Analisi Matematica. – *Varifold con seconda forma fondamentale e bordo.* Nota di Carlo Mantegazza.

Abstract. – *Varifolds with second fundamental form and boundary.* In this paper we resume the results of a research concerning a new class of sets in the euclidean spaces which carry a generalized notion of second fundamental form and boundary. We show that these sets have good compactness and structure properties. We also state some results concerning the properties of the boundary.

Key Words: Second fundamental form; Hausdorff measure; Rectificable sets; Varifolds.

Riassunto. – In questo lavoro riassumiamo i risultati di una ricerca riguardante una nuova classe di insiemi negli spazi euclidei dotati di una nozione generalizzata di seconda forma fondamentale e di bordo. Dopo aver introdotto questi insiemi mostriamo alcune proprietà formali e geometriche che estendono il caso classico delle varietà regolari, nel seguito studiamo la compattezza nella classe di questi oggetti e diamo un primo risultato sulla struttura della frontiera.

Introduzione

Lo scopo di questo lavoro è quello di esporre i risultati di una ricerca riguardante la definizione e lo studio di una nuova classe di oggetti nella teoria geometrica della misura. Gli oggetti che tratteremo sono essenzialmente insiemi non orientati n–dimensionali in $\mathbf{R}^k$, con molteplicità intera.
Su una classe speciale di questi insiemi, da noi chiamata *varifold con seconda forma fondamentale e bordo*, è possibile definire per mezzo di formule di integrazione per parti valide nel caso delle varietà C^2, delle nozioni "deboli" di seconda forma fondamentale e di bordo, il cui studio ha un notevole interesse sia teorico che applicativo.
Inizialmente la teoria dei varifold, dei quali i nostri oggetti sono una sottoclasse particolare, è stata sviluppata da Allard per studiare il problema delle superfici di area minima (vedi [A1], [A2]), in seguito è stata sfruttata nel lavoro di Brakke ([BR]) per l'analisi del moto di varietà secondo la curvatura media, infine Pitts ([PI]), applicando tecniche di teoria di Morse in ambito varifold ha ottenuto risultati di esistenza di sottovarietà minimali in varietà Riemanniane.
Nel nostro lavoro abbiamo introdotto una nuova sottoclasse di varifold per mezzo di una formula di integrazione per parti piuttosto restrittiva, che comporta notevoli proprietà di struttura per questi oggetti.
La definizione originale di Allard sfrutta una formula di integrazione per parti più semplice della nostra che non permette di ottenere una buona regolarità dell'insieme e in particolare della nozione generalizzata di bordo da lui introdotta (vedi [DU1], [DU2], [BR]). Ci attendiamo che un ulteriore studio di questi varifold porti a stabilire dei miglioramenti in alcuni risultati ottenuti per mezzo dei varifold di Allard.
La nostra definizione estende alle varietà con bordo una analoga nozione introdotta da Hutchinson per trattare il caso delle varietà senza frontiera ([HU1], [HU2], [HU3]).
Nell'ambito dei varifold con seconda forma fondamentale e bordo dimostriamo vari risultati di compattezza e semicontinuità che anche Hutchinson aveva sviluppato nel caso senza bordo. Riusciamo inoltre a caratterizzare la seconda forma mediante i gradienti approssimati del piano tangente e diamo un primo teorema di rettificabilità del bordo.
I varifold con seconda forma e bordo possono essere utilizzati per studiare problemi di minimo per funzionali definiti sulle varietà che tengano conto anche di una penalizzazione dipendente dalla frontiera. Un esempio dei funzionali in questione per il quale si ottiene abbastanza facilmente un teorema di esistenza di minimo debole può essere il seguente:

$$F(\Gamma, u) = \int_{\Omega\setminus\Gamma} \alpha|\nabla u|^2 + \beta|u-g|^2\,dx + \sum_{i=1}^n l(\Gamma_i) + \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} |A^i|^p\,d\mathcal{H}^1 + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Gamma_i} d\mathcal{H}^0$$

definito sulle coppie (Γ, u) dove Γ è un unione finita di curve $\Gamma_i \in C^2$ in un aperto Ω di $\mathbf{R}^k$ di cui A^i è la curvatura e $u : \Omega \setminus \Gamma \to \mathbf{R}$ è una funzione C^1.

Tale problema ha un certo interesse applicativo, in quanto interviene in questioni legate al riconoscimento automatico di immagini da parte di calcolatori (vedi [MS]).

1. Preliminari

Diamo le seguenti definizioni che ci serviranno nel seguito.

Definizione 1. Sia $k \geq 1$ un intero e sia n un intero compreso tra 0 e k; indicheremo con $\mathcal{H}^n$ la misura di Hausdorff n-dimensionale in $\mathbf{R}^k$, definita per ogni insieme $B \subset \mathbf{R}^k$ da

$$\mathcal{H}^n(B) = \frac{\omega_n}{2^n} \sup_{\delta>0} \inf\{\sum_i diam(B_i)^n : B \subset \bigcup_i B_i,\ diam(B_i) < \delta\},$$

ove ω_n è la misura di Lebesgue della palla unitaria in $\mathbf{R}^n$.

Definizione 2. Un insieme rettificabile M di dimensione n in $\mathbf{R}^k$ è un sottoinsieme $\mathcal{H}^n$–misurabile e contenuto, a meno di insiemi di misura $\mathcal{H}^n$–nulla, in una unione numerabile di varietà C^1 immerse in $\mathbf{R}^k$ (vedi [FE], [SI]).

È ovvio che gli insiemi rettificabili estendono la classe delle varietà C^1, per i nostri scopi avremo bisogno di una ulteriore generalizzazione, i cosiddetti varifold.

Definizione 3. Diciamo che la coppia (M, θ) definisce un n–varifold rettificabile intero in $\mathbf{R}^k$, $V \equiv V(M, \theta)$ se M è un insieme n–rettificabile in $\mathbf{R}^k$, $\theta : M \to \mathbf{N}$ è una funzione positiva a valori interi, $\mathcal{H}^n$–misurabile e inoltre vale la condizione che la misura $\mu_V = \theta\mathcal{H}^n \angle M$, detta misura peso del varifold, è una misura di Radon in $\mathbf{R}^k$, cioè è finita sui compatti.
In questo caso chiameremo M rettificabile di supporto e θ funzione densità del varifold V.

I varifold forniscono la giusta generalizzazione delle varietà nell'ambito della teoria geometrica della misura, infatti sotto opportune ipotesi essi posseggono buone proprietà di compattezza e sopratutto hanno la seguente forte proprietà di struttura locale.

Teorema 1. Se $V \equiv V(M, \theta)$ è un n–varifold in $\mathbf{R}^k$, posto $\eta_{x,\lambda}(y) = x+\lambda y$, esiste univocamente determinato per μ_V–quasi ogni $x \in M$, un n–piano $P(x)$ tale che

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_{\eta_{x,\lambda}(M)} f(y)\theta(x + \lambda y)\, d\mathcal{H}^n(y) = \theta(x) \int_{P(x)} f(y)\, d\mathcal{H}^n(y)$$

per ogni $f \in C_c(\mathbf{R}^k)$.
Operando il cambio di variabile $z = x + \lambda y$ ciò è equivalente a dire che

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-n} \int_M f\left(\frac{z-x}{\lambda}\right) \theta(z)\, d\mathcal{H}^n(z) = \theta(x) \int_{P(x)} f(y)\, d\mathcal{H}^n(y)$$

per ogni $f \in C_c(\mathbf{R}^k)$. L'n–piano $P(x)$, se esiste, si dice spazio tangente approssimato al varifold in x.
La dimostrazione può essere trovata in [SI].

Introduciamo ora il modo in cui nel seguito considereremo la Grassmanniana degli n–piani in $\mathbf{R}^k$. Dato un n–sottospazio vettoriale P di $\mathbf{R}^k$ (un n–piano), è definita in modo univoco la mappa lineare $\pi_P : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ associata alla proiezione ortogonale sul sottospazio P e di conseguenza una matrice (P_{ij}), di dimensione $k \times k$. Identificheremo allora nel seguito gli n–piani in $\mathbf{R}^k$, cioè la Grassmanniana $G_{n,k}$, con un sottospazio topologico di $\mathbf{R}^{k^2}$. Infine indichiamo con $G_n(A)$ il prodotto di spazi topologici $A \times G_{n,k}$, dove A è un qualunque sottoinsieme di $\mathbf{R}^k$.

Andremo a definire, per mezzo di una formula di integrazione per parti valida nel caso regolare, una generalizzazione della seconda forma fondamentale, solitamente definita per n–varietà C^2 embedded in $\mathbf{R}^k$ in questo modo: sia $x \in M$ con M varietà C^2 e siano u, v elementi di T_xM, consideriamo il campo C^1 a supporto compatto U, definito in un intorno di x in $\mathbf{R}^k$ e tangente alla varietà M nei punti che le appartengono, tale che $U(x) = u$. Facciamo la derivata del campo U in x secondo la direzione v, e consideriamo solo la componente normale al tangente in x del vettore che si ottiene. Il risultato è un vettore $B_x(u, v)$, di componenti $B^i_x(u, v)$. Si dimostra che $B_x(\cdot, \cdot)$ è una forma bilineare simmetrica sul tangente alla varietà in x detta seconda forma fondamentale e che determina tutto il tensore di curvatura della varietà.
Possiamo estendere la forma B_x a tutto $\mathbf{R}^k$ ponendo

$$B_x(u, v) = B_x(\pi u, \pi v)$$

dove π indica la proiezione sul tangente T_xM.
Nel seguito non indicheremo la dipendenza da x quando sarà chiaro e considereremo le componenti di B,

$$B^i_{jk} =< B(e_j, e_k), e_i >$$

dove $\{e_l\}$ è la base canonica di $\mathbf{R}^k$.
Inoltre solitamente si indica con il vettore $H_x = \mathit{traccia}\, B_x$ la curvatura media della varietà (vedi [SP]).

2. Varifold con curvatura e bordo

Diamo ora la definizione di varifold con seconda forma fondamentale e bordo. Sia M una n–varietà C^2, con frontiera ∂M di classe C^1, embedded in un aperto $\Omega \subset \mathbf{R}^k$. Sia $P(x)$ la matrice di proiezione sul tangente alla varietà nel punto $x \in M$, di componenti $P_{ij}(x)$ con l'identificazione spiegata nella sezione precedente. Allora vale il seguente teorema della divergenza per varietà curve (vedi [SP]), che è quello sfruttato da Allard per la sua definizione.

Teorema 2. *(Formula della divergenza per varietá)* Data una funzione $\varphi \in C^1$, a supporto compatto in Ω, vale la formula

$$\int_M P_{ij} D_j \varphi(x)\, d\mathcal{H}^n(x) = -\int_M H_i(x)\varphi(x)\, d\mathcal{H}^n(x) - \int_{\partial M} \nu_i(y)\varphi(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

dove il vettore H indica la curvatura media della varietà e ν è la normale interna al bordo di M.

Sia ora $\varphi \equiv \varphi(x, P) \in C^1(\Omega \times \mathbf{R}^{k^2})$ avente supporto compatto e denotiamo la differenziazione parziale di φ rispetto alle variabili x_i e P_{jk} rispettivamente con

$$D_i\varphi \quad e \quad D^*_{jk}\varphi.$$

Segue dal teorema sopra che

$$\int_M P_{is}\, D_s\varphi(x, P) + A_{ijk}(x)\, D^*_{jk}\varphi(x, P) + A_{rir}(x)\, \varphi(x, P)\, d\mathcal{H}^n(x)$$

$$= -\int_{\partial M} \varphi(y, P)\, \nu_i(y)\, d\mathcal{H}^{n-1}(y)$$

nel senso che le funzioni P_{ij} sono valutate in x e si somma sugli indici muti. Le funzioni ν_i sono le componenti della normale interna al bordo.
Le funzioni $A_{ijk}(x)$ che compaiono nella formula sono i cosiddetti gradienti tangenziali delle funzioni $P_{ij}(x)$ che ora andiamo a definire.

Definizione 4. Se M è una varietà C^1 in $\mathbf{R}^k$ e $f : M \to \mathbf{R}$ è una funzione differenziabile in x, definisco il gradiente tangenziale di f in x come

$$\nabla^M f(x) = \pi_{T_xM} \nabla \widetilde{f}(x)$$

dove π_{T_xM} indica la proiezione sul tangente a M in x e $\widetilde{f}$ indica una qualunque estensione locale C^1 di f.

Nella formula sopra allora le funzioni A_{ijk} indicano i gradienti tangenziali,

$$A_{ijk}(x) = \nabla^M P_{jk}(x).$$

Inoltre queste funzioni A_{ijk} sono biunivocamente legate alla seconda forma fondamentale dalle relazioni,

$$B^k_{ij} = P_{lj} A_{ikl} = P_{li} A_{jkl};$$

$$A_{ijk} = B^k_{ij} + B^j_{ik};$$

$$H_i = A_{jij},$$

sempre con la convenzione che gli indici "muti" si sommano.

Possiamo vedere le componenti del tensore A_{ijk} anche in una maniera più geometrica sfruttando la funzione distanza. Supponiamo di essere sempre nelle ipotesi sopra, cioè M n–varietà C^∞ embedded in $\mathbf{R}^k$, la funzione $f(x) = [d(x, M)]^2$, quadrato della distanza dalla varietà è allora C^∞ almeno in un intorno della varietà e ha come luogo di zeri M.
Cerchiamo inizialmente di calcolare le derivate seconde della funzione $f(x)$. Per quanto riguarda le derivazioni lungo due direzioni normali ci basta ovviamente studiare la funzione f ristretta al sottospazio normale. Osserviamo che la proiezione di un punto x sul punto più vicino della varietà deve essere lungo una linea perpendicolare a M, è allora chiaro che se x appartiene al normale a M in x^0, nelle vicinanze di esso la sua proiezione sarà proprio x^0. Da ciò si deduce che almeno localmente sul normale la funzione f coincide con la norma di x al quadrato, il che implica che le derivate normali miste danno zero e che se v è un versore normale qualsiasi, $\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x^0) = 2$. Osserviamo inoltre che da questo segue che tutte le derivate terze "totalmente normali" sono nulle.
Vediamo ora come si procede se c'è almeno una derivata "tangenziale". Per calcolare la derivata seconda rispetto ad una direzione normale ν e ad una tangenziale τ, facciamo le seguenti considerazioni: è ovvio che esiste una palla tangente alla varietà M in x^0, senza altre intersezioni con essa tale che il suo centro stia sulla retta per x^0 di direzione ν. Se ora x sta dentro la metà della palla che è tangente e su tale retta, la funzione $\widetilde{f}(t) = f(x + t\tau)$ ha uno zero di ordine due in $t = 0$, il che implica che la derivata lungo τ di f in x è uguale a zero. Per vedere questo si noti che la funzione $\widetilde{f}$, per t piccolo, è maggiorata dalla distanza di $x + t\tau$ dal punto x^0 e minorata dalla distanza dello stesso punto dal bordo della palla. Visto allora che la derivata in τ è zero lungo tutta la direzione ν possiamo dire che la derivata seconda è nulla, poichè la distanza al quadrato è C^∞.
Se si deriva rispetto a due direzioni tangenziali basta allora studiare la funzione f ristretta al tangente di M in x^0. Possiamo supporre che M sia localmente il grafico di una funzione regolare g da $T_{x^0}M$ in N_xM, nell'intorno di un punto $x^0 \in M$. Si può vedere facilmente che per ogni x nel tangente $T_{x^0}M$ vale

$$0 \leq [d(x, M)]^2 \leq \|g(x)\|^2$$

e che $g = O(\|x\|^2)$ per $x \to x^0$, il che implica che le derivate di cui sopra sono nulle poiché $\|g\|^2$ ha uno zero di ordine quattro in x^0, osserviamo inoltre che anche le derivate terze rispetto a tre direzioni tangenti sono nulle.
Riassumiamo queste osservazioni dicendo che in un punto x^0 l'Hessiano H della funzione d^2 è la matrice $2N(x^0)$, dove $N(x^0) = I - P(x^0)$ è la matrice di proiezione ortogonale sullo spazio normale. Supponiamo infatti di calcolare le derivate seconde rispetto a due direzioni coordinate v_1 e v_2, con decomposizioni sul tangente e sul normale v^t_i e v^n_i. Fissiamo una base del normale $\{n_k\}$ e scriviamo ancora $v^n_i = \sum_k \lambda^k_i n_k$, allora per quanto visto sopra

$$\frac{\partial^2 d^2}{\partial v_1 \partial v_2} = \frac{\partial^2 d^2}{\partial v_1^n \partial v_2^n} = \sum_k \lambda_1^k \lambda_2^k \frac{\partial^2 d^2}{\partial {n_k}^2} = \sum_k 2\lambda_1^k \lambda_2^k = 2 < Nv_1, Nv_2 >= 2 < v_1, Nv_2 > .$$

Ci è ora facile vedere che le derivate terze della funzione distanza al quadrato da M determinano le nostre funzioni A_{ijk}. Segue dunque infatti che

$$A_{ijk}(x) = -\frac{1}{2} P_{is}(x) \frac{\partial^3 d^2(x)}{\partial x_s \partial x_j \partial x_k}.$$

Inoltre vale anche il viceversa, cioè si possono ottenere le derivate terze della distanza al quadrato dalle funzioni A_{ijk}:

$$\frac{\partial^3 d^2}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = -2A_{ijk} + (\delta_{is} - P_{is}) \frac{\partial^3 d^2}{\partial x_s \partial x_j \partial x_k}$$

$$= -2A_{ijk} + (\delta_{is} - P_{is})(-2A_{jks} + (\delta_{jt} - P_{jt}) \frac{\partial^3 d^2}{\partial x_s \partial x_t \partial x_k})$$

$$= -2A_{ijk} + (\delta_{is} - P_{is})(-2A_{jks} + (\delta_{jt} - P_{jt})(-2A_{kst} + (\delta_{kl} - P_{kl}) \frac{\partial^3 d^2}{\partial x_s \partial x_t \partial x_l}))$$

$$= -2A_{ijk} - 2A_{jks}(\delta_{is} - P_{is}) - 2A_{kst}(\delta_{is} - P_{is})(\delta_{jt} - P_{jt}) + (\delta_{is} - P_{is})(\delta_{jt} - P_{jt})(\delta_{kl} - P_{kl}) \frac{\partial^3 d^2}{\partial x_s \partial x_t \partial x_l}$$

l'ultimo termine è una derivata in tre direzioni normali dunque è zero.

$$= -2A_{ijk} - 2A_{jki} + 2A_{jks} P_{is} - 2A_{kij} + 2A_{kit} P_{jt} + 2A_{ksj} P_{si} - 2A_{kst} P_{is} P_{jt}$$

sfruttando ora le formule che legano le A_{ijk} alla seconda forma fondamentale, possiamo scrivere

$$= -2A_{ijk} - 2A_{jks} - 2A_{kij} + 2B_{ij}^k + 2B_{kj}^i + 2B_{ki}^j - 2B_{ik}^t P_{jt}.$$

poiché la seconda forma dà un vettore normale l'ultimo termine è zero, da cui

$$\frac{\partial^3 d^2}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = -2A_{ijk} - 2A_{jki} - 2A_{kij} + 2B_{ij}^k + 2B_{jk}^i + 2B_{ki}^j.$$

Ora, per simmetria delle derivate terze, invertendo i con j e mediando si ottiene

$$\frac{\partial^3 d^2}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = -2A_{ijk} - 2A_{jki} - 2A_{kij} + B_{ij}^k + B_{jk}^i + B_{ki}^j + B_{ji}^k + B_{ik}^j + B_{kj}^i$$

ed infine, sfruttando la simmetria della seconda forma fondamentale e ancora le relazioni di cui sopra,

$$\frac{\partial^3 d^2(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = -A_{ijk}(x) - A_{jki}(x) - A_{kij}(x).$$

Vediamo inoltre, prima di procedere, cosa sono queste funzioni nel caso di un grafico M di una funzione C^∞ $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{k-n}$, con $f(0) = 0$. Supponiamo inoltre che il tangente in 0 a M sia il piano generato dai vettori $\{e_1, \dots e_n\}$ della base canonica. Calcoliamo le funzioni $P_{ij}(x, f(x))$

$$P_{ij}(x, f(x)) =< \pi_x e_i, e_j >=< e_j, e_i - \sum \frac{< (\nabla f_k(x), 0, ..., 1, ..., 0), e_i >}{1 + \|\nabla f_k(x)\|^2} (\nabla f_k(x), 0, ..., 1, ..., 0) > .$$

Dobbiamo ora derivare in x, essendo chiaro che le $A_{ijk}(0,0)$ per $i > n$ sono nulle.

$$A_{ijk}(0,0) = -\sum \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{< (\nabla f_k(x), 0, ..., 1, ..., 0), e_i >< e_j, (\nabla f_k(x), 0, ..., 1, ..., 0) >}{1 + \|\nabla f_k(x)\|^2}.$$

Osservando che tutte le derivate prime di f sono nulle si ottiene

$$= \sum \frac{\frac{\partial}{\partial x_i}\{< (\nabla f_k(x), 0, ..., 1, ..., 0), e_i >< e_j, (\nabla f_k(x), 0, ..., 1, ..., 0) >\}}{(1 + \|\nabla f(x)\|^2)^2}.$$

Se ora le direzioni e_i, e_j sono entrambe tangenziali o normali si vede facimente che la derivata è nulla, nel primo caso perché in ogni termine rimane sempre una derivata prima, nel secondo perché il numeratore è una costante.
Concludendo A_{ijk} è diversa da zero nel solo caso in cui, e_i è una direzione tangenziale, e_j e e_k sono una tangenziale e una normale. Allora si ha

$$A_{ijk}(0,0) = \sum \frac{\partial}{\partial x_i} < e_j, (\nabla f_s(x), 0, ..., 1, ..., 0) >= \sum_s \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

Tenendo presente queste considerazioni, possiamo allora dare la seguente definizione.

Definizione 5. Sia $V = V(M, \theta)$ un n–varifold in Ω aperto di $\mathbf{R}^k$, con $0 < n < k$. Sia $P(x)$ la funzione che indica il tangente approssimato a cui corrisponde una matrice $(P_{ij}(x))$. Diciamo che V è un varifold con bordo oppure un $A\mu - varifold$ se esistono delle funzioni reali $A_{ijk} \in L^1_{loc}(\mu_V)$ e una misura di Radon vettoriale $\underline{\mu}$ in $G_n(\Omega)$ a valori in $\mathbf{R}^k$ tali che per ogni $\varphi \equiv \varphi(x, P) \in C^1_c(\Omega \times \mathbf{R}^{k^2})$, valga per ogni i

$$\int_\Omega P_{ij} D_j \varphi(x, P) + D^*_{jk} \varphi(x, P) A_{ijk}(x) + \varphi(x, P) A_{jij}(x)\, d\mu_V(x)$$

$$= - \int_{G_n(\Omega)} \varphi(x, P)\, d\mu_i(x, P)$$

come sempre con la convenzione degli indici ripetuti e considerando le funzioni P_{ij} valutate il x.
Nei casi estremi $k = 0, n$, per coerenza con quello che segue, *definiamo* le funzioni $A_{ijk}(x) \equiv 0$ e la misura $\underline{\mu}$, se esiste, in modo tale che valga la formula sopra.
Chiamiamo $\underline{\mu}$ *misura bordo del varifold* V, e indichiamo con $AV_n(\Omega)$ la classe degli n–varifold con bordo in Ω.

Osservazione. Dalle considerazioni viste sopra segue che questi oggetti sono una generalizzazione delle varietà C^2, con bordo C^1. Si può anche dimostrare che se il bordo è C^1 nell'intorno di $\mathcal{H}^{n-1}$–quasi tutti i punti che gli appartengono allora la formula vale ancora, per esempio nel caso dei poliedri. La proiezione della misura bordo per la superficie di un poliedro, visto come un $A\mu$–varifold, viene ad essere quella che pesa gli spigoli con la molteplicità delle facce concorrrenti e sulla fibra di ogni punto dello spigolo delle delta di Dirac per ogni piano associato alla faccia che vi concorre.

Definizione 6. Chiamiamo $AV^p_n(\Omega)$ la classe degli n–varifold con bordo in Ω tali che $A_{ijk} \in L^p_{loc}(\mu_V)$.

Una volta ottenute le funzioni A_{ijk} definiamo la seconda forma fondamentale generalizzata per questi oggetti con le relazioni viste sopra, è allora chiaro che condizioni come la sommabilità L^p sono equivalenti se definite per le funzioni A_{ijk} o per le componenti della seconda forma B^i_{jk}.

3. Proprietà formali e geometriche della curvatura e del bordo

Le prime proprietà di questi oggetti che enunciamo giustificano la nostra definizione: unicità delle A_{ijk} e di $\underline{\mu}$, buone proprietà formali e geometriche del tensore di curvatura e della misura bordo. Valgono i risultati:

Teorema 3. *(Unicità)* Se esiste una coppia $(A_{ijk}, \underline{\mu})$ che soddisfa la definizione allora è essenzialmente unica, nel senso che se un'altra coppia $(A'_{ijk}, \underline{\mu}')$ soddisfa la definizione si ha

$$\underline{\mu} = \underline{\mu}' \qquad e \qquad A_{ijk}(x) = A'_{ijk}(x) \quad per\ \mu_V - q.o.\, x \in \Omega.$$

Teorema 4. *(Proprietà formali)* Le funzioni $A_{ijk}(x)$ soddisfano le relazioni

$$A_{ijk}(x) = A_{ikj}(x);$$

$$\sum_j A_{ijj}(x) = 0;$$

$$A_{ijk}(x) = P_{jr}(x)A_{irk}(x) + P_{rk}(x)A_{ijr}(x)$$

per μ_V–quasi ogni $x \in \Omega$.

Da queste relazioni segue ad esempio il fatto che la seconda forma fondamentale generalizzata è una forma bilineare simmetrica, come nel caso classico.
Riguardo le proprietà geometriche vale inoltre il

Teorema 5. *(Proprietà geometriche)* Le funzioni A_{ijk} e la misura $\underline{\mu}$ sono tangenziali, nel senso che

$$P_{il}\mu_l(x, P) = \mu_i(x, P)$$

come misure nella Grassmanniana e le funzioni $A_{ijk}(x)$ soddisfano la relazione

$$P_{il}(x)A_{ljk}(x) = A_{ijk}(x).$$

Definendo infine il vettore

$$H_i(x) = \sum_j A_{jij}(x)$$

si ha

$$P_{il}(x)H_l(x) = 0$$

per $\mu_V - q.o.\, x \in \Omega$.
Ciò significa che il vettore H è "normale" al varifold, in perfetta concordanza con il caso classico.

La proprietà fondamentale delle funzioni A_{ijk} che giustifica anche la definizione debole di seconda forma fondamentale è il seguente risultato sulla loro coincidenza, come per le varietà regolari, con i gradienti tangenziali del piano tangente, una volta interpretati questi nel senso della teoria geometrica della misura. Abbiamo allora bisogno di una definizione (vedi [FE]):

Definizione 7. Sia $V = V(M, \theta)$ un n–varifold intero in Ω e $f : M \to \mathbf{R}$ una funzione misurabile, diciamo che f é differenziabile in senso approssimato in $x_0 \in M$, con gradiente approssimato il vettore $v \in \mathbf{R}^k$ se esiste il piano tangente approssimato in x_0, $v \in apT_{x_0}M$ e considerata la funzione in Ω

$$\phi(x) = \frac{|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)|}{|x - x_0|}$$

si ha che per ogni $\varepsilon > 0$, vale

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\mu_V(\{x \in M | \phi(x) > \varepsilon\} \cap B_\rho(x_0))}{\mu_V(B_\rho(x_0) \cap M)} = 0.$$

Tale v è allora univocamente determinato e scriveremo $ap\nabla^M f(x) = v$.

Possiamo allora enunciare il teorema:

Teorema 6. *(Differenziabilità approssimata)* Le funzioni $P_{jk}(x)$ sono differenziabili in senso approssimato con gradienti approssimati di componenti

$$ap\nabla_i^M P_{jk}(x) = A_{ijk}(x)$$

per $\mu_V - q.o.\, x \in \Omega$.

Infine abbiamo un iniziale risultato di singolarità della misura bordo, che verrà migliorato nella sezione seguente.

Teorema 7. *(Singolarità del bordo)* La proiezione su Ω della misura variazione totale della misura bordo $|\underline{\mu}|$ è singolare rispetto a μ_V.

4. Compattezza e rettificabilità del bordo

Un risultato utile nelle applicazioni a problemi di minimo per funzionali del calcolo delle variazioni, definiti sulle varietà immerse in $\mathbf{R}^k$ e dipendenti dalla curvatura, è il teorema di compattezza e semicontinuità per questi oggetti, in ipotesi di sommabilità L^p delle funzioni A_{ijk}.

Teorema 8. (Teorema di compattezza L^p) Sia data una successione V_l di $A\mu$–varifold in $AV_n^p(\Omega)$, con $p > 1$, tali che per ogni aperto $W \subset\subset \Omega$

$$\mu_{V_l}(W) + \int_W \|A^{(l)}\|^p \, d\mu_{V_l} + |\underline{\mu}^{(l)}|(G_n(W)) < c(W) \qquad \forall l$$

dove $c(W)$ è una costante reale indipendente da l, e $\|A^{(l)}\| = \sum_{i,j,k} |A_{ijk}^{(l)}|$. Allora si può estrarre una successione di indici l_h in modo tale che V_{l_h} convergano ad un $A\mu$–varifold intero V, nel senso che le misure peso associate convergono in senso debole, $\mu_{V_{l_h}} \angle A_{ijk}^{l_h}$ convergano anch'esse come misure a $\mu_V \angle A_{ijk}$ e analogamente $\underline{\mu}^{(l_h)}$ a $\underline{\mu}$. Inoltre per ogni funzione convessa e semicontinua inferiormente $f : \mathbf{R}^{k^3} \to [0, +\infty]$ vale la disuguaglianza

$$\int_\Omega f(A_{ijk}) \, d\mu_V \le \liminf_{h\to\infty} \int_\Omega f(A_{ijk}^{(l_h)}) \, d\mu_{V_{l_h}}.$$

Osservazione 2. Un esempio di applicazione di questo teorema è il risultato che se una successione di varietà C^2, con bordo C^1 oppure C^1–quasi ovunque (nel senso spiegato nell'osservazione 1) converge, considerando le varietà come misure, ad un insieme V avendo le masse, le masse dei bordi e le norme L^2 delle seconde forme fondamentali equilimitate, sull'insieme limite possono essere definite delle nozioni di curvatura e di bordo generalizzate e i funzionali scritti sopra sono semicontinui inferiormente. Se per esempio supponiamo di approssimare un insieme convesso C con poliedri convessi P_i, in modo che chiamando rispettivamente B e B_i le loro frontiere, si abbia che le masse di B_i, e le masse degli spigoli siano equicontrollate (le seconde forme sono nulle per i B_i), si ottiene allora che anche B ha seconda forma nulla e bordo su un insieme di dimensione $n - 1$.

Per studiare la regolarità di questi oggetti, il primo passo necessario ci è parso stabilire la struttura della misura bordo. Abbiamo allora ottenuto il seguente teorema di rettificabilità che generalizza i risultati analoghi di De Giorgi ([DG1], [DG2]) sugli insiemi di perimetro finito, che possono essere visti come particolari $A\mu$–varifold di codimensione nulla e di Federer e Fleming ([FF], [MO]) sulle correnti, che rappresentano la controparte orientata dei varifold.

Teorema 9. *(Rettificabilità del bordo)* La proiezione su Ω della variazione totale della misura bordo, $|\underline{\mu}|$ si concentra su un insieme $\mathcal{H}^{n-1}$–rettificabile in Ω ed è assolutamente continua rispetto ad $\mathcal{H}^{n-1}$ ristretta a tale insieme.

Il nostro lavoro attuale è nella direzione di stabilire completamente la natura della misura bordo studiandone anche il comportamento sulle fibre dei punti nella Grassmanniana. La nostra congettura è che, a meno di insiemi $\mathcal{H}^{n-1}$–nulli, sulle fibre vi sia una somma di misure delta di Dirac di peso intero.

Ringraziamenti

Desidero ringraziare Luigi Ambrosio per l'impegno con cui mi ha seguito nello sviluppo della mia tesi di laurea, dalla quale viene gran parte di questa nota. Ringrazio inoltre il Prof. Ennio De Giorgi per l'interesse che ha mostrato per la mia ricerca e per alcuni preziosi suggerimenti.

Bibliografia

[A1] **W. K. Allard**, *On the first variation of a varifold*, Ann. of Math. (2), **95** (1972), pp. 417-491.
[A2] **W. K. Allard**, *On the first variation of a varifold: Boundary behaviour*, Ann. of Math. (2), **101** (1975), pp. 418-446.
[BR] **K. A. Brakke**, *The motion of a surface by its mean curvature*, Math. notes (20), Princeton Univ. Press, N.J., Princeton, N.J., 1978.
[DG1] **E. De Giorgi**, *Su una teoria generale della misura (r–1)-dimensionale in uno spazio euclideo a r dimensioni*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **36** (1954), pp. 191-213.
[DG2] **E. De Giorgi**, *Nuovi teoremi relativi alle misure (r–1)-dimensionali in uno spazio euclideo a r dimensioni*, Ricerche Mat., **4** (1955), pp. 95-113.
[DU1] **J. P. Duggan**, *Regularity Theorems for Varifolds with Mean Curvature*, Indiana Univ. Math. Jou., **35–1** (1986), pp. 117-144.
[DU2] **J. P. Duggan**, $W^{2,p}$ *regularity for varifolds with mean curvature*, Comm. Partial Differential Equation, **11** (1986), pp. 903-926.
[FE] **H. Federer**, *Geometric Measure Theory*, Springer–Verlag, New York, 1969.
[FF] **H. Federer & W. H. Fleming**, *Normal and integral currents*, Ann. of Math., **72** (1960), pp. 458-520.
[HU1] **J. E. Hutchinson**, *Second fondamental form for varifold and the existence of surfaces minimising curvature*, Indiana Univ. Math. Jou., **35** (1986), pp. 45-71.
[HU2] **J. E. Hutchinson**, $C^{1,\alpha}$ *Multiple function regularity and tangent cone behaviour for varifold with second fundamental form in* L^p, in: Geometric measure theory and the calculus of variations, W. K. Allard e F. J. Almgren ed., Proc. Symp. Pure Math., **44** Am. Math. Soc. (1986), pp. 281-306.
[HU3] **J. E. Hutchinson**, *Some regularity theory for curvature varifolds*, in: Miniconferece on geometry and partial differential equations, Proc. Centre Math. Anal., vol. 12, Australian National University, Camberra, 1987, pp. 60-66.
[MA1] **C. Mantegazza**, *Su alcune definizioni deboli di curvatura per insiemi non orientati*, Tesi di Laurea, Univ. Pisa, 1993.
[MA2] **C. Mantegazza**, *Curvature varifolds with boundary*, to appear.
[MO] **F. Morgan**, *Geometric Measure Theory– A Beginner's Guide*, Academic Press, Boston, 1988.
[MS] **D. Mumford & J. Shah**, *Optimal Approximation by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems*, Comm. Pure Appl. Math., **17** (1989), pp. 577-685.
[PI] **J. Pitts**, *Existence and regularity of minimal submanifolds in Riemannian manifold*, Math. Notes 27, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981.
[SI] **L. Simon**, *Lectures on geometric measure theory*, Proc. Centre Math. Analysis, vol. 3, Australian National University, Camberra, 1984.
[SP] **M. Spivak**, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Berkeley, 1979.