insieme $C \cap rB_{E^\star}$ sia un chiuso per la topologia $\sigma(E^\star, E)$ e senza perdere di generalità, supponiamo $0 \notin C$. poniamo quindi $d = d(0, C) > 0$ e consideriamo una d_k successione crescente e tendente a $+\infty$, tale che $d_1 > d$. Definiamo, per ogni $k \in \mathbb{N}$, gli insiemi

$$C_k = \{ f \in C \mid \|f\| \leqslant d_k \}$$

e osserviamo che per ipotesi, ogni C_k è un chiuso contenuto nel compatto $d_k B_{E^\star}$, dal momento che $C_k = C \cap d_k B_{E^\star}$, per il Teorema 1.26. Dalla definizione di topologia debole*, le funzioni $f \mapsto |\langle f, x\rangle|$ sono continue per ogni $x \in E$ fissato di norma unitaria, quindi il loro estremo superiore $f \mapsto \|f\|$ è una funzione semicontinua inferiormente in topologia debole* e dunque ammette minimo sul compatto C_1, ossia esiste $f_0 \in C_1$ tale che

$$\inf_{f\in C_1} \|f\| = \|f_0\| \leqslant d_1 \,.$$

Sappiamo inoltre che $\|f_0\| \geqslant d$ e se fosse $\|f_0\| > d$, per definizione di estremo inferiore troveremmo $f \in C$ tale che

$$d < \|f\| < \|f_0\| \leqslant d_1 \,,$$

da cui $f \in C_1$, il che è assurdo perché $\|f_0\|$ realizza il minimo della norma su C_1, dunque $\|f_0\| = d$.

Dal momento che $\{0\}$ è chiuso e C_1 è compatto e che entrambi sono convessi, per il Teorema di Hahn–Banach 1.8, sappiamo che esistono $x_1 \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $f \in C_1$, si ha $0 < \alpha < \langle f, x_1 \rangle$ e riscalando opportunamente x_1 possiamo assumere che $\langle f, x_1 \rangle > 1$, per ogni $f \in C_1$. Vogliamo mostrare che esiste $x_2 \in \frac{1}{d_1} B_E$ tale che

$$\max \{ \langle f, x_1 \rangle, \langle f, x_2 \rangle \} > 1 \quad \text{per ogni } f \in C_2 \,.$$

Per assurdo, se per ogni $y \in \frac{1}{d_1} B_E$ esistesse $f \in C_2$ tale che

$$\max \{ \langle f, x_1 \rangle, \langle f, y \rangle \} \leqslant 1 \,,$$

allora $\langle f, x_1 \rangle \leqslant 1$ e $\langle f, y \rangle \leqslant 1$, per ogni $y \in \frac{1}{d_1} B_E$. Riscalando quest'ultima disuguaglianza per d_1, si ottiene $\langle f, y \rangle \leqslant d_1$ per ogni $y \in B_E$, ossia che $\|f\| \leqslant d_1$. Allora, per definizione, $f \in C_1$ e quindi $\langle f, x_1 \rangle > 1$, che è assurdo. Iterando questo argomento, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $x_k \in \frac{1}{d_{k-1}} B_E$ tale che

$$\max_{i=1,\dots,k} \{ \langle f, x_i \rangle \} > 1 \quad \text{per ogni } f \in C_k$$

e si vede facilmente che la successione $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tende a zero in norma.
Consideriamo l'operatore $T : E^\star \to c_0$ che associa a ogni $f \in E^\star$ la successione il cui termine k–esimo è $\langle f, x_k \rangle$. Poiché

$$0 \leqslant |\langle f, x_k \rangle| \leqslant \|f\| \|x_k\| \to 0 \,,$$

si ha $T(f) \in c_0$, quindi T è ben definito. Inoltre, dal momento che $\langle f, x_k \rangle > 1$ per ogni $f \in C$, abbiamo che $T(C)$ e la palla unitaria aperta $B = \{\xi \in c_0 \mid \|\xi\| < 1\}$ di c_0 sono due convessi disgiunti. Per il Teorema 1.7, esiste allora $\vartheta \in c_0^\star = \ell^1$ (Proposizione 2.8) e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che, per ogni $\xi \in B$ e per ogni $f \in C$, si ha

$$\langle \vartheta, \xi \rangle \leqslant \alpha \leqslant \langle \vartheta, T(f) \rangle \,.$$

Passando all'estremo superiore su $\xi \in B$, otteniamo che per ogni $f \in C$,

$$\|\vartheta\|_1 \leqslant \alpha \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k \langle f, x_k \rangle$$

e per linearità, posto $x = \sum_{k=1}^{\infty} \vartheta_k x_k$, per ogni $f \in C$, si ha

$$0 < \alpha \leqslant \langle f, x \rangle \,.$$

Allora, eventualmente riscalando x, possiamo supporre che per ogni $f \in C$, si abbia $\langle f, x \rangle \geqslant 1$, dunque l'intorno $V = \{f \in E^\star \mid |\langle f, x \rangle| < 1\}$ di $0 \in E^\star$ ha intersezione vuota con C. A meno di una traslazione, è possibile ripetere lo stesso ragionamento per ogni $f_0 \notin C$, quindi trovare un intorno V di f_0 tale che $V \cap C = \varnothing$. Segue che il complementare di C è aperto, ossia C è chiuso, da cui la tesi. □

Si ha il seguente corollario per sottospazi vettoriali.

COROLLARIO 2.10. *Sia E uno spazio di Banach e $M \subseteq E^\star$ un sottospazio vettoriale. M è chiuso nella topologia $\sigma(E^\star, E)$ se e solo se esiste un insieme $K \subseteq M$, chiuso e limitato nella topologia $\sigma(E^\star, E)$, che contiene un aperto non vuoto della topologia forte di M (indotta da $E^\star$).*

DIMOSTRAZIONE. Supponendo M chiuso, si trova immediatamente che $K = M \cap B_{E^\star}$ è l'insieme cercato. Viceversa, sia $K \subseteq M$ chiuso e limitato nella topologia $\sigma(E^\star, E)$ e sia $U \subseteq M$ l'aperto della topologia forte contenuto in K. Per definizione, esistono $f_0 \in U$ e

$\delta > 0$ tali che, detto $B = \{f \in M \mid \|f - f_0\| \leqslant \delta\}$, si ha $M \cap B \subseteq U \subseteq K$. Traslando di f_0 e riscalando di δ, essendo M un sottospazio vettoriale, si ha

$$M \cap B \subseteq K \quad \Longrightarrow \quad M \cap (B - f_0) \subseteq K - f_0 \quad \Longrightarrow \quad M \cap \left(\frac{B - f_0}{\delta}\right) \subseteq \frac{K - f_0}{\delta}\,,$$

dunque,

$$M \cap B_{E^\star} = M \cap \left(\frac{B - f_0}{\delta}\right) \subseteq \frac{K - f_0}{\delta} \cap B_{E^\star} \subseteq M \cap B_{E^\star}\,,$$

cioè

$$M \cap B_{E^\star} = \frac{K - f_0}{\delta} \cap B_{E^\star}\,.$$

In virtù del Teorema 2.9, per avere la tesi è sufficiente mostrare che $M \cap rB_{E^\star}$ è un chiuso per ogni $r > 0$. Fissato quindi $r > 0$, possiamo ancora riscalare e ottenere

$$M \cap rB_{E^\star} \subseteq r\frac{K - f_0}{\delta}\,,$$

inoltre, osserviamo che per ogni $r > 0$ la mappa lineare $\varphi_r : E^\star \to E^\star$ definita come

$$\varphi_r(f) = r\frac{f - f_0}{\delta}\,,$$

è un omeomorfismo in topologia debole*, dunque l'immagine $\varphi_r(K) = r\frac{K - f_0}{\delta}$ è ancora un chiuso limitato della topologia $\sigma(E^\star, E)$. Allora, argomentando come sopra,

$$M \cap rB_{E^\star} = rB_{E^\star} \cap r\frac{K - f_0}{\delta}$$

è un'intersezione di insiemi chiusi e abbiamo la tesi. □

2.3. Il teorema di Eberlein–Šmulian

Prima di enunciare il teorema, richiamiamo le nozioni di compattezza che vogliamo dimostrare essere equivalenti.

DEFINIZIONE 2.11. In uno spazio topologico X, un sottoinsieme $K \subseteq X$ si dice *compatto (per ricoprimenti)* se per ogni famiglia di aperti che ricopre K, esiste un sottoricoprimento finito. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice *relativamente compatto (per ricoprimenti)* se la sua chiusura $\overline{A}$ è compatta per ricoprimenti.

DEFINIZIONE 2.12. In uno spazio topologico X, un sottoinsieme $K \subseteq X$ si dice *compatto per successioni* o *sequenzialmente compatto* se ogni successione in K ammette una sottosuccessione convergente in K. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice *relativamente compatto per successioni* o *relativamente sequenzialmente compatto* se ogni successione in A ammette una sottosuccessione convergente in $\overline{A}$.

TEOREMA 2.13 (Teorema di Eberlein–Šmulian). *Sia E uno spazio di Banach e sia $A \subseteq E$. Allora, per la topologia $\sigma(E, E^\star)$ sono equivalenti:*

(1) A è relativamente compatto per successioni,
(2) A è relativamente compatto.

OSSERVAZIONE 2.14. Per il principio di uniforme limitatezza (Teorema 1.11), sia la condizione (1) che la condizione (2) implicano che A è limitato.

OSSERVAZIONE 2.15. L'enunciato del teorema di Eberlein–Šmulian è dato in termini di relativa compattezza. Una formulazione equivalente, in termini di compattezza è la seguente:

Sia E uno spazio di Banach e sia $A \subseteq E$. Allora sono equivalenti:

(1) A è debolmente compatto,

(2) A è debolmente chiuso e debolmente compatto per successioni.

In questo enunciato, la chiusura debole dell'insieme sequenzialmente compatto è necessaria nelle ipotesi, in quanto:

- in uno spazio di Hausdorff, un sottoinsieme compatto è chiuso (si veda [2, Capitolo XI, Teorema 1.4]),
- in uno spazio di Hausdorff che soddisfa il primo assioma di numerabilità, un sottoinsieme compatto per successioni è chiuso

e nella topologia debole di uno spazio di Banach E, che è di Hausdorff (Osservazione 1.22), i punti non hanno necessariamente una base di intorni numerabile (sottolineiamo che tale base di intorni numerabile di ogni punto si ha se lo spazio $E^\star$ è separabile).
Dunque, la condizione (2) è "strettamente" più forte che semplicemente richiedere che l'insieme A sia debolmente compatto per successioni, condizione che non implica in generale la condizione (1).

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.13. Mostriamo che la condizione (2) implica la (1).
Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$. Detto M_0 il sottospazio vettoriale generato dai punti x_n, la sua chiusura $M = \overline{M_0}$ è separabile. Per i Teoremi 1.26 e 2.4 la palla unitaria chiusa $B_{M^\star}$ di $M^\star$ è compatta e metrizzabile, quindi $B_{M^\star}$ è separabile (si veda [2, Capitolo IX, Teorema 5.6]). Scrivendo allora $M^\star$ come un'unione numerabile di multipli di $B_{M^\star}$, si ha che anch'esso è separabile.
Sia dunque $F_0 \subseteq M^\star$ denso. Per il Teorema 1.4 si possono estendere i funzionali di F_0 a funzionali su tutto E, ottenendo così un insieme F denso in $E^\star$. Ricordando l'Osservazione 2.14, sappiamo che A è limitato e dal momento che F è numerabile, possiamo usare un procedimento diagonale per ottenere una sottosuccessione $\{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ tale che, per ogni $f \in F$, esiste il limite

$$\lim_{k\to\infty} \langle f, x_{n_k}\rangle \,.$$

Per ipotesi A è relativamente compatto, quindi la successione x_{n_k} ammette un punto di accumulazione $x_0 \in \overline{A}$ (si veda [2, Capitolo XI, Teorema 3.2]), ossia per ogni intorno debole U di x_0, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_k} \in U$. Dal momento che $\{x_{n_k}\} \subseteq M$ che è chiuso, segue che $x_0 \in M$ e che

$$\langle f, x_0\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle f, x_{n_k}\rangle \quad \text{per ogni } f \in F\,.$$

Se per assurdo questa uguaglianza non fosse vera per qualche $f_0 \in E^\star$, allora esisterebbero $\varepsilon > 0$, $r_0 \in \mathbb{N}$ e $\{x_{n_{k_r}}\} \subseteq \{x_{n_k}\}$ tali che

$$|\langle f_0, x_{n_{k_r}} - x_0\rangle| > \varepsilon \quad \text{per ogni } r > r_0\,.$$

Usando nuovamente l'ipotesi di relativa compattezza sequenziale di A, si trova allora un punto di accumulazione $x_0' \in \overline{A}$ della successione $x_{n_{k_r}}$, ossia

$$\langle f, x_0'\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle f, x_{n_{k_r}}\rangle \quad \text{per ogni } f \in F\,.$$

Allora, $\langle f, x_0\rangle = \langle f, x_0'\rangle$ su un insieme denso, da cui $x_0 = x_0'$, che è assurdo. Abbiamo quindi mostrato che A è relativamente compatto per successioni.

Mostriamo che la condizione (1) implica la (2).
Osserviamo inizialmente che la tesi può essere scritta in modo equivalente sfruttando l'immersione canonica $J : E \to E^{\star\star}$ (Definizione 1.3). Infatti, dal momento che J è un omeomorfismo con l'immagine tra le topologie deboli di E e di $E^{\star\star}$, l'insieme $\overline{A}$ è compatto se e solo se $J(\overline{A})$ è compatto. Per l'Osservazione 2.14, mostrare la compattezza di $J(\overline{A})$ è equivalente a mostrare che è chiuso. Dal momento che $J(\overline{A}) = \overline{J(A)} \cap J(E)$, si ha che $J(\overline{A})$ è chiuso se e solo se coincide con $\overline{J(A)}$, o equivalentemente, se $\overline{J(A)} \subseteq J(\overline{A})$ (essendo l'altra inclusione banale). Concludiamo che provare che $\overline{A}$ è compatto è equivalente a mostrare che $\overline{J(A)} \subseteq J(E)$, ossia che per ogni $\xi \in \overline{J(A)}$, esiste $x \in E$ tale che per ogni $f \in E^\star$, si abbia $\langle \xi, f\rangle = \langle f, x\rangle$.
Sia quindi $\xi \in \overline{J(A)}$. Mostriamo che, dato un qualunque sottoinsieme finito $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq E^\star$, esiste $z \in \overline{A}$ tale che, per ogni $i = 1, \dots, n$, si ha

$$\langle \xi, f_i\rangle = \langle f_i, z\rangle \,.$$

Poiché $\xi \in \overline{J(A)}$, per ogni $m \in \mathbb{N}$, esiste $z_m \in A$ tale che, per ogni $i = 1, \dots, n$,

$$|\langle \xi, f_i\rangle - \langle f_i, z_m\rangle| < \frac{1}{m}$$

e dal momento che A è relativamente (debolmente) compatto per successioni, si trova una sottosuccessione $\{z_{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ debolmente convergente a un elemento $z \in \overline{A}$. Usando la continuità di ξ e delle f_i concludiamo che, per ogni $i = 1, \dots, n$ vale $\langle \xi, f_i\rangle = \langle f_i, z\rangle$.
Tenendo presente la discussione sopra, dato $\xi \in \overline{J(A)}$ mostriamo che esiste $x \in E$ tale che per ogni $f \in E^\star$, si abbia $\langle \xi, f\rangle = \langle f, x\rangle$. Poiché J è continua, $\xi \in J(E)$ se e soltanto se il sottospazio vettoriale $M = \{f \in E^\star \mid \langle \xi, f\rangle = 0\}$ è un chiuso nella topologia debole. Per il Corollario 2.10, è dunque sufficiente mostrare che $M \cap B_{E^\star}$ è un chiuso. Sia quindi $f_0 \in \overline{M \cap B_{E^\star}}$. Fissato $\varepsilon > 0$, definiamo per induzione le successioni

- $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{A}$,
- $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$,
- $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M \cap B_{E^\star}$.

Si sceglie il primo elemento di ognuna delle tre successioni nel seguente modo:

- da quanto mostrato in precedenza, possiamo scegliere $z_1 \in \overline{A}$ tale che $\langle f_0, z_1\rangle = \langle \xi, f_0\rangle$,
- poiché $z_1 \in \overline{A}$, possiamo scegliere $x_1 \in A$ tale che
$$|\langle f_0, x_1\rangle - \langle f_0, z_1\rangle| < \frac{\varepsilon}{4}\,,$$
- poiché $f_0 \in \overline{M \cap B_{E^\star}}$, possiamo scegliere $f_1 \in M \cap B_{E^\star}$ tale che
$$|\langle f_1, x_1\rangle - \langle f_0, x_1\rangle| < \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Supponendo poi di aver già scelto gli elementi di z, x, f per gli indici $1, \dots, n-1$, si sceglie l'elemento n–esimo come segue:

- si sceglie $z_n \in \overline{A}$ tale che, per ogni $m = 0, \dots, n-1$, si ha
$$\langle f_m, z_n\rangle = \langle \xi, f_m\rangle\,,$$
- si sceglie $x_n \in A$ tale che, per ogni $m = 0, \dots, n-1$, si ha
$$|\langle f_m, x_n\rangle - \langle f_m, z_n\rangle| < \frac{\varepsilon}{4}\,,$$

- si sceglie $f_n \in M \cap B_{E^\star}$ tale che, per ogni $i = 1, \dots, n$, si abbia
$$|\langle f_n, x_i\rangle - \langle f_0, x_i\rangle| < \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Per costruzione, segue immediatamente che $\|f_m\| \leqslant 1$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ e che $\langle f_m, z_n\rangle = 0$ per ogni $m = 0, \dots, n-1$. Se $m = 0$, le definizioni di x_n e z_n diventano
$$\langle \xi, f_0\rangle = \langle f_0, z_n\rangle \qquad \text{e} \qquad |\langle f_0, x_n\rangle - \langle f_0, z_n\rangle| < \frac{\varepsilon}{4}$$
e usando la disuguaglianza triangolare e la definizione di f_n, per ogni $i = 1, \dots, n$, si ha
$$|\langle \xi, f_0\rangle - \langle f_n, x_i\rangle| \leqslant |\langle \xi, f_0\rangle - \langle f_0, x_i\rangle| + |\langle f_0, x_i\rangle - \langle f_n, x_i\rangle| < \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{2.2}$$
Dall'ipotesi di relativa compattezza per successioni, possiamo considerare una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ di $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debolmente convergente a $x \in \overline{A}$. Senza ledere la generalità supponiamo che sia x_n stessa a convergere a x. Allora, per ogni $m = 0, \dots, n-1$, si ha
$$|\langle f_m, x_n\rangle| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad |\langle f_m, x\rangle| < \frac{\varepsilon}{4}\,. \tag{2.3}$$
Per il Teorema 1.25, esiste una successione di combinazioni convesse delle x_n che converge fortemente a x. Possiamo quindi considerare una combinazione convessa $w = \sum_{i=1}^N a_i x_i$ tale che $\|x - w\| < \frac{\varepsilon}{4}$. Allora, sostituendo $n = N$ nell'equazione (2.2), si ha
$$|\langle \xi, f_0\rangle - \langle f_N, w\rangle| \leqslant \sum_{i=1}^N a_i |\langle \xi, f_0\rangle - \langle f_N, x_i\rangle| < \frac{\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^N a_i = \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.4}$$
Usando la disuguaglianza triangolare possiamo stimare
$$|\langle \xi, f_0\rangle| \leqslant |\langle \xi, f_0\rangle - \langle f_N, w\rangle| + |\langle f_N, w\rangle - \langle f_N, x\rangle| + |\langle f_N, x\rangle|$$
e possiamo maggiorare il primo addendo con $\varepsilon/2$, per l'equazione (2.4), mentre l'ultimo addendo con $\varepsilon/4$, per l'equazione (2.3). Per il secondo addendo, usiamo la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz e le definizioni di f_N e di w, ottenendo
$$\begin{aligned} |\langle \xi, f_0\rangle| &< \frac{\varepsilon}{2} + |\langle f_N, w - x\rangle| + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|f_N\|\|w - x\| + \frac{\varepsilon}{4} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$
Per l'arbitrarietà di ε, si ha allora che $\langle \xi, f_0\rangle = 0$, da cui $f_0 \in M$. Poiché $B_{E^\star}$ è chiuso, segue che $f_0 \in M \cap B_{E^\star}$, il che conclude la dimostrazione. □

Grazie al teorema di Eberlein–Šmulian appena dimostrato, osserviamo una differenza fondamentale tra la topologia debole e la topologia debole⋆. In $\sigma(E^\star, E)$, infatti, l'equivalenza tra compattezza (relativa) per ricoprimenti e per successioni vale, grazie ai Teoremi 1.26 e 2.4, solo nel caso di spazi separabili. Vediamo un controesempio in uno spazio di Banach non separabile.

PROPOSIZIONE 2.16. *Lo spazio ℓ^∞ non è separabile.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un sottoinsieme $A \subseteq \ell^\infty$ numerabile e mostriamo che non può essere denso. Scriviamo $A = \{a^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ come successione, dove ogni $a^k \in \ell^\infty$ si scrive come $\left\{a_j^k\right\}_{j\in\mathbb{N}}$. Ponendo, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$b_k = \begin{cases} a_k^k + 1 & \text{se } \left|a_k^k\right| \leqslant 1 \\ 0 & \text{se } \left|a_k^k\right| > 1 \end{cases}$$

è facile vedere che $b = \{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ e che per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha $\left|b_k - a_k^k\right| \geqslant 1$. Allora,

$$\|b - a^k\|_\infty \geqslant |b_k - a_k^k| \geqslant 1\,,$$

ossia A non è denso. $\square$

PROPOSIZIONE 2.17. *La palla unitaria chiusa dello spazio $\ell^{\infty\star}$ non è compatta per successioni rispetto alla topologia debole*.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la successione $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B_{\ell^{\infty\star}}$ dove $f_n : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ è il funzionale lineare che "estrae" la n–esima componente della successione, ossia $\langle f_n, x\rangle = x_n$. Sia per assurdo $f_{n_k} \rightharpoonup f \in B_{\ell^{\infty\star}}$ una sottosuccessione debolmente convergente di f_n. Allora, per ogni $x \in \ell^\infty$, si ha

$$\lim_{k\to\infty} \langle f_{n_k}, x\rangle = \langle f, x\rangle \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \langle f, x\rangle\,,$$

e quindi per ogni $x \in \ell^\infty$ la successione x_{n_k} è convergente a $f(x)$. Tuttavia, possiamo facilmente definire la successione

$$x_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = n_k \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che pur essendo limitata, in quanto $\|x\|_\infty = 1$, ha come sottosuccessione $x_{n_k} = (-1)^k$ che non converge. $\square$

CAPITOLO 3

Alcune applicazioni

In questo capitolo vediamo delle applicazioni del teorema di Eberlein–Šmulian a speciali spazi di Banach. In particolare, analizzeremo gli spazi riflessivi, il criterio di compattezza debole di Dunford–Pettis negli spazi L^1 e le proprietà degli spazi di Schur.

3.1. Spazi riflessivi

Vogliamo usare il teorema di Eberlein–Šmulian per caratterizzare gli spazi di Banach riflessivi, di cui ricordiamo la definizione.

DEFINIZIONE 3.1 (Spazio riflessivo). Uno spazio di Banach E si dice riflessivo se l'immersione canonica $J : E \to E^{\star\star}$ è suriettiva.

Iniziamo la discussione con il teorema di Kakutani, che lega la riflessività di uno spazio di Banach E alla compattezza della sua palla unitaria chiusa nella topologia debole.

TEOREMA 3.2 (Teorema di Kakutani). *Sia E uno spazio di Banach. Allora E è riflessivo se e solo se la palla unitaria chiusa B_E è compatta nella topologia $\sigma(E, E^\star)$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponendo che E sia riflessivo, $J(B_E) = B_{E^{\star\star}}$, dunque per il Teorema 1.26, la palla chiusa $B_{E^{\star\star}}$ è compatta in $\sigma(E^{\star\star}, E^\star)$. Consideriamo l'inverso dell'immersione canonica J tra la topologia debole* di $E^{\star\star}$ e la topologia debole di E, ossia

$$J^{-1} : (E^{\star\star}, \sigma(E^{\star\star}, E^\star)) \to (E, \sigma(E, E^\star)) \,,$$

e usando la Proposizione 1.17, mostriamo che è continua. Dato $f \in E^\star$, per definizione vale l'uguaglianza

$$\langle f, J^{-1}\xi\rangle = \langle \xi, f\rangle \,,$$

da cui, ricordando la definizione della topologia $\sigma(E^{\star\star}, E^\star)$, la mappa $\xi \mapsto \langle f, J^{-1}\xi\rangle$ è continua. Quindi, $B_E = J^{-1}(B_{E^{\star\star}})$ è compatta.
Supponiamo ora che B_E sia compatta nella topologia $\sigma(E, E^\star)$. L'immersione canonica J è continua tra $\sigma(E, E^\star)$ e $\sigma(E^{\star\star}, E^\star)$, perché per ogni f fissato la mappa $x \mapsto \langle Jx, f\rangle = \langle f, x\rangle$ è continua. Allora $J(B_E)$ è compatta in $E^{\star\star}$, che è uno spazio di Hausdorff (Osservazione 1.22), quindi $J(B_E)$ è chiusa (si veda [2, Capitolo XI, Teorema 1.4]). Essendo anche densa in $B_{E^{\star\star}}$ per il Lemma 1.28, segue che $J(B_E) = B_{E^{\star\star}}$, quindi che $J(E) = E^{\star\star}$. □

Vediamo ora una proposizione che riguarda la riflessività dei sottospazi vettoriali.

PROPOSIZIONE 3.3. *Sia E uno spazio di Banach riflessivo e sia $M \subseteq E$ un sottospazio vettoriale chiuso di E. Allora M è riflessivo.*

DIMOSTRAZIONE. Sullo spazio vettoriale M abbiamo due topologie: la restrizione di $\sigma(E, E^\star)$ a M e la topologia debole $\sigma(M, M^\star)$. Per il Teorema 1.4, dal momento che ogni funzionale di M è la restrizione di un funzionale di E, le due topologie coincidono. Usiamo allora due volte il Teorema 3.2: dal momento che E è riflessivo, B_E è compatta e $B_M = M \cap B_E$ è un chiuso contenuto in un compatto, quindi è compatto (si veda [2, Capitolo XI, Teorema 1.4]). Allora anche M è riflessivo. $\square$

Da questa proposizione si ricavano i seguenti corollari.

COROLLARIO 3.4. *Uno spazio di Banach E è riflessivo se e solo se il suo duale $E^\star$ è riflessivo.*

DIMOSTRAZIONE. Se E è riflessivo, consideriamo l'immersione canonica J (Definizione 1.3) e una funzione $\varphi \in E^{\star\star\star}$. La mappa $x \mapsto \langle \varphi, Jx \rangle$ è un funzionale lineare e continuo su E, che chiamiamo f. Allora, per ogni $x \in E$ si ha

$$\langle f, x \rangle = \langle \varphi, Jx \rangle = \langle Jx, f \rangle .$$

Dunque, per ogni elemento $\xi \in J(E)$ vale l'uguaglianza $\langle \varphi, \xi \rangle = \langle \xi, f \rangle$. Poiché J è suriettiva $J(E) = E^{\star\star}$ e quindi abbiamo individuato un funzionale $f \in E^\star$ tale che per ogni $\xi \in E^{\star\star}$ si ha $\langle \varphi, \xi \rangle = \langle \xi, f \rangle$, ossia l'immersione canonica di $E^\star$ in $E^{\star\star\star}$ è suriettiva.
Viceversa, se $E^\star$ è riflessivo, allora anche $E^{\star\star}$ è riflessivo per il punto precedente. Dal momento che $J(E)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $E^{\star\star}$, per la Proposizione 3.3 abbiamo che $J(E)$ è riflessivo, ossia che E è riflessivo. $\square$

COROLLARIO 3.5. *Uno spazio di Banach E è riflessivo e separabile se e solo se $E^\star$ riflessivo e separabile.*

DIMOSTRAZIONE. Dal Teorema 2.2 e dal Corollario 3.4 abbiamo che se $E^\star$ ha le due proprietà, lo stesso vale per E. Viceversa, osserviamo che se E è separabile non è detto che $E^\star$ lo sia (per esempio, L^1 è separabile ma il suo duale L^∞ non lo è), tuttavia, se abbiamo anche la riflessività, sappiamo che $E^{\star\star} = J(E)$ è riflessivo e separabile, quindi da quanto detto sopra, $E^\star$ è riflessivo e separabile. $\square$

I Teoremi 3.2 e 2.13 permettono di caratterizzare gli spazi riflessivi.

TEOREMA 3.6. *Uno spazio di Banach E è riflessivo se e solo se, per ogni successione $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ limitata in E, esiste una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ debolmente convergente in E.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 1.24, la palla unitaria chiusa B_E è anche debolmente chiusa. Il Teorema 2.13 garantisce quindi l'equivalenza tra compattezza e compattezza per successioni. Dal momento che x_n è limitata, a meno di riscalamenti possiamo supporre che $\|x_n\| \leqslant 1$, allora,

E riflessivo se e solo se B_E compatta in $\sigma(E, E^\star)$ — Teorema 3.2
se e solo se B_E compatta per successioni in $\sigma(E, E^\star)$ — Teorema 2.13
se e solo se esiste una sottosuccessione x_{n_k} debolmente convergente.

$\square$

3.2. Il criterio di Dunford–Pettis

Discutiamo brevemente le proprietà degli spazi $L^p(\Omega)$, rispetto a una misura μ.

- Spazi $L^p(\Omega)$ con $1 < p < +\infty$.
  In virtù del teorema di rappresentazione di Riesz (si veda [1, Teorema 4.11], per esempio), se $p \in (1, +\infty)$, si ha

$$L^p(\Omega)^\star = L^{p'}(\Omega) \qquad \text{e} \qquad L^p(\Omega)^{\star\star} = L^{p'}(\Omega)^\star = L^p(\Omega) ,$$

dove p' è il coniugato secondo Hölder di p, da cui $L^p(\Omega)$ è riflessivo e quindi la topologia debole e la topologia debole* coincidono. Inoltre, se Ω è separabile (ad esempio se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$), per $p \in (1, +\infty)$ anche lo spazio $L^{p'}(\Omega)$ è separabile (si veda [1, Teorema 4.13]). Dunque, nella topologia debole di $L^p(\Omega)$, con Ω separabile, dai Teoremi 1.26 e 2.4 si ha l'equivalenza tra compattezza debole e compattezza debole per successioni anche senza invocare il teorema di Eberlein–Šmulian.

- Lo spazio $L^\infty(\Omega)$.
  In virtù del Teorema di rappresentazione di Riesz (si veda [1, Teorema 4.14]), se la misura μ è σ–finita, si ha che $L^\infty(\Omega) = L^1(\Omega)^\star$, quindi $L^1\Omega)$ è lo spazio preduale di $L^\infty(\Omega)$. Inoltre, se Ω è separabile, anche lo spazio $L^1(\Omega)$ è separabile (si veda [1, Teorema 4.13]). Tuttavia, dal momento che $L^\infty(\Omega)$ non è riflessivo (altrimenti lo sarebbe anche $L^1(\Omega)$, si veda [1, Capitolo 4, Remark 6]), possiamo recuperare l'equivalenza tra compattezza e compattezza per successioni solo nella topologia debole* di $L^\infty(\Omega)$.
- Lo spazio $L^1(\Omega)$.
  Dal momento che lo spazio $L^1(\Omega)$ non è riflessivo (si veda [1, Capitolo 4, Remark 6]) e che il suo duale $L^\infty(\Omega)$ non è generalmente separabile (ad esempio nel caso della misura di Lebesgue in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$), esistono successioni limitate che non ammettono sottosuccessioni convergenti. Un esempio è la successione
  $$f_n = 3^n \chi_{(0,3^{-n})} \in L^1(0,1)\,.$$
  Se infatti consideriamo una qualsiasi sottosuccessione f_{n_k}, detta $g \in L^\infty(0,1)$ la funzione definita come
  $$g = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \chi_{(0,3^{-n})}\,,$$
  si ha
  $$\int_{(0,1)} g f_{n_k}\, d\mathscr{L}^1 = 3^{n_k} \sum_{i \geqslant k} \frac{(-1)^i}{3^{n_i}} = (-1)^k \sum_{i \geqslant k} \frac{(-1)^{i-k}}{3^{n_i - n_k}} = (-1)^k + (-1)^k \sum_{i > k} \frac{(-1)^{i-k}}{3^{n_i - n_k}}\,.$$
  Osservando che la sommatoria nell'ultimo termine a destra si può maggiorare con una serie geometrica,
  $$\left| \sum_{i>k} \frac{(-1)^{i-k}}{3^{n_i - n_k}} \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{2}\,,$$
  vediamo che la presenza del termine $(-1)^k$ implica che la sequenza dei valori degli integrali non converge.

Per quanto riguarda i compatti della topologia debole di $L^1(\Omega)$, possiamo caratterizzarli con il criterio di Dunford–Pettis.

DEFINIZIONE 3.7. Sia $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $E \in \mathscr{M}$. Una famiglia $\mathscr{F}$ di funzioni integrabili $f : E \to \mathbb{R}$ si dice *uniformemente integrabile* se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $A \subseteq E$ misurabile con $\mu(A) < \delta$ e per ogni funzione $f \in \mathscr{F}$, si ha $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$.

TEOREMA 3.8 (Criterio di Dunford–Pettis). *Sia $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $\mathscr{F}$ un insieme limitato di $L^1(E)$, con E misura finita. Allora sono equivalenti:*

- *$\mathscr{F}$ è relativamente debolmente compatto*

- *$\mathscr{F}$ è una famiglia di funzioni uniformemente integrabili*

La dimostrazione del teorema dipende da una versione del teorema di Vitali–Hahn–Saks (si veda [3, Teorema III.7.2] per una dimostrazione).

TEOREMA 3.9 (Teorema di Vitali–Hahn–Saks). *Sia $(\Omega, \mathscr{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Se $E \in \mathscr{M}$ ha misura finita e se per una successione $f_n : E \to \mathbb{R}$ di funzioni integrabili esiste il limite*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu \,,$$

per ogni $A \subseteq E$ misurabile, allora la famiglia $\{f_n\}$ è uniformemente integrabile.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.8. Supponiamo che $\mathscr{F}$ sia debolmente compatto e per assurdo, che $\mathscr{F}$ non sia una famiglia uniformemente integrabile, allora esiste $\varepsilon > 0$, una successione di insiemi misurabili $A_n \subseteq E$ tali che $\mu(A_n) \to 0$ e una successione di funzioni $f_n \in \mathscr{F}$ tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\int_{A_n} |f_n| \, d\mu \geqslant \varepsilon \,. \tag{3.1}$$

Per il Teorema 2.13, dal momento che $\mathscr{F}$ è relativamente debolmente compatto è anche relativamente debolmente compatto per successioni, quindi esiste una sottosuccessione f_{n_k} debolmente convergente a $f \in L^1(E)$. Allora, per ogni A misurabile,

$$\int_A f_{n_k} \, d\mu = \int_E f_{n_k} \chi_A \, d\mu \to \int_E f \chi_A \, d\mu = \int_A f \, d\mu \,,$$

passando al limite per $k \to +\infty$. Poiché siamo nelle ipotesi del Teorema 3.9, la famiglia $\{f_{n_k}\}$ è uniformemente integrabile, in contrasto con la disuguaglianza (3.1).
Per avere l'altra implicazione, per il Teorema 2.13, è sufficiente mostrare che esiste una sottosuccessione debolmente convergente. Sia allora $N \in \mathbb{N}$ e consideriamo le funzioni $\widetilde{f}_n = f_n \chi_{\{|f_n| \leqslant N\}}$, che sono equilimitate in $L^2(E)$, quindi ammettono una sottosuccessione debolmente convergente a $\widetilde{f}_N$ in tale spazio. Usiamo quindi un procedimento diagonale per trovare una sottosuccessione f_{n_k} tale che, per ogni $N \in \mathbb{N}$, la successione $\widetilde{f}_{n_k}$ converga debolmente a $\widetilde{f}_N$ in $L^2(E)$. Dal momento che E ha misura finita, per l'inclusione tra spazi L^p, si trova anche la convergenza in $L^1(E)$. Allora,

$$\big\|\widetilde{f}_N - \widetilde{f}_{N'}\big\|_1 \leqslant \liminf_{k\to\infty} \big\|f_{n_k}\chi_{\{|f_{n_k}|\leqslant N\}} - f_{n_k}\chi_{\{|f_{n_k}|\leqslant N'\}}\big\|_1 = \liminf_{k\to\infty} \big\|f_{n_k}\chi_{\{N<|f_{n_k}|\leqslant N'\}}\big\|_1$$

e poiché f_{n_k} è uniformemente integrabile, per $N, N' \in \mathbb{N}$ abbastanza grandi, l'ultimo termine è minore di $\varepsilon > 0$. Dunque, la successione $\widetilde{f}_N$ è di Cauchy, quindi converge a una funzione $f \in L^1(E)$ e per approssimazione, segue la tesi. Infatti, data una qualsiasi $g \in L^\infty(E)$ e dato

$\varepsilon > 0$, per $N \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, si ha

$$\begin{aligned}
\left|\int_E g(f_{n_k} - f)\, d\mu\right| &\leqslant \left|\int_E g(f_{n_k} - \widetilde{f}_N)\, d\mu\right| + \left|\int_E g(\widetilde{f}_N - f)\, d\mu\right| \\
&\leqslant \left|\int_E g(f_{n_k} - \widetilde{f}_N)\, d\mu\right| + \varepsilon\|g\|_\infty \\
&= \left|\int_E g(f_{n_k}\chi_{\{|f_{n_k}|\leqslant N\}} + f_{n_k}\chi_{\{|f_{n_k}|>N\}} - \widetilde{f}_N)\, d\mu\right| + \varepsilon\|g\|_\infty \\
&\leqslant \left|\int_E g(f_{n_k}\chi_{\{|f_{n_k}|\leqslant N\}} - \widetilde{f}_N)\, d\mu\right| + \left|\int_E g f_{n_k}\chi_{\{|f_{n_k}|>N\}}\, d\mu\right| + \varepsilon\|g\|_\infty \\
&\leqslant \left|\int_E g(f_{n_k}\chi_{\{|f_{n_k}|\leqslant N\}} - \widetilde{f}_N)\, d\mu\right| + \int_E |g||f_{n_k}|\chi_{\{|f_{n_k}|>N\}}\, d\mu + \varepsilon\|g\|_\infty \\
&\leqslant \left|\int_E g(f_{n_k}\chi_{\{|f_{n_k}|\leqslant N\}} - \widetilde{f}_N)\, d\mu\right| + 2\varepsilon\|g\|_\infty \,,
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'uniforme integrabilità per maggiorare il secondo integrale. Passando poi al $\limsup$ per $k \to \infty$ e per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ si trova la convergenza debole di f_{n_k} a f. □

3.3. Spazi di Schur

DEFINIZIONE 3.10 (Proprietà di Schur). Si dice che uno spazio di Banach E ha la *proprietà di Schur* se ogni successione debolmente convergente è anche convergente in norma (l'inverso vale sempre, ovviamente).

Lo spazio più noto con questa proprietà è lo spazio ℓ^1. Nel seguito, le successioni di elementi di ℓ^1 verranno indicate con $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Con la notazione x^n_m si indicherà il termine m–esimo della successione $x^n \in \ell^1$.

TEOREMA 3.11 (Teorema di Schur). *Lo spazio ℓ^1 ha la proprietà di Schur.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^1$ una successione tale che $x^n \rightharpoonup x$ e per assurdo sia $\|x^n - x\| \not\to 0$. Possiamo assumere senza perdere di generalità che $x = 0$ e a meno di sottosuccessioni e riscalamenti, che $\|x^n\| \geqslant 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Dal momento che per ogni $m \in \mathbb{N}$, il funzionale lineare $\phi_m : \ell^1 \to \mathbb{R}$ tale che $\langle \phi_m, x\rangle = x_m$ è limitato, per definizione di convergenza debole, si ha $x^n_m \to 0$ per ogni m fissato e per $n \to \infty$. Poiché $\|x^1\| \geqslant 1$, possiamo allora scegliere $k_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{m=k_1+1}^{\infty} |x^1_m| < \frac{1}{5} \,.$$

Inoltre, per $n \to \infty$ e per quanto osservato sulle componenti delle successioni x^n,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{k_1} |x^n_m| = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{esiste } n_2 \in \mathbb{N} \text{ tale che } \sum_{m=1}^{k_1} |x^{n_2}_m| < \frac{1}{5} \,.$$

Poiché anche $\|x^{n_2}\| \geqslant 1$ possiamo scegliere $k_2 \in \mathbb{N}$ tale che $k_2 > k_1$ e

$$\sum_{m=k_2+1}^{\infty} |x^1_m| < \frac{1}{5} \,.$$

Iterando questa costruzione, otteniamo una sottosuccessione $\{x^{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ di $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $x^{n_1} = x^1$ e una successione crescente di interi $\{k_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, dove $k_0 = 0$, tali che

$$\sum_{m=1}^{k_{j-1}} |x_m^{n_j}| < \frac{1}{5}, \quad \text{e} \quad \sum_{m=k_j+1}^{\infty} |x_m^{n_j}| < \frac{1}{5}.$$

Definiamo la successione y tale che

$$y_m = \begin{cases} \dfrac{|x_m^{n_j}|}{x_m^{n_j}} & \text{se } x_m^{n_j} \neq 0 \text{ e } k_{j-1} < m \leqslant k_j \\ 0 & \text{se } x_m^{n_j} = 0 \end{cases}$$

Si vede allora immediatamente che $y \in \ell^\infty = (\ell^1)^\star$. Inoltre, si ha

$$\begin{aligned} \left|\sum_{m=1}^{\infty} x_m^{n_j} y_m\right| &\geqslant \left|\sum_{m=k_{j-1}+1}^{k_j} x_m^{n_j} y_m\right| - \left|\sum_{m=1}^{k_{j-1}} x_m^{n_j} y_m\right| - \left|\sum_{m=k_j+1}^{\infty} x_m^{n_j} y_m\right| \\ &\geqslant \sum_{m=k_{j-1}+1}^{k_j} |x_m^{n_j}| - \sum_{m=1}^{k_{j-1}} |x_m^{n_j}| - \sum_{m=k_j+1}^{\infty} |x_m^{n_j}| \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} |x_m^{n_j}| - 2\sum_{m=1}^{k_{j-1}} |x_m^{n_j}| - 2\sum_{m=k_j+1}^{\infty} |x_m^{n_j}| \\ &> \|x^{n_j}\| - \frac{4}{5} \geqslant \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Dunque, per $j \to \infty$, la successione $\langle y, x^{n_j}\rangle$ non tende a 0, che è assurdo perché y è un elemento del duale di ℓ^1, da cui la tesi. □

In presenza delle proprietà di Schur, si ha un modo ancora più facile di caratterizzare gli insiemi (relativamente) compatti nella topologia debole. Vale infatti il seguente teorema.

TEOREMA 3.12. *Sia E uno spazio di Banach con la proprietà di Schur e sia $A \subseteq E$. Allora sono equivalenti:*

(1) A è relativamente compatto nella topologia $\sigma(E, E^\star)$,
(2) A è relativamente compatto per successioni nella topologia $\sigma(E, E^\star)$,
(3) A è relativamente compatto nella topologia forte.

DIMOSTRAZIONE. Le implicazioni (3) $\Longrightarrow$ (1) e (1) $\Longrightarrow$ (2) seguono rispettivamente dalle proprietà immediate della convergenza debole (Proposizione 1.23) e dal Teorema 2.13. Mostriamo che la condizione (2) implica la (3). Supponendo A relativamente debolmente compatto per successioni, data $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, sia $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sua sottosuccessione debolmente convergente a $x \in \overline{A}^{\text{weak}}$. Per la proprietà di Schur, si ha quindi $\|x_{n_k} - x\| \to 0$, da cui $x \in \overline{A}^{\text{strong}}$, il che prova la tesi. □

Referenze

1. Haïm Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext, Springer, 2011.
2. James Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics, Allyn and Bacon, 1978.
3. Nelson Dunford and Jacob T. Schwartz, *Linear operators. Part I*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons, 1988.