UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II
SCUOLA POLITECNICA DELLE SCIENZE DI BASE

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E APPLICAZIONI
"RENATO CACCIOPPOLI"

CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

L'Approccio Spinoriale al Teorema di Massa Positiva

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

RELATORI
Prof. Carlo Mantegazza
Prof. Stefano Borghini

CANDIDATO
Francesco Urso
P62/000053

ANNO ACCADEMICO 2024/2025

Indice

Introduzione

Nella teoria newtoniana della gravitazione, i concetti di massa (gravitazionale), energia e momento (il vettore quantità di moto) sono ben definiti (in un certo senso, in modo "assoluto"), mentre nella teoria della relatività di Einstein, come tutti gli enti fisici della teoria, dipendono dalla relazione tra le velocità dell'osservatore e dell'oggetto osservato, dunque non sono così chiaramente univocamente determinati. Ciononostante, almeno nel caso della relatività ristretta, questi concetti sono ben compresi. Si pensi in particolare alla celebre formula $E = mc^2$, che mostra l'equivalenza tra l'energia E e la massa a riposo m (ovvero la massa di un oggetto misurata da un osservatore che si muove con lui).

In relatività generale, la questione è resa più complessa dalla presenza della gravità, in quanto la distribuzione di materia, che determina l'attrazione gravitazionale, dunque il campo di forze e di conseguenza, il moto di una particella (massiva) libera, è sostituita da un "oggetto" (un tensore), detto *tensore energia–impulso*, che descrive la "concentrazione" di energia (o equivalentemente, di massa) in uno spaziotempo quadridimensionale (tre dimensioni spaziali e una temporale), cioè una varietà dotata di una *metrica lorentziana*, data da una forma bilineare simmetrica con segnatura $(-, +, +, +)$ in ogni punto. Tale tensore "influenza" la curvatura (dunque la geometria) di tale spaziotempo e una particella libera si muove lungo una geodetica (analogamente al caso dello spazio euclideo, dove il moto è rettilineo uniforme). Allora, in questa formulazione, la gravità non è più un campo di forze in senso classico, ma una "manifestazione" della curvatura dello spaziotempo.

La relazione tra la curvatura (di Ricci) dello spaziotempo e il tensore energia–impulso è descritta dalle *equazioni di campo di Einstein* (derivate nel 1916 da Albert Einstein in [18]), in cui appare come un termine di "sorgente gravitazionale", sebbene la sua introduzione sia originariamente dovuta a Hermann Minkowski nel 1908 in [35], nell'ambito della relatività ristretta.

Il problema di definire in modo soddisfacente l'energia e il momento *totali* di uno spaziotempo (cioè la totalità dell'energia e della quantità di moto presente nel sistema/universo) nacque quasi contemporaneamente alla teoria della relatività generale e fu sollevato da Einstein stesso nel 1918 [19]. Sebbene si possa immaginare che il tensore energia–impulso basti per questo scopo, si hanno esempi di spaziotempi "vuoti", cioè dove tale tensore è identicamente nullo, ma vi è curvatura, dunque una "presenza" di energia gravitazionale "intrinseca". Per meglio comprendere questo punto, si consideri il *principio di equivalenza* (un "cardine" della relatività generale), il quale afferma che l'interazione gravitazionale è sempre "localmente eliminabile", ossia è sempre possibile scegliere un sistema di riferimento tale che, nell'intorno di un punto fissato, non si risente dell'interazione gravitazionale (sistemi in caduta libera). Dunque, se l'energia gravitazionale fosse completamente descrivibile mediante un tensore, questo implicherebbe che scegliendo un opportuno riferimento, esso sarebbe nullo in qualche punto, ma diverso da zero cambiando le coordinate, portando quindi a una contraddizione.

Si consideri, ad esempio, lo spaziotempo di Schwarzschild, la prima soluzione storica delle equazioni di Einstein, ottenuta nel 1916. Esso rappresenta la regione esterna attorno a un buco nero statico: tale spaziotempo è una soluzione (statica) delle equazioni di Einstein nel vuoto, cioè con tensore energia–impulso nullo ovunque. Malgrado ciò, questo spaziotempo (universo) possiede una massa (totale) ben determinata con chiari effetti gravitazionali, che è quella del buco nero (la massa euristicamente "collassata" in una singolarità al di là dell'orizzonte del buco nero). Ciò allora mostra che eventuali definizioni di energia e momento totali di uno spaziotempo non si possano semplicemente ottenere "integrando" una qualche densità locale (legata al tensore energia–impulso), bensì in realtà "misurando" quanto la geometria si discosti dall'essere piatta (tipicamente in senso asintotico).

La questione ha trovato una prima risposta da parte di Richard Arnowitt, Stanley Deser e Charles W. Misner (ADM) che nel 1959 in [2], definirono l'energia E e il momento P nel caso di sistemi "isolati" (come una stella, o una galassia, o un buco nero). Queste grandezze sono ottenute come limiti "all'infinito" di opportuni integrali su ipersuperfici "spaziali" che misurano quanto velocemente lo spazio sta diventando piatto, quando ci "allontaniamo" dal sistema.
In analogia con quanto noto in relatività ristretta (si veda l'Osservazione 2.21), si vorrebbe definire anche una nozione di massa (la cosiddetta *massa ADM*) come $m_{\mathrm{ADM}} = \sqrt{E^2 - |P|^2}$. Per farlo, c'è chiaramente bisogno di stabilire la nonnegatività del termine sotto radice, inoltre, ci si aspetta naturalmente che (sotto opportune condizioni "fisiche") anche l'energia E sia nonnegativa. Queste due condizioni insieme sono equivalenti alla validità della disuguaglianza $E \geqslant |P|$.
Inoltre, è ragionevole aspettarsi anche delle proprietà di *rigidità*, cioè di poter caratterizzare in qualche modo gli spazi nei casi di uguaglianza $E = |P|$. L'esempio più famoso è il caso di energia ADM nulla e curvatura scalare nonnegativa, in cui lo spazio deve essere piatto.

Queste questioni sono risolte dal *teorema di massa positiva* (PMT – *positive mass theorem*), talvolta detto giustamente anche *teorema di energia positiva* e suoi sviluppi, per quanto detto sopra, dimostrato dapprima da Richard Schoen e Shing–Tung Yau [38] e successivamente da Edward Witten [41] (nel caso spaziale tridimensionale), indipendentemente e con tecniche molto diverse. Entrambe le dimostrazioni (che sono piuttosto complesse e tecniche) si sono rivelate molto influenti, dando origine a un'ampia letteratura (va menzionato che la dimostrazione di Witten ha necessitato di una successiva trattazione matematicamente rigorosa da parte di Thomas Parker e Clifford Henry Taubes in [36]).

In questa tesi ci concentriamo sull'approccio di Witten (basato su metodi di *geometria spinoriale*) al fine di presentare una dimostrazione del teorema di massa positiva e di chiarire i casi di rigidità, oggi completamente compresa grazie al recente lavoro [27] del 2024 di Sven Hirsch e Yiyue Zhang, basato sugli stessi metodi.

Più in dettaglio, nel Capitolo 1 introduciamo gli strumenti di geometria spinoriale necessari in tutta la tesi: le nozioni di *fibrato principale* e di *fibrato vettoriale associato*, la costruzione del gruppo $\mathrm{Spin}(n)$ e dei fibrati degli *spinori*, la connessione ∇ indotta dalla connessione di Levi–Civita di una varietà riemanniana su tali fibrati e l'associato *operatore di Dirac* $\not{D}$. Dimostreremo inoltre la seguente fondamentale *formula di Schrödinger–Lichnerowicz*:

$$\not{D}^2\psi = -\Delta\psi + \frac{1}{4}\,R\,\psi\,,$$

dove Δ è il *laplaciano* sugli spinori, cioè $\Delta\psi = g^{ij}\nabla^2_{ij}\psi$.

Nel Capitolo 2, discutiamo inizialmente le *equazioni di campo di Einstein*, che sono date da

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}R\,\mathbf{g} = 8\pi T$$

nel "caso fisico" di uno spaziotempo quadridimensionale (qui Ric e R sono rispettivamente, il tensore di Ricci e la curvatura scalare di $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ e T è il tensore energia–impulso detto sopra) e descriviamo poi la cosiddetta "formulazione ADM" della relatività generale, cioè un quadro concettuale in cui per analizzare uno spaziotempo lorentziano $(n+1)$–dimensionale, si considera una sua *foliazione* in ipersuperfici "spaziali" dette *initial data set* (Definizione 2.11) e si studia la loro geometria e la loro relazione con lo spaziotempo ambiente che le contiene.

Un initial data set è il dato di una tripla (M, g, k), dove (M, g) è un'ipersuperficie "spaziale" di uno spaziotempo $(n+1)$–dimensionale $\mathcal{M}$ con una metrica lorentziana $\mathbf{g}$ (cioè una sottovarietà n–dimensionale tale che la metrica indotta sia riemanniana) e dove k è la seconda forma fondamentale di (M, g) in $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. Il tensore energia–impulso dello spaziotempo impone allora dei vincoli su g e k, come conseguenza delle equazioni di campo di Einstein, che sono detti *Einstein constraint equations*.
Assumendo che lo spaziotempo sia *asintoticamente piatto*, cioè descriva un sistema isolato, dove per definizione la metrica tende a diventare euclidea "all'infinito" (lontano dal sistema), seguendo Arnowitt, Deser e Misner, possiamo allora dare delle definizioni "globali", dette ADM, di energia (Definizione 2.17), momento (Definizione 2.19) e massa (Definizione 2.20) di un initial data set.
Oltre alla piattezza asintotica, un'assunzione fisicamente naturale che si richiede sullo spaziotempo è che soddisfi la cosiddetta *dominant energy condition* (DEC – Definizione 2.10), che intuitivamente garantisce che la "densità di energia" sia nonnegativa e che le velocità di variazione nel tempo di energia e momento non siano superiori a quella della luce.

Il resto del capitolo è dedicato alla dimostrazione *à la Witten* (cioè utilizzando gli spinori) del *teorema di massa positiva* (PMT – *positive mass theorem*, Teorema 2.35), nelle ipotesi dette sopra. Nella nostra analisi, ci concentreremo prima sul caso *time–symmetric* (Teorema 2.28), ovvero il caso in cui la curvatura estrinseca k dell'initial data set è identicamente nulla e successivamente, sul caso generale. Il caso time–symmetric è molto studiato perché comunque racchiude in sé molte delle difficoltà del caso generale, ma l'annullarsi del tensore k di un initial data set (M, g, k) semplifica significativamente le equazioni. In particolare, la DEC si riduce alla richiesta che la curvatura scalare R della varietà riemanniana (M, g) sia nonnegativa. Inoltre, nel caso time–symmetric il momento ADM P è nullo, dunque dalla definizione detta sopra $m_{\mathrm{ADM}} = \sqrt{E^2 - |P|^2}$ di massa ADM, segue che $m_{\mathrm{ADM}} = |E|$. In letteratura, in questo caso è comune (e giustificato a posteriori dal PMT) definire la massa ADM come $m_{\mathrm{ADM}} = E$. Quindi il teorema di massa positiva si riduce alla nonnegatività dell'energia/massa ADM, sotto l'ipotesi $R \geqslant 0$.

TEOREMA (PMT – Caso time–symmetric). *Sia $n \geqslant 3$ e sia (M^n, g) una varietà riemanniana completa, spin e asintoticamente piatta, tale che la sua curvatura scalare R sia nonnegativa. Allora, per ogni* end *di (M, g) (una componente connessa della varietà fuori da un appropriato compatto "grande", cioè una parte della varietà "che sta andando verso l'infinito"), si ha*

$$m_{\mathrm{ADM}} = E \geqslant 0\,,$$

con uguaglianza se e solo se (M, g) è isometrico a $(\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{R}^n})$.

Poiché le 3–varietà riemanniane orientabili sono tutte spin [29, Capitolo VIII, Teorema 1], il teorema vale allora per ogni 3–varietà orientabile (ovviamente, il caso più rilevante dal punto di vista fisico).

L'idea della dimostrazione di Witten (resa rigorosa da Parker e Taubes in [36]) è quella di considerare un appropriato prodotto scalare $\langle \cdot\,,\cdot\rangle$ sul fibrato spinoriale (Teorema 1.15), "compatibile" con la connessione introdotta sul fibrato e per cui l'operatore di Dirac $\not{D}$ sia autoaggiunto (Lemma 1.28) e poi osservare che per la formula di Schrödinger–Lichnerowicz, se $\Omega \subseteq M$ è un dominio compatto con bordo regolare e normale esterna ν, si ha

$$0 = \int_\Omega \Big\langle \psi, -\not{D}^2\psi - \Delta\psi + \frac{1}{4}\,R\,\psi \Big\rangle\, d\mu = \int_\Omega \big(-|\not{D}\psi|^2 + |\nabla\psi|^2 + \tfrac{1}{4}R\,|\psi|^2\big)\, d\mu_M \\ - \int_{\partial\Omega} \langle \psi, \nabla_\nu\psi + \nu\cdot\not{D}\psi\rangle\, d\mu_{\partial\Omega}\,,$$

per il teorema della divergenza ($d\mu$ è la misura riemanniana canonica di (M,g) e $d\mu_{\partial\Omega}$ quella indotta su $\partial\Omega$)). Si ha dunque l'uguaglianza

$$\int_\Omega \big(-|\not{D}\psi|^2 + |\nabla\psi|^2 + \tfrac{1}{4}R\,|\psi|^2\big)\, d\mu_M = \int_{\partial\Omega} \langle \psi, \nabla_\nu\psi + \nu\cdot\not{D}\psi\rangle\, d\mu_{\partial\Omega}$$

e (supponendo che la varietà abbia un unico end, per semplicità) si mostra poi che "ingrandendo" Ω in modo che $\partial\Omega$ "vada verso l'infinito", se lo spinore ψ soddisfa delle appropriate condizioni (all'infinito – Proposizioni 2.29 e 2.33), l'integrale di bordo a destra converge alla massa ADM, quindi, se l'integrale di volume a sinistra tende a un limite nonnegativo, si ha la conclusione cercata. Tale integrale di volume coinvolge quantità nonnegative, fatta eccezione per il termine $-|\not{D}\psi|^2$, per cui ci si riduce a cercare uno spinore che risolva l'*equazione di Dirac* $\not{D}\psi = 0$ (cioè sia *armonico*) e soddisfi le condizioni dette sopra.
Questa linea dimostrativa permette di ottenere anche la rigidità in caso di uguaglianza: se la massa di un end è nulla, allora *tutta* la varietà (M,g) è isometrica a $\mathbb{R}^n$ con la metrica standard (discuteremo questo fatto all'inizio del Capitolo 3).

Nel caso generale, cioè per un initial data set (M,g,k) con k non nullo, il teorema di massa positiva afferma che $E \geqslant |P|$. L'idea della dimostrazione è simile a quella del caso time–symmetric, ma a livello tecnico ci sono alcune difficoltà rilevanti nella ricerca dell'opportuno spinore, che dovrà risolvere un'equazione di Dirac con membro destro non nullo.

Il Capitolo 3 è dedicato alla "rigidità". Come già menzionato, nel caso time–symmetric la strategia dimostrativa *à la Witten* permette di dimostrare anche che se la massa ADM è zero, allora la varietà è $\mathbb{R}^n$ con la metrica standard (Teorema 3.1).

Il caso non time–symmetric è invece più delicato: esistono infatti spaziotempi (diversi da quello di Minkowski, cioè $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ con la metrica $-dt^2+dx_1^2+\dots+dx_n^2$) che soddisfano la DEC e contengono al loro interno ipersuperfici spaziali asintoticamente piatte e con $E = |P|$, che non sono isometriche allo spazio euclideo. Questi sono i cosiddetti *spaziotempi pp–wave* ("pp" sta per *plane fronted with parallel rays*) e sono i modelli più semplici di onde gravitazionali (con "fronti d'onda" piatti). Le onde gravitazionali, la cui esistenza fu teorizzata da Einstein già nel 1916, sono divenute particolarmente celebri recentemente, dopo che sono state osservate sperimentalmente dal progetto LIGO. Esse sono da pensare come onde che si propagano alla velocità della luce e che al loro passaggio deformano lo spaziotempo. È quindi ragionevole (e ciò può essere reso rigoroso con conti espliciti) che queste onde, contenendo solo energia sotto forma di radiazione, non contribuiscano alla massa e che quindi soddisfino $m_{\mathrm{ADM}} = \sqrt{E^2 - |P|^2} = 0$.

Grazie al recente lavoro di Hirsch e Zhang [27], è ora accertato che questi spaziotempi pp–wave sono gli unici spaziotempi non banali a soddisfare la rigidità nel teorema di massa positiva. Più precisamente, combinando il lavoro di Witten con l'analisi in [27], si ottiene il seguente risultato, la cui dimostrazione sarà il nostro principale obiettivo in questo capitolo.

TEOREMA (PMT – Caso generale). *Sia $n \geqslant 3$ e sia (M^n, g, k) un initial data set completo e asintoticamente piatto che soddisfa la DEC. Se la varietà riemanniana (M, g) è spin, per ogni suo end, si ha*

$$E \geqslant |P| \,,$$

dove E e P sono rispettivamente l'energia e il momento ADM dell'end. Inoltre, se $E = |P|$, allora (M, g) si immerge isometricamente in uno spaziotempo pp–wave $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ *con seconda forma fondamentale k.*

Nel caso $E = |P| = 0$ si ha inoltre la conclusione più forte che (M, g) si immerge isometricamente dentro lo spaziotempo di Minkowski (che, dal punto di vista della conclusione del teorema precedente, non è altro che lo "spaziotempo pp–wave banale"), per una trattazione completa si veda [27, Teorema 1.3]. Un'altra conseguenza è che in dimensione bassa vale un enunciato di rigidità più forte. Più precisamente, per $n = 3$ e $n = 4$, un initial data set con $E = |P|$ si immerge isometricamente dentro lo spaziotempo di Minkowski. A partire dalla dimensione $n = 5$ è invece possibile costruire esplicitamente degli initial data set asintoticamente piatti all'interno di spaziotempi pp–wave non banali, si veda [27, Esempio 8.1].

Il primo passo della dimostrazione è quello di utilizzare la strategia di Witten (ovvero integrare la formula di Schrödinger–Lichnerowicz su un compatto "sempre più grande") unitamente all'ipotesi $E = |P|$ per produrre uno spinore ψ con specifiche proprietà asintotiche e parallelo rispetto alla connessione spaziotemporale $\widetilde{\nabla}$. Per mezzo di tale spinore, si costruisce dunque una funzione u detta *spacetime harmonic*, che soddisfa l'equazione $\nabla^2 u = -k\,|\nabla u|$ e i cui insiemi di livello sono piatti. La funzione u viene poi utilizzata per realizzare uno *sviluppo di Killing*, ovvero per "fare evolvere" l'ipersuperficie (M, g) e ricostruire l'intero spaziotempo, che risulta allora essere uno spaziotempo pp–wave.

CAPITOLO 1

Elementi di geometria spinoriale

In questo capitolo introdurremo e discuteremo alcuni concetti di geometria spinoriale. La trattazione che segue ha un carattere introduttivo ed è finalizzata esclusivamente ai risultati che ci proponiamo di presentare nel seguito della tesi, per un'esposizione più completa, si rimanda il lettore a [31].

In tutta la tesi, le varietà, le funzioni e tutti gli oggetti che considereremo saranno di classe C^∞, a meno che esplicitamente indicato diversamente. Inoltre, adotteremo molto spesso la convenzione di Einstein di somma sugli indici ripetuti. In molte formule, C denoterà una generica costante che potrà cambiare da un passaggio al successivo.

1.1. Fibrati principali e fibrati vettoriali associati

DEFINIZIONE 1.1. Sia G un gruppo di Lie e sia M una varietà differenziale. Diciamo che F è un G–fibrato principale su M se esistono una proiezione

$$\pi : F \to M$$

e un'azione destra del gruppo

$$F \times G \to F$$

tali che l'azione sia libera e transitiva sulle fibre $\pi^{-1}(p)$ per ogni $p \in M$.

OSSERVAZIONE 1.2. Si noti che la condizione che il gruppo G agisca liberamente e transitivamente sulle fibre implica che G agisce mediante diffeomorfismi su ogni fibra e inoltre ogni fibra è (non canonicamente) diffeomorfa a G. In altre parole, ogni fibra può essere pensata come una "copia affine" del gruppo G.

Una *trivializzazione locale* di un G–fibrato principale è data da un aperto $U \subseteq M$ e un diffeomorfismo

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$$

tale che Φ sia *G–equivariante*, cioè per ogni $p \in U$ e $g, h \in G$, si ha

$$\Phi^{-1}(p, g) \cdot h = \Phi^{-1}(p, gh)\,.$$

OSSERVAZIONE 1.3. Si ha che ogni trivializzazione locale definisce una sezione locale del G–fibrato principale

$$s : U \to \pi^{-1}(U)\,,$$

ponendo $s(p) = \Phi^{-1}(p, e)$ per ogni $p \in U$, dove e è l'identità del gruppo G. Viceversa, per la G–equivarianza, una sezione locale s determina una trivializzazione locale Φ su U tramite l'equazione

$$\Phi^{-1}(p, g) = s(p) \cdot g.$$

La struttura del G–fibrato principale può allora essere descritta da una famiglia di trivializzazioni locali che ricoprono M e dalle *funzioni di transizione* tra di esse. Date due sezioni locali $s_i : U_i \to \pi^{-1}(U_i)$, la funzione di transizione

$$t_{ij} : U_i \cap U_j \to G$$

è definita dall'equazione

$$s_j(p) = s_i(p) \cdot t_{ij} \, .$$

Un esempio fondamentale di G–fibrato principale è il *fibrato dei riferimenti* su una varietà differenziale n–dimensionale M. In questo caso, ogni elemento di F è una base dello spazio tangente a M in un suo punto p (cioè un *riferimento* in $p \in M$) e l'immagine mediante π di questo elemento è il punto base $p \in M$. Questo fibrato di riferimenti può essere visto come un $GL(n)$–fibrato principale considerando la consueta azione destra di $GL(n)$ sull'insieme delle basi dello spazio vettoriale T_pM.
Dunque, come detto sopra, qualunque campo di riferimenti locale $s = (u_1, \dots, u_n)$ su un aperto $U \subseteq M$ determina una trivializzazione locale di questo fibrato e dato un altro campo di riferimenti locale $s' = (u'_1, \dots, u'_n)$ sull'aperto U', la funzione di transizione

$$t : U \cap U' \to GL(n)$$

è la funzione a valori matriciali che manda la base standard di $\mathbb{R}^n$ nella base di $\mathbb{R}^n$ ottenuta scrivendo $u'_1, \dots, u'_n$ nella base $u_1, \dots, u_n$ (cioè la matrice di cambio di base tra i riferimenti s e s'). Indicheremo il fibrato dei riferimenti di una varietà M con F_{GL}.

Se la varietà M è riemanniana con metrica g, possiamo allora considerare il fibrato F i cui elementi sono le basi *ortonormali* dei suoi spazi tangenti. Questo è chiamato *fibrato dei riferimenti ortonormali* e denotato con F_O, che è dunque un $O(n)$–fibrato principale su (M, g). Si noti che a differenza del fibrato dei riferimenti F_{GL}, il fibrato dei riferimenti ortonormali ha le fibre e il gruppo di Lie $O(n)$ (che agisce su di esse) compatti.

Se poi la varietà è anche orientata, possiamo restringerci ulteriormente a basi ortonormali orientate, il che ci conduce al *fibrato dei riferimenti ortonormali orientati* F_{SO}, che è un $SO(n)$–fibrato principale su (M, g). Le trivializzazioni locali e le funzioni di transizione sono definite come per F_{GL}, con la differenza che per F_{SO}, le funzioni di transizione sono a valori in $SO(n)$.

Vogliamo ora sfruttare la teoria dei fibrati principali per costruire, a partire da essi, dei fibrati vettoriali associati.

DEFINIZIONE 1.4. Dato un G–fibrato principale F su una varietà n–dimensionale M, uno spazio vettoriale V di dimensione n e una rappresentazione

$$\rho : G \to GL(V) \, ,$$

il *fibrato vettoriale associato* $V(M)$ è il quoziente di $F \times V$ mediante l'azione di G data da

$$(x, v) \cdot g = (x \cdot g, \rho(g^{-1})v) \, ,$$

dove $x \in F$, $v \in V$ e $g \in G$.

Si osservi che ogni fibra di $V(M)$ è isomorfa a V e la formula sopra definisce l'azione di G su di essa.

ESEMPIO 1.5. Sia F_{GL} il fibrato dei riferimenti su una varietà differenziale M e sia

$$\iota : GL(n) \to GL(n)$$

l'identità di $GL(n)$. Allora, si può vedere che il fibrato vettoriale associato a F_{GL}, usando come rappresentazione l'identità di $GL(n)$ e come spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, è isomorfo al fibrato tangente TM. Si noti che in questo caso la rappresentazione ι è l'azione usuale di $GL(n)$ su $\mathbb{R}^n$.

ESEMPIO 1.6. Sia $T^r_s\mathbb{R}^n = \bigotimes^r \mathbb{R}^n \bigotimes^s \mathbb{R}^{n*}$ lo spazio vettoriale dei tensori di tipo (r, s), cioè r–controvarianti e s–covarianti e consideriamo la rappresentazione

$$\rho : GL(n) \to GL(T^r_s\mathbb{R}^n)$$

definita da

$$\rho(g)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes v_1^* \otimes \cdots \otimes v_s^*) = g(v_1) \otimes \cdots \otimes g(v_r) \otimes g^{-1}(v_1^*) \otimes \cdots \otimes g^{-1}(v_s^*)\,,$$

dove in questo caso "$\cdot$" denota l'usuale azione destra del gruppo $GL(n)$ su $\mathbb{R}^n$. Il fibrato vettoriale associato a F_{GL} con la rappresentazione ρ di sopra e con lo spazio vettoriale modello $T^r_s\mathbb{R}^n$, è isomorfo al fibrato vettoriale dei tensori r–controvarianti e s–covarianti T^r_sM.

OSSERVAZIONE 1.7. Una sezione locale s su $U \subseteq M$ di un G–fibrato principale F su una varietà differenziale M, induce una mappa

$$\phi : U \times V \to V(M)\,, \qquad \phi(p, v) = [s(p), v]$$

per ogni $(p, v) \in U \times V$, dove le parentesi quadre rappresentano la mappa quoziente $F \times V \to V(M)$, che dunque è una trivializzazione locale del fibrato $V(M)$.

OSSERVAZIONE 1.8. In letteratura, per *trivializzazione* di un fibrato vettoriale, le cui fibre sono tutte isomorfe a un dato spazio vettoriale V, si intende in genere un diffeomorfismo

$$\psi : \phi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^m$$

(dove $m = \dim V$) compatibile con le proiezioni su U. La nostra definizione si ricava da quella classica fissando un isomorfismo lineare $\theta : \mathbb{R}^m \to V$ e componendo ψ con l'applicazione $\mathrm{id}_U \times \theta$.

1.2. Spinori e varietà spin

DEFINIZIONE 1.9. Dato uno spazio vettoriale V con un prodotto scalare $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, definiamo l'*algebra di Clifford* $\mathrm{Cl}(V)$ come l'algebra tensoriale libera su V, quozientata rispetto alla relazione $v \otimes v = -\|v\|^2 = -\langle v, v\rangle$, per ogni $v \in V$, cioè

$$\mathrm{Cl}(V) = \left(\bigoplus_{r=0}^{\infty} \bigotimes^r V \right) \Big/ I\,,$$

dove I è l'ideale generato dalle relazioni $v \otimes v = -\|v\|^2$, per ogni $v \in V$.
Il prodotto tensoriale induce allora un prodotto in $\mathrm{Cl}(V)$ detto *prodotto di Clifford*.

D'ora in poi, lasceremo sottinteso il simbolo $\otimes$ di moltiplicazione tensoriale e rappresenteremo il prodotto di Clifford per semplice giustapposizione dei fattori. Dalla formula di polarizzazione relativa alla forma quadratica associata al prodotto scalare di V, si ha l'identità

$$vw + wv = -2\langle v, w\rangle$$

in $\mathrm{Cl}(V)$ e se $e_1, \ldots, e_n$ è una base ortonormale di V, questa si riduce all'equazione

$$e_ie_j + e_je_i = -2\delta_{ij}\,. \tag{1.1}$$

Denoteremo con $\mathrm{Cl}(n)$ l'algebra di Clifford di $\mathbb{R}^n$ col prodotto scalare standard. Allora, non è difficile mostrare che $\mathrm{Cl}(n)$ ha dimensione 2^n come spazio vettoriale.

DEFINIZIONE 1.10. Si definisce $Spin(n) \subseteq \mathrm{Cl}(n)$ come il sottogruppo generato dall'insieme di tutti i prodotti del tipo vw dove $v, w \in \mathbb{R}^n$ sono vettori unitari.

Ogni elemento di $Spin(n)$ è dunque il prodotto di un numero pari di vettori unitari $v_i \in \mathrm{Cl}(n)$ e notiamo che ogni generatore vw ha come inverso wv. Più in generale $(v_1 v_2 \cdots v_{2k})^{-1}$ è uguale a $v_{2k} \cdots v_2 v_1$, se tutti i vettori v_i sono unitari. Questo segue banalmente dal fatto che $v^2 = -1$. Inoltre, $Spin(n)$ è un gruppo di Lie, essendo un sottogruppo chiuso del gruppo delle unità di $\mathrm{Cl}(n)$ (l'insieme degli suoi elementi invertibili, che è aperto in $\mathrm{Cl}(n)$).

Introduciamo l'omomorfismo di gruppi

$$\xi : Spin(n) \to SO(n) \,,$$

definendo $\xi(vw)$ per ogni generatore vw di $Spin(n)$, come la composizione della riflessione in $\mathbb{R}^n$ all'iperpiano ortogonale a w con la successiva riflessione rispetto all'iperpiano ortogonale a v. Il fatto che la mappa ξ sia un omomorfismo è dunque evidente e si mostra che $Spin(n)$ è un gruppo di Lie connesso che riveste a due fogli $SO(n)$ mediante ξ. In particolare, $Spin(n)$ e $SO(n)$ hanno la stessa dimensione e poiché $\pi_1(SO(n) = \mathbb{Z}_2$ (si veda [40], per esempio), segue che $Spin(n)$ è semplicemente connesso.

Si ha la seguente proposizione (si veda [17, Lemma 1.3.3] per una dimostrazione).

PROPOSIZIONE 1.11. *Consideriamo l'applicazione*

$$D\xi \colon T_1 Spin(n) \to T_{\mathrm{Id}} SO(n) \,,$$

dove $T_1 Spin(n)$ è identificato con un sottospazio di $\mathrm{Cl}(n)$, mentre $T_{\mathrm{Id}} SO(n)$ con un sottospazio di $\mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$. Sia $e_1, \dots, e_n$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ e sia $\theta^1, \dots, \theta^n$ la base duale. Allora, per ogni coppia di indici $i, j \in \{1, \dots, n\}$, con $i \neq j$, si ha

$$D\xi(e_i e_j) = 2\, A_i^j \,,$$

dove

$$A_i^j = e_j \otimes \theta^i - e_i \otimes \theta^j \in \mathrm{End}(V) \,.$$

da cui,

$$A_i^j(v) = \frac{1}{2}\big(e_i e_j v - v e_i e_j\big) \,,$$

per ogni $v \in \mathbb{R}^n$.

DEFINIZIONE 1.12. Una varietà riemanniana orientabile (M, g) si dice *spin* se il suo fibrato dei riferimenti ortonormali orientati F_{SO} ha un rivestimento che è uno $Spin(n)$–fibrato principale, denotato con F_{Spin}, tale che la mappa di rivestimento $\pi : F_{Spin} \to F_{SO}$ è equivariante rispetto all'azione dei gruppi $Spin(n)$ e $SO(n)$, cioè

$$\pi(p \cdot g) = \pi(p) \cdot \xi(g),$$

per ogni $p \in F_{Spin}$ e $g \in Spin(n)$, dove $\xi : Spin(n) \to SO(n)$ è l'omomorfismo di gruppi visto sopra.

OSSERVAZIONE 1.13. Un fatto estremamente rilevante, in particolare per la nostra trattazione, è che tutte le 3–varietà riemanniane orientabili sono spin [29, Capitolo VIII, Teorema 1].

DEFINIZIONE 1.14. Sia (M, g) una varietà riemanniana spin e sia S uno spazio vettoriale di dimensione finita dotato di una struttura di modulo reale su $\mathrm{Cl}(n)$. Consideriamo la rappresentazione di $Spin(n)$ che associa a ogni $g \in Spin(n)$ l'elemento di $GL(S)$ data dal $\mathrm{Cl}(n)$–prodotto per g del modulo S. Allora, il fibrato vettoriale $S(M)$ associato allo $Spin(n)$–fibrato principale F_{Spin}, allo spazio vettoriale S e a questa rappresentazione di $Spin(n)$ (Definizione 1.4) è detto *fibrato spinoriale su* (M, g). Le sue sezioni sono dette *spinori*.

Su ogni fibra del fibrato spinoriale $S(M)$ (che è isomorfa ad S) è possibile introdurre un prodotto scalare, che dunque fornisce un prodotto scalare tra spinori. Più precisamente vale il seguente risultato.

TEOREMA 1.15. *Sia S uno spazio vettoriale reale di dimensione finita dotato di una struttura di* $\mathrm{Cl}(n)$*–modulo. Allora esiste un prodotto scalare su S tale che*

$$\langle v \cdot \psi, v \cdot \phi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle \,,$$

per ogni v vettore unitario di $\mathbb{R}^n \subseteq \mathrm{Cl}(n)$ e per ogni $\phi, \psi \in S$, dove $\cdot$ denota il $\mathrm{Cl}(n)$–prodotto su S.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri una base ortonormale $e_1, \ldots, e_n$ di $\mathbb{R}^n$ e si osservi che $F_n = \{\pm e_{i_1} \cdots e_{i_k} : 1 \leqslant k \leqslant n\}$ con il prodotto di Clifford è un gruppo finito. Infatti, la stabilità (cioè che un prodotto di elementi di F_n sta ancora in F_n) rispetto al prodotto di Clifford è banale. Poi $1 \in F_n$, in quanto $e_i \cdot e_i = 1$. Inoltre, un elemento generico $\pm e_{i_1} \cdots e_{i_k}$ è invertibile, infatti se k è pari $\pm e_{i_k} \cdots e_{i_1}$ è il suo inverso, se invece k è dispari l'inverso sarà $\mp e_{i_k} \cdots e_{i_1}$. L'associatività segue dall'associatività del prodotto di Clifford.
A questo punto, essendo S di dimensione finita, consideriamo un prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_0$ su S e definiamo

$$\langle \psi, \phi \rangle = \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} (g \cdot \psi, g \cdot \psi)_0 \,,$$

dove $|F_n|$ è la cardinalità (finita) di F_n. Esso è banalmente bilineare, definito positivo e simmetrico. Inoltre, osserviamo che per come è costruito vale la seguente proprietà:

$$\langle e_i \cdot \psi, e_i \cdot \phi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle \,,$$

per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Dimostriamo infatti che ciò vale per ogni vettore unitario $v \in \mathbb{R}^n$. Sia $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$, tale che $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$, con $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Allora, per la bilinearità, si ha:

$$\langle v \cdot \psi, v \cdot \phi \rangle = \sum_{i=1}^n a_i^2 \langle e_i \cdot \psi, e_i \cdot \phi \rangle + \sum_{i \neq j} a_i a_j \langle e_i \cdot \psi, e_j \cdot \phi \rangle \,.$$

Osserviamo che la seconda sommatoria è uguale a zero. Infatti, i vettori e_i agiscono come operatori antisimmetrici per il prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Invero $\langle e_i \cdot \psi, \phi \rangle = \langle e_i^2 \cdot \psi, e_i \cdot \phi \rangle = -\langle \psi, e_i \cdot \phi \rangle$. Da questo e dalla formula (1.1), si ha che

$$a_i a_j \langle e_i \cdot \psi, e_j \cdot \phi \rangle = -a_i a_j \langle \psi, e_i e_j \cdot \phi \rangle = a_i a_j \langle \psi, e_j e_i \cdot \phi \rangle = -a_j a_i \langle e_j \cdot \psi, e_i \cdot \phi \rangle \,. \tag{1.2}$$

Dunque la formula (1.2) si riduce a

$$\langle v \cdot \psi, v \cdot \phi \rangle = \sum_{i=1}^n a_i^2 \langle e_i \cdot \psi, e_i \cdot \phi \rangle = \sum_{i=1}^n a_i^2 \langle \psi, \phi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle \,,$$

completando la dimostrazione. □

OSSERVAZIONE 1.16. Si noti che i vettori $v \in \mathbb{R}^n \subseteq \mathrm{Cl}(n)$ unitari si comportano come operatori antisimmetrici. Infatti, si ha

$$\langle v \cdot \psi, \phi \rangle = \langle v^2 \cdot \psi, v \cdot \phi \rangle = -\langle \psi, v \cdot \phi \rangle \,.$$

DEFINIZIONE 1.17. Sia $S(M)$ come nella Definizione 1.14, sia m la dimensione di S e sia U un aperto di M. Un *riferimento locale* $(\psi_1, \dots, \psi_m)$ di $S(M)$ su U è una m–upla di sezioni locali definite su U di $S(M)$ tali che per ogni punto $p \in U$, si ha che $\big(\psi_1(p), \dots, \psi_m(p)\big)$ è una base della fibra sopra p di $S(M)$ (che è isomorfa a S).

DEFINIZIONE 1.18. Sia ρ la rappresentazione $\rho : SO(n) \to GL\big(\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^n)\big)$. Per ogni $g \in SO(n)$ e per qualunque famiglia di vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$, definiamo l'azione di g sul loro prodotto in $\mathrm{Cl}(n)$ ponendo

$$\rho(g)\big(v_1 \cdots v_k\big) = g(v_1) \, \cdots \, g(v_k) \,.$$

Il *fibrato di Clifford* $\mathrm{Cl}(M)$ è il fibrato vettoriale associato al fibrato principale F_{SO}, allo spazio vettoriale $\mathrm{Cl}(n)$ e a questa rappresentazione. Si mostra allora che la fibra sopra ogni $p \in M$ è isomorfa all'*algebra di Clifford* $\mathrm{Cl}(T_pM)$.

DEFINIZIONE 1.19. Dato uno spazio vettoriale e $\mathrm{Cl}(n)$–modulo S, chiamiamo "azione" del fibrato di Clifford $\mathrm{Cl}(M)$ su un fibrato spinoriale $S(M)$, il prodotto di $\mathrm{Cl}(n)$–modulo di S fibra per fibra, cioè per ogni $p \in M$, per ogni X sezione di $\mathrm{Cl}(M)$ e per ogni ψ sezione di $S(M)$, si ha

$$(X \cdot \psi)_p = X_p \cdot \psi_p \,,$$

dove $X_p \in Cl(T_pM)$ (con l'isomorfismo detto nella precedente definizione) e $\psi_p \in S_p(M)$, in cui $S_p(M)$ è la fibra di $S(M)$ nel punto p e il simbolo "$\cdot$" che compare nel membro destro dell'uguaglianza è il prodotto di $\mathrm{Cl}(M)$–modulo di S.

1.3. La connessione su un fibrato spinoriale

Sia $\gamma : [0, a] \to M$ una curva in una varietà riemanniana (M, g), uscente da $\gamma(0) = p \in M$. Se $s = (e_1, \dots, e_n)$ su un aperto $U \subseteq M$ che contiene p, è un campo di riferimenti locali che induce la trivializzazione locale

$$\phi^{-1}(U) \to U \times SO(n) \,,$$

rispetto alla quale s corrisponde alla sezione identità di $U \times SO(n)$ (Osservazione 1.3), indicheremo con

$$A(t) \in SO(n) \,,$$

con $t \in [0, a]$, la curva tale che $(\gamma(t), A(t))$ sia il trasporto parallelo di $s(p)$ in F_{SO} lungo γ. Si noti in particolare, che dunque $A(0)$ è l'identità.

DEFINIZIONE 1.20. Sia V uno spazio vettoriale reale e sia $V(M)$ il fibrato vettoriale (con fibre isomorfe a V) associato al fibrato principale F_{SO} mediante la rappresentazione $\rho : F_{SO}(n) \to GL(V)$, come nella Definizione 1.4. Allora, se v appartiene alla fibra sopra p di $V(M)$, identificata con V, definiamo il *trasporto parallelo* di $[s(p), v]$ in $V(M)$ lungo γ, come la mappa

$$t \mapsto [s(\gamma(t)), \rho(A(t))v].$$

Vogliamo adesso definire anche il trasporto parallelo sui fibrati F_{Spin} e $S(M)$. A tal scopo, osserviamo che una sezione s del fibrato F_{SO} si solleva tramite la mappa di rivestimento π (Definizione 1.12) a una sezione $\widetilde{s}$ di F_{Spin}.

DEFINIZIONE 1.21. Sia s una sezione di F_{SO} e sia $\widetilde{s}$ una sezione di F_{Spin} tale che $\pi(\widetilde{s}) = s$ (Definizione 1.12), la quale fornisce una trivializzazione locale $U \times Spin(n)$ di F_{Spin} in cui $(p, \widetilde{s}_p)$ corrisponde all'identità di $Spin(n)$ nella fibra sopra p di F_{Spin} (Osservazione 1.3). Consideriamo l'unico sollevamento continuo $\widetilde{A}(t)$ di $A(t)$ da $SO(n)$ a $Spin(n)$ con $\widetilde{A}(0) = 1$, tale che $A(t) = \xi(\widetilde{A}(t))$, dove ξ è il rivestimento descritto nella Sezione 1.2. Allora, $\big(\gamma(t), \widetilde{A}(t)\big)$ è il trasporto parallelo di $\widetilde{s}(p)$ lungo γ in F_{Spin}.

DEFINIZIONE 1.22. Sia s una sezione di F_{SO} e sia $\widetilde{s}$ una sezione di F_{Spin}, come nella Definizione 1.21 sopra, la quale porta a una trivializzazione $U \times F_{Spin}$ di F_{Spin} (Osservazione 1.3) e a una trivializzazione $U \times S(M)$ di $S(M)$ (Osservazione 1.7). Sia inoltre $\psi \in S$. Allora, definiamo $[\widetilde{s}(\gamma(t)), \widetilde{A}(t) \cdot \psi]$ come il trasporto parallelo di $[\widetilde{s}(p), \psi]$ lungo γ in $S(M)$, per ogni $\psi \in S$, dove $\cdot$ denota il prodotto di $\mathrm{Cl}(n)$–modulo di S.
Nella trivializzazione locale scriveremo semplicemente $\big(\gamma(t), \widetilde{A}(t) \cdot \psi\big)$.

DEFINIZIONE 1.23. Diciamo che una sezione locale ψ di $S(M)$ è *costante* rispetto al riferimento $s = (e_1, \dots, e_n)$, se ψ coincide con un vettore costante $\psi_0 \in S$ nella trivializzazione locale determinata da s, ossia se $\psi = [\widetilde{s}\psi_0]$.

DEFINIZIONE 1.24. Sia ∇ la connessione di Levi–Civita di una varietà riemanniana n–dimensionale (M, g) e sia $e_1, e_2, \dots, e_n$ un riferimento locale ortonormale in un aperto U. Le 1–*forme di connessione* ω^i_j sono definite univocamente dalle equazioni

$$\nabla_X e_j = \omega^i_j(X) e_i \,,$$

(con la convenzione di Einstein degli indici ripetuti) per ogni campo X in U.

OSSERVAZIONE 1.25. Osserviamo che le 1–forme di connessione soddisfano la proprietà di antisimmetria $\omega^i_j = -\omega^j_i$, per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Infatti, dal fatto che ∇ è la connessione di Levi–Civita e dal fatto che $e_1, \dots, e_n$ è un riferimento ortonormale, si ha

$$\omega^i_j(X) + \omega^j_i(X) = g(\omega^k_j(X)e_k, e_i) + g(e_j, \omega^k_i(X)e_k) = g(\nabla_X e_j, e_i) + g(e_j, \nabla_X e_i) = Xg(e_j, e_i) = 0,$$

per ogni campo X su M.

Ricordando che $A(t)$ è l'elemento di $SO(n)$ tale per cui $[e(p), A(t)v]$ è il trasporto parallelo di v lungo una data curva γ uscente da p, vogliamo calcolare esplicitamente $A'(0)$ cosicchè possiamo sollevarlo a $\widetilde{A}'(0)$ per ottenere una formula esplicita per la derivata covariante di uno spinore. Poniamo $X = \gamma'(0)$ e osserviamo che dal legame fra derivazione covariante e trasporto parallelo, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$, si ha

$$0 = \nabla_X\big(A(t)v\big) = A'(0)v + A'(0)\nabla_X v = A'(0)v + \omega^i_j(X)\,(e_i \otimes \theta^j)\,v\,.$$

Per l'antisimmetria di ω^i_j, abbiamo allora

$$A'(0) = -\omega^i_j(X)\, e_i \otimes \theta^j = \frac{1}{2}\,\omega^i_j(X)\, A^j_i$$

e dalla Proposizione 1.11, segue anche

$$\widetilde{A}'(0) = \frac{1}{4}\,\omega^i_j(X)\, e_i e_j\,.$$

Otteniamo dunque una formula esplicita per la derivata covariante in $S(M)$ tramite il trasporto parallelo. Se $\psi \in S$, si ha

$$0 = \nabla_X\big(\widetilde{A}(t) \cdot \psi\big) = \widetilde{A}'(0) \cdot \psi + \nabla_X \psi\,,$$

dunque,

$$\nabla_X \psi = -\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n} \omega^i_j(X)\, e_i e_j \cdot \psi\,, \tag{1.3}$$

che è la formula per la derivata covariante di uno spinore costante rispetto al riferimento usato per calcolare le 1–forme di connessione.

Si può mostrare che la connessione ∇ su $S(M)$ è compatibile con il prodotto scalare tra spinori $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$, ottenuto per mezzo del Teorema 1.15, cioè per ogni coppia di spinori $\phi, \psi \in \Gamma(S(M))$, si ha

$$\nabla\langle \phi, \psi\rangle = \langle \nabla\phi, \psi\rangle + \langle \phi, \nabla\psi\rangle\,,$$

inoltre, ∇ rispetta anche l'azione di $\mathrm{Cl}(M)$ su $S(M)$(Definizione 1.19), cioè

$$\nabla\big(v \cdot \psi\big) = (\nabla v) \cdot \psi + v \cdot (\nabla\psi)\,,$$

per ogni $v \in \Gamma(TM)$ e $\psi \in \Gamma(S(M))$ (si veda [31, Eq. 4.14]).

1.4. L'operatore di Dirac

DEFINIZIONE 1.26. Sia (M, g) una varietà spin n–dimensionale e $S(M)$ un fibrato spinoriale. Definiamo l'*operatore di Dirac* $\not{D} : \Gamma(S(M)) \to \Gamma(S(M))$ come

$$\not{D}\psi = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \nabla_{e_i}\psi, \tag{1.4}$$

per ogni $\psi \in \Gamma(S(M))$, dove $e_1, \dots, e_n$ è un qualunque riferimento locale ortonormale e il simbolo "$\cdot$" denota l'azione del fibrato $\mathrm{Cl}(M)$ sul fibrato $S(M)$ (Definizione 1.19).

L'equazione $\not{D}\psi = 0$ è chiamata *equazione di Dirac* e le soluzioni di questa equazione sono chiamate *spinori armonici* [34].

LEMMA 1.27. *L'operatore di Dirac $\not{D}$ è ben definito come sopra, in quanto il membro destro della formula* (1.4) *è indipendente dalla scelta del riferimento locale ortonormale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $e'_1, \dots, e'_n$ un altro riferimento locale ortonormale. Dunque, si ha che $e'_i = O_{ij} e_j$, dove O_{ij} è una matrice ortogonale (O_{ij} è una riflessione o una rotazione). Allora,

$$\sum_{i=1}^{n} e'_i \cdot \nabla_{e'_i}\psi = \sum_{i,j,h=1}^{n} O_{ij} e_j \cdot \nabla_{O_{ih} e_h}\psi = \sum_{i,j,h=1}^{n} O_{ij} O_{ih} e_j \cdot \nabla_{e_h}\psi = \sum_{i,j,h=1}^{n} \delta_{jh} e_j \cdot \nabla_{e_h}\psi = \sum_{j=1}^{n} e_j \cdot \nabla_{e_j}\psi\,,$$

dove abbiamo usato la $C^\infty(M)$–linearità della connessione e il fatto che i vettori colonna di una matrice ortogonale sono a due a due ortonormali. $\square$

LEMMA 1.28. *L'operatore di Dirac è autoaggiunto rispetto al prodotto scalare dato dal Teorema 1.15, cioè*

$$\int_M \langle \not{D}\psi, \phi\rangle\, d\mu = \int_M \langle \psi, \not{D}\phi\rangle\, d\mu\,,$$

per ogni $\psi, \phi \in \Gamma(S(M))$, dove μ è la misura canonica della varietà riemanniana (M, g).

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo un riferimento locale ortonormale $e_1, \dots, e_n$. Allora, si ha

$$\begin{aligned}
\int_M \langle D\!\!\!/\psi, \phi\rangle\, d\mu &= \int_M \sum_{i=1}^n \langle e_i \cdot \nabla_i \psi, \phi\rangle\, d\mu = -\sum_{i=1}^n \int_M \langle \nabla_i \psi, e_i \cdot \phi\rangle\, d\mu \\
&= -\sum_{i=1}^n \int_M \nabla_i \langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle\, d\mu + \sum_{i=1}^n \int_M \langle \psi, \nabla_i (e_i \cdot \phi)\rangle\, d\mu \\
&= -\sum_{i=1}^n \int_M (\nabla_i \langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle - \langle \psi, (\nabla_i e_i) \cdot \phi\rangle) d\mu + \int_M \Big\langle \psi, \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_i \phi \Big\rangle\, d\mu \\
&= -\int_M \operatorname{div}(\langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle e_i)\, d\mu + \int_M \Big\langle \psi, \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_i \phi \Big\rangle\, d\mu \\
&= \int_M \Big\langle \psi, \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_i \phi \Big\rangle\, d\mu = \int_M \langle \psi, D\!\!\!/\phi\rangle\, d\mu\,,
\end{aligned}$$

dove, nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato l'antisimmetria dell'azione del prodotto di Clifford, nella terza, la compatibilità della connessione con la metrica: Nel penultimo passo, il teorema della divergenza combinato con l'assenza di bordo della varietà, annulla il primo addendo. Per concludere la dimostrazione, resta solo da mostrare che

$$\operatorname{div}(\langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle e_i) = \sum_i (\nabla_i \langle \psi, e_i \phi\rangle - \langle \psi, (\nabla_i e_i) \cdot \phi\rangle)\,.$$

Calcoliamo la derivata covariante j–esima del campo di cui vogliamo ottenere la divergenza:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n (\nabla_j (\langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle e_i)) &= \sum_{i=1}^n (\nabla_j (\langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle) e_i + \langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle \nabla_j e_i) \\
&= \sum_{i=1}^n (\nabla_j (\langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle) e_i) + \sum_{i,k=1}^n \langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle \omega_i^k (e_j) e_k\,,
\end{aligned}$$

dove ω_i^k sono le 1–forme di connessione nella Definizione 1.24. Quindi,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(\langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle e_i) &= \sum_{i=1}^n \nabla_i \langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle + \sum_{i,j=1}^n \langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle \omega_i^j (e_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla_i \langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle - \sum_{i,j=1}^n \langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle \omega_j^i (e_j) \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla_i \langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle - \sum_{j=1}^n \Big\langle \psi, \sum_{i=1}^n \omega_j^i (e_j) e_i \cdot \phi \Big\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \nabla_i \langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle - \sum_{j=1}^n \langle \psi, (\nabla_j e_j) \cdot \phi\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n (\nabla_i \langle \psi, e_i \cdot \phi\rangle - \langle \psi, (\nabla_i e_i) \cdot \phi\rangle)\,,
\end{aligned}$$

che è quanto volevamo dimostrare. □

Ricordiamo ora due equazioni che saranno utili nella dimostrazione della formula di Schrödinger–Lichnerowicz che vedremo sotto: la prima mette in relazione la derivata covariante di una 1–forma con il differenziale esterno, mentre la seconda è una riscrittura del tensore di Riemann in termini delle 1–forme di connessione (Definizione 1.24).

PROPOSIZIONE 1.29. *Sia α una 1–forma su (M, g) e sia $e_1, \dots, e_n$ un riferimento locale ortonormale. Allora valgono le seguenti equazioni:*

$$d\alpha(e_i, e_j) = (\nabla_{e_i}\alpha)(e_j) - (\nabla_{e_j}\alpha)(e_i)\,, \tag{1.5}$$

$$\mathrm{Riem}(e_i, e_j, e_k, e_\ell) = d\omega_k^\ell(e_i, e_j) + \omega_\ell^m \wedge \omega_m^k(e_i, e_j)\,, \tag{1.6}$$

dove ω_j^i sono le 1–forme di connessione (Definizione 1.24).

DIMOSTRAZIONE. Sia $e_1, \dots, e_n$ un riferimento locale ortonormale, dal fatto che ∇ è la connessione di Levi–Civita, abbiamo

$$\begin{aligned} d\alpha(e_1, e_2) &= \nabla_i\big(\alpha(e_j)\big) - \nabla_j\big(\alpha(e_i)\big) - \alpha([e_i, e_j]) \\ &= \nabla_i\big(\alpha(e_j)\big) - \nabla_j\big(\alpha(e_i)\big) - \alpha(\nabla_i e_j) + \alpha(\nabla_j e_i) \\ &= \nabla_i\big(\alpha(e_j)\big) - \alpha(\nabla_i e_j) - \big(\nabla_j(\alpha(e_i)\big) - \alpha(\nabla_j e_i)\big) \\ &= (\nabla_i\alpha)(e_j) - (\nabla_j\alpha)(e_i)\,, \end{aligned}$$

che è l'equazione (1.5).
Dimostriamo ora l'equazione (1.6). Sia $e_1, \dots, e_n$ un riferimento locale ortonormale. Dalla definizione del tensore di curvatura di Riemann, si ha

$$\mathrm{Riem}(e_i, e_j, e_k, e_\ell) = g(R_{ij}e_k, e_\ell)$$

dove R_{ij} è l'operatore di curvatura valutato su e_i, e_j. Allora segue

$$\begin{aligned} R_{ij}e_k &= \nabla_i\nabla_j e_k - \nabla_j\nabla_i e_k - \nabla_{[e_i,e_k]}e_k \\ &= \nabla_i\big(\omega_k^\ell(e_j)e_\ell\big) - \nabla_j\big(\omega_k^\ell(e_i)e_\ell\big) - \omega_k^\ell([e_i, e_j]) \\ &= \nabla_i\big(\omega_k^\ell(e_j)\big)e_\ell + \omega_k^\ell(e_j)\omega_\ell^m(e_i)e_m - \nabla_j\big(\omega_k^\ell(e_i)\big)e_\ell - \omega_k^\ell(e_i)\omega_\ell^m(e_j)e_m - \omega_k^\ell([e_i, e_j])e_\ell\,. \end{aligned}$$

Dunque,

$$\begin{aligned} \mathrm{Riem}(e_i, e_j, e_k, e_\ell) &= \nabla_i\big(\omega_k^\ell(e_j)\big) - \nabla_j\big(\omega_k^\ell(e_i)\big) - \omega_k^\ell([e_i, e_j]) + \omega_k^m(e_j)\omega_m^\ell(e_i) - \omega_k^m(e_i)\omega_m^\ell(e_j) \\ &= d\omega_k^\ell(e_i, e_j) - \omega_k^m \wedge \omega_m^\ell(e_i, e_j) = d\omega_k^\ell(e_i, e_j) + \omega_\ell^m \wedge \omega_m^k(e_i, e_j)\,. \end{aligned}$$

□

TEOREMA 1.30 (Formula di Schrödinger–Lichnerowicz). *Sia (M, g) una varietà riemanniana spin. Allora, per ogni $\psi \in \Gamma(S(M))$, si ha*

$$\not{D}^2\psi = -\Delta\psi + \frac{1}{4}R\,\psi\,,$$

dove Δ è il laplaciano sugli spinori, *cioè $\Delta\psi = g^{ij}\nabla_{ij}^2\psi$.*

La formula di Schrödinger–Lichnerowicz mostra che l'operatore di Dirac (a meno del termine di curvatura scalare) è una sorta di "radice quadrata" del laplaciano.

DIMOSTRAZIONE. Sia $p \in M$ e $e_1, \dots, e_n$ un riferimento ortonormale locale tale che $\nabla e_i(p) = 0$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Usando le relazioni di Clifford (1.1), abbiamo

$$\begin{aligned} D\!\!\!/^2 \psi &= \sum_{i,j=1}^n e_i \cdot \nabla_i\big(e_j \cdot \nabla_j \psi\big) = \sum_{i,j=1}^n e_i e_j \, \nabla_i \nabla_j \psi \\ &= \sum_{i=1}^n e_i e_i \, \nabla_i \nabla_i \psi + \sum_{i<j}^n e_i e_j \big(\nabla_i \nabla_j - \nabla_j \nabla_i\big)\psi \\ &= -\,\Delta\psi + \sum_{i<j}^n e_i e_j \, R^S_{ij} \psi \,, \end{aligned}$$

dove R^S denota il tensore di curvatura del fibrato degli spinori $S(M)$. Essendo R^S_{ij} un endomorfismo delle sezioni di $S(M)$, è sufficiente determinarlo su un riferimento locale di $S(M)$ (Definizione 1.17), dunque sugli spinori costanti rispetto al dato riferimento (Definizione 1.23).
Per la formula (1.3), si ha

$$\begin{aligned} R^S_{ij}\psi =& \nabla_i(\nabla_j\psi) - \nabla_j(\nabla_i\psi) \\ =& -\frac{1}{4}\nabla_i\bigg(\sum_{k,\ell=1}^n \omega^k_\ell(e_j) e_k e_\ell \cdot \psi\bigg) + \frac{1}{4}\nabla_j\bigg(\sum_{k,\ell=1}^n \omega^k_\ell(e_i) e_k e_l \cdot \psi\bigg) \\ =& -\frac{1}{4}\bigg(\sum_{k,\ell=1}^n \big((\nabla_i\omega^k_\ell)(e_j)e_k e_\ell \cdot \psi + \omega^k_\ell(e_j) e_k e_\ell \cdot \nabla_i\psi\big) \\ &+ \sum_{k,\ell=1}^n \big(-(\nabla_j\omega^k_\ell)(e_i)e_k e_\ell \cdot \psi - \omega^k_\ell(e_i) e_k e_\ell \cdot \nabla_j\psi\big)\bigg) \\ =& -\frac{1}{4}\bigg(\sum_{k,\ell=1}^n (\nabla_i\omega^k_\ell)(e_j)e_k e_\ell \cdot \psi - \frac{1}{4}\sum_{k,\ell,m,q=1}^n \omega^k_\ell(e_j)\omega^m_q(e_i) e_k e_\ell e_m e_q \cdot \psi \\ &- \sum_{k,\ell=1}^n (\nabla_j\omega^k_\ell)(e_i)e_k e_\ell \cdot \psi + \frac{1}{4}\sum_{k,\ell,m,q=1}^n \omega^k_\ell(e_i)\omega^m_q(e_j) e_k e_\ell e_m e_q \cdot \psi\bigg) \\ =& -\frac{1}{4}\sum_{k,\ell=1}^n d\omega^k_\ell(e_i,e_j)e_k e_\ell \cdot \psi - \frac{1}{16}\sum_{k,\ell,m,q=1}^n (\omega^k_\ell \wedge \omega^m_q)(e_i,e_j) e_k e_\ell e_m e_q \cdot \psi \,, \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'equazione (1.5). Usando dunque le relazioni di Clifford (1.1), abbiamo

$$e_i e_j e_k e_\ell = -2\delta_{jk}\, e_i e_\ell + 2\delta_{j\ell}\, e_i e_k - 2\delta_{ik}\, e_\ell e_j + 2\delta_{i\ell}\, e_k e_j + e_k e_\ell e_i e_j \,.$$

Pertanto,

$$\begin{aligned}\omega_\ell^k \wedge \omega_q^m \, e_k e_\ell e_m e_q = & - \, 2\,\omega_m^k \wedge \omega_q^m \, e_k e_q + 2\,\omega_q^k \wedge \omega_q^m \, e_k e_m - 2\,\omega_\ell^m \wedge \omega_q^m \, e_q e_\ell \\ & + 2\,\omega_\ell^q \wedge \omega_q^m \, e_m e_\ell + \omega_\ell^k \wedge \omega_q^m \, e_m e_q e_k e_\ell \\ = & - \, 2\,\omega_m^k \wedge \omega_\ell^m \, e_k e_\ell + 2\,\omega_m^k \wedge \omega_m^k \, e_k e_\ell - 2\,\omega_\ell^m \wedge \omega_k^m \, e_k e_\ell \\ & + 2\,\omega_\ell^m \wedge \omega_m^k \, e_k e_\ell + \omega_q^m \wedge \omega_\ell^k \, e_k e_\ell e_m e_q \\ = & \, 8\,\omega_\ell^m \wedge \omega_m^k \, e_k e_\ell - \omega_\ell^k \wedge \omega_q^m \, e_k e_\ell e_m e_q \,,\end{aligned}$$

dove nella seconda uguaglianza sono stati rinominati gli indici e nella terza è stata usata l'antisimmetria negli indici delle 1–forme ω_j^i (si veda l'Osservazione 1.25). Quindi,

$$\omega_\ell^k \wedge \omega_q^m \, e_k e_\ell e_m e_q = 4\,\omega_\ell^m \wedge \omega_m^k \, e_k e_\ell$$

e in conclusione, otteniamo

$$R_{ij}^S \psi = -\frac{1}{4} \sum_{k,\ell=1}^n (d\omega + \omega \wedge \omega)_\ell^k \, (e_i, e_j) e_k e_\ell \cdot \psi = -\frac{1}{4} \sum_{k,\ell=1}^n \mathrm{Riem}(e_i, e_j, e_k, e_\ell) \, e_k e_\ell \cdot \psi \,,$$

in virtù dell'equazione (1.6).
Sostituendo questo nel calcolo di $\not{D}^2 \psi$, si ha

$$\not{D}^2 \psi = \Delta \psi - \frac{1}{8} \sum_{i,j,k,\ell=1}^n R_{ijk\ell} \, e_i e_j e_k e_\ell \, \psi \,.$$

Semplifichiamo ora il secondo termine a destra usando il fatto che per ogni ℓ fissato, si ha

$$\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{distinti}}}^n R_{ijk\ell} \, e_i e_j e_k = 0 \,.$$

infatti, l'espressione $e_i e_j e_k$ è invariante per permutazioni cicliche, mentre la prima identità di Bianchi dice che la somma delle permutazioni cicliche di $R_{ijk\ell}$ in i, j, k si annulla. Più esplicitamente, rinominando gli indici, abbiamo

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{distinti}}}^n R_{ijk\ell} \, e_i e_j e_k &= \frac{1}{3} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{distinti}}}^n \big(R_{ijk\ell} \, e_i e_j e_k + R_{jki\ell} \, e_j e_k e_i + R_{kij\ell} \, e_k e_i e_j \big) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ \text{distinti}}}^n \big(R_{ijk\ell} + R_{jki\ell} + R_{kij\ell} \big) \, e_i e_j e_k = 0 \,.\end{aligned}$$

Pertanto, nella somma $\sum_{i,j,k,\ell=1}^n R_{ijk\ell} \, e_i e_j e_k e_\ell$ dobbiamo considerare solo i termini in cui i, j, k non sono distinti. Osserviamo che se $i = j$, il termine è nullo per l'antisimmetria di $R_{ijk\ell}$; restano quindi solo i casi $i = k \neq j$ e $j = k \neq i$.
Usando allora le simmetrie del tensore di curvatura e le proprietà della moltiplicazione di

Clifford, concludiamo

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k,\ell=1}^{n} R_{ijk\ell}\, e_i e_j e_k e_\ell &= \sum_{i,j,\ell=1}^{n} \big(R_{ijj\ell}\, e_i e_j e_j e_\ell + R_{iji\ell}\, e_i e_j e_i e_\ell\big)\\ &= \sum_{i,j,\ell=1}^{n} \big(R_{jij\ell}\, e_i e_\ell + R_{iji\ell}\, e_j e_\ell\big)\\ &= \sum_{i,\ell=1}^{n} 2\, R_{i\ell}\, e_i e_\ell = -2\, R\,,\end{aligned}$$

completando la dimostrazione. □

CAPITOLO 2

Il teorema di massa positiva

Nel capitolo precedente abbiamo introdotto diversi strumenti di geometria spinoriale che applicheremo per avere una dimostrazione del cosiddetto *teorema di massa positiva* nel caso *time–symmetric*, nella Sezione 2.2 e nel caso generale, nella Sezione 2.3.

2.1. La formulazione ADM della relatività generale

La formulazione ADM (da Arnowitt–Deser–Misner) della relatività generale consiste in una foliazione dello spaziotempo lorentziano di tipo $3+1$ in ipersuperfici "spaziali", indicizzate da un parametro identificato come tempo, trasformando così l'analisi della varietà lorentziana nello studio di un problema evolutivo, in quanto decomponendo le equazioni di Einstein nelle componenti normale e tangenziale rispetto alle ipersuperfici, si ottiene un sistema di vincoli e di equazioni di evoluzione per i "dati iniziali". Alcuni riferimenti per questo capitolo sono [**3**, **10**, **15**, **16**, **32**].

2.1.1. Le equazioni di campo di Einstein. In tutta la tesi, chiameremo "spaziotempo" una *varietà lorentziana* come nella seguente definizione.

DEFINIZIONE 2.1. Una *varietà lorentziana* $(\mathcal{M}^{n+1}, \mathbf{g})$ è data da una varietà differenziale $\mathcal{M}$ di dimensione $n+1$, dotata di un tensore (la sua *metrica lorentziana*) 2–covariante simmetrico e nondegenere $\mathbf{g}$, la cui forma quadratica associata abbia segnatura $(-, +, \dots, +)$ in ogni punto di $\mathcal{M}$.

Dato un tensore 2–covariante simmetrico T, detto *tensore energia–impulso*, su una varietà lorentziana $(n+1)$–dimensionale $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ (T "fisicamente" descrive la distribuzione delle "sorgenti gravitazionali" dello spaziotempo), se indichiamo con Ric e R, rispettivamente, il tensore di Ricci e la curvatura scalare di $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, si hanno le seguenti *equazioni di campo di Einstein* (o semplicemente le *equazioni di Einstein*),

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2} R\, \mathbf{g} = (n-1)\, \omega_{n-1}\, T\,, \tag{2.1}$$

dove ω_{n-1} è il volume canonico di $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$. Osserviamo che nel "caso fisico" di una varietà lorentziana quadridimensionale, queste equazioni sono date da

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2} R\, \mathbf{g} = 8\pi T.$$

Se $T = 0$, le chiameremo *equazioni (di campo) di Einstein nel vuoto*, cioè

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2} R\, \mathbf{g} = 0\,.$$

Il tensore simmetrico di tipo $(0, 2)$,

$$G = \mathrm{Ric} - \frac{1}{2} R\, \mathbf{g}$$

è detto *tensore di Einstein* ed è ben noto che ha divergenza nulla, per la seconda identità di Bianchi contratta (si veda [20], per esempio)

$$2\mathbf{g}^{kl}\nabla_k R_{lj} = \nabla_j R.$$

OSSERVAZIONE 2.2. Un'importante generalizzazione delle equazioni (2.1) è data dall'aggiunta, al primo membro, di un termine proporzionale alla metrica $\Lambda\mathbf{g}$, la cui costante Λ è detta *costante cosmologica* (per approfondire, si veda [10]). In questa tesi, noi ci concentreremo solo sul caso $\Lambda = 0$.

Mostriamo qualche argomento fisico euristico per motivare le equazioni di campo di Einstein, per semplicità, nel caso dello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ (e di una varietà lorentziana $(\mathbb{R}^4, \mathbf{g})$). In relatività generale, vogliamo che le traiettorie delle particelle libere di muoversi siano delle geodetiche (si veda [21, Sezione 5.1]). Dunque, se $\gamma_s(t)$ è una famiglia di traiettorie indicizzate da s, con $\gamma_0 = \gamma$, derivando (in modo covariante) l'equazione $\gamma_s'' = \nabla_{\gamma_s'}\gamma_s' = 0$ in $s = 0$, si ottiene l'equazione di Jacobi (si veda [20])

$$\langle X'', Y\rangle = -\operatorname{Riem}(X, \gamma', Y, \gamma')\,, \tag{2.2}$$

dove $X = \frac{\partial\gamma_s}{\partial s}\big|_{s=0}$ e Y è un qualunque campo vettoriale lungo γ (gli apici denotano la derivazione covariante lungo γ).

Vediamo l'analogo calcolo nella gravità newtoniana, dove abbiamo un potenziale gravitazionale su $\mathbb{R}^3$, dato da $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, che soddisfa $\Delta\phi = 4\pi\rho$, dove ρ rappresenta la densità di massa di tutte le "sorgenti gravitazionali". L'accelerazione di una particella libera è data da $-\nabla\phi$ in ogni punto dello spazio. Dunque, se consideriamo una famiglia di traiettorie newtoniane $\gamma_s(t)$, con $\gamma_0 = \gamma$ e deriviamo l'equazione $\gamma_s'' = -\nabla\phi(\gamma_s)$ in $s = 0$, otteniamo

$$X''\cdot Y = -\nabla_Y\nabla_X\phi\,, \tag{2.3}$$

dove $X = \frac{\partial\gamma_s}{\partial s}\big|_{s=0}$ e Y è un qualunque campo vettoriale lungo γ (al membro sinistro abbiamo il prodotto scalare ordinario di $\mathbb{R}^3$).

Se tracciamo entrambe le equazioni (2.2) e (2.3), i due membri destri delle equazioni tracciate sono rispettivamente dati da

$$-\operatorname{tr}\operatorname{Riem}(\cdot, \gamma', \cdot, \gamma') = -\operatorname{Ric}(\gamma', \gamma') \qquad \text{e} \qquad -\Delta\phi = -4\pi\rho.$$

(osserviamo che la traccia "totale" nell'equazione (2.2) dà lo stesso risultato della traccia solo sulle direzioni spaziali ortogonali a γ'). Vediamo allora che la quantità "relativistica" $\operatorname{Ric}(\gamma', \gamma')$ dovrebbe corrispondere nel caso newtoniano, a $4\pi\rho$. Chiaramente, $\operatorname{Ric}(\gamma', \gamma')$ dipende dalla velocità γ' della particella, al contrario di $4\pi\rho$ e questa dipendenza impone di avere una descrizione *tensoriale* delle "sorgenti gravitazionali" (non *scalare*, come nella gravità newtoniana), data appunto dal tensore energia–impulso T.

Se dunque la densità (di "energia") delle "sorgenti gravitazionali" vista dall'osservatore γ', è data da $T(\gamma', \gamma')$, è ragionevole, nell'approssimazione newtoniana, identificare ρ con la "media" $\operatorname{tr} T$ del tensore T. Ciò suggerisce di imporre come equazioni relativistiche

$$\operatorname{Ric} = 4\pi\big(rT + (1-r)(\operatorname{tr} T)\mathbf{g}\big)\,,$$

per una qualche costante $r \in \mathbb{R}$.

Tracciando questa equazione, si ottiene

$$R = 4\pi\big(r\operatorname{tr} T + 4(1-r)\operatorname{tr} T\big) = 4\pi(4-3r)\operatorname{tr} T\,,$$

quindi possiamo scrivere

$$\mathrm{Ric} = 4\pi\left(rT + \frac{1-r}{4\pi(4-3r)}R\,\mathbf{g}\right), \qquad \text{cioè} \qquad \mathrm{Ric} - \frac{1-r}{4-3r}R\,\mathbf{g} = 4\pi rT\,.$$

Dal punto di vista fisico, vogliamo che T sia una quantità conservata, cioè $\operatorname{div} T = 0$, dunque, per il *lemma di Schur* (si veda [20]), deve essere

$$-\frac{1-r}{4-3r} = -\frac{1}{2},$$

da cui $r = 2$ e abbiamo l'equazione

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}R\,\mathbf{g} = 8\pi T\,. \tag{2.4}$$

Più rigorosamente, la via standard per dedurre le equazioni di campo di Einstein è ricavarle come equazioni di Eulero–Lagrange del *funzionale d'azione di Einstein–Hilbert*. Nel vuoto (cioè per $T = 0$) si considera l'*azione gravitazionale*

$$\mathcal{S}_{\mathrm{EH}}(\mathbf{g}) = \int_{\mathcal{M}} R(\mathbf{g})\,dv_{\mathbf{g}}\,,$$

dove $R(\mathbf{g})$ è la curvatura scalare associata alla metrica $\mathbf{g}$. Nel caso in cui ci sia dell'energia/materia presente nello spaziotempo, è necessario aggiungere all'azione $\mathcal{S}_{\mathrm{EH}}$ un opportuno termine $\mathcal{S}_{\mathrm{m}}(\mathbf{g})$ (la cui espressione dipende dal tipo di energia/materia presente). La variazione di $\mathcal{S}_{\mathrm{EH}}(\mathbf{g}) + \mathcal{S}_{\mathrm{m}}(\mathbf{g})$ produce il termine proporzionale al tensore energia–impulso T del campo di materia–energia considerato, ottenendo così l'equazione (2.1). Per maggiori dettagli si veda ad esempio la discussione in [32, Sezione 7.2.2] o [7].

2.1.2. Initial data set ed Einstein constraint equations. Introduciamo sinteticamente la formulazione ADM della relatività generale. In tutto il capitolo denoteremo con $\mathbf{g}$, la metrica lorentziana sulla varietà spaziotemporale $\mathcal{M}$ e con g la sua restrizione a un'ipersuperficie.

DEFINIZIONE 2.3. Sia $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ una varietà lorentziana di segnatura $(-, +, \ldots, +)$ e sia $p \in \mathcal{M}$. Un vettore tangente $v \in T_p\mathcal{M}$ si dice:

- *temporale* (o di tipo tempo) se $\mathbf{g}_p(v, v) < 0$,
- *nullo* (o di tipo luce) se $\mathbf{g}_p(v, v) = 0$,
- *spaziale* (o di tipo spazio) se $\mathbf{g}_p(v, v) > 0$,
- *causale* se $v \neq 0$ e $\mathbf{g}_p(v, v) \leqslant 0$.

DEFINIZIONE 2.4. Una varietà lorentziana $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ è detta *tempo–orientabile* se ammette un campo vettoriale X tale che $\mathbf{g}(X, X) < 0$ in ogni punto di $\mathcal{M}$. Un tale campo è detto allora *tempo–orientazione* di $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$.

DEFINIZIONE 2.5. Sia $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ una varietà lorentziana tempo–orientabile e sia X un campo tempo–orientazione di $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. Sia $p \in \mathcal{M}$ e $v \in T_p\mathcal{M}$ causale. Allora si dice che v è *futuro–diretto* (*future–directed*) rispetto a X, se $\mathbf{g}_p(V, X_p) < 0$. Se invece $\mathbf{g}_p(V, X_p) > 0$ diremo che v è *passato–diretto* (*past–directed*).

DEFINIZIONE 2.6. Sia $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ una varietà lorentziana tempo–orientabile e sia X un campo tempo–orientazione di $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$. Diremo che una curva $\gamma : I \to \mathcal{M}$ è causale se $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ è causale, per ogni $t \in I$. Diremo che γ è futuro–diretta (passato–diretta) se $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)}\mathcal{M}$ è futuro–diretto (passato–diretto), per ogni $t \in I$.

OSSERVAZIONE 2.7. Il termine "causale" viene dal fatto che tali direzioni cadono all'interno o sulla superficie del cono di luce determinato da $\mathbf{g}$: sono le direzioni tangenti alle curve lungo le quali un oggetto si può muovere o si può propagare un segnale fisico, con velocità minore o uguale a quella della luce (direzioni temporali per oggetti con massa, nulle per la luce, ad esempio). Di conseguenza, se due punti sono uniti da una curva futuro–diretta i cui tangenti sono causali, un evento nel primo punto può influenzare un evento nel secondo, cioè i due eventi risultano causalmente connessi.
La branca della geometria lorentziana che studia le proprietà causali degli spaziotempi è detta *teoria della causalità*. Tra i più importanti e famosi risultati in tale ambito vi sono, ad esempio, i teoremi di singolarità di Hawking e Penrose [23, Teorema 8.9 e Teorema 9.6].

È naturale formulare le equazioni di Einstein (2.1) nel vuoto, cioè con $T = 0$, come un problema evolutivo: data la conoscenza della metrica in un istante fissato, vorremmo sapere come evolve nel tempo. Poiché in relatività generale "istante fissato" non ha un significato chiaro, lo si interpreta come una fetta "spaziale" fissata dello spaziotempo $\mathcal{M}$.

Yvonne Choquet–Bruhat, nel lavoro pionieristico [10], mostrò che se si scrivono le equazioni di Einstein (2.1) localmente in *coordinate d'onda* x^α, cioè in coordinate che risolvono l'*equazione delle onde*[1]

$$\Box_{\mathbf{g}} x^\alpha = -\mathbf{g}^{ij}\nabla^2_{ij} x^\alpha = 0\,,$$

allora le equazioni diventano iperboliche e quindi possono essere risolte, in principio (per un breve intervallo di "tempo"), usando la teoria dei sistemi iperbolici. Quello che segue é infatti, in un certo senso, un teorema di esistenza per tempi piccoli.

TEOREMA 2.8 (Choquet–Bruhat [10] e Choquet–Bruhat–Geroch [11]). *Sia (M^n, g) una varietà riemanniana e sia k un tensore simmetrico di tipo $(0,2)$ su M tale che $(g,k) \in W^{m+1,2} \times W^{m,2}$ per qualche $m > n/2$. Se valgono le equazioni*

$$R_g + (\operatorname{tr}_g k)^2 - |k|^2 = 0\,, \tag{2.5}$$

$$\operatorname{div}_g k - d(\operatorname{tr}_g k) = 0 \tag{2.6}$$

(dove R_g è la curvatura scalare di (M,g)), allora esiste un'unica (a meno di isometrie) varietà lorentziana massimale *$(\mathcal{M}^{n+1}, \mathbf{g})$ che soddisfa le equazioni di Einstein (2.1) con $T = 0$, tale che (M^n, g) si immerge isometricamente in $(\mathcal{M}^{n+1}, \mathbf{g})$ con seconda forma fondamentale*[2] *k, dove* massimale *significa che $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ non è contenuta all'interno di un'altra varietà più grande con le stesse proprietà. Lo spaziotempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ viene detto* sviluppo nel vuoto *dei dati iniziali (M, g, k).*

La seguente proposizione chiarisce il motivo dell'assunzione delle condizioni su g e k in questo teorema. Tali condizioni non sono altro che le equazioni di campo (nel vuoto) proiettate rispettivamente lungo la normale e tangenzialmente all'ipersuperficie M.

---

[1] L'operatore di d'Alembert $\Box_{\mathbf{g}}$ sulla varietà $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ è definito come $\Box_{\mathbf{g}} = -\operatorname{tr}_{\mathbf{g}}(\mathrm{Hess})$, cioè, a meno di segno, come il laplaciano di una varietà riemanniana. Osserviamo però che mentre il laplaciano è un operatore ellittico, nel caso lorentziano, $\Box_{\mathbf{g}}$ è un operatore iperbolico.

[2] La *seconda forma fondamentale* $\mathbf{A}$ di una sottovarietà Σ di M è l'applicazione a valori nello spazio normale a Σ, definita da

$$\mathbf{A}(X,Y) = (\nabla_X \widetilde{Y})^\perp\,,$$

per ogni coppia di campi tangenti a Σ, cioè la componente normale di $\nabla_X \widetilde{Y}$, dove $\widetilde{Y}$ è una qualunque estensione locale di Y a un campo vettoriale su M.

PROPOSIZIONE 2.9. *Sia* (M^n, g) *una varietà riemanniana immersa isometricamente in una varietà lorentziana* $(\mathcal{M}^{n+1}, \mathbf{g})$ *con seconda forma fondamentale* k *e tale che abbia in ogni punto una normale unitaria* ν *di tipo tempo (cioè* $\big(\mathbf{g}(\nu,\nu) < 0\big)$*. Allora, su* M *si ha*

$$G(\nu,\nu) = \tfrac{1}{2}\big[R_g + (\operatorname{tr}_g k)^2 - |k|_g^2\big]\,,$$

$$G(\nu,\cdot) = \operatorname{div}_g k - d(\operatorname{tr}_g k)\,,$$

dove R_g *è la curvatura scalare di* (M, g)*,* $G = \operatorname{Ric} - R\,\mathbf{g}/2$ *è il tensore di Einstein e l'argomento nella seconda equazione è un vettore tangente a* M*.*

DIMOSTRAZIONE. Per l'equazione di Gauss contratta (si veda [1, Sezione 8.8])

$$R + 2\operatorname{Ric}(\nu,\nu) = R_g + (\operatorname{tr}_g k)^2 - |k|_g^2\,,$$

si ha

$$G(\nu,\nu) = \operatorname{Ric}(\nu,\nu) - \tfrac{1}{2}R\,\mathbf{g}(\nu,\nu) = \operatorname{Ric}(\nu,\nu) + \tfrac{1}{2}R = \tfrac{1}{2}\big[R_g + (\operatorname{tr} gk)^2 - |k|_g^2\big]\,.$$

Per quanto riguarda la seconda equazione, dalla formula di Codazzi–Mainardi contratta ([1, Sezione 8.8]), se X è un vettore tangente a M, abbiamo

$$G(\nu, X) = \operatorname{Ric}(\nu, X) = \operatorname{div}_g k(X) - d(\operatorname{tr}_g k)(X)\,.$$

$\square$

DEFINIZIONE 2.10. Si dice che una varietà lorentziana $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ soddisfa la *dominant energy condition* (o DEC), se per ogni vettore causale e futuro–diretto v, il vettore $T(v,\cdot)^\sharp$ è ancora causale e futuro–diretto.

Sottolineiamo che tale *dominant energy condition* è un'ipotesi "fisicamente" naturale da assumere, in quanto corrisponde (euristicamente) al fatto che nella gravità newtoniana la densità di massa è nonnegativa.

DEFINIZIONE 2.11. Un *initial data set* (M, g, k) è una varietà riemanniana (M, g) dotata di un tensore simmetrico k di tipo $(0, 2)$. Per una tale varietà definiamo la *densità di energia* μ e il campo J detto *densità di corrente*[3], come segue:

$$\mu = \tfrac{1}{2}\big[\,R_g + (\operatorname{tr}_g k)^2 - |k|_g^2\,\big], \tag{2.7}$$

$$J = (\operatorname{div}_g k)^\sharp - \nabla(\operatorname{tr}_g k). \tag{2.8}$$

Queste due equazioni sono dette *Einstein constraint equations* e un initial data set (M, g, k) con $\mu = J = 0$ si dice che soddisfa le *vacuum Einstein constraint equations* (cioè le condizioni che compaiono nelle ipotesi del Teorema 2.8).
Diremo che un initial data set (M, g, k) soddisfa la *dominant energy condition* (o DEC) quando si ha

$$\mu \geqslant |J|_g\,, \tag{2.9}$$

in ogni punto di M.
Diremo che un initial data set (M, g, k) è *time–symmetric* (o *riemanniano*) se k è identicamente nullo.

[3] Alcuni autori definiscono la densità di corrente come la 1–forma $\operatorname{div}_g k - d\operatorname{tr}_g k$, mentre noi ne consideriamo il campo associato per mezzo dell'operatore $\sharp$.

OSSERVAZIONE 2.12. Osserviamo che se un initial data set (M, g, k) è *time–symmetric*, allora soddisfa la dominant energy condition se e solo se la curvatura scalare di (M, g) è nonnegativa.

DEFINIZIONE 2.13. Si dice che un initial data set (M, g, k) *siede all'interno di uno spaziotempo lorentziano* $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, se (M, g) si immerge isometricamente in $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ con seconda forma fondamentale k.

Alla luce del Teorema 2.8, un initial data set (M, g, k) che soddisfa le vacuum Einstein constraint equations permette di "risolvere" le equazioni di Einstein nel vuoto, cioè con $T = 0$, nel senso che esiste uno spaziotempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ in cui (M, g, k) siede al suo interno.
È possibile stabilire teoremi analoghi al Teorema 2.8 con diversi tensori energia–impulso $T \neq 0$ su $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ (si veda [10]), sostituendo le condizioni (2.5) e (2.6) con le (2.7) e (2.8), dove la coppia (μ, J) è determinata da T. Infatti, per la Proposizione 2.9, se (M, g, k) siede all'interno di $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, si deve avere, per ogni campo X tangente a M,

$$(n-1)\,\omega_{n-1}\,T(\nu,\nu) = G(\nu,\nu) = \tfrac{1}{2}\big[R_g + (\mathrm{tr}_g\, k)^2 - |k|_g^2\big] = \mu\,,$$

$$(n-1)\,\omega_{n-1}\,T(\nu,X) = G(\nu,X) = g\big((\mathrm{div}_g\, k)^\sharp - \nabla(\mathrm{tr}_g\, k), X\big) = g(J,X)\,,$$

dove $G = \mathrm{Ric} - R\,\mathbf{g}/2$ è il tensore di Einstein e ν la normale unitaria a M, tale che $\mathbf{g}(\nu,\nu) < 0$, rispetto alla quale si calcola la seconda forma fondamentale k di M. In particolare, in uno spaziotempo vuoto, dunque $T = 0$, si ha che μ e J si annullano.
Queste due equazioni (o meglio il tensore T) pongono quindi chiaramente dei "vincoli" (da cui la parola "constraint") sulla metrica g e il tensore k (sottolineiamo che non li determinano univocamente) di un initial data set (M, g, k) che siede all'interno di uno spaziotempo lorentziano $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ che soddisfa le equazioni di Einstein con tensore energia–impulso T.

OSSERVAZIONE 2.14. Osserviamo che se uno spaziotempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ soddisfa la DEC (Definizione 2.10), allora ogni initial data set che siede al suo interno soddisfa la DEC (Definizione 2.11). Infatti, sia $e_1, \dots, e_n$ un riferimento locale ortonormale in un aperto U di $M \subseteq \mathcal{M}$ e sia ν un campo unitario normale a (M, g) di tipo tempo. Allora, dalla DEC spaziotemporale, si ha che $Y_p = T(\nu, \cdot)_p^\sharp$ è un vettore causale per ogni $p \in U$ (Definizione 2.3) ed essendo $(\nu = e_0, e_1, \dots, e_n)$ ortonormale, si ha che la metrica $\mathbf{g}_p$, in questo riferimento, ha come matrice associata la matrice con con solo componenti sulla diagonale non nulli, dati da $-1, 1, \dots, 1$. Le componenti di Y_p, nel riferimento $(\nu = e_0, e_1, \dots, e_n)$, sono dunque $Y_p^0 = T(\nu,\nu) = \mu$ e $Y_p^i = T(\nu, e_i) = J^i$. Poiché dire che Y_p è causale significa che

$$\mathbf{g}_p(Y_p, Y_p) = -(Y_p^0)^2 + (Y_p^1)^2 + \cdots + (Y_p^n)^2 = -\mu^2 + |J|_p^2 \leqslant 0\,,$$

segue che $\mu \geqslant |J|_g$.

2.1.3. Energia, momento e massa ADM. Da qui in poi considereremo initial data set *asintoticamente piatti*, cioè che tendono a diventare isometrici a $\mathbb{R}^n$ allontanandosi da una zona confinata di spazio. Tale assunzione è fisicamente motivata dal fatto che numerosi sistemi astrofisici (teorici), per esempio un universo che contiene solo un buco nero o più generalmente in cui tutta la massa è "concentrata" in una regione limitata di spazio, presentano (come ci si aspetta) nelle regioni lontane, un comportamento che tende alla piattezza. In questo contesto, è possibile introdurre delle quantità (globali) di massa ed energia (dette ADM) associate a un initial data set che vi siede all'interno.

DEFINIZIONE 2.15. Sia $n \geqslant 3$. Un initial data set (M^n, g, k) si dice *asintoticamente piatto*[4] se esiste un insieme compatto $K \subseteq M$ tale che $M \setminus K$ sia un'unione finita di componenti connesse M_ℓ dette *end*, tali che per ognuna di esse, esista un diffeomorfismo

$$\Phi_\ell : M_\ell \to \mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1(0)$$

(dove $\overline{B}_1(0)$ è la palla unitaria chiusa di $\mathbb{R}^n$) tale che, se vediamo Φ_ℓ come una carta coordinata con coordinate $x^1, \dots, x^n$ (che chiameremo *carta coordinata asintoticamente piatta*, o talvolta semplicemente *carta AF*, da "asymptotically flat"), si abbia, in tali coordinate

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} + O_2\big(|x|^{-q}\big)\,,$$
$$k_{ij}(x) = O_1\big(|x|^{-q-1}\big)\,,$$

per un esponente $q > \frac{n-2}{2}$.
La scrittura $O_1(|x|^{-q-1})$ indica una funzione nello spazio C^2_{-q-1}, cioè una funzione $f : M_\ell \to \mathbb{R}$ tale che

$$|f(x)| + |x|\,|\partial f(x)| \leqslant C|x|^{-q-1},$$

per una costante $C \geqslant 0$, dove con ∂ denotiamo le usuali derivate rispetto alle coordinate.
Analogamente, $O_2(|x|^{-q})$ indica una funzione nello spazio C^2_{-q} delle funzioni $f : M_\ell \to \mathbb{R}$ tali che

$$|f(x)| + |x|\,|\partial f(x)| + |x|^2|\partial^2 f(x)| \leqslant C|x|^{-q}\,,$$

per una costante $C \geqslant 0$.
L'esponente q si dice *tasso di decadimento asintotico* di g nell'end M_ℓ.
Infine, richiediamo che le funzioni μ e $|J|_g$, date dalla Definizione 2.11, siano integrabili su (M, g).

OSSERVAZIONE 2.16. Nel caso in cui un initial data set (M, g, k) è *time–symmetric*, cioè se k è identicamente nullo, la richiesta finale che μ e $|J|_g$ siano integrabili, si riduce a chiedere l'integrabilità della curvatura scalare di (M, g).

Vorremmo ora introdurre, per un initial data set asintoticamente piatto, delle nozioni di massa, energia e momento. Il tensore energia–impulso descrive una distribuzione locale che in alcuni casi, può essere identicamente nulla pur in presenza di energia totale non nulla. Si consideri, ad esempio, la metrica di Schwarzschild che descrive lo spazio tempo dove c'è soltanto un buco nero e nessun'altra massa (sorgente gravitazionale). In tal caso, tutta la massa è "collassata" nella singolarità, ossia la distribuzione di energia–impulso (il tensore T) è uguale a 0, tuttavia la massa totale non è zero. Tenendo presente questo fatto, sono state proposte diverse definizioni (globali) di massa ed energia, ad esempio la massa di Bondi [9], la massa di Komar [30]) o la *massa ADM* [2]. Nel caso asintoticamente piatto, noi adotteremo quest'ultima, introdotta nel 1959 da Arnowitt, Deser e Misner.

DEFINIZIONE 2.17. Sia (M^n, g, k) un initial data set asintoticamente piatto. Definiamo l'*energia ADM* di un end di M come il limite (se esiste)

$$E = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{2(n-1)\,\omega_{n-1}} \int_{S_r} \sum_{k,j=1}^{n} \big(\partial_k g_{kj} - \partial_j g_{kk}\big)\,\overline{\nu}^j\, d\overline{\mu}_{S_r}\,, \tag{2.10}$$

dove nelle coordinate date da una fissata carta asintoticamente piatta dell'end, S_r è la sfera di raggio $r \in \mathbb{R}$ (abbastanza grande), ω_{n-1} è il volume canonico di $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$, il vettore $\overline{\nu}$ è

[4] Segnaliamo che in letteratura la definizione di piattezza asintotica può variare a seconda degli autori.

la normale unitaria esterna di S_r (col prodotto scalare euclideo) e $d\overline{\mu}_{S_r}$ è la misura canonica di area su S_r (indotta dalla metrica euclidea).

OSSERVAZIONE 2.18. Osserviamo che se il tasso di decadimento asintotico della metrica nell'end è $q > n-2$ (Definizione 2.15), allora l'energia ADM è uguale a zero. Infatti, si ha

$$\left| \frac{1}{2(n-1)\,\omega_{n-1}} \int_{S_r} \sum_{k,j=1}^{n} \big(\partial_k g_{kj} - \partial_j g_{kk}\big)\,\overline{\nu}^j\, d\overline{\mu}_{S_r} \right| \leqslant C\frac{d\overline{\mu}_{S_r}(S_r)}{r^{q+1}} = C\frac{\omega_{n-1} r^{n-1}}{r^{q+1}} \leqslant C r^{n-q-2}\,,$$

che per $q > n-2$, tende a zero se $r \to +\infty$. Dunque, l'energia ADM è significativa solo nel caso in cui il tasso di decadimento appartiene a $\big(\frac{n-2}{2}, n-2\big]$.

DEFINIZIONE 2.19. Sia (M^n, g, k) un initial data set asintoticamente piatto. Con le stesse notazioni della Definizione 2.17, fissata una carta asintoticamente piatta, definiamo il *momento ADM* di un end di M come il vettore P di componenti

$$P_i = \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{(n-1)\,\omega_{n-1}} \int_{S_r} \sum_{j=1}^{n} \big(k_{ij} - (\mathrm{tr}_g\, k)\, g_{ij}\big)\,\overline{\nu}^j\, d\overline{\mu}_{S_r} \tag{2.11}$$

(se questi limiti esistono), per ogni $i = 1, \dots, n$.

DEFINIZIONE 2.20. Sia (M^n, g, k) un initial data set asintoticamente piatto. Con le stesse notazioni della Definizione 2.17, fissata una carta asintoticamente piatta, se

$$E \geqslant |P| = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n P_i^2}\,,$$

con E e P definiti sopra, definiamo la *massa ADM* di un end di M come

$$m_{\mathrm{ADM}} = \sqrt{E^2 - |P|^2}\,. \tag{2.12}$$

OSSERVAZIONE 2.21. Anche in relatività ristretta i concetti di energia e momento sono descritti da un 4–vettore (E, P), che nel caso di una particella avente massa a riposo m e che si muove con velocità $v \in \mathbb{R}^3$, si possono calcolare esplicitamente come $(E, P) = (m\gamma, m\gamma v)$, dove $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2}$ (ricordiamo l'usuale scelta $c = 1$, per cui $|v| < 1$). Abbiamo quindi che $m^2 = E^2 - |P|^2$. Questa osservazione giustifica la formula (2.12).

OSSERVAZIONE 2.22. La Definizione 2.17 di energia ADM per un initial data set asintoticamente piatto è esattamente la stessa che solitamente si usa per la massa ADM di una varietà asintoticamente piatta. Questa apparente discrepanza di nomenclatura è innocua, in quanto massa ADM ed energia ADM coincidono per un initial data set (M, g, k) asintoticamente piatto e time–symmetric, cioè con $k = 0$. Infatti, in tal caso $P = 0$, dunque $m_{\mathrm{ADM}} = E$, *una volta stabilito che* $E \geqslant 0$.

Il seguenti due teoremi danno delle condizioni sotto le quali i limiti (2.10) e (2.11) che definiscono rispettivamente l'energia e il momento ADM, esistano e siano finiti.

TEOREMA 2.23 ([14, Proposizione 1.1.4]). *Sia M_ℓ un end di un initial data set asintoticamente piatto (M^n, g, k) e sia R_g la curvatura scalare di (M^n, g). Assumiamo che in una sua carta coordinata asintoticamente piatta si abbia*

$$g_{ij} \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(M_\ell), \qquad g^{ms} \in L^\infty(M_\ell) \qquad e \qquad \partial_m g_{ij} \in L^2(M_\ell),$$

per ogni $i, j, m, s \in \{1, \dots, n\}$, allora

(1) *se $R_g \in L^1(M_\ell)$, il limite (2.10) che definisce l'energia ADM di M_ℓ, esiste ed è finito,*

(2) *se R_g è una funzione misurabile nonnegativa che non appartiene a $L^1(M_\ell)$, il limite* (2.10) *è uguale a $+\infty$.*

TEOREMA 2.24 ([14, Proposizione 1.1.5]). *Sia M_ℓ un end di un initial data set asintoticamente piatto (M^n, g, k). Se in una sua carta coordinata asintoticamente piatta si ha*

$$\partial_m g_{ij} \in L^2(M_\ell) \qquad e \qquad (\operatorname{tr}_g k) g^{ij} - k^{ij} \in L^2(M_\ell),$$

per ogni $i, j, m \in \{1, \dots, n\}$, allora il limite (2.11) *che definisce il momento ADM di M_ℓ, è finito.*

Infine, sottolineiamo che l'energia ADM è un "invariante geometrico", cioè non dipende dalla scelta della carta coordinata asintoticamente piatta con cui viene definita e lo stesso vale anche per il momento ADM P e per il suo "modulo" $|P|$ (nelle ipotesi dei due teoremi precedenti).

TEOREMA 2.25. [5, Teorema 4.2] *Sia M_ℓ un end di un initial data set asintoticamente piatto (M^n, g, k), con curvatura scalare di (M, g) in $L^1(M_\ell)$. Allora, l'energia ADM dell'end, cioè il limite* (2.10)*, è indipendente dalla carta coordinata asintoticamente piatta scelta, se le ipotesi del Teorema* 2.23 *sono soddisfatte.*

TEOREMA 2.26. [13, Teorema 2] *Sia M_ℓ un end di un initial data set asintoticamente piatto (M^n, g, k) e siano Φ e Φ' due carte asintoticamente piatte sull'end che soddisfano entrambe le ipotesi del Teorema* 2.24*. Se denotiamo con P_i e P_i' le componenti del momento ADM ottenuto rispettivamente nelle carte Φ e Φ', allora $P_i = \mathcal{J}(d(\Phi \circ \Phi^{-1}))_{ij} P_j'$, dove $\mathcal{J}(d(\Phi \circ \Phi^{-1}))_{ij}$ è la matrice jacobiana del differenziale del cambio di coordinate. In particolare, si ha $|P| = |P'|$.*

Chiaramente, da questi due teoremi segue che anche la massa ADM è indipendente dalla carta coordinata asintoticamente piatta in cui si calcola.

OSSERVAZIONE 2.27. Sottolineiamo che tutte le definizioni finora introdotte per un initial data set, nel caso time–symmetric, sono definizioni sulle varietà riemanniane semplicemente (da cui il motivo per cui tale caso è anche detto caso "riemanniano"), in particolare la nozione di asintotica piattezza, indipendenti dall'esistenza di uno spaziotempo in cui tali varietà siedono e dagli altri concetti della relatività generale.

2.2. Il caso time–symmetric

La Definizione 2.20 della massa ADM richiede che si abbia la disuguaglianza $E \geqslant |P|$ tra l'energia ADM E e il momento ADM P di un end di un initial data set asintoticamente piatto (M^n, g, k). In particolare, il fatto fisicamente naturale che l'energia sia nonnegativa. Ci si chiede dunque se tale disuguaglianza valga in generale e di conseguenza, la massa ADM di ogni end sia ben definita.

Il problema, posto da Arnowitt, Deser e Misner in [2], è stato risolto da Schoen e Yau nel 1981 in [38] e successivamente (indipendentemente e con tecniche molto diverse) da Witten [41], in piena generalità nel caso spaziale tridimensionale, il più rilevante fisicamente, per un initial data set time–symmetric, asintoticamente piatto e che soddisfi la dominant energy condition, dunque alla luce delle Osservazioni 2.12 e 2.16, per una varietà riemanniana asintoticamente piatta con curvatura scalare nonnegativa e integrabile, in cui il problema si riduce allora a dimostrare che l'energia ADM è nonnegativa.

Tale risultato (e anche i suoi sviluppi e generalizzazioni) ha preso il nome di *teorema di massa positiva* (PMT – *positive mass theorem*), talvolta detto (giustamente) anche *teorema di energia positiva*. Entrambe le dimostrazioni (che sono piuttosto complesse e tecniche) si sono rivelate molto influenti, dando origine a un'ampia letteratura (va menzionato che la dimostrazione di Witten ha necessitato di una successiva trattazione matematicamente rigorosa da parte di Thomas Parker e Clifford Henry Taubes in [36]). La dimostrazione di Schoen e Yau si basa su idee e tecniche legate alle superfici minime [38], mentre quella di Witten è di natura spinoriale e si applica dunque soltanto a varietà spin, ma fortunatamente, nel caso fisicamente rilevante di dimensione spaziale tre, ogni 3–varietà riemanniana orientata è spin (si veda [29, Capitolo VIII, Teorema 1]).

TEOREMA 2.28 (Teorema di massa positiva – Caso time–symmetric). *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa, spin e asintoticamente piatta con curvatura scalare R nonnegativa e in $L^1(M)$. Allora, l'energia ADM di ogni end è nonnegativa, quindi la massa ADM è ben definita e nonnegativa.*

Seguendo Witten, consideriamo il prodotto scalare $\langle \cdot\,, \cdot\rangle$ sul fibrato spinoriale $S(M)$ dato dal Teorema 1.15, "compatibile" con la connessione su $S(M)$ e per cui l'operatore di Dirac $\not{D}$ è autoaggiunto (Lemma 1.28), allora per la formula di Schrödinger–Lichnerowicz, se $\Omega \subseteq M$ è un dominio compatto con bordo regolare e normale esterna ν, si ha

$$\begin{aligned} 0 = \int_\Omega \Big\langle \psi, -\not{D}^2\psi - \Delta\psi + \frac{1}{4}\,R\,\psi \Big\rangle\, d\mu_M &= \int_\Omega \Big(-|\not{D}\psi|^2 + |\nabla\psi|^2 + \frac{1}{4}R\,|\psi|^2 \Big)\, d\mu_M \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \big\langle \psi, \nabla_\nu\psi + \nu\cdot\not{D}\psi \big\rangle\, d\mu_{\partial\Omega}\,, \end{aligned}$$

per il teorema della divergenza ($d\mu$ è la misura riemanniana canonica di (M, g) e $d\mu_{\partial\Omega}$ quella indotta su $\partial\Omega$)). Si ha dunque l'uguaglianza

$$\int_\Omega \Big(-|\not{D}\psi|^2 + |\nabla\psi|^2 + \frac{1}{4}R\,|\psi|^2 \Big)\, d\mu_M = \int_{\partial\Omega} \big\langle \psi, \nabla_\nu\psi + \nu\cdot\not{D}\psi \big\rangle\, d\mu_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} \sum_{i=1}^n \langle \psi, L_i\psi\rangle\, \nu^i\, d\mu_{\partial\Omega}\,, \tag{2.13}$$

con $L_i = (\delta_{ij} + e_ie_j) \cdot \nabla_j$ (sommando sugli indici ripetuti).
Dunque, per ogni spinore armonico ψ, cioè che risolve l'equazione di Dirac $\not{D}\psi = 0$, l'integrale di volume a sinistra è nonnegativo, essendo $R \geqslant 0$. Vediamo ora che se inoltre tale spinore armonico è "asintoticamente costante all'infinito" su un end M_ℓ e nullo su tutti gli altri, l'integrale di bordo a destra converge a un multiplo positivo dell'energia ADM di tale end, "ingrandendo" Ω in modo che $\partial\Omega$ "vada verso l'infinito" e si ha quindi la tesi del Teorema 2.28.

PROPOSIZIONE 2.29. *Sia M_ℓ un end di una varietà riemanniana spin e asintoticamente piatta. In una sua carta coordinata asintoticamente piatta, sia h il tensore simmetrico h di tipo $(0, 2)$ dato da $h_{ij} = g_{ij} - \delta_{ij}$, ossia la differenza tra la metrica g e quella data dalla coordinate euclidee della carta e consideriamo il riferimento ortonormale $e_1, \dots, e_n$ su M_ℓ, ottenuto mediante il processo di ortonormalizzazione di Gram–Schmidt del riferimento $u_i = \partial_i - \frac{1}{2}h_{ij}\partial_j$. Sia ψ_0 uno spinore costante rispetto a questo riferimento (Definizione 1.23), allora*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{S_r} \sum_{i=1}^n \langle \psi_0, L_i\psi_0\rangle\, \nu^i\, d\mu_{S_r} = \frac{1}{2}\,(n-1)\,\omega_{n-1}\,|\psi_0|^2 E(M_\ell),$$

dove S_r è una sfera nelle coordinate asintoticamente piatte su M_ℓ.

DIMOSTRAZIONE. Sia $e_1, \dots, e_n$ un riferimento ortonormale su M_ℓ come nell'enunciato. Poniamo $q = \frac{n-2}{2}$ e ricordiamo, dalla Definizione 2.15, che la piattezza asintotica si traduce nel fatto che $h_{ij} = g_{ij} - \delta_{ij}$ decade a zero con un tasso più rapido di $|x|^{-q}$ con $q = \frac{n-2}{2}$. Quindi, $h_{ij} = o_2(|x|^{-q})$, cioè

$$|h_{ij}(x)| + |x|\,|\partial h_{ij}(x)| + |x|^2 |\partial^2 h_{ij}(x)| = o(|x|^{-q})$$

per $|x| \to +\infty$. Un calcolo diretto mostra allora che

$$e_i = \partial_i - \frac{1}{2}\, h_{ij}\, \partial_j + o_1(|x|^{-2q})\,,$$

quindi,

$$\begin{aligned}
\omega_j^i(e_k) &= \langle \nabla_{e_k} e_j, e_i \rangle \\
&= \Big\langle \nabla_{\partial_k}\Big(\partial_j + \frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n} h_{j\ell}\partial_\ell\Big),\, \partial_i \Big\rangle + o(|x|^{-2q-1}) \\
&= \Gamma_{jk}^i - \frac{1}{2}\partial_k h_{ij} + o(|x|^{-2q-1}) \\
&= \frac{1}{2}\,(\partial_j g_{ik} - \partial_i g_{jk}) + o(|x|^{-2q-1})\,.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Calcoliamo dunque

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \langle \psi_0, L_i \psi_0 \rangle\, \nu^i &= \sum_{i \neq j} \langle \psi_0, e_i e_j \nabla_j \psi_0 \rangle\, \nu^i \\
&= \sum_{i \neq j} \Big\langle \psi_0, -e_i e_j\, \frac{1}{4} \sum_{k \neq \ell} \omega_\ell^k(e_j)\, e_k e_\ell \cdot \psi_0 \Big\rangle\, \nu^i \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{\substack{i \neq j \\ k \neq \ell}} \omega_\ell^k(e_j) \langle \psi_0, e_i e_j e_k e_\ell \cdot \psi_0 \rangle\, \nu^i\,.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Dall'equazione (2.14) segue che la somma dell'espressione $\omega_j^i(e_k)$ sulle permutazioni cicliche di i, j, k è uguale a $o(|x|^{-2q-1})$, cioè $\omega_j^i(e_k) + \omega_k^j(e_i) + \omega_i^k(e_j) = o(|x|^{-2q-1})$. Inoltre, per indici i, j, k distinti, $e_i e_j e_k$ è invariante per permutazioni cicliche, dunque, per lo stesso argomento utilizzato nella dimostrazione del Teorema 1.30, si ha

$$\sum_{\substack{j,k,\ell=1 \\ \text{distinti}}}^{n} \omega_\ell^k(e_j)\, e_j e_k e_\ell = o(|x|^{-2q-1})\,.$$

Pertanto, nella formula (2.15) danno contributo solo i termini con $j = k$ oppure $j = \ell$. I termini con $j = k$ e $i \neq \ell$ si annullano perché in tal caso $\langle \psi_0, e_i e_\ell \cdot \psi_0 \rangle = 0$, per la natura antisimmetrica dell'azione di $e_i e_\ell$ su ψ_0; analogamente si annullano i termini con $j = \ell$ e $i \neq k$. Rimangono quindi solo i termini con $j = k$ e $i = \ell$, oppure con $j = \ell$ e $i = k$. Allora, per l'equazione (2.14) nella seconda uguaglianza sotto, otteniamo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\langle\psi_0, L_i\psi_0\rangle\,\nu^i &= -\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}\big(\omega^i_j(e_j)\,\langle\psi_0, e_ie_je_ie_j\cdot\psi_0\rangle + \omega^i_j(e_j)\,\langle\psi_0, e_ie_je_je_i\cdot\psi_0\rangle\big)\nu^i\\ &\quad + o(|x|^{-2q-1})\\ &= -\frac{1}{8}\sum_{i\neq j}\big(-(\partial_i g_{ij}-\partial_i g_{jj})+(\partial_i g_{jj}-\partial_j g_{ij})\big)|\psi_0|^2\nu^i + o(|x|^{-2q-1})\\ &= \frac{1}{4}\sum_{i,j}(\partial_j g_{ji}-\partial_i g_{jj})(\nu^i-\overline{\nu}^i+\overline{\nu}^i) + o(|x|^{-2q-1})\\ &= \frac{1}{4}\sum_{i,j}(\partial_j g_{ji}-\partial_i g_{jj})(\nu^i-\overline{\nu}^i) + \frac{1}{4}\sum_{i,j}(\partial_j g_{ji}-\partial_i g_{jj})\overline{\nu}^i + o(|x|^{-2q-1})\\ &= \frac{1}{4}\sum_{i,j}(\partial_j g_{ji}-\partial_i g_{jj})\,\overline{\nu}^i + o(|x|^{-2q-1})\,,\end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato il fatto che $(\nu^i - \overline{\nu}^i) = o(|x|^{-q})$, dunque il primo termine è $o(|x|^{-2q-1})$. Poiché l'integrale del termine $o(|x|^{-2q-1})$ si annulla nel limite per $|x| \to +\infty$, la tesi segue ricordando la Definizione 2.17. □

Prima di proseguire diamo alcune definizioni.

DEFINIZIONE 2.30. Sia (M^n, g) una varietà riemanniana completa e asintoticamente piatta e sia M_ℓ un end sul quale è fissata una carta asintoticamente piatta. Definita la funzione $r = |x|$ nelle coordinate di tale carta, per ogni $p \geqslant 1$ e $q \geqslant 0$, sia $L^p_{-q}(M_\ell)$ lo *spazio di Lebesgue pesato* dato dall'insieme di tutte le funzioni $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(M_\ell)$ con la seguente norma "pesata" finita

$$\|f\|_{L^p_{-q}(M)} = \left(\int_M |f|^p\, r^{qp-n}\, d\mu_M\right)^{1/p},$$

DEFINIZIONE 2.31. Valgano le stesse notazioni della definizione precedente. Per ogni $k \in \mathbb{N}$, definiamo lo *spazio di Sobolev pesato* $W^{k,p}_s(M_\ell)$ come l'insieme di tutte le funzioni $f \in W^{k,p}_{\mathrm{loc}}(M_\ell)$ con la seguente norma finita

$$\|f\|_{W^{k,p}_{-q}(M_\ell)} = \sum_{i=0}^{k} \|\nabla^i f\|_{L^p_{-q-i}(M_\ell)}\,.$$

OSSERVAZIONE 2.32. Si noti che gli spazi di Sobolev pesati sono definiti in modo tale che ogni passaggio a una derivata faccia guadagnare un ordine di decadimento.

Osserviamo che tutti questi spazi pesati sono degli spazi di Banach, come i corrispondenti non pesati standard.

Dire che uno spinore ψ appartiene a $L^p_{-q}(M)$ significa che $|\psi| \in L^p_{-q}(M)$. Analogamente per gli spazi $W^{k,p}_{-q}(M)$. Abbiamo dunque una definizione naturale degli spazi di spinori $L^p_{-q}(S(M))$ e $W^{1,2}_{-q}(S(M))$.

PROPOSIZIONE 2.33. *Nelle stesse ipotesi e notazioni della Proposizione 2.29, supponiamo che $\psi \in \Gamma(S(M))$ sia tale che $\psi - \psi_0 \in W^{1,2}_{-q}(S(M))$, dove $q = \frac{n-2}{2}$. Allora,*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{S_r} \sum_{i=1}^{n} \langle \psi, L_i\psi\rangle\, \nu^i\, d\mu_{S_r} = \frac{1}{2}(n-1)\,\omega_{n-1}\,|\psi_0|^2 E(M_\ell)\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Ponendo $\xi = \psi - \psi_0$, possiamo scrivere

$$\langle \psi, L_i\psi\rangle = \langle \psi_0, L_i\psi_0\rangle + \langle \psi_0, L_i\xi\rangle + \langle \xi, L_i\psi_0\rangle + \langle \xi, L_i\xi\rangle\,,$$

notando che l'integrale del primo termine a destra ci darà ciò che vogliamo, per la Proposizione 2.29. Vogliamo dunque mostrare che gli integrali degli altri termini termini non contribuiscono al limite nell'enunciato.
È immediato vedere che gli integrali degli ultimi due termini non contribuiscono, a causa del decadimento di ξ e di $\nabla\psi_0$. Mostriamo che l'integrale del termine $\langle \psi_0, L_i\xi\rangle$ coincide con l'integrale del termine $\langle \xi, L_i\psi_0\rangle$ e quindi si annulla anch'esso nel limite. Definiamo la $(n-2)$–forma

$$\alpha = \sum_{i\neq j} \langle \psi_0, e_ie_j\xi\rangle\, e_i \llcorner e_j \llcorner d\mathrm{vol}_M\,,$$

dove $d\mathrm{vol}_M$ è la forma di volume riemanniana di (M,g) e il simbolo "$\llcorner$" denota il prodotto interno. Usando l'antisimmetria di e_ie_j per $i \neq j$, si ottiene

$$\begin{aligned} d\alpha &= 2\sum_{i\neq j}\big(-\nabla_j\langle \psi_0, e_ie_j\xi\rangle\big)\, e_i \llcorner d\mathrm{vol}_M \\ &= 2\sum_{i\neq j}\big(\langle e_ie_j\nabla_j\psi_0, \xi\rangle - \langle \psi_0, e_ie_j\nabla_j\xi\rangle\big)\, e_i \llcorner d\mathrm{vol}_M \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\big(\langle L_i\psi_0, \xi\rangle - \langle \psi_0, L_i\xi\rangle\big)\, e_i \llcorner d\mathrm{vol}_M. \end{aligned}$$

Segue che

$$0 = \int_{S_r} d\alpha = \int_{S_r}\sum_{i=1}^{n}\big(\langle L_i\psi_0, \xi\rangle - \langle \psi_0, L_i\xi\rangle\big)\, e_i \llcorner d\mathrm{vol}_M = \int_{S_r}\sum_{i=1}^{n}\big(\langle L_i\psi_0, \xi\rangle - \langle \psi_0, L_i\xi\rangle\big)\, \nu^i\, d\mu_{S_r},$$

cioè

$$\int_{S_r}\sum_{i=1}^{n}\langle \psi_0, L_i\xi\rangle\, \nu^i\, d\mu_{S_r} = \int_{S_r}\sum_{i=1}^{n}\langle L_i\psi_0, \xi\rangle\, \nu^i\, d\mu_{S_r},$$

che è quello che volevamo provare. □

PROPOSIZIONE 2.34. *Sia (M^n, g) una varietà riemanniana completa, spin e asintoticamente piatta, con curvatura scalare nonnegativa. Se $q = \frac{n-2}{2}$, l'operatore di Dirac*

$$D\!\!\!/ : W^{1,2}_{-q}\big(S(M)\big) \to L^2_{-q-1}\big(S(M)\big)$$

è un isomorfismo. Si noti che, con questa scelta di q, vale $L^2_{-q-1} = L^2$.

DIMOSTRAZIONE. È immediato verificare che $D\!\!\!/$ è un operatore lineare ben definito e limitato. Vediamo che è iniettivo.

Per la formula (2.13) e la Proposizione 2.33 con $\psi_0 = 0$, per ogni $\varphi \in W^{1,2}_{-q}\big(S(M)\big)$ si ha

$$\int_\Omega \Big(|\nabla\varphi|^2 - |\not{D}\varphi|^2 + \frac{1}{4} R\,|\varphi|^2 \Big)\, d\mu_M = 0\,.$$

Dall'ipotesi di curvatura scalare nonnegativa segue allora

$$\|\nabla\varphi\|_{L^2} \leqslant \|\not{D}\varphi\|_{L^2}\,,$$

dunque,

$$\|\nabla\varphi\|_{L^2_{-q-1}} \leqslant \|\not{D}\varphi\|_{L^2_{-q-1}}.$$

Richiamiamo ora la seguente *disuguaglianza di Poincaré "pesata"* (si veda [32, Teorema A.28]), che fornisce una costante C indipendente da φ, tale che

$$\|\varphi\|_{L^2_{-q}} \leqslant C\,\|\nabla|\varphi|\|_{L^2_{-q-1}} \leqslant C\,\|\not{D}\varphi\|_{L^2_{-q-1}}\,.$$

Combinando le stime precedenti otteniamo quindi la seguente stima che chiaramente implica l'iniettività di $\not{D}$:

$$\|\varphi\|_{W^{1,2}_{-q}} \leqslant (C+1)\,\|\not{D}\varphi\|_{L^2}\,. \tag{2.16}$$

Resta da mostrare la surgettività. Dato un qualunque $\eta \in L^2_{-q-1}\big(S(M)\big)$, vogliamo trovare uno spinore $\xi \in W^{1,2}_{-q}\big(S(M)\big)$ che risolva $\not{D}\xi = \eta$. Consideriamo dapprima il caso in cui η abbia supporto compatto. Le stime precedenti mostrano che l'accoppiamento $\langle\omega,\varphi\rangle_H = \langle\not{D}\omega,\not{D}\varphi\rangle_{L^2}$ è equivalente al prodotto scalare di $W^{1,2}_{-q}$ di ω e φ. Inoltre, l'applicazione $\varphi \mapsto \langle\eta,\varphi\rangle_{L^2}$ è un funzionale lineare ben definito e limitato su $W^{1,2}_{-q}\big(S(M)\big)$. Applicando a tale funzionale il teorema di rappresentazione di Riesz e usando l'equivalenza fra il prodotto scalare H e quello di $W^{1,2}_{-q}$, segue che esiste $\omega \in W^{1,2}_{-q}\big(S(M)\big)$ tale che

$$\langle\not{D}\omega,\not{D}\varphi\rangle_{L^2} = \langle\eta,\varphi\rangle_{L^2} \qquad \text{per ogni } \varphi \in W^{1,2}_{-q}\big(S(M)\big)\,.$$

Mostriamo che $\xi = \not{D}\omega$ è la soluzione cercata. Sappiamo che $\xi \in L^2\big(S(M)\big)$, per migliorarne dunque la regolarità, consideriamo una successione di spinori $\xi_j \in W^{1,2}_{-q}$ che converge a ξ in L^2. Per ogni funzione test $\varphi \in W^{1,2}_{-q}$ otteniamo allora

$$\lim_{j\to+\infty}\langle\not{D}\xi_j,\varphi\rangle_{L^2} = \lim_{j\to+\infty}\langle\xi_j,\not{D}\varphi\rangle_{L^2} = \langle\xi,\not{D}\varphi\rangle_{L^2} = \langle\eta,\varphi\rangle_{L^2}\,,$$

per costruzione di ξ. Dunque, $\not{D}\xi_j$ converge debolmente a η in L^2, per $j \to +\infty$, dunque in particolare, $\|\not{D}\xi_j\|_{L^2}$ è limitata indipendentemente da $j \in \mathbb{N}$. La stima di iniettività (2.16) implica allora che $\|\xi_j\|_{W^{1,2}_{-q}}$ è limitata, quindi ξ_j converge debolmente a ξ in $W^{1,2}_{-q}$. Concludiamo osservando che

$$\langle\not{D}\xi,\varphi\rangle_{L^2} = \langle\xi,\not{D}\varphi\rangle_{L^2} = \langle\eta,\varphi\rangle_{L^2}$$

per ogni spinore a supporto compatto $\varphi \in W^{1,2}_{-q}$, da cui segue $\not{D}\xi = \eta$. Infine, per un generico $\eta \in L^2\big(S(M)\big)$ usiamo un'argomentazione di densità: approssimiamo η in L^2 con spinori a supporto compatto; le loro controimmagini tramite $\not{D}$ convergono a qualche $\xi \in W^{1,2}_{-q}$, grazie alla stima di iniettività (2.16), dunque $\not{D}\xi = \eta$. $\square$

Siamo ora pronti per completare la dimostrazione del teorema di massa positiva 2.28 nel caso time–symmetric (e spin).

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.28. Sia M_ℓ un end della varietà riemanniana (M^n, g), su cui fissiamo un riferimento ortonormale $e_1, \dots, e_n$. Scegliamo uno spinore $\psi_0 \in \Gamma(S(M))$ tale che ψ_0 sia costante rispetto a $e_1, \dots, e_n$ e $|\psi_0| = 1$ su M_ℓ, mentre ψ_0 si annulla su tutte gli altri end e poniamo $\eta = -\not{D}\psi_0$, che allora ha supporto compatto (è nullo su tutti gli end), dunque appartiene a $L^2_{-q-1}(S(M))$.
Per la Proposizione 2.34 esiste allora $\xi \in W^{1,2}_{-q}$ tale che $\not{D}\xi = \eta$, dove $q = \frac{n-2}{2}$. Definendo $\psi = \psi_0 + \xi$ e combinando la formula (2.13) con la Proposizione 2.33, otteniamo

$$\int_M \Big(|\nabla\psi|^2 - |\not{D}\psi|^2 + \frac{1}{4} R\,|\psi|^2 \Big)\, d\mu_M = \tfrac{1}{2}\,(n-1)\,\omega_{n-1}\, E(M_\ell)\,,$$

dove E è l'energia ADM di M_ℓ, in quanto i contributi degli altri end sono nulli (essendo ψ_0 nullo su tali end e per il decadimento di ξ). Poiché

$$\not{D}\psi = \not{D}\psi_0 + \not{D}\xi = \eta - \eta = 0\,,$$

segue che

$$E(M_\ell) = \frac{2}{(n-1)\,\omega_{n-1}} \int_M \Big(|\nabla\psi|^2 + \frac{1}{4} R\,|\psi|^2 \Big)\, d\mu_M\,, \tag{2.17}$$

che è evidentemente nonnegativa, essendo $R \geqslant 0$. □

2.3. Il caso generale

In quest'ultima sezione del capitolo, vogliamo mostrare il seguente caso generale del teorema di massa positiva per varietà riemanniane spin.

TEOREMA 2.35 (Teorema di massa positiva – Caso generale). *Sia $n \geqslant 3$ e sia (M^n, g, k) un initial data set asintoticamente piatto che soddisfa la dominant energy condition (Definizione 2.10). Supponiamo che la varietà riemanniana (M, g) sia completa e spin, allora per ogni end di M, si ha*

$$E \geqslant |P|\,,$$

dove E e P sono rispettivamente l'energia e il momento ADM di tale end quindi la sua massa ADM è ben definita e nonnegativa.

La linea dimostrativa è analoga e non molto più complessa tecnicamente della dimostrazione del Teorema 2.28, nel caso time–symmetric. Vediamo delle considerazioni e costruzioni preliminari.

Sia (M, g) una varietà riemanniana spin e sia (M, g, k) un initial data set. Consideriamo il fibrato $\mathbb{R} \oplus TM$[5] e sia e_0 la sezione costante $(1, 0)$, nel senso che vale sempre 1 nella componente $\mathbb{R}$ e 0 nella componente TM. Possiamo dotare questo fibrato di un prodotto lorentziano $\mathbf{g}$, ponendo $\mathbf{g}(e_\mu, e_\nu) = \eta_{\mu\nu}$, dove $e_1, \dots, e_n$ è una base ortonormale di TM e gli indici greci variano da 0 a n.

La costruzione dell'algebra di Clifford descritta nella Sezione 1.2 funziona perfettamente anche per prodotti non definiti positivi e può essere utilizzata per ottenere un fibrato di Clifford

$$\mathrm{Cl}(\mathbb{R} \times TM) = \Big(\sum_{r=0}^{\infty} \bigotimes^r (\mathbb{R} \oplus TM) \Big) \Big/ I\,,$$

[5]Il fibrato $\mathbb{R} \oplus TM$ è la *somma di Whitney* del fibrato banale $M \times \mathbb{R}$ col fibrato tangente TM. Per ogni $p \in M$ la fibra è $(\mathbb{R} \oplus TM)_p \simeq \mathbb{R} \oplus T_pM$. La scelta di una sezione globale mai nulla e_0 – per esempio $e_0(p) = (1, 0)$, cioè 1 sulla $\mathbb{R}$–componente e 0 su TM – fissa una direzione temporale e rende tempo–orientato lo spaziotempo che contiene l'initial data set (M, g, k) (almeno in un intorno di M).

dove I è il fibrato ideale generato dalle relazioni $v \otimes v = -\mathbf{g}(v,v)$ per ogni $v \in \mathbb{R} \oplus T_pM$ e per ogni $p \in M$, ovvero, in altri termini,

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = -2\,\eta_{\mu\nu}\,,$$

dove $e_1, \ldots, e_n$ è una qualsiasi base ortonormale di T_pM.

Sia $S(M)$ un fibrato di spinori su (M,g)[6], costruito come nella Sezione 1.2. Ricordiamo che $S(M)$ ha un prodotto interno con la proprietà che i vettori unitari di $TM \subseteq \mathrm{Cl}(M)$ agiscono ortogonalmente su $S(M)$ (si veda la Sezione 1.2) e più in generale, tutti gli elementi di TM agiscono come operatori antisimmetrici su $S(M)$. Vogliamo "ampliare" $S(M)$ per ottenere un fibrato su cui agisca $\mathrm{Cl}(\mathbb{R} \oplus TM)$. Definiamo $\widetilde{S}(M) = S(M) \oplus S(M)$, con il prodotto interno dato dalla somma dei prodotti interni sulle due componenti e definiamo un'azione di $\mathrm{Cl}(\mathbb{R} \oplus TM)$ su $\widetilde{S}(M)$ come segue: per ogni $p \in M$, per ogni coppia di spinori $\psi_1, \psi_2 \in S_p(M)$ e per ogni vettore $v \in T_pM$, poniamo

$$v \cdot (\psi_1, \psi_2) = (\,v \cdot \psi_1, -\,v \cdot \psi_2\,)\,, \qquad e_0 \cdot (\psi_1, \psi_2) = (\,\psi_2, \psi_1\,)\,.$$

Si verifica allora che questa è un'azione ben definita di $\mathrm{Cl}(\mathbb{R} \oplus TM)$ su $\widetilde{S}(M)$. Tuttavia, si noti che a differenza di $e_1, \ldots, e_n$, la sezione e_0 è simmetrica invece che antisimmetrica.

OSSERVAZIONE 2.36. Un'alternativa alla precedente costruzione è data dall'adottare direttamente il punto di vista spaziotemporale: cioè assumere che $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ sia spin e considerare il fibrato spinoriale $S(\mathcal{M})$, costruito come nella Sezione 1.2, operando dunque direttamente su $\mathcal{M}$. Tuttavia, tenendo presente la linea dimostrativa che segue e i risultati di rigidità che saranno presentati nel prossimo capitolo, abbiamo preferito fornire una costruzione esplicita, mettendoci nel punto di vista di una varietà riemanniana dotata di una 2–forma k, che si immerge isometricamente in uno spaziotempo, anziché partire dallo spaziotempo e considerare l'initial data set che siede al suo interno.

Precedendo come nella Sezione 1.3 per $S(M)$, possiamo costruire una connessione $\widetilde{\nabla}$ su $S(\mathcal{M})$, data da

$$\widetilde{\nabla}_i = -\frac{1}{4} \sum_{m,j=0}^{n} \widetilde{\omega}_j^m(e_i) e_m e_j\,,$$

che è la formula analoga alla (1.3).
Se calcoliamo le 1–forme di connessione $\widetilde{\omega}_j^m(e_i)$, decomponendole sullo spazio tangente e normale a $(M,g) \subseteq (\mathcal{M}, \mathbf{g})$,

$$\widetilde{\omega}_j^\mu(e_i) e_\mu = \widetilde{\nabla}_i e_j = (\widetilde{\nabla}_i e_j)^\top + (\widetilde{\nabla}_i e_j)^\perp = \nabla_i e_j + k_{ij} e_0 = \omega_j^m(e_i) e_m + k_{ij} e_0\,,$$

si ha che

$$\widetilde{\omega}_j^m(e_i) = \omega_j^m(e_i) \qquad \text{e} \qquad \widetilde{\omega}_j^0(e_i) = k_{ij}\,,$$

dunque, otteniamo

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_i = -\frac{1}{4} \sum_{m,j=0}^{n} \widetilde{\omega}_j^m(e_i) e_m e_j &= -\,\frac{1}{4} \sum_{m,j=1}^{n} \omega_j^m(e_i) e_m e_j + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} \omega_j^0(e_i) e_j e_0 + \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{n} \omega_m^0(e_i) e_m e_0 \\ &= \nabla_i + \frac{1}{2} k_{ij} e_j e_0\,, \end{aligned} \tag{2.18}$$

[6]Sottolineamo che l'esistenza di tale $S(M)$ è il punto che necessita che (M,g) sia spin.

dove nel terzo termine al terzo membro abbiamo usato l'antisimmetria di ω quando si scambiano l'indice in alto con l'indice in basso e il fatto che, dalle regole di Clifford, $e_a e_b = -e_b e_a$.

Definiamo poi l'*operatore ipersupeficie di Dirac* $\widetilde{\not{D}}$ su $\widetilde{S}(M)$, come

$$\widetilde{\not{D}} = e_i \cdot \widetilde{\nabla}_i = \not{D} + \frac{1}{2} k_{ij} e_i e_j e_0 = \not{D} - \frac{1}{2}(\operatorname{tr}_g k) e_0 \,,$$

dove $\not{D}$ è l'usuale operatore di Dirac su $\widetilde{S}(M)$, come definito nella Sezione 1.4.
Abbiamo allora una versione della formula di Schrödinger–Lichnerowicz (Teorema 1.30) per un initial data set.

TEOREMA 2.37. *Sia (M, g, k) un initial data set con (M, g) una varietà riemanniana spin. Allora, per ogni $\psi \in \Gamma(\widetilde{S}(M))$, si ha*

$$\widetilde{\not{D}}^2 \psi = -\widetilde{\Delta} \psi + \frac{1}{2} \mu \psi + \frac{1}{2} J e_0 \cdot \psi \,,$$

dove μ e J sono dati dalla Definizione 2.11.

DIMOSTRAZIONE. Come nella dimostrazione del Teorema 1.30 nella Sezione 1.4, scegliamo una base ortonormale $e_1, \dots, e_n$ tale che, fissato $p \in M$, valga $\nabla e_i(p) = 0$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$. Se $\psi \in \Gamma(\widetilde{S}(M))$, si ha

$$\begin{aligned}
\widetilde{\not{D}}^2 \psi &= \not{D}^2 \psi - \frac{1}{2} e_i \cdot \nabla_i \big[(\operatorname{tr} k)\, e_0 \cdot \psi\big] - \frac{1}{2} (\operatorname{tr} k)\, e_0 e_i \cdot \nabla_i \psi + \frac{1}{4} (\operatorname{tr} k)^2 \psi \\
&= -\,\Delta \psi + \frac{1}{4} R\, \psi - \frac{1}{2} \nabla_i (\operatorname{tr} k)\, e_i e_0 \cdot \psi + \frac{1}{4} (\operatorname{tr} k)^2 \psi \\
&= -\,\Delta \psi + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \big(R + (\operatorname{tr} k)^2\big) - \nabla (\operatorname{tr} k)\, e_0 \right] \psi \,,
\end{aligned}$$

dove nel passare dalla prima alla seconda riga, abbiamo usato il Teorema 1.30. D'altra parte, per calcolo diretto, si ha

$$\begin{aligned}
-\widetilde{\Delta} \psi &= -\Delta \psi - \nabla_i \Big(\frac{1}{2} k_{ij} e_j e_0 \cdot \psi \Big) + \frac{1}{2} k_{ij} e_j e_0 \nabla_i \psi + \frac{1}{4} k_{ij} e_j e_0\, k_{i\ell} e_\ell e_0 \\
&= -\Delta \psi - \frac{1}{2} (\nabla_i k_{ij})\, e_j e_0 \cdot \psi + \frac{1}{4} |k|^2 \psi \\
&= -\Delta \psi - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} |k|^2 + (\operatorname{div} k)^\sharp e_0 \right] \psi
\end{aligned}$$

e mettendo insieme queste due formule, si ha la tesi. □

OSSERVAZIONE 2.38. Sottolineiamo che invece di usare il risultato del Teorema 1.30 come sopra, si potrebbe dimostrare la formula seguendo gli stessi passaggi della dimostrazione del Teorema 1.30, ma svolgendo tutti i conti nell'impostazione spaziotemporale e ottenendo come termine di ordine zero $[G(e_0, e_0) + G(e_i, e_0)\, e_i e_0] \cdot \psi$, dove G è il tensore di Einstein.

Vediamo ora l'analoga della formula (2.13) per un initial data set, nelle stesse ipotesi del Teorema 2.37. Se $\Omega \subseteq M$ è un dominio compatto con bordo regolare e normale esterna ν, per ogni $\psi \in \widetilde{S}(M)$, si ha

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big(|\widetilde{\nabla}\psi|^2 - |\widetilde{\not{D}}\psi|^2 + \frac{1}{2}\mu|\psi|^2 + \frac{1}{2}\langle \psi, Je_0 \cdot \psi\rangle \Big)\, d\mu_M &= \int_{\partial\Omega} \langle \psi, \widetilde{\nabla}_\nu \psi + \nu \cdot \widetilde{\not{D}}\psi\rangle \, d\mu_{\partial\Omega} \\ &= \int_{\partial\Omega} \langle \psi, \widetilde{L}_i \psi\rangle \, \nu^i \, d\mu_{\partial\Omega}\,, \end{aligned} \tag{2.19}$$

dove $\widetilde{L}_i = (\delta_{ij} + e_i e_j) \cdot \widetilde{\nabla}_j$ (sommando sugli indici ripetuti).
Questa formula si dimostra argomentando come per la formula (2.13), eccetto che prima di integrare per parti bisogna tener conto del fatto che ∇ è compatibile con il prodotto scalare $\widetilde{S}(M)$ mentre $\widetilde{\nabla}$ non lo è. Dunque, per calcolo esplicito va mostrato che l'operatore $\widetilde{\not{D}}$ è un operatore autoaggiunto rispetto a tale prodotto scalare, analogamente a quanto fatto per l'operatore $\not{D}$ nel Lemma 1.28.

La seguente proposizione è l'analoga della Proposizione 2.29.

PROPOSIZIONE 2.39. *Sia (M, g, k) un initial data set spin asintoticamente piatto e siano i campi vettoriali $e_1, \dots, e_n$ un riferimento ortonormale all'infinito di un dato end M_ℓ. Allora, esiste $\psi_0 \in \Gamma(\widetilde{S}(M))$ costante rispetto a tale riferimento (nel senso che ognuna delle sue componenti in $\Gamma(\widetilde{S}(M))$ è costante), tale che*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{S_r} \langle \psi_0, \widetilde{L}_i \psi_0 \rangle \, \nu^i \, d\mu_{S_r} = \frac{1}{2}(n-1)\,\omega_{n-1}\,(E(M_\ell) - |P(M_\ell)|)\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo innanzitutto uno spinore $\psi_0 \in \Gamma(\widetilde{S}(M))$ in modo che sia costante rispetto al riferimento scelto. Allora,

$$\begin{aligned}\widetilde{L}_i \psi_0 &= (\delta_{ij} + e_i e_j)\, \widetilde{\nabla}_j \psi_0 \\ &= L_i\psi_0 + (\delta_{ij} + e_i e_j)\, \frac{1}{2}\, k_{j\ell}\, e_\ell e_0 \cdot \psi_0 \\ &= L_i\psi_0 + \frac{1}{2}\big(k_{i\ell}\, e_\ell e_0 - (\operatorname{tr} k)\, e_i e_0\big) \cdot \psi_0 \\ &= L_i\psi_0 + \frac{1}{2}\big(k_{ij} - (\operatorname{tr} k)\delta_{ij}\big)\, e_j e_0 \cdot \psi_0, \end{aligned}$$

dove l'operatore L_i è definito immediatamente dopo la formula (2.13) e nel passare dalla seconda alla terza riga abbiamo usato la simmetria di k. Per la Proposizione 2.29, sappiamo che l'integrale del termine $L_i\psi_0$ da luogo al termine di energia ADM $E(M_\ell)$. Dunque,

$$\begin{aligned}&\int_{S_r} \Big\langle \psi_0, \frac{1}{2}\big(k_{ij} - (\operatorname{tr} k)\delta_{ij}\big) e_j e_0 \cdot \psi_0 \Big\rangle \nu^i \, d\mu_{S_r} \\ &\qquad = \lim_{r\to+\infty} \Big(\int_{S_r} \frac{1}{2}\big(k_{ij} - (\operatorname{tr} k) g_{ij}\big) \nu^i \, d\mu_{S_\rho} \Big)\, \langle \psi_0, e_j e_0 \cdot \psi_0 \rangle \\ &\qquad = \frac{1}{2}\,(n-1)\,\omega_{n-1}\, \big\langle \psi_0, P_j e_j e_0 \cdot \psi_0 \big\rangle\,, \end{aligned} \tag{2.20}$$

dove abbiamo usato il decadimento asintotico di $g_{ij} - \delta_{ij}$, la definizione di $P(M_\ell)$ e il fatto che ψ_0 è costante rispetto al riferimento scelto. Infine, possiamo scegliere ψ_0 di norma unitaria tale che

$$\big\langle \psi_0, P_j e_j e_0 \cdot \psi_0 \big\rangle = -|P|\,.$$

da cui la tesi. $\square$

Vale poi il seguente risultato che generalizza il precedente, così come la Proposizione 2.33 generalizza la Proposizione 2.29.

PROPOSIZIONE 2.40. *Nelle ipotesi della Proposizione 2.39, sia ψ_0 come nella sua conclusione. Sia inoltre $\psi \in \Gamma(\widetilde{S}(M))$ tale che $\psi - \psi_0 \in W^{1,2}_{-q}(\widetilde{S}(M))$, dove $q = \frac{n-2}{2}$. Allora,*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{S_r} \langle \psi, \widetilde{L}_i \psi \rangle \, \nu^i \, d\mu_{S_r} = \frac{1}{2}\,(n-1)\,\omega_{n-1}\,|\psi_0|^2 (E(M_\ell) - |P(M_\ell)|)\,.$$

DIMOSTRAZIONE. La parte principale della dimostrazione è identica a quella della Proposizione 2.33. Ciò che resta da controllare è che i termini di discrepanza tra $\widetilde{L}_i$ e L_i abbiano decadimento sufficiente da non contribuire al risultato finale e questo si vede facilmente. □

Dimostriamo ora che l'operatore ipersuperficie di Dirac è un isomorfismo tra gli spazi $W^{1,2}_{-q}\big(\widetilde{S}(M)\big)$ e $L^2_{-q-1}\big(\widetilde{S}(M)$, come abbiamo fatto per l'operatore di Dirac nella Proposizione 2.34.

PROPOSIZIONE 2.41. *Sia (M^n, g, k) un initial data set asintoticamente piatto che soddisfa la dominant energy condition, con (M^n, g) una varietà riemanniana completa e spin. Se $q = \frac{n-2}{2}$, l'operatore*

$$\widetilde{\not{D}} : W^{1,2}_{-q}\big(\widetilde{S}(M)\big) \to L^2_{-q-1}\big(\widetilde{S}(M)\big)$$

è un isomorfismo. Si noti che, con questa scelta di q, si ha che $L^2_{-q-1} = L^2$.

DIMOSTRAZIONE. Si ha che $\widetilde{\not{D}}$ è un operatore di Fredholm di indice zero [4, Teorema 3·10], è quindi sufficiente mostrare che $\widetilde{\not{D}}$ è iniettivo.
Supponiamo che $\psi \in W^{1,2}_{-q}(S(M))$ con $\widetilde{\not{D}}\psi = 0$. Per la formula (2.19) e la Proposizione 2.40 con $\psi_0 = 0$, otteniamo

$$\int_M \Big(|\widetilde{\nabla}\psi|^2 + \frac{1}{2}\mu|\psi|^2 + \frac{1}{2}\langle \psi, J e_0 \cdot \psi \rangle \Big)\, d\mu_M = 0\,.$$

La dominant energy condition implica allora $\widetilde{\nabla}\varphi = 0$. Cioè, $\nabla_i \psi = -\frac{1}{2}\, k_{ij}\, e_j e_0 \cdot \psi$.
Un argomento di *bootstrap* mostra che ψ è C^∞ e poiché $q > 0$, ψ deve tendere a zero all'infinito. Consideriamo la funzione $f = |\psi|^2$. Allora,

$$\begin{aligned}
\nabla_i f &= \langle \nabla_i \psi, \psi \rangle + \langle \psi, \nabla_i \psi \rangle \\
&= \Big\langle \widetilde{\nabla}_i - \frac{1}{2} k_{ij} e_j e_0 \cdot \psi, \psi \Big\rangle + \langle \psi, \nabla_i \psi \rangle \\
&= \langle \psi, \widetilde{\nabla}^*_i \psi \rangle - \Big\langle \frac{1}{2} k_{ij} e_j e_0 \cdot \psi, \psi \Big\rangle + \langle \psi, \nabla_i \psi \rangle \\
&= \Big\langle \nabla_i - \frac{1}{2} k_{ij} e_j e_0 \psi, \psi \Big\rangle - \Big\langle \frac{1}{2} k_{ij} e_j e_0 \cdot \psi, \psi \Big\rangle + \Big\langle \psi, \nabla_i \psi \Big\rangle \\
&= \langle k_{ij} e_j e_0 \cdot \psi, \psi \rangle.
\end{aligned}$$

Definiamo r come una funzione positiva su M uguale a $|x|$ nelle coordinate delle carte asintoticamente piatte degli end. Poiché k decade più velocemente di $|x|^{-q-1}$, si ha $|\nabla f| \leqslant C\, r^{-q-1} f$ per qualche costante C. Quindi, ogniqualvolta f è non nulla,

$$|\nabla(\log f)| \leqslant C\, r^{-q-1}\,.$$

Supponiamo che $f = |\psi|^2$ sia non nullo in un punto, allora integrando l'ultima disuguaglianza si deduce che ψ deve essere non nullo ovunque; inoltre, poiché

$$\int_1^{\infty} r^{-q-1}\, dr < +\infty,$$

ψ non può tendere a zero lungo alcun raggio verso l'infinito, ottenendo quindi una contraddizione, da cui la tesi di iniettività dell'operatore $\widetilde{\not{D}}$. $\square$

Ora possiamo vedere che il teorema di massa positiva nel caso generale segue dalla proposizione precedente, dalla formula (2.19) e dalla Proposizione 2.40, con lo stesso argomento usato per il Teorema 2.28 nella sezione precedente, nel caso time–symmetric.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2.35. Scegliendo ψ in modo da risolvere $\widetilde{\not{D}}\psi = 0$ con $\psi - \psi_0 \in W^{1,2}_{-q}$, dove ψ_0 è uno spinore costante scelto come nella Proposizione 2.40, si ha

$$E - |P| = \frac{2}{(n-1)\,\omega_{n-1}} \int_M \Big(|\widetilde{\nabla}\psi|^2 + \frac{1}{2}\mu|\psi|^2 + \frac{1}{2}\langle \psi, Je_0 \cdot \psi\rangle \Big)\, d\mu_M \geqslant 0\,, \tag{2.21}$$

dove la disuguaglianza segue dalla dominant energy condition $\mu \geqslant |J|$, infatti per il secondo e terzo termine dell'integrale si ha

$$\frac{1}{2}\mu|\psi|^2 + \frac{1}{2}\langle \psi, Je_0 \cdot \psi\rangle \geqslant \frac{1}{2}(\mu - |J|)|\psi|^2 \geqslant 0\,.$$

$\square$

CAPITOLO 3

Rigidità nel teorema di massa positiva

In questo capitolo esamineremo nel dettaglio il più recente e completo risultato di rigidità dovuto a Sven Hirsch e Yiyue Zhang (2024), ottenuto sotto l'ipotesi che la varietà sia spin e completa. Esso risolve il caso di uguaglianza nel teorema di massa positiva: quando $m_{\mathrm{ADM}} = 0$, ossia, per la formula (2.12), quando l'energia coincide con il modulo del momento. In particolare, in accordo con l'intuizione fisica, nel regime $E = |P| > 0$ la geometria limite è di tipo pp–wave, a patto di opportune condizioni di decadimento asintotico. Infatti, se in uno spaziotempo privo di massa vi è dell'energia, allora risulta ragionevole che questa possa trovarsi nello spaziotempo sotto forma di particolari onde gravitazionali. D'altro canto, se $E = |P| = 0$, si ricade nel caso piatto.

3.1. I primi approcci alla rigidità

I primi tentativi di ottenere risultati di rigidità sono quasi consequenziali al teorema di massa positiva. Con lo spirito della Sezione 2.2 enunciamo e dimostriamo il seguente risultato:

TEOREMA 3.1 (Rigidità del teorema di massa positiva time–symmetric). *Sia (M, g) una varietà spin completa e asintoticamente piatta con curvatura scalare nonnegativa. Se la massa di qualche end è zero, allora (M, g) è lo spazio euclideo.*

OSSERVAZIONE 3.2. Si noti che nel caso time–symmetric, il risultato di sopra completa la rigidità. Infatti, in questa situazione la massa ADM è uguale all'energia ADM e il vettore momento non può che essere nullo.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $m_{\mathrm{ADM}}(M, g) = 0$. Allora, l'uguaglianza (2.17) implica che ψ è parallelo ovunque, cioè $\nabla\psi = 0$. Si noti che qualunque scelta di spinore costante sull'end M_ℓ porta alla costruzione di uno spinore parallelo asintotico a tale scelta. In particolare, per $i = 1, \ldots, n$, possiamo costruire uno spinore ψ_i asintotico a $e_i \cdot \psi_0$ in M_ℓ tale che $\nabla\psi_i = 0$ dove ψ_0 è scelto come nella dimostrazione del Teorema 2.28. Definiamo V_i come il campo vettoriale caratterizzato dalla proprietà

$$\langle V_i, w\rangle = \langle w \cdot \psi, \psi_i\rangle$$

per ogni $w \in T_pM$ e per ogni punto $p \in M$, dove ψ è lo spinore parallelo iniziale costruito, asintotico a ψ_0. In altre parole, questo significa definire V_i come il vettore ottenuto dall'applicazione dell'operatore $\sharp$ alla 1–forma $\alpha(w) = \langle w \cdot \psi, \psi_i\rangle$. Dalle regole[1] di derivazione delle

[1] Si ricordi che se $\beta \in \Omega^1(M)$ e $Y, w \in \Gamma(TM)$, allora $(\nabla_Y\beta)(w) = Y(\beta(w)) - \beta(\nabla_Y w)$.

1–forme, per ogni $X \in \Gamma(TM)$, si ha che

$$\begin{aligned}
\nabla_X \alpha(w) &= X(\alpha(w)) - \alpha(\nabla_X w) \\
&= X\big(\langle w\cdot\psi, \psi_i\rangle\big) - \big\langle(\nabla_X w)\cdot\psi, \psi_i\big\rangle \\
&= \big\langle \nabla_X(w\cdot\psi), \psi_i\big\rangle + \big\langle w\cdot\psi, \nabla_X\psi_i\big\rangle - \big\langle(\nabla_X w)\cdot\psi, \psi_i\big\rangle \\
&= \big\langle(\nabla_X w)\cdot\psi + w\cdot\nabla_X\psi, \psi_i\big\rangle + \big\langle w\cdot\psi, \nabla_X\psi_i\big\rangle - \big\langle(\nabla_X w)\cdot\psi, \psi_i\big\rangle \\
&= \big\langle w\cdot\nabla_X\psi, \psi_i\big\rangle + \big\langle w\cdot\psi, \nabla_X\psi_i\big\rangle = 0\,.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Si ha, dunque, dalla compatibilità della connessione con la metrica, che $\nabla V_i = 0$ ovunque. Inoltre, essendo ψ_i asintotico a $e_i\cdot\psi_0$ e ψ asintotico a ψ_0 si ha che $\langle w\cdot\psi, \psi_i\rangle$ tende a $\langle w\cdot\psi_0, e_i\cdot\psi_0\rangle = g(w, e_i)$. Ossia V_i è asintotico a e_i all'infinito. Da ciò si ha che $V_1, \dots, V_n$ è una base ortonormale globale di campi vettoriali paralleli, che implica che (M, g) è piatto e dunque (M, g) deve essere lo spazio euclideo [32, Corollario 2.32]. □

L'idea dimostrativa di sfruttare l'annullarsi della massa ADM per costruire una base ortonormale globale e dedurne la piattezza si vorrebbe estendere anche al caso non time–symmetric. In tal modo ci si riconduce comunque al caso di rigidità con momento nullo, in cui la richiesta di rigidità si riduce a $E_{\mathrm{ADM}} = m_{\mathrm{ADM}} = 0$. Nel caso generale, però, quando anche il momento ADM è non nullo, si perde la possibilità di applicare la formula (2.17) per costruire spinori paralleli che asintotizzano a uno spinore costante rispetto a un fissato riferimento; tale costruzione è cruciale per provare l'esistenza di un riferimento ortonormale globale di vettori paralleli (si veda la la catena di uguaglianze (3.1)). Ciononostante, estendendo con la stessa filosofia della Sezione 2.3 al contesto initial data, si ottiene il seguente risultato parziale di rigidità nel caso non time–symmetric:

TEOREMA 3.3. *Sia (M, g, k) un initial data set spin completo e asintoticamente piatto, contenuto in uno spaziotempo $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ che soddisfa la dominant energy condition (DEC) e supponiamo che $E = 0$ in un end. Allora, la metrica dello spaziotempo ambiente è piatta lungo M.*

OSSERVAZIONE 3.4. Si noti che l'ipotesi di essere contenuti in uno spaziotempo che soddisfa la DEC è più forte del limitarsi ad assumere la DEC per un initial data set.

DIMOSTRAZIONE. Dal teorema di massa positiva dello spaziotempo (Teorema 2.35) sappiamo che $|P| \leqslant E = 0$. In particolare, possiamo scegliere ψ_0 uguale a qualunque spinore costante nell'end scelto affinché valga la Proposizione 2.39. Per comodità, scegliamo ψ_0 in modo che sia un elemento diagonale di $\widetilde{S} = S \oplus S$ nell'end, o equivalentemente, $e_0\psi_0 = \psi_0$ lì. La nostra dimostrazione del teorema di massa positiva nello spaziotempo presentata nella Sezione 2.3 ci dice allora che possiamo trovare uno spinore ψ asintotico a ψ_0 che soddisfa $\widetilde{\not{D}}\psi = 0$, e

$$0 = \int_M \left(|\widetilde{\nabla}\psi|^2 + \frac{1}{2}\langle \psi, (\mu + Je_0)\cdot\psi\rangle \right) d\mu_M\,.$$

La dominant energy condition implica quindi che $\widetilde{\nabla}\psi = 0$. Osserviamo che ciò significa che, dato qualunque spinore costante, possiamo trovare uno spinore parallelo per $\widetilde{\nabla}$ asintotico a esso. Per ogni $i = 1, \dots, n$, definiamo ψ_i come lo spinore $\widetilde{\nabla}$–parallelo asintotico a $e_i\cdot\psi_0$ e definiamo poi V_i come il campo vettoriale in $\mathcal{M}$ lungo M con la proprietà che

$$\mathbf{g}(V_i, w) = -\langle e_0 w\cdot\psi, \psi_i\rangle$$

per ogni $w \in T_p\mathcal{M}$ e per ogni $p \in M$. Qui ψ è ancora lo spinore $\widetilde{\nabla}$—parallelo asintotico a ψ_0. Definiamo inoltre V_0 come il campo vettoriale in $\mathcal{M}$ lungo M con la proprietà che

$$\mathbf{g}(V_0, w) = -\langle e_0 w \cdot \psi, \psi \rangle$$

per ogni $w \in T_p\mathcal{M}$ e per ogni $p \in M$. Un semplice calcolo mostra che, lungo M, vale

$$\nabla_v \langle e_0 \cdot \varphi, \tau \rangle = \langle e_0 \, \widetilde{\nabla}_v \varphi, \tau \rangle + \langle e_0 \varphi, \widetilde{\nabla}_v \tau \rangle$$

per ogni vettore v tangente a M e per ogni $\varphi, \tau \in \Gamma(\widetilde{S}(M))$. Usando ciò, si vede che $\widetilde{\nabla}_v V_\mu = 0$ per ogni $\mu = 0, 1, \ldots, n$, dove $\widetilde{\nabla}$ denota la connessione di Levi–Civita della metrica ambiente $\mathbf{g}$. Dalla costruzione di V_μ si vede anche che V_μ è asintotico a e_μ all'infinito. Segue che $V_0, V_1, \ldots, V_n$ costituiscono un $\mathbf{g}$–riferimento globale parallelo per $\mathcal{M}$ lungo M. Poiché questi sono noti essere covariantemente costanti solo nelle direzioni tangenziali, non otteniamo immediatamente la piattezza di $\mathbf{g}$ lungo M; tuttavia, per definizione di curvatura, troviamo che la curvatura ambiente $R_{ij\mu\nu} = 0$, dove i, j si riferiscono a direzioni tangenziali (non alle direzioni V_i, che non necessariamente sono tangenziali e che non useremo più). Vogliamo mostrare che tutte le componenti si annullano. Per le simmetrie del tensore di curvatura, le uniche componenti rimanenti che dobbiamo mostrare nulle sono quelle della forma R_{i0j0}. Tutte le altre sono già note essere nulle. In particolare, abbiamo

$$\begin{aligned} G_{i0} &= \mathrm{Ric}_{i0} = 0\,, \\ \mathrm{Ric}_{00} &= R_{0i0i}\,, \\ R &= -\,2\,R_{i0i0}\,, \\ G_{00} &= \mathrm{Ric}_{00} + R = 0/2\,. \end{aligned}$$

Richiamiamo ora la dominant energy condition nello spaziotempo ambiente, che implica che $|G_{ij}| \leqslant G_{00}$. Poiché abbiamo visto che quest'ultimo è nullo, segue che G_{ij} è nullo. Di conseguenza G è identicamente nullo e quindi Ric è anch'esso identicamente nullo. In particolare,

$$\mathrm{Ric}_{ij} = -R_{i0j0}$$

è nullo, il che conclude la dimostrazione. □

OSSERVAZIONE 3.5. L'idea della dimostrazione precedente è di sfruttare $|P| = E = 0$ per costruire $n+1$ spinori ψ_μ che risultano $\widetilde{\nabla}$–paralleli a partire dagli spinori costanti $e_\mu \cdot \psi_0$. In questa situazione non è necessario, come alla fine della Proposizione 2.39, scegliere spinori "all'infinito" che siano autospinori di $Pe_0\cdot$ con autovalore $-|P|$ in modo che $\langle Pe_0 \cdot \psi_i, \psi_i \rangle = -|P|$: poiché $|P| = 0$, qualunque spinore costante fa funzionare l'argomento. Infatti, se lo spinore ψ che soddisfa $\widetilde{\not{D}}\psi = 0$ tale per cui $(\psi - \psi_0) \in W^{1,2}_{-q}(\widetilde{S}(M))$ non è modificato come alla fine della dimostrazione della Proposizione 2.39, dunque il membro a sinistra non coinvolge $E - |P|$ bensì $\langle Pe_0\psi_0, \psi_0 \rangle$ (si veda la formula (2.20)), l'uguaglianza (2.21) diventa

$$E|\psi_0|^2 + \langle \psi_0, Pe_0\psi_0 \rangle = \frac{2}{(n-1)\omega_{n-1}} \int_M \left(\left| \nabla\psi + \frac{1}{2} k_{\cdot,j} e_j e_0 \psi \right|^2 + \frac{1}{2}\mu|\psi|^2 + \frac{1}{2}\langle \psi, Je_0 \cdot \psi \rangle \right) d\mu_M\,. \tag{3.2}$$

Nel caso generale $|P| = E \neq 0$, invece, la scelta è vincolata: occorre che ψ_μ sia un autospinore di $Pe_0\cdot$ e non è affatto detto che la scelta $e_\mu \cdot \psi_0$ sia corretta. Nella costruzione della base V_μ usata nel teorema precedente non è quindi banale selezionare simultaneamente tutti gli ψ_μ

con autovalore $-|P|$ e in ultima istanza questo non è possibile per il seguente argomento: l'operatore $A = Pe_0\cdot$ è autoaggiunto, infatti si ha che per ogni coppia di spinori ϕ, ψ vale

$$\langle Pe_0 \cdot \phi, \psi\rangle = -\langle e_0 \cdot \phi, P \cdot \psi\rangle = -\langle \phi, e_0 P \cdot \psi\rangle = \langle \phi, Pe_0 \cdot \psi\rangle \,.$$

Dunque, A ha tutti autovalori reali, ed esiste una base di autospinori di A. D'altra parte, se $P \neq 0$, applicando la formula (3.8) si verifica che lo spinore $\overline{\psi} = (\psi_1^\infty, -P|P|^{-1}\psi_1^\infty)$ è un autospinore relativo all'autovalore $|P|$. Quindi, il tentativo di cercare una base di $n+1$ spinori relativi al solo autovalore $-|P|$ non può che fallire.
In condizioni di rigidità, tuttavia, si dispone almeno di uno spinore "buono" all'infinito, cioè di uno ψ^∞ con $\langle Pe_0 \cdot \psi^\infty, \psi^\infty\rangle = -|P|$ (si veda la discussione all'inizio della Sezione 3.4.1), che consente comunque di costruire uno spinore $\widetilde{\nabla}$–parallelo.

A questo punto, in vista di un risultato di rigidità spinoriale generale e alla luce delle considerazioni fisiche richiamate all'inizio del capitolo (secondo cui, in uno spaziotempo di massa nulla ma energia non nulla, l'energia si manifesta sotto forma di particolari onde gravitazionali) è naturale introdurre la classe degli spaziotempi pp–wave, che saranno analizzati in dettaglio nella sezione successiva.

3.2. Spaziotempi pp–wave

Come già detto all'inizio del capitolo e nella sezione precedente, gli strumenti chiave per analizzare la rigidità del teorema di massa positiva risultano essere gli spaziotempi *plane–fronted waves with parallel rays* (pp–wave). La famiglia di questi particolari spaziotempi è stata dapprima introdotta da Brinkmann nel 1925 e successivamente interpretata in termini di onde gravitazionali da Peres nel 1959. Infatti, esse sono soluzioni esatte delle equazioni di campo di Einstein e servono per modellare fenomeni propagatori nell'ambito della relatività generale come la radiazione gravitazionale. Per studiare tali fenomeni si ricorre tipicamente alla linearizzazione della relatività generale, in cui si considera un tensore metrico g uguale alla metrica di Minkowski η sommata a un termine perturbativo h i.e. $\mathrm{g} = \eta + h$. A questo punto si calcolano i simboli di Christoffel nelle coordinate cartesiane mantenendo solo i termini lineari in h:

$$\Gamma^\beta_{\nu\alpha} = \frac{1}{2}\eta^{\beta\rho}(\partial_\nu h_{\alpha\rho} + \partial_\alpha h_{\nu\rho} - \partial_\rho h_{\nu\alpha}) + O(\|h\|^2) \,.$$

Poiché i simboli di Christoffel sono proporzionali ai gradienti di h, nel calcolo al primo ordine del corrispondente tensore di curvatura possiamo trascurare i termini di tipo Γ^2. Otteniamo quindi:

$$R^\beta_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2}\eta^{\beta\rho}(\partial_\mu\partial_\alpha h_{\nu\rho} - \partial_\mu\partial_\rho h_{\nu\alpha} - \partial_\nu\partial_\alpha h_{\mu\rho} + \partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\alpha} + O(\|h\|^2) \,.$$

Per scrivere le equazioni di Einstein ci serve, in particolare, il tensore di Ricci, che in questa approssimazione diventa

$$R_{\nu\alpha} = R^\mu_{\mu\nu\alpha} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\alpha h^\mu_\nu - \Box h_{\nu\alpha} - \partial_\nu\partial_\alpha \operatorname{tr}_\eta h + \partial_\nu\partial_\mu h^\mu_\alpha) + O(\|h\|^2)$$

dove $\Box$ è l'operatore di D'Alembert rispetto alla metrica η che agisce sulle componenti di h. Sostituendo questo risultato nell'equazione di campo di Einstein (2.1), con alcune manipolazioni otteniamo

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu\partial_\alpha h^\mu_\nu - \Box h_{\nu\alpha} - \partial_\nu\partial_\alpha \operatorname{tr}_\eta h + \partial_\nu\partial_\rho h^\rho_\alpha) = (n-1)\omega_{n-1}\Big(T_{\nu\alpha} - \frac{1}{n-1}\eta_{\nu\alpha}(\operatorname{tr}_\eta T)\Big) \,. \tag{3.3}$$

Infine, scegliendo un opportuno cambio di coordinate (gauge armonica [21, Sezione 8.1.1]) l'equazione (3.3) diventa

$$\Box h_{\nu\alpha} = 2(n-1)\omega_{n-1}\Big(T_{\nu\alpha} - \frac{1}{n-1}\eta_{\nu\alpha}(\mathrm{tr}_\eta T)\Big)$$

che nel vuoto assume la forma

$$\Box h_{\nu\alpha} = 0\,.$$

Ritroviamo così che la teoria della relatività generale linearizzata ammette soluzioni di tipo onda, sorge ora naturale chiedersi se anche la teoria completa non lineare ne presenti. Per generalizzare il concetto di onda della teoria linearizzata, esaminiamo quali delle loro proprietà siano definite in modo covariante (cioè indipendente dalle coordinate). Una proprietà covariante facilmente riconoscibile è che il "vettore d'onda" k sia di tipo luce[2]:

$$\mathbf{g}(k,k) = k^\mu k_\mu = 0\,.$$

Una seconda proprietà che potrebbe essere richiesta al fine di studiare onde con propagazione parallela è che tale vettore d'onda sia parallelo, cioè valga

$$\nabla k = 0\,.$$

Si potrebbero usare queste due proprietà come punto di partenza per una definizione di "onda" in relatività generale: una varietà lorentziana $(\mathcal{M},\mathbf{g})$ che ammette un campo vettoriale di tipo luce Z che sia parallelo. In effetti, uno spaziotempo di questo tipo mostra un comportamento di tipo onda [39, Sezioni 32.3 e 34.1]). Con ciò, proponiamo la seguente definizione covariante:

DEFINIZIONE 3.6. Una *wave with parallel rays* (onda con raggi paralleli) è una varietà lorentziana $(\mathcal{M},\mathbf{g})$ che ammette un campo vettoriale Z di tipo luce, covariantemente costante e globale.

I "raggi" di una tale onda sono le curve integrali del campo vettoriale Z, che sono automaticamente geodetiche di tipo luce visto che Z è covariantemente costante. È giustificato che chiameremo tali oggetti "raggi" dal fatto che le geodetiche di tipo luce corrispondono a traiettorie di raggi luminosi. Nella nostra trattazione siamo principalmente interessati a studiare onde piane. Una *plane wave* (onda piana) ha un fronte d'onda piatto (intuitivamente, una sottovarietà "spaziale" di codimensione 2 ortogonale al vettore d'onda). A questo punto, al fine di dare una definizione rigorosa di plane wave with parallel rays (onda piana con raggi paralleli), abbiamo bisogno di introdurre in maniera formale il concetto di *wave front* (fronte d'onda).

DEFINIZIONE 3.7. Se un'onda parallela $(\mathcal{M},\mathbf{g})$ è definita da un campo vettoriale Z di tipo luce covariantemente costante (analogo al concetto di vettore d'onda nella teoria lineare) allora il *wave front* è definito come

$$Z_\perp/Z$$

dove $Z_\perp = \{X \in TM \mid \mathbf{g}(X,Z) = 0\}$ e il quoziente è definito dalla relazione d'equivalenza $X \sim Y \iff Y = X + fZ$ per qualche funzione f.

[2]La proprietà che il vettore d'onda sia null codifica il fatto che le onde gravitazionali viaggiano alla velocità della luce.

Occorre quozientare rispetto al vettore d'onda stesso, poiché Z è di tipo luce; dunque $Z \in Z_\perp$ e l'analogia naturale con la teoria lineare suggerisce che Z non debba essere considerato come parte del fronte d'onda. Questa definizione compare in [33] con il nome di "*screen bundle*", dove è trattata in modo rigoroso nel contesto delle pp–waves compatte.

Se si vuole richiedere che il fronte d'onda sia piatto, ciò si descrive in modo più conciso considerando il tensore di Riemann come un'applicazione sui bivettori (2–controvarianti tensori antisimmetrici) in $Z_\perp \wedge Z_\perp$; in tal caso, la condizione di piattezza per il fronte d'onda diventa

$$\mathrm{Riem}\,\big|_{Z_\perp \wedge Z_\perp} = 0\,. \tag{3.4}$$

Con ciò, arriviamo alla definizione delle *plane–fronted waves with parallel rays* (pp–waves)

DEFINIZIONE 3.8. Una *plane–fronted wave with parallel rays* (pp–wave) è una varietà lorentziana $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ che ammette un campo vettoriale di tipo luce Z globale e covariantemente costante, per il quale il tensore di curvatura soddisfa la (3.4)

Il nostro interesse ora è volto a ottenere un sistema di coordinate locali su una parallel wave di dimensione $(n+1)$ che denoteremo con $\{u, t, x\}$, dove $x = (x^1, \dots, x^{n-1})$ sono le cosiddette *coordinate del wavefront*. Questo nome è giustificato esaminando la definizione di fronte d'onda (Definizione 3.7). A tal fine vale il seguente teorema:

TEOREMA 3.9 ([37, Teorema 3.1]). *Se una varietà lorentziana $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ ammette un campo vettoriale di tipo luce Z covariantemente costante, allora per ogni $p \in \mathcal{M}$ esiste un intorno U di p e un sistema di coordinate locali $\varphi = \{u, t, x\}$ su U, "adattato a Z", tale che*

$$Z\big|_U = \partial_t = \nabla u\,.$$

Le coordinate ottenute nel precedente teorema consentono di scrivere la metrica di uno spaziotempo di tipo parallel wave nel seguente modo

$$\mathbf{g} = -2dudt + F(u,x)du^2 + 2A_a(u,x)dx^a du + \mathbf{g}_{ab}(u,x)dx^a dx^b\,, \tag{3.5}$$

dove gli indici a, b variano da 1 a $n-1$, tenendo conto che la varietà spaziotemporale è $(n+1)$–dimensionale.
Se imponiamo la condizione di curvatura (3.4) per ottenere una pp–wave troviamo [22, Appendice A] che la metrica (3.5) assume la seguente forma

$$\mathbf{g} = -2dudt + F(u,x)du^2 + 2A_a(u,x)dx^a du + \delta_{ab}(u,x)dx^a dx^b\,.$$

La classe di pp–waves più comunemente studiata in letteratura fisica e alla quale siamo interessati, è spesso chiamata *standard pp–wave*. Le caratteristiche definitorie di una metrica standard pp–wave, quando è scritta nel sistema di coordinate $\{u, t, x\}$ del Teorema 3.9, sono:

(i) le coordinate $\{u, t, x\}$ esistono globalmente;
(ii) la metrica è priva di termini a incrocio $dx^a du$, cioè $A_a = 0$ per ogni $a \in \{1, \dots, n-1\}$.

Di conseguenza, la metrica assumerà la forma

$$\mathbf{g} = -2dudt + F(u,x)du^2 + \delta_{ab}dx^a dx^b\,.$$

Alla luce della discussione precedente, poiché d'ora in poi ci interesseranno unicamente le pp–waves standard, con lieve abuso di terminologia[3], definiremo gli spaziotempi di tipo pp–wave in senso forte come segue.

[3] In questa sezione si introducono due nozioni di pp–waves: una debole (Definizione 3.8) e una forte (Definizione 3.10). Poiché la trattazione si riferirà alla seconda, d'ora in poi, salvo diversa indicazione, con *pp–waves* intenderemo sempre quelle in senso forte.

DEFINIZIONE 3.10. Diciamo che una varietà lorentziana $(\mathcal{M}^{n+1}, \mathbf{g})$ è uno spaziotempo pp–wave se $\mathcal{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ e

$$\mathbf{g} = -2dudt + Fdu^2 + \mathbf{g}_{\mathbb{R}^{n-1}}\,, \tag{3.6}$$

dove F è una funzione su $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, indipendente da t, che è superarmonica su $\mathbb{R}^{n-1} \times \{u\}$ per ogni $u \in \mathbb{R}$.

OSSERVAZIONE 3.11. La richiesta che la funzione F sia superarmonica garantisce che la dominant energy condition sia soddisfatta. Ragioniamo per semplicità con le coordinate in 4 dimensioni (u, t, x, y). In queste coordinate la matrice delle componenti della metrica (3.6) risulta essere la seguente:

$$\mathbf{g}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F(u,x,y) & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,, \tag{3.7}$$

mentre la sua inversa è

$$\mathbf{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -F(u,x,y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\,.$$

I suoi unici simboli di Christoffel non nulli sono:

$$\begin{aligned} \Gamma^t_{ux} = \Gamma^t_{xu} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}(u,x,y)\,, \\ \Gamma^t_{uy} = \Gamma^t_{yu} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}(u,x,y)\,, \\ \Gamma^t_{uu} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial u}(u,x,y)\,, \\ \Gamma^x_{uu} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}(u,x,y)\,, \\ \Gamma^y_{uu} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial y}(u,x,y)\,. \end{aligned}$$

Dunque, da un calcolo diretto segue che le uniche componenti non nulle del tensore di curvatura di Riemann sono:

$$R_{uxux} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}F \qquad R_{uxuy} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}F \qquad R_{uyuy} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}F\,.$$

Per calcolare il tensore di curvatura di Ricci si osservi che le uniche componenti coinvolte richiedono di contrarre il Riemann su secondo e quarto indice con la sottomatrice identica della (3.7). Da ciò segue che l'unica componente non nulla del tensore di Ricci è:

$$R_{uu} = -\frac{1}{2}\Delta F\,,$$

dove Δ denota l'usuale laplaciano piatto. Inoltre, contraendo il tensore di Ricci con la metrica (3.7) segue che la curvatura scalare è uguale a 0. Dunque, l'equazione di campo di Einstein (2.4) in questo contesto si riduce a:

$$-\frac{1}{2}\Delta F = 8\pi T_{uu}\,,$$

con tutte le altre componenti di $T_{\mu\nu} = 0$. Questo tensore energia–impulso descrive il modello di materia di un fluido perfetto senza pressione con densità a riposo T_{uu}. Dunque, richiedere che $\Delta F \leqslant 0$ significa richiedere che tale densità a riposo sia nonnegativa (i.e. la dominant energy condition).

OSSERVAZIONE 3.12. Si noti che tutto il carattere ondulatorio (trasportante informazioni) è completamente contenuto nella funzione superarmonica F. Infatti, si ha che se $F = 1$ la metrica (3.6) è quella dello spaziotempo piatto di Minkowski scritta però in coordinate cono di luce.

OSSERVAZIONE 3.13. Si noti che la metrica (3.6) è una soluzione *esatta* delle equazioni di campo di Einstein e ammette anche una descrizione nel regime *linearizzato*. In tal caso si ha che

$$F = 1 + f\,, \qquad |f| \ll 1\,,$$

ossia F è vicina a 1 (soluzione piatta di fondo). Nel regime non lineare, invece, F non è vincolata a essere prossima a 1 e può discostarsene arbitrariamente. Dunque, una linea concettuale alternativa, sarebbe ottenere la (3.6) dalla linearizzazione della relatività generale e poi estenderla per definizione a qualunque F [**8**].

Per maggiori approfondimenti sulle questioni trattate in questa sezione si guardi ad esempio [**8**, **37**], oppure anche [**24**, Capitolo 17].

3.3. Il teorema di rigidità di Hirsch e Zhang

Negli anni ottanta, i lavori classici di Schoen–Yau e di Witten [**38**, **41**] hanno stabilito la nonnegatività dell'energia totale ADM E (e, in particolare, della massa m) per initial data set che modellano sistemi gravitazionali isolati (varietà AF) e soddisfano la dominant energy condition (DEC). In quel quadro, il caso estremo $E = 0$ implica la *rigidità minkowskiana* (Sezione 3.1): ogni initial data set proviene isometricamente dallo spaziotempo di Minkowski.

Rimane però più sottile il regime di tipo luce in cui la massa m si annulla ma il momento totale P può essere non nullo, ossia $E = |P|$. In questo contesto non vale, in generale, una rigidità "forte" in senso minkowskiano: esistono initial data set a massa nulla che non si immergono isometricamente in Minkowski [**6**, **28**].

Un risultato recente dovuto a Hirsch e Zhang [**27**] completa il quadro per varietà spin: se un initial data set (M, g, k) soddisfa la DEC (2.9) e ha massa $m = 0$ (equivalentemente $E = |P|$), allora tali dati devono essere contenuti in uno spaziotempo di tipo pp–wave. La dimostrazione combina metodi spinoriali con funzioni armoniche spaziotemporali e vale in ogni dimensione.

In questa sezione enunciamo e commentiamo il teorema di rigidità di Hirsch–Zhang nella forma adatta ai nostri scopi. Per farlo, abbiamo prima bisogno di introdurre la definizione di spazio pesato di Hölder.

DEFINIZIONE 3.14. Una funzione $f \in C^{s,a}(\mathbb{R}^n)$ è detta appartenere allo spazio pesato di Hölder $C^{s,a}_{-q}$ se la sua seguente norma di Hölder pesata è finita:

$$\|f\|_{C^{s,a}_{-q}(\mathbb{R}^n\setminus B)} = \sum_{|I|\leqslant s} \left| |x|^{|I|+q} \nabla_I f \right| + \sum_{|I|=s} \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^n\setminus B \\ |x-y|\leqslant\frac{1}{2}|x|}} |x|^{s+a+q} \frac{|\nabla_I f(x) - \nabla_I f(y)|}{|x-y|^a}\,.$$

OSSERVAZIONE 3.15. Sottolineamo che si può parlare anche di spinori e tensori appartenenti allo spazio pesato di Hölder (basta ripetere la definizione precedente utilizzando la norma spinoriale o tensoriale).

DEFINIZIONE 3.16. Nello spirito della Definizione 2.15, diremo che un initial data set è $C^{s,a}_{-q}$*–asintoticamente piatto*[4] se oltre a valere le stesse condizioni della Definizione 2.15 si ha che

$$(\Phi_* g)_{ij} - \delta_{ij} \in C^{s,a}_{-q}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_1(0)) \qquad e \qquad (\Phi_* k)_{ij} \in C^{s,a}_{-q-1}(\mathbb{R}^n - \overline{B}_1(0))\,.$$

Possiamo adesso enunciare il risultato di rigidità spinoriale per il teorema di massa positiva.

TEOREMA 3.17 (Hirsch–Zhang [27, Teorema 1.1]). *Sia (M, g, k) un initial data set $C^{2,a}_{-q}$-asintoticamente piatto, con tasso di decadimento $q > \frac{n-2}{2}$ che soddisfa la dominant energy condition. Supponiamo che (M, g) sia spin e che $E = |P|$. Allora, (M, g) si immerge isometricamente in uno spaziotempo pp–wave $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ (Definizione 3.10) con seconda forma fondamentale k.*

OSSERVAZIONE 3.18. È importante osservare che [27, Teorema 1.3] afferma che, se l'initial data set (M, g, k) è $C^{2,a}_{-q}$-asintoticamente piatto con $E = |P|$ e $q > n - 3 - a$, $a > 0$, allora (M, g, k) si immerge isometricamente dentro lo spaziotempo di Minkowski. Poiché $(n-2)/2 > n - 3 - a$ per $n = 3, 4$, la conclusione del Teorema 3.17 può essere rafforzata in dimensione bassa. Più precisamente, per $n = 3, 4$, un initial data set con $E = |P|$ si immerge isometricamente dentro lo spaziotempo di Minkowski.

La dimostrazione del Teorema 3.17 combina metodi spinoriali e di insiemi di livello. Il primo passo fondamentale è quello di costruire una funzione armonica spaziotemporale u, cioè una soluzione della PDE $\Delta u = -\operatorname{tr}_g k\,|\nabla u|$, dove $E\nabla u$ tende asintoticamente a $-P$. Le cosiddette funzioni armoniche spaziotemporali sono già state utilizzate di recente nello studio del PMT, si veda [25]. La costruzione di una tale funzione è oggetto del Teorema 3.19, in cui si mostra inoltre che i livelli Σ di u sono piatti: essi diventeranno i "fronti d'onda" dello spaziotempo di tipo pp–wave. Il Teorema 3.19 sarà ottenuto risolvendo l'equazione di Dirac dello spaziotempo $\not{D}\psi = \frac{1}{2}\operatorname{tr} k\, e_0\psi$ per trovare uno spinore $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ che sia asintotico a uno spinore costante all'infinito. Con l'aiuto di u e di ψ, dimostreremo quindi che Σ è piatta. Infine, con un'analisi delicata che coinvolge u e ψ, nelle Sezioni 3.5 e 3.6 sfruttiamo queste informazioni per ricostruire il corrispondente spaziotempo pp–wave. In particolare, la funzione F che determina la metrica della pp–wave soddisfa $\Delta_\Sigma F = -2\,|\nabla u|^{-2}\,\mu$ e tende a 1 all'infinito. Qui Δ_Σ denota l'operatore di Laplace rispetto agli insiemi di livello Σ di u e μ è la densità di energia di (M, g, k) definita nella Sezione 2.1.2.

3.4. Funzioni armoniche "spacetime"

Iniziamo dunque la dimostrazione del Teorema 3.17. Per prima cosa, enunciamo e dimostriamo il seguente risultato fondamentale, che ci consentirà di costruire la suddetta *spacetime harmonic function*. Si noti che non solo u soddisferà $\Delta u = -\operatorname{tr}_g k\,|\nabla u|$, ma il seguente teorema ci garantisce un controllo preciso sull'intera hessiana della funzione u.

[4]Per alleggerire la notazione, quando è esplicitato il tasso di decadimento q, scriveremo $C^{s,a}$–asintotica piattezza

TEOREMA 3.19. *Sia $s \geqslant 2$, $s \in \mathbb{N}$ e sia $a \in (0,1)$. Supponiamo che (M,g,k) sia un initial data set spin $C^{s,a}$–asintoticamente piatto con tasso di decadimento $q \in \left(\frac{n-2}{2},\, n-2\right]$ che soddisfa la dominant energy condition. Inoltre, assumiamo che $E = |P|$. Allora, vale quanto segue:*

(1) *Esiste una* spacetime harmonic function $u - u_\infty \in C^{s+1,a}_{1-q}$ *che soddisfa l'equazione hessiana $\nabla^2 u = -k\,|\nabla u|$ dove $u_\infty = -|P|^{-1}P \cdot x$ se $|P| \neq 0$ e $u_\infty = x_n$ se $|P| = 0$.*
(2) *Topologicamente, $M = \mathbb{R}^n$.*
(3) *Esiste una costante c tale che $|\nabla u| \geqslant c$ ovunque.*
(4) *Gli insieme di livello di u sono piatti, cioè il tensore di curvatura di Riemann della metrica indotta sugli insiemi di livello si annulla.*
(5) *La seconda forma fondamentale h degli insiemi di livello Σ soddisfa $h = -k\,|_{T\Sigma\otimes T\Sigma}$.*
(6) *Vale $J = -\mu\nu$, dove $\nu = |\nabla u|^{-1}\nabla u$ è la normale agli insiemi di livello.*

3.4.1. Costruzione della funzione armonica "spacetime". Per prima cosa, utilizziamo una strategia simile a quella delineata nei Teoremi 3.1 e 3.3 per costruire uno spinore parallelo rispetto alla connessione $\widetilde{\nabla}$.

Nel caso $P \neq 0$ definiamo $\mathbf{p} = P|P|^{-1}$ e senza perdita di generalità $\mathbf{p} = -x_n$. Nel caso $P = 0$ poniamo ancora $\mathbf{p} = -x_n$.
Sia $\psi_1^\infty \in S(M)$ uno spinore costante in un dato end della varietà asintoticamente piatta (M,g), con norma $|\psi_1^\infty| = \frac{\sqrt{2}}{2}$, che si annulla in tutti gli altri end. Sia $\psi^\infty = (\psi_1^\infty, \mathbf{p}\psi_1^\infty)$ uno spinore unitario costante in $\widetilde{S}$ nell'end designato, nullo in tutti gli altri. Definiamo $\eta = \widetilde{\not{D}}\psi^\infty$. Per la Proposizione 2.41 esiste $\xi \in W^{1,p}_{-q}(\widetilde{S}(M))$ tale che $\widetilde{\not{D}}\xi = -\eta$. Definiamo poi $\psi = \psi^\infty + \xi$. Osserviamo che $\psi - \psi^\infty \in W^{1,p}_{-q}(\widetilde{S}(M))$ e inoltre soddisfa $\widetilde{\not{D}}\psi = \not{D}\psi - \frac{1}{2}(\mathrm{tr}_g\, k)e_0\psi = 0$. Si osservi inoltre che si riesce a dimostrare una regolarità più forte su $(\psi - \psi^\infty)$ che risulta appartenere a $C^{s,a}_{-q}$ con $a \in (0,1)$ (per i dettagli su questo punto si veda [27, Teorema 2.7]). Si ha che

$$\langle Pe_0\psi^\infty,\, \psi^\infty\rangle = \langle P\mathbf{p}\psi_1^\infty,\, \psi_1^\infty\rangle - \langle P\psi_1^\infty,\, \mathbf{p}\psi_1^\infty\rangle = -2|P|\,|\psi_1^\infty|^2 = -|E|\,|\psi^\infty|^2\,. \tag{3.8}$$

La prima uguaglianza segue dall'aver sostituito ψ^∞ e aver fatto agire e_0 su ψ^∞ che ne scambia le componenti. Inoltre abbiamo usato la definizione del prodotto scalare su $\widetilde{S}(M)$ che si ottiene incollando i due prodotti hermitiani relativi ai due sommandi diretti che definiscono $\widetilde{S}(M)$. Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato l'ipotesi che $E = |P|$ e il fatto che lo spinore ψ_1^∞ ha norma pari a $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Sostituendo l'identità (3.8) nella formula (3.2) e utilizzando l'ipotesi $E = |P|$, deduciamo che lo spinore ψ è parallelo per la connessione $\widetilde{\nabla}$ e dunque deve soddisfare

$$\nabla_i\psi = -\frac{1}{2}\,k_{ij}\,e_je_0\,\psi\,. \tag{3.9}$$

Vogliamo adesso sfruttare ψ per costruire la funzione armonica spaziotemporale cercata. Prendendo spunto da [6, Appendice B], l'idea è quella di considerare il campo vettoriale X su M le cui componenti sono date da

$$X_i = \langle e_ie_0\psi,\, \psi\rangle\,.$$

Avremo bisogno anche di un controllo sul comportamento asintotico di X, che ci è dato dal seguente risultato.

LEMMA 3.20. *Si ha $X + \mathbf{p} \in C^{s,a}_{-q}$ nel designato end asintoticamente piatto e $X \in C^{s,a}_{-q}$ in tutti gli altri end.*

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ e ricordiamo che ψ asintoticamente tende a $(\psi_1^\infty, \mathbf{p}\psi_1^\infty)$ nell'end designato, mentre esso tende allo spinore nullo in tutti gli altri end. Calcoliamo

$$\begin{aligned} X_i =& \langle e_i(\psi_2, \psi_1), (\psi_1, \psi_2)\rangle = \langle (e_i\psi_2, -e_i\psi_1), (\psi_1, \psi_2)\rangle \\ =& \langle e_i\psi_2, \psi_1\rangle - \langle e_i\psi_1, \psi_2\rangle = -2\langle e_i\psi_1, \psi_2\rangle \\ =& -2\big(\langle e_i\psi_1^\infty, \mathbf{p}\psi_1^\infty\rangle + \langle e_i(\psi_1 - \psi_1^\infty), \mathbf{p}\psi_1^\infty\rangle \\ &+ \langle e_i\psi_1, \psi_2 - \mathbf{p}\psi_1^\infty\rangle + \langle e_i(\psi_1 - \psi_1^\infty), \psi_2 - \mathbf{p}\psi_1^\infty\rangle\big)\,. \end{aligned}$$

Poiché $2\langle e_i\psi_1^\infty, \mathbf{p}\psi_1^\infty\rangle = -\mathbf{p}_i$ nell'end asintoticamente piatto, ne deduciamo che $X + \mathbf{p}$ converge a zero nell'end designato, mentre X converge a zero negli altri end. Le stime più precise sulla regolarità e sul grado di decadimento di X seguono nuovamente da [27, Teorema 2.7]. $\square$

Calcoliamo inoltre

$$\begin{aligned} \nabla_i X_j =& \langle e_j e_0 \nabla_i\psi, \psi\rangle + \langle e_j e_0\psi, \nabla_i\psi\rangle \\ =& -\frac{1}{2}\langle e_j e_0\, k_{il} e_l e_0\psi, \psi\rangle - \frac{1}{2}\langle e_j e_0\psi, k_{il} e_l e_0\psi\rangle \\ =& \frac{1}{2}\, k_{il}\langle e_j e_l\psi, \psi\rangle - \frac{1}{2}\, k_{il}\langle e_j\psi, e_l\psi\rangle \\ =& -\, k_{ij}\,|\psi|^2\,, \end{aligned} \tag{3.10}$$

dove nella prima uguaglianza abbiamo usato la compatibilità della connessione ∇ rispetto al prodotto scalare, nella seconda la formula (3.9) e per concludere le relazioni di Clifford.

Si noti in particolare che dalla simmetria della seconda forma fondamentale k segue $\nabla_i X_j = -k_{ij}|\psi|^2 = \nabla_j X_i$. Di conseguenza, dal Lemma di Poincaré si conclude che su ogni aperto semplicemente connesso $\Omega \subseteq M$ esiste una funzione u che soddisfa $du = X$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.19-(1). Dimostriamo che, su ogni dominio semplicemente connesso $\Omega \subseteq M$, la funzione u costruita sopra soddisfa l'equazione hessiana voluta.

Iniziamo calcolando l'hessiano, utilizzando la formula (3.10)

$$\nabla^2 u = \nabla du = \nabla X = -k|\psi|^2\,.$$

Resta da mostrare che $|\psi|^2 = |\nabla u| = |X|$. A questo scopo, osserviamo che

$$\nabla_i|X|^2 = \langle \nabla_i X, X\rangle + \langle X, \nabla_i X\rangle = -2X_j k_{ij}|\psi|^2\,,$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato ancora (3.10), e

$$\begin{aligned} \nabla_i|\psi|^2 =& \langle \nabla_i\psi, \psi\rangle + \langle \psi, \nabla_i\psi\rangle \\ =& -\frac{1}{2}\langle k_{ij} e_j e_0\psi, \psi\rangle - \frac{1}{2}\langle \psi, k_{ij} e_j e_0\psi\rangle \\ =& -\, k_{ij}\,\langle e_j e_0\psi, \psi\rangle = -k_{ij} X_j. \end{aligned}$$

Quindi $\nabla_i(|X|^2 - |\psi|^4) = \nabla_i|X|^2 - 2|\psi|^2\nabla_i|\psi|^2 = 0$. Abbiamo già mostrato che $|X|$ tende a 1 all'infinito. D'altra parte, dal fatto che ψ tende a ψ^∞ e $|\psi^\infty| = 1$ per costruzione, ne consegue che $|X|^2 - |\psi|^4$ tende a zero all'infinito. Questo dimostra che $|X| = |\psi|^2$, come voluto.

Abbiamo quindi mostrato, su ogni dominio semplicemente connesso $\Omega \subseteq M$, l'esistenza di una funzione armonica spaziotemporale $u \in C^{s+1}$ (perché $X \in C^s$) che soddisfa la PDE

$\nabla^2 u = -k|\nabla u|$. Le stime di decadimento seguono in modo analogo a [25, Sezione 4], dove sono state stabilite per funzioni armoniche spaziotemporali in dimensione 3. Infine, la regolarità migliorata, $u \in C^{s+1,a}_{1-q}$, segue dal fatto che $|\nabla u| \geqslant c$ per qualche c, che verrà mostrato nel Lemma 3.21. Dunque, la dimostrazione del punto (1) si conclude una volta stabilito che $M = \mathbb{R}^n$. Questo sarà fatto nella sezione seguente. □

3.4.2. La varietà M è topologicamente banale. In questo paragrafo mostreremo che la varietà M è topologicamente uguale a $\mathbb{R}^n$. Per prima cosa dimostriamo il seguente risultato preliminare.

LEMMA 3.21. *Il campo vettoriale X non si annulla ed esiste una costante $c > 0$ dipendente solo da (M, g, k) tale che $c \leqslant |X| \leqslant c^{-1}$ ovunque su M . In particolare, il punto (3) del Teorema 3.19 vale nel caso in cui X sia globalmente integrabile.*

DIMOSTRAZIONE. L'argomento di [25, Proposizione 7.1] funziona anche se X a priori non è globalmente integrabile. Più precisamente, per ogni punto $p \in M$, scegliamo un punto q nel designato end asintoticamente piatto tale che[5] $|X(q)| \geqslant \frac{1}{2}$. Uniamo p a q con una geodetica γ tale che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(L) = q$ e osserviamo che

$$\nabla_{\dot\gamma}|X|^2 = \dot\gamma(|X|^2) = 2|X|\dot\gamma(|X|) = 2|X|\nabla_{\dot\gamma}|X|$$

da cui segue

$$\begin{aligned} \big|\nabla_{\dot\gamma}|X|\big| =& \left|\frac{1}{2|X|}\nabla_{\dot\gamma}|X|^2\right| = \left|\frac{1}{|\psi|}\langle\nabla_{\dot\gamma}X, X\rangle\right| \\ =& |k(X,\dot\gamma)| \leqslant |k||X|\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo sfruttato la formula (3.10) e nell'ultimo passaggio è stata usata la disuguaglianza di Cauchy–Schwartz per i tensori. Dalla (3.11) segue

$$-|k| \leqslant \frac{1}{|X|}\frac{d}{dt}|X(\gamma(t)| \leqslant |k|$$

da cui

$$-\int_0^L |k|dt \leqslant \log|X(p)| - \log|X(q)| \leqslant \int_0^L |k|dt$$

ossia

$$|X(q)|e^{-\int_0^L |k|dt} \leqslant |X(p)| \leqslant |X(q)|e^{\int_0^L |k|dt}\,. \tag{3.12}$$

Infine, usando l'ipotesi di decadimento $k \in C^{s-1,a}_{-1-q}$ si ha che gli integrali all'esponente nella (3.12) possono essere stimati nella seguente maniera: scegliamo un punto q molto lontano da p (i.e. $L \gg 1$) e scegliamo[6] $R \in (0,1)$ tale che da R in poi vale la stima asintotica su k. Allora, si ha

$$\int_0^L |k|dt = \int_0^R |k|dt + \int_R^L |k|dt\,.$$

Il primo dei due integrali è finito in quanto k è sufficientemente regolare e dunque il suo integrale su un compatto è finito. Il secondo termine, invece, anche se L va all'infinito può

[5] Questa scelta la si può sempre fare in quanto la funzione $|X|$ asintotizza a 1 sull'end scelto.

[6] Si noti che R non dipende dalla scelta della geodetica.

essere stimato, in quanto la sua funzione integranda soddisfa un certo tasso di decadimento. Dunque, è possibile controllare dall'alto questo integrale con una costante uniforme A. Quindi, definendo $c = \frac{1}{2}e^{-A}$, dalla (3.12) e dal fatto che $|X(q)| \geqslant \frac{1}{2}$, si ha il risultato. □

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.19-(2). Prima di tutto, ricordiamo dal Lemma 3.20 che $|X|$ tende a 1 nell'end asintoticamente piatto designato e tende a 0 in tutti gli altri end. D'altra parte, il Lemma 3.21 ci dice che $|X|$ è limitata dal basso da una costante positiva. Ne concludiamo che (M, g) ha un unico end.

Faremo ora vedere che possiamo foliare M con foglie tutte diffeormorfe a $\mathbb{R}^{n-1}$ in modo che M sia diffeomorfo a $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1}$. Per il teorema di Frobenius globale [1, Teorema 3.7.17], l'esistenza di un campo vettoriale X mai nullo che è localmente gradiente garantisce l'esistenza di una foliazione globale $\mathcal{F}$ su tutta la varietà M. Infatti, la distribuzione di codimensione 1 $\mathcal{D}_p = X_p^\perp$ è involutiva. Invero presi $V, W \in X_p^\perp$ si ha:

$$\mathbf{g}(X, [V, W]) = 0 \iff du([V, W]) = 0$$

D'altra parte

$$0 = d(du)(V, W) = V(du(W)) - W(du(V)) - du([V, W])\,.$$

Dal fatto che $V, W \in X_p^\perp$ segue che i primi due termini dell'ultima uguaglianza sono nulli e si ha l'involutività della distribuzione considerata.

Definiamo $B = \{\, u = -C_0,\ x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leqslant C_0^2 \,\}$, dove $C_0 \gg 1$ è scelto abbastanza grande in modo che B sia interamente contenuto nell'end asintoticamente piatto. Sia C un grande cilindro con faccia inferiore B, lato S tangente a X e faccia superiore T contenuta in $\{u = C_0\}$. Il lato S si ottiene facendo fluire ∂B lungo X finché raggiunge $\{u = C_0\}$. Osserviamo che, scegliendo C_0 sufficientemente grande, possiamo anche garantire che le foglie di $\mathcal{F}$ intersechino trasversalmente il lato S. Poiché (M, g) ha un solo end, C è compatto. Per concludere la dimostrazione è sufficiente mostrare che $C \cong B \times [-C_0, C_0]$. Poiché B è una foglia della foliazione, per concludere è sufficiente invocare il teorema di stabilità di Reeb [27, Teorema A.7], che garantisce che tutte le foglie della foliazione siano diffeomorfe tra loro. □

OSSERVAZIONE 3.22. Si osservi che al fine della dimostrazione è necessario che u sia definita[7] solo sull'end asintoticamente piatto. Il fatto che questa funzione sia definita poi su tutta la varietà si ottiene una volta che si dimostra che M è topologicamente uguale a $\mathbb{R}^n$, completando così anche la dimostrazione del Teorema 3.19-(1).

3.4.3. Analisi degli insiemi di livello. Sinora abbiamo dimostrato che M è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$ e che esiste quindi una funzione u globale con gradiente mai nullo che soddisfa $\nabla^2 u = -k|\nabla u|$. In questa sezione ci concentriamo sullo studio della geometria degli insiemi di livello di u.

Abbiamo già tutti gli strumenti per dimostrare anche i punti (5) e (6) del teorema.

DIMOSTRAZIONE TEOREMA 3.19-(5). Sia Σ un insieme di livello. Rispetto a componenti e_i, e_j tangenti a Σ, abbiamo $\nabla^2_{ij} u = \nabla^\Sigma_{ij} u + h_{ij}|\nabla u|$. Poiché chiaramente $\nabla^\Sigma_{ij} u = 0$, ricordando che u soddisfa $\nabla_{ij} u = -k_{ij}|\nabla u|$ e $|\nabla u| \neq 0$, si deduce

$$h = -k|_{T\Sigma\otimes T\Sigma},$$

[7]Si ricordi che nella dimostrazione del Teorema 3.19-(1) era stata ottenuta la costruzione della funzione u per mezzo del lemma di Poincaré, che applicato alla 1–forma differenziale chiusa $X^\flat$ sull'end asintoticamente piatto (semplicemente connesso) ne garantiva l'esistenza.

che è il risultato voluto. □

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.19-(6). La formula di Witten (2.21) implica

$$\mu\,|\psi|^2 + \langle Je_0\psi, \psi\rangle = 0\,.$$

Sostituendo le definizioni $X = \nabla u$, $N = |\nabla u|$, segue il risultato. □

Nel resto della sezione ci concentriamo sulla dimostrazione del punto (4) del Teorema 3.19, ovvero mostriamo che il tensore di curvatura di Riemann degli insiemi di livello $\Sigma = \{u = t\}$ è nullo.

Ricordiamo che, per ogni spinore costante ψ_1^∞, abbiamo definito $\psi^\infty = (\psi_1^\infty, \mathbf{p}\psi_1^\infty)$, dove $\mathbf{p} = |P|^{-1}P$. Inoltre, esiste uno spinore $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ asintotico a ψ^∞ che soddisfa (3.9). In termini delle componenti ψ_1 e ψ_2, questo ci dice che valgono le seguenti

$$\nabla_i\psi_1 = -\frac{1}{2}\,k_{ij}\,e_j\psi_2 \qquad e \qquad \nabla_i\psi_2 = \frac{1}{2}\,k_{ij}\,e_j\psi_1.$$

Sia $\nu = \frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ la normale unitaria alle ipersuperfici di livello Σ, che è ben definita perchè $|\nabla u| \neq 0$. Allora

$$|\nabla u| = \langle X, \nu\rangle = \langle \nu e_0\psi, \psi\rangle = \langle \nu\psi_2, \psi_1\rangle - \langle \nu\psi_1, \psi_2\rangle \leqslant 2|\psi_1||\psi_2| \leqslant |\psi|^2 = |\nabla u|\,.$$

Pertanto,

$$\psi_1 = \nu\psi_2 \qquad e \qquad \psi_2 = -\nu\psi_1\,,$$

e quindi

$$\nabla_i\psi_1 = \frac{1}{2}\,k_{ij}e_j\nu\psi_1 \qquad \text{e} \qquad \nabla_i\psi_2 = \frac{1}{2}\,k_{ij}e_j\nu\psi_2\,. \tag{3.13}$$

Vogliamo adesso utilizzare ψ_1 per costruire degli spinori paralleli sui livelli Σ. Se n è dispari allora il fibrato spinoriale su (M, g) si identifica con il fibrato spinoriale sugli insiemi di livello Σ, per cui ψ_1 definisce univocamente uno spinore su $S(\Sigma)$, che indicheremo ancora con ψ_1. Se n è pari invece, $S(M)$ si identifica con $S(\Sigma)\oplus S(\Sigma)$. Tramite questa identificazione, ψ_1 corrisponde a una coppia (ϕ_1, ϕ_2) di spinori su Σ.

LEMMA 3.23. *Se n è dispari, allora $|\nabla u|^{-\frac{1}{2}}\psi_1$ è uno spinore parallelo su Σ. Se n è pari, allora $|\nabla u|^{-\frac{1}{2}}\phi_1$ è uno spinore parallelo su Σ.*

DIMOSTRAZIONE. In questa dimostrazione usiamo lettere greche per gli indici tangenziali ai livelli e lettere romane per indici arbitrari.

Come detto sopra, se n è dispari, allora ψ_1 può essere visto come uno spinore sugli insiemi di livello Σ. Procedendo come in (2.18), si verifica che

$$\nabla^\Sigma_\alpha\psi_1 \,=\, \nabla_\alpha\psi_1 + \frac{1}{2}h_{\alpha\beta}e_\beta\nu\psi_1$$

Ricordando dal Teorema 3.19-(5) che $h_{\alpha\beta} = \langle\nabla_\alpha\nu, e_\beta\rangle = -k_{\alpha\beta}$, e la formula (3.13), si ha

$$\nabla^\Sigma_\alpha\psi_1 \,=\, \frac{1}{2}k_{\alpha j}e_j\nu\psi_1 - \frac{1}{2}k_{\alpha\beta}e_\beta\nu\psi_1 \,=\, -\frac{1}{2}k_{\alpha\nu}\psi_1\,.$$

Inoltre poiché $|\nabla u| = \nabla_\nu u$, dall'equazione per u abbiamo $\nabla_\alpha|\nabla u| = \nabla^2_{\alpha\nu}u = -k_{\alpha\nu}|\nabla u|$. Ricordando $|\nabla u| \neq 0$, abbiamo ottenuto

$$\nabla^\Sigma_\alpha\psi_1 \,=\, \frac{1}{2}\,(|\nabla u|^{-1}\nabla_\alpha|\nabla u|)\,\psi_1\,,$$

da cui si ottiene $\nabla^\Sigma(|\nabla u|^{-\frac{1}{2}}\psi_1) = 0$, cioè $|\nabla u|^{-\frac{1}{2}}\psi_1$ è uno spinore parallelo su Σ.

Se n è pari, allora $S(M)$ si identifica con $S(\Sigma) \oplus S(\Sigma)$. Tramite questa identificazione, ψ_1 corrisponde a una coppia (ϕ_1, ϕ_2) di spinori su Σ. Inoltre

$$(\nabla^\Sigma_\alpha \phi_1, \nabla^\Sigma_\alpha \phi_2) = \nabla_\alpha \psi_1 + \frac{1}{2} h_{\alpha\beta} e_\beta \nu \psi_1 \,.$$

Procedendo come fatto nel caso n dispari, otteniamo

$$(\nabla^\Sigma_\alpha \phi_1, \nabla^\Sigma_\alpha \phi_2) \;=\; \frac{1}{2} \left(|\nabla u|^{-1} \nabla_\alpha |\nabla u|\right) \psi_1 \;=\; \frac{1}{2} \left(|\nabla u|^{-1} \nabla_\alpha |\nabla u|\right) (\phi_1, \phi_2) \,.$$

Quindi, $|\nabla u|^{-\frac{1}{2}} \phi_1$ è uno spinore parallelo su Σ. □

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.19-(4). Sia Σ un livello di u. Ricordiamo dal Teorema 3.20 che, a meno di rotazioni, u può essere scelto in modo da convergere alla funzione coordinata x_n all'infinito. Come conseguenza di questo, partendo dai vettori coordinati e applicando Gram–Schmidt costruiamo un riferimento ortonormale $\nu, e_1, \dots, e_{n-1}$ su (M, g) con ν la normale al livello.

Ricordiamo che lo spinore ψ_1, costruito in precedenza, converge a ψ_1^∞ all'infinito e che ψ_1^∞ può essere scelto arbitrariamente. Facendo variare ψ_1^∞, possiamo quindi produrre un'abbondanza di spinori paralleli tramite il Lemma 3.23. Fissato $\psi_0 \in S(M)$ uno spinore costante all'infinito rispetto al riferimento $\nu, e_1, \dots, e_{n-1}$, scegliendo $\psi_1^\infty = \nu \cdot \psi_0, e_1 \cdot \psi_0, \dots, e_{n-1} \cdot \psi_0$, il Lemma 3.23 ci permette di costruire n spinori ∇^Σ–paralleli $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \in S(\Sigma)$.

Possiamo quindi procedere esattamente come fatto nella dimostrazione del Teorema 3.3 per concludere. Più precisamente, possiamo costruire campi vettoriali $Z_1, \dots, Z_{n-1} \in T\Sigma$ caratterizzati dalla proprietà

$$\langle Z_\alpha, w \rangle \;=\; \langle w \cdot \varphi_0 \,,\, \varphi_\alpha \rangle$$

per ogni $w \in T\Sigma$. Si vede poi che per costruzione gli Z_α sono paralleli rispetto alla connessione ∇^Σ e che

$$\nabla^\Sigma \langle Z_\alpha, Z_\beta \rangle = 0 \,.$$

Di conseguenza, i campi vettoriali Z_α sono linearmente indipendenti ovunque su Σ. Dunque, Σ è piatta. □

3.5. Analisi della geometria dell'initial data set

Nella Sezione 3.4 abbiamo dimostrato che M è topologicamente banale e che esiste una funzione u i cui livelli sono piatti e che soddisfa le proprietà enunciate nel Teorema 3.19. Sfruttiamo adesso queste proprietà per concludere informazioni sulla metrica g di M tramite le equazioni di Gauss e Codazzi.

Nel seguito, indicheremo con lettere greche gli indici tangenziali (alle ipersuperfici di livello di u), con lettere romane gli indici arbitrari e con ν il vettore normale. Seguendo [26], usiamo la notazione

$$\begin{aligned} \overline{R}_{ijkl} &= R_{ijkl} + k_{il} k_{jk} - k_{ik} k_{jl} \,, \\ A_{ijk} &= \nabla_i k_{jk} - \nabla_j k_{ik} \,. \end{aligned}$$

Se $\overline{R}$ e A si annullano, allora (M^n, g, k) si immerge isometricamente nello spazio di Minkowski con seconda forma fondamentale k per il teorema fondamentale delle ipersuperfici.

LEMMA 3.24. *Abbiamo* $\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Segue immediatamente dalle equazioni di Gauss $R^{\Sigma}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ e $h_{\alpha\beta} = -k_{\alpha\beta}$. □

LEMMA 3.25. *Valgono:*

(1) $\overline{R}_{ij\alpha\nu} = 0$,
(2) $A_{\alpha\beta\gamma} = 0$,
(3) $A_{i\beta\nu} = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo anzitutto che

$$\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\nu} = -A_{\alpha\beta\gamma}. \tag{3.14}$$

A tal fine calcoliamo

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta\gamma} &= \nabla_\alpha k_{\beta\gamma} - \nabla_\beta k_{\alpha\gamma} \\ &= \nabla^{\Sigma}_\alpha k_{\beta\gamma} - h_{\alpha\beta}k_{\gamma\nu} - h_{\alpha\gamma}k_{\beta\nu} - \nabla^{\Sigma}_\beta k_{\alpha\gamma} + h_{\beta\alpha}k_{\gamma\nu} + h_{\beta\gamma}k_{\alpha\nu}\,. \end{aligned}$$

Ora, usando $h = -k$ e le equazioni di Codazzi $\nabla^{\Sigma}_\alpha h_{\beta\gamma} - \nabla^{\Sigma}_\beta h_{\alpha\gamma} = R_{\alpha\beta\gamma\nu}$, otteniamo la (3.14). Dunque, basta mostrare (1) e (3). Utilizziamo ora le identità $\nabla_i\psi_1 = \frac{1}{2}k_{ij}e_j\nu\psi_1$ (cioè la (3.13)) e $\nabla_\alpha\nabla_\beta\psi - \nabla_\beta\nabla_\alpha\psi = \frac{1}{4}R_{\alpha\beta ij}e_ie_j\psi$ per ricavare

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\alpha(2\nabla_\beta\psi_1 - k_{\beta k}e_k\nu\psi_1) - \nabla_\beta(2\nabla_\alpha\psi_1 - k_{\alpha k}e_k\nu\psi_1) \\ &= \tfrac{1}{2}R_{\alpha\beta ij}e_ie_j\psi_1 - \tfrac{1}{2}k_{\beta k}e_k\nu\, k_{\alpha l}e_l\nu\psi_1 + \tfrac{1}{2}k_{\alpha k}e_k\nu\, k_{\beta l}e_l\nu\psi_1 \\ &\quad - k_{\beta k}e_kh_{\alpha\gamma}e_\gamma\psi_1 + k_{\alpha k}e_kh_{\beta\gamma}e_\gamma\psi_1 - A_{\alpha\beta i}e_i\nu\psi_1 \\ &= \tfrac{1}{2}\overline{R}_{\alpha\beta ij}e_ie_j\psi_1 - A_{\alpha\beta i}e_i\nu\psi_1\,. \end{aligned}$$

Poiché $\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$, combinando con la (3.14) otteniamo

$$0 = \overline{R}_{\alpha\beta\gamma\nu}e_\gamma\nu\psi_1 - A_{\alpha\beta\gamma}e_\gamma\nu\psi_1 + A_{\alpha\beta\nu}\psi_1 = 2\,\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\nu}e_\gamma\nu\psi_1 + A_{\alpha\beta\nu}\psi_1\,. \tag{3.15}$$

Siano ora $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} \in S(\Sigma)$ gli spinori ∇^{Σ}-paralleli costruiti nella dimostrazione del Teorema 3.19-(4). Prendendo il prodotto scalare della (3.15) con φ_μ e osservando che $\langle\psi_1\,,\,\varphi_\mu\rangle = 0$, ricordando la definizione di Z_α nella precedente sezione, concludiamo che

$$2\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\nu}(Z_\mu)_\gamma + A_{\alpha\beta\nu}\langle\psi_1\,,\,\varphi_\mu\rangle \;=\; 0\,.$$

D'altra parte, ripetendo gli stessi calcoli che portano a (3.15) ma lavorando con $\nu\psi_1$ al posto di ψ_1 (ricordiamo che $\nu\psi_1 = -\psi_2$ e quindi anche ad esso si applica la formula a (3.13)), otteniamo

$$-2\,\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\nu}e_\gamma\psi_1 + A_{\alpha\beta\nu}\nu\psi_1 \;=\; 0\,.$$

Prendendo il prodotto scalare con $\nu\varphi_\mu$, osservando che $\langle e_\gamma\psi_1, \nu\varphi_\mu\rangle = -\langle\nu e_\gamma\psi_1, \varphi_\mu\rangle$ e ricordando che $\nu e_\gamma = -e_\gamma\nu$, otteniamo

$$-2\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\nu}(Z_\mu)_\gamma + A_{\alpha\beta\nu}\langle\psi_1\,,\,\varphi_\mu\rangle \;=\; 0\,.$$

Sottraendo le due disuguaglianze trovate, abbiamo infine

$$\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\nu}(Z^\delta)_\gamma \;=\; 0\,.$$

Come nella dimostrazione del Teorema 3.19-(4), si deduce $\overline{R}_{\alpha\beta\gamma\nu} = 0$; inoltre l'equazione (3.15) fornisce anche $A_{\alpha\beta\nu} = 0$. □

LEMMA 3.26. *Abbiamo*

$$\overline{R}_{\alpha\nu\nu\beta} = A_{\nu\alpha\beta}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Usiamo l'equazione hessiana $\nabla^2 u = -k\,|\nabla u|$:

$$R_{\alpha\nu\nu\beta} = (\nabla_\alpha\nabla_\nu - \nabla_\nu\nabla_\alpha)\left(\frac{\nabla_\beta u}{|\nabla u|}\right) = -\nabla_\alpha k_{\nu\beta} - \nabla_\alpha\left(\nabla_\beta u\,\frac{k_{\nu\nu}}{|\nabla u|}\right) + \nabla_\nu k_{\alpha\beta} + \nabla_\nu\left(\nabla_\beta u\,\frac{k_{\alpha\nu}}{|\nabla u|}\right).$$

Applicando di nuovo l'equazione hessiana segue il risultato. □

Di conseguenza, possiamo concludere che tutti i termini di Gauss e di Codazzi si annullano tranne $A_{\nu\alpha\beta}$. In particolare, se $A_{\nu\alpha\beta} = 0$, allora (M^n, g, k) si ottiene come sezione "spaziale" dello spazio di Minkowski con seconda forma fondamentale k per il teorema fondamentale delle ipersuperfici. Nella sezione successiva costruiamo lo sviluppo di Killing e troviamo che

$$\nabla^\Sigma_{\alpha\beta} F = -2\,|\nabla u|^{-2} A_{\nu\alpha\beta}.$$

Questa funzione F descriverà lo spaziotempo di pp–wave.

3.6. Sviluppo di Killing

3.6.1. Trovare buone coordinate.

Da un lato abbiamo

$$g = du^2 + g_\Sigma,$$

dove g_Σ è la metrica piatta; dall'altro, disponiamo del sistema di coordinate asintoticamente piatte $(x_1, \ldots, x_n)$, (Definizione 2.15). Mostreremo che g ammette anche la seguente espressione:

PROPOSIZIONE 3.27. *Esiste un campo vettoriale Y tangente a Σ tale che*

$$g = \left(|\nabla u|^{-2} + |Y|^2\right) du^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{n-1} Y_\alpha\, du\, dy_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n-1} dy_\alpha^2\,. \tag{3.16}$$

Qui $(\nabla_\nu)^m Y \in C^{s-m,a}_{-m-q}(\Sigma)$ per $0 \leqslant m \leqslant s-2$, $Y_\alpha \in C^{s-2,a}_{-q}(M^n)$ e $f - 1 \in C^{s,a}_{-q}(M^n)$.

Notiamo che, a priori, Y_α ha regolarità peggiore di $\left(|\nabla u|^{-1} - 1\right) \in C^{s,a}_{-q}(M^n)$, il che richiede un'analisi più fine per ottenere il risultato ottimale. In particolare, mostreremo nel Lemma 5.4 che Y perde un solo ordine di regolarità nella direzione normale.

Abbiamo assunto che il vettore momento P non si annulli e $P = (0, \ldots, 0, |P|)$, inoltre, nel Teorema 3.19(1) abbiamo mostrato che la funzione armonica u soddisfa vicino all'infinito,

$$u = x_n + O_{s+1}\left(r^{\,1-q}\right)\,.$$

Pertanto, $(x_1, \ldots, x_{n-1}, u)$ fornisce anch'esso coordinate asintoticamente piatte con tasso di decadimento q. Su ogni insieme di livello Σ, usando le coordinate $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, si ha $(g_\Sigma)_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + O_s(r^{-q})$ e $\det g_\Sigma = 1 + O_s(r^{-q})$. Inoltre,

$$\Delta_\Sigma x_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\det g_\Sigma}}\,\partial_\beta\left(g_\Sigma^{\beta\gamma}\sqrt{\det g_\Sigma}\,\partial_\gamma x_\alpha\right) = O_{s-1}\left(r^{-q-1}\right)\,.$$

Risolviamo quindi su ogni livello Σ l'equazione

$$\Delta_\Sigma y_\alpha = 0 \qquad \textit{con} \qquad y_\alpha = x_\alpha + O\left(r^{\,1-q}\right)\,,$$

dove osserviamo che la funzione distanza su Σ ha la stessa crescita della distanza r su M^n.

LEMMA 3.28. *Dato $a \in (0,1)$ e $s \geqslant 2$, $s \in \mathbb{N}$, sia (M^n, g, k) un initial data set $C^{s,a}$–asintoticamente piatto spin con tasso di decadimento $q > n-1-s-a$ oppure $q > \frac{n-2}{2}$ e siano y_α come sopra. Allora*

$$(\nabla_\nu)^m(y_\alpha - x_\alpha) \in C^{s+1-m,a}_{1-m-q}(\Sigma)\,,$$

per $0 \leqslant m \leqslant s-1$.
Inoltre, $(y_\alpha - x_\alpha) \in C^{s-1,a}_{1-q}(M^n)$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché il tensore metrico g è $C^{s,a}_{-q}$–asintoticamente piatto, anche g_Σ è $C^{s,a}_{-q}$–asintoticamente piatto. Per regolarità ellittica, ne segue che $y_\alpha \in C^{s+1,a}_{-q}(\Sigma)$. Analogamente $(\nabla_\nu)^m g_\Sigma \in C^{s-m,a}_{-m-q}$ e $(\nabla_\nu)^m h = \frac{1}{2}(\nabla_\nu)^{m+1}(g_\Sigma) \in C^{s-1-m,a}_{-m-q-1}$. Applicando l'equazione di evoluzione di Δ_Σ [12, Pag. 108] otteniamo

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_\nu(\Delta_\Sigma y_\alpha)\\
&= \Delta_\Sigma(\nabla_\nu y_\alpha) + (\nabla_\nu(\Delta_{\Sigma_u}))y_\alpha\\
&= \Delta_\Sigma(\nabla_\nu y_\alpha) - 2h_{\beta\gamma}\nabla^\Sigma_{\beta\gamma}y_\alpha - (2\nabla^\Sigma_\gamma h_{\gamma\beta} - \nabla^\Sigma_\beta h_{\gamma\gamma})\nabla_\beta y_\alpha\,.
\end{aligned}$$

e, per stime ellittiche, $\nabla_\nu y_\alpha \in C^{s,a}_{-q}(\Sigma)$. Le derivate di ordine maggiore $(\nabla_\nu)^m y_\alpha$ si ottengono allo stesso modo.

Applichiamo ora stime ellittiche ai coefficienti di Hölder di $(\nabla_\nu)^m y_\alpha$. Più precisamente, per un piccolo $t > 0$ definiamo

$$\zeta(x,u) = (|u|+1)^{q+m} + t^{-a}\Big((\nabla_\nu)^m y_\alpha(x, u+t) - (\nabla_\nu)^m y_\alpha(x,u)\Big).$$

Allora, ζ soddisfa ancora un'equazione ellittica con coefficienti uniformemente limitati in t e u. Facendo tendere $t \to 0$ si ottiene il decadimento desiderato e la regolarità nella direzione u. Infine, il decadimento e la regolarità nelle direzioni miste u, x seguono direttamente dal caso puramente u o puramente x. Quindi, $(y_\alpha - x_\alpha) \in C^{s-1,a}_{-q}(M^n)$. □

Il lemma precedente implica che $(y_1, \ldots, y_{n-1}, u)$ forma un sistema di $C^{s-2,a}_{-q}$–coordinate asintoticamente piatte, cioè

$$g = du^2 + dy_1^2 + \cdots + dy_{n-1}^2 + O_{s-2}(r^{-q}).$$

In queste coordinate, la metrica g assume una forma particolarmente elegante:

DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE 3.27. Sappiamo che su Σ la metrica può essere scritta come $g|_{T\Sigma\otimes T\Sigma} = g_\Sigma = \sum_{\alpha=1}^{n-1} dy_\alpha^2$. Poniamo $Y_\alpha = g(\partial u, \partial y_\alpha)$ e $f^2 = g(\partial u, \partial u) - |Y|^2$. Allora

$$g = (f^2 + |Y|^2)\,du^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{n-1} Y_\alpha\,du\,dy_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n-1} dy_\alpha^2\,.$$

Poiché $g^{-1}(du, du) = |\nabla u|^2$ e usando la formula

$$g = \begin{bmatrix} f^{-2} & -f^{-2}Y^T \\ -f^{-2}Y & I_{n-1} + YT^T \end{bmatrix},$$

concludiamo che in realtà $f = |\nabla u|^{-1}$. Visto che $Y_\alpha = f^2 g^{-1}(du, dy_\alpha)$, la regolarità di Y segue dal Lemma 3.28 e otteniamo

$$(\nabla_\nu)^m Y \in C^{s-m,a}_{-m-q}(\Sigma) \qquad (0 \leqslant m \leqslant s-2)\,,$$

mentre $Y_\alpha \in C^{s-2,a}_{-q}(M^n)$ e $(f-1) \in C^{s,a}_{-q}(M^n)$. □

Nella prossima sezione analizzeremo ulteriormente Y e vedremo che è integrabile su ogni insieme di livello Σ.

3.6.2. Applicazioni delle equazioni di Codazzi. Iniziamo questa sezione con un lemma tecnico.

LEMMA 3.29. *Sia (M^n, g, k) un initial data set in cui g ha la forma (3.16) e $k = -|\nabla u|^{-1}\nabla^2 u$. Allora*

$$k_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} f^{-1}(Y_{\alpha,\beta} + Y_{\beta,\alpha})\,, \qquad k_{\nu\alpha} = -f\,\nabla_\alpha f^{-1}\,, \qquad k_{\nu\nu} = -f\,\nabla_\nu f^{-1} \tag{3.17}$$

dove $f = |\nabla u|^{-1}$.

DIMOSTRAZIONE. Dalla forma della metrica (3.16) si ricava $\nu = f^{-1}(\partial_u - Y_\alpha \partial y_\alpha)$ e

$$\Gamma^u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{uu}\,(g_{\alpha u,\beta} + g_{\beta u,\alpha}) = \frac{1}{2} f^{-2}(Y_{\alpha,\beta} + Y_{\beta,\alpha}). \tag{3.18}$$

Qui α denota prendere la derivata rispetto ∂y_α. Segue che possiamo calcolare

$$\begin{aligned}\nabla_{\alpha\beta} u &= \langle \nabla_\alpha \partial_\beta, \nu\rangle\,\nu(u)\\ &= f^{-1}\langle \nu, \Gamma^u_{\alpha\beta}\partial_u\rangle = -\Gamma^u_{\alpha\beta}\\ &= \frac{1}{2} f^{-2}(Y_{\alpha,\beta} + Y_{\beta,\alpha})\,.\end{aligned}$$

Dunque, il risultato segue dalle identità $\nabla^2 u = -|\nabla u|\,k$ e $f^{-1} = |\nabla u|$. □

LEMMA 3.30. *Sia (M^n, g, k) un initial data set in cui g ha la forma (3.16) e $k = -|\nabla u|^{-1}\nabla^2 u$. Supponiamo inoltre che valgano le equazioni di Codazzi $A_{\alpha\beta\gamma} = 0$ (Lemma 3.25 (2)). Allora*

$$d^\Sigma Y = 0\,.$$

In particolare, su ogni insieme di livello Σ esiste una funzione ℓ tale che

$$Y = \nabla^\Sigma \ell\,.$$

Inoltre $\ell \in C^{s-1,a}_{1-q}(M^n)$ e $(\nabla_\nu)^m \ell \in C^{s+1-m,a}_{1-m-q}(\Sigma)$ per $0 \leqslant m \leqslant s-1$.

La funzione ℓ sarà la funzione grafico all'interno dello spaziotempo pp–wave. Sottolineiamo che questa regolarità per ℓ implica anche una più forte regolarità per Y rispetto quella ottenuta inizialmente nella Proposizione 3.27.

DIMOSTRAZIONE. Dapprima osserviamo che $\nu = f^{-1}(\partial_u - Y_\alpha \partial_\alpha)$ dove $f = |\nabla u|^{-1}$. Inoltre, la (3.18) implica

$$\langle \nabla_\alpha \partial_\beta, \nu\rangle = \frac{1}{2} f^{-1}(Y_{\alpha,\beta} + Y_{\beta,\alpha})\,,$$

così come

$$\langle \nabla_\alpha \partial_\beta, \partial_\gamma\rangle = g_{\gamma\gamma}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} + g_{\gamma u}\Gamma^u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\mu}(g_{\alpha\mu,\beta} + g_{\beta\mu,\alpha}) + \frac{1}{2} Y_\gamma f^{-2}(g_{\alpha u,\beta} + g_{\beta u,\alpha}) = 0\,.$$

Combinando con il Lemma 3.29 otteniamo le equazioni di Codazzi $A_{\alpha\beta\gamma} = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_\beta k_{\alpha\gamma} - \nabla_\alpha k_{\beta\gamma} \\
&= \partial_\beta k_{\alpha\gamma} - \langle \nabla_\beta \partial_\alpha, \nu\rangle k_{\nu\gamma} - \langle \nabla_\beta \partial_\gamma, \nu\rangle k_{\alpha\nu} - \partial_\alpha k_{\beta\gamma} + \langle \nabla_\alpha \partial_\beta, \nu\rangle k_{\nu\gamma} + \langle \nabla_\alpha \partial_\gamma, \nu\rangle k_{\beta\nu} \\
&= \frac{1}{2}\partial_\beta\big(f^{-1}Y_{\alpha,\gamma} + f^{-1}Y_{\gamma,\alpha}\big) + \frac{1}{2} f^{-1}\big(Y_{\beta,\gamma} + Y_{\gamma,\beta}\big)\cdot f\,\nabla_\alpha f^{-1} \\
&\qquad - \frac{1}{2}\partial_\alpha\big(f^{-1}Y_{\beta,\gamma} + f^{-1}Y_{\gamma,\beta}\big) - \frac{1}{2} f^{-1}\big(Y_{\alpha,\gamma} + Y_{\gamma,\alpha}\big)\cdot f\nabla_\beta f^{-1} \\
&= \frac{1}{2} f^{-1}\big(Y_{\alpha,\beta\gamma} - Y_{\beta,\alpha\gamma}\big)\,.
\end{aligned}$$

Il termine $(d^\Sigma Y)_{\alpha\beta} = Y_{\alpha,\beta} - Y_{\beta,\alpha}$ dipende solo da u ed è costante su ogni insieme di livello Σ. Usando la Proposizione 3.27, il termine $(d^\Sigma Y)_{\alpha\beta}$ decade a zero su ogni insieme di livello Σ. Dunque, si può integrare Y su Σ per costruire ℓ. In aggiunta, usando di tassi di decadimento di Y_α della Proposizione 3.27 possiamo scegliere $\ell \to 0$ all'infinito su Σ. Infine, il tasso di decadimento e la regolarità di ℓ si deducono dalla prima equazione delle (3.17); più precisamente,

$$k_{\alpha\beta} = f^{-1}\nabla^\Sigma_{\alpha\beta}\ell \in C^{s-1,a}_{-1-q}(M^n)$$

che conclude la dimostrazione. □

3.6.3. Definizione della metrica spaziotemporale. Dalla sezione precedente abbiamo ottenuto

$$g = \big(f^2 + |\nabla^\Sigma \ell|^2\big)\, du^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{n-1} \nabla^\Sigma_\alpha \ell\, du\, dy_\alpha + \sum_{\alpha=1}^{n-1} dy_\alpha^2\,. \tag{3.19}$$

Costruiamo adesso lo *sviluppo di Killing*, cioè definiamo su $M \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ la metrica lorentziana

$$\mathbf{g} = 2\, d\tau\, du + g\,.$$

Poi, riscriviamo g nella forma tipica di uno spaziotempo pp–wave. Un breve calcolo fornisce

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} &= 2\, d(\tau + \ell)\, du + \big(f^2 + |Y|^2 - 2\,\ell_u\big)\, du^2 + \sum_{\alpha=1}^{n-1} dy_\alpha^2 \\
&= -\,2\, dt\, du + F(u, \mathbf{x})\, du^2 + \sum_{\alpha=1}^{n-1} dy_\alpha^2\,,
\end{aligned}$$

dove $t = -\tau - \ell$ e $F(u,\mathbf{x}) = f^2 + |Y|^2 - 2\,\ell_u$. Segue che (M^n, g) è il grafico $t = -\ell$ sulla $t = 0$–fetta in $\mathcal{M}, \mathbf{g}$. Nel caso in cui (M^n, g, k) sia contenuto nello spazio di Minkowski, otteniamo $F \equiv 1$ e t è la coordinata usuale del tempo.

LEMMA 3.31. *Si consideri l'initial data set (M^n, g, k) con il tensore metrico g come nella formula (3.19) e $k = -|\nabla u|^{-1}\nabla^2 u$. Allora, (M^n, g) si immerge isometricamente in $(M^n \times \mathbb{R}, \mathbf{g} = 2d\tau du + g)$ con seconda forma fondamentale k. Inoltre,*

$$\mu = -\frac{1}{2} f^{-2}\, \Delta_\Sigma F\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Chiaramente (M^n, g) si immerge isometricamente in $(M^n \times \mathbb{R}, \mathbf{g})$ come la fetta costante τ. Poi, usando il sistema di coordinate $(\tau, u, y_1, \ldots, y_{n-1})$, denotiamo

$$N = |\nabla u|^{-1}(\partial_\tau - \nabla u)\,.$$

È facile vedere che N è la normale unitaria di tipo tempo di $M^n \subseteq (\mathcal{M}, \mathbf{g})$. In più, sfruttando che ∂_τ è un campo vettoriale covariantemente costante si ha

$$\mathbf{g}\big(\overline{\nabla}_i N, e_j\big) = |\nabla u|^{-1}\,\mathbf{g}\big(\overline{\nabla}_i(\partial_\tau - \nabla u), e_j\big) = k_{ij}\,.$$

Quindi, la seconda forma fondamentale di $M^n \subseteq (\mathcal{M}, \mathbf{g})$ coincide con k. Calcoliamo ora

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{1}{2}\big(R - |k|^2 + |\mathrm{tr}_g\, k|^2\big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(R^\Sigma + 2\,\mathrm{Ric}(\nu,\nu) + |h|^2 - H^2 - |k|^2 + |\mathrm{tr}_g\, k|^2\Big)\,.\end{aligned}$$

Ricordando la notazione $|\nabla u| = f^{-1}$ e il fatto che $\nabla u \neq 0$. Combinando le identità $h = -k|_\Sigma$, $R^\Sigma = 0$ e $\nabla^2 u = -|\nabla u|\,k$ con la formula di Bochner

$$|\nabla u|^2\,\mathrm{Ric}(\nu,\nu) = \frac{1}{2}\Delta|\nabla u|^2 - \langle\nabla\Delta u, \nabla u\rangle - |\nabla^2 u|^2\,,$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\mu &= f^2\Big(\frac{1}{2}\,\Delta f^{-2} + \big\langle\nabla\big(f^{-1}\,\mathrm{tr}_g(k)\big),\,\nabla u\big\rangle\Big) - |k|^2 - H\,k_{\nu\nu} - \sum_\alpha |k_{\nu\alpha}|^2\\ &= f^2\Big(\frac{1}{2}\,\nabla_{\nu\nu} f^{-2} - H f^{-3}\,\nabla_\nu f + \frac{1}{2}\,\Delta_\Sigma f^{-2} + \mathrm{tr}_g(k)\,f^{-1}\,\nabla_\nu f^{-1} + f^{-2}\,\nabla_\nu\,\mathrm{tr}_g(k)\Big)\\ &\quad - |k|^2 - H\,k_{\nu\nu} - \sum_\alpha |k_{\nu\alpha}|^2\,,\end{aligned}$$

dove nella seconda uguaglianza dividiamo il laplaciano nelle sue componenti normale e tangenziale. Usando l'identità (3.17), abbiamo

$$\begin{aligned}\mu &= f^2\Big(\frac{1}{2}\nabla_{\nu\nu} f^{-2} - f^{-4}\,|\nabla_\nu f|^2 + \frac{1}{2}\Delta_\Sigma f^{-2} + f^{-2}\nabla_\nu\big(f^{-1}\nabla_\nu f + f^{-1} Y_{\alpha,\alpha}\big)\Big)\\ &\quad - f^{-2}|\nabla_\nu f|^2 - 3 f^{-2}\sum_\alpha |\nabla_\alpha f|^2 - f^{-2}\sum_{\alpha,\beta}|Y_{\alpha,\beta}|^2 + f^{-2} Y_{\alpha,\alpha}\,\nabla_\nu f\\ &= f^2\Big(f^{-3}\nabla_{\nu\nu} f - \frac{1}{2} f^{-4}\Delta_\Sigma f^2 + f^{-3}\nabla_\nu Y_{\alpha,\alpha}\Big) - f^{-2}\sum_{\alpha,\beta}|Y_{\alpha,\beta}|^2 + f^{-2}\sum_\alpha|\nabla_\alpha f|^2\\ &= f^{-2}\Big(-\frac{1}{2}\Delta_\Sigma f^2 + f\,\nabla_\nu Y_{\alpha,\alpha} - \sum_{\alpha,\beta}|Y_{\alpha,\beta}|^2\Big)\,,\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato che $\nabla_\nu \nu = -(f^{-1}\nabla_\alpha f)\partial_\alpha$. Dato che $\nu = f^{-1}(\partial_u - Y_\alpha \partial_\alpha)$ e $Y = (\partial_\alpha \ell)\partial_\alpha$, abbiamo

$$\begin{aligned}f\,\nabla_\nu Y_{\alpha,\alpha} - \sum_{\alpha,\beta}|Y_{\alpha,\beta}|^2 &= (\partial_u - Y_\alpha\partial_\alpha)\,\Delta_\Sigma \ell - \sum_{\alpha,\beta}|Y_{\alpha,\beta}|^2\\ &= \Delta_\Sigma \ell_u - \frac{1}{2}\,\Delta_\Sigma|Y|^2\,.\end{aligned}$$

Segue

$$\mu = -\frac{1}{2}\,f^{-2}\,\Delta_\Sigma\big(f^2 + |Y|^2 - 2\,\ell_u\big)\,,$$

che completa la dimostrazione. $\square$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.17. Resta solo da mostrare che su ogni insieme di livello F è superarmonica (rispetto a g_Σ). Ma questo segue immediatamente dal lemma precedente insieme all'ipotesi $\mu \geqslant 0$. □

Ringraziamenti

I miei più sentiti ringraziamenti a:

Prof. Carlo Mantegazza il quale, con la sua esperienza mi ha guidato in questo percorso di tesi rafforzando il mio interesse per l'ambito dell'analisi geometrica. Non è stato solo una guida, bensì un maestro i cui insegnamenti porterò con me per tutta la mia carriera.

Prof. Stefano Borghini che mi ha accompagnato nella stesura contribuendo in maniera decisiva a questo lavoro. I suoi consigli e la sua dedizione sono stati preziosi per la mia crescita scientifica.

Dott.ssa Francesca Oronzio per i numerosi suggerimenti e per la disponibilità, che hanno contribuito a orientare e migliorare questo lavoro.

Prof. Davide Franco che mi ha guidato nei primi passi del percorso magistrale, aiutandomi a delineare i miei interessi.

I miei genitori che hanno dedicato la loro vita a formarmi come uomo. Con la speranza, un giorno, di renderli orgogliosi. A loro la mia più sincera gratitudine e ammirazione.

Salvatore e Raffaele, i miei due fratelli, con i quali ho condiviso la mia crescita. Due rocce sulle quali aggrapparmi anche nei momenti più difficili.

Bibliografia

1. Marco Abate and Francesca Tovena, *Geometria differenziale*, Springer, 2011.
2. Richard Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner, *Dynamical structure and definition of energy in general relativity*, Phys.Rev. **116** (1959), 1322–1330.
3. ______, *Republication of: The dynamics of general relativity*, Gen. Relativ. Gravit. **40** (2008), 1997–2027.
4. Michael F. Atiyah, Vijay K. Patodi, and Isadore M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **77** (1975), 43–69.
5. Robert Bartnik, *The mass of an asymptotically flat manifold*, Comm. Pure Appl. Math. **39** (1986), no. 5, 661–693.
6. Robert Beig and Piotr Chruściel, *Killing vectors in asymptotically flat space–times. I. Asymptotically translational Killing vectors and the rigid positive energy theorem*, J. Math. Phys. **37** (1996), 1939–1961.
7. Matthias Blau, *Lecture notes on general relativity*, http://blau.itp.unibe.ch/newlecturesGR.pdf, 2011.
8. ______, *Plane waves and Penrose limits*, 2011, Lecture notes for the ICTP school on mathematics in string and field theory.
9. Hermann Bondi, Julian M. G van der Burg, and Kenneth A. W. Metzner, *Gravitational waves in general relativity. VII. Waves from axi–symmetric isolated systems*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **269** (1962), 21–52.
10. Yvonne Choquet–Bruhat, *General relativity and the Einstein equations*, Oxford University Press, 2009.
11. Yvonne Choquet–Bruhat and Robert Geroch, *Global aspects of the Cauchy problem in general relativity*, Comm. Math. Phys. **14** (1969), 329–335.
12. Bennett Chow, Peng Lu, and Lei Ni, *Hamilton's Ricci flow*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 77, AMS, 2006.
13. Piotr Chruściel, *Boundary conditions at spatial infinity from a Hamiltonian point of view*, Topological properties and global structure of space–time, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. B: Phys., vol. 138, Plenum, 1986, pp. 49–59.
14. ______, *Lectures on energy in general relativity*, http://homepage.univie.ac.at/piotr.chrusciel, 2012.
15. Piotr Chruściel, Gregory Galloway, and Daniel Pollack, *Mathematical general relativity: a sampler*, Bull. AMS **47** (2010), 567–638.
16. Alejandro Corichi and Dario Núñez, *Introduction to the ADM formalism*, ArXiv Preprint Server – ArXiv:2210.10103, 2022.
17. Xianzhe Dai, *Lectures on Dirac operators and index theory*, https://web.math.ucsb.edu/∼dai/book.pdf, 2015.
18. Albert Einstein, *Die grundlagen der allgemeinen*, Annalen der Physik **49** (1916), 769–822.
19. ______, *Der energiesatz in der allgemeinen relativitätstheorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften **XXXIV–XXXV** (1918), 448–459.
20. S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, third ed., Universitext, Springer, 2004.
21. Maurizio Gasperini, *Relatività generale e teoria della gravitazione*, Springer, 2015.
22. Wolfgang Globke and Thomas Leistner, *Locally homogeneous pp–waves*, J. Geom. Phys. **108** (2016), 83–101.
23. Leonor Godinho and José Natário, *An introduction to Riemannian geometry*, Universitext, Springer, 2014.
24. Jerry B. Griffiths and Jiří Podolskỳ, *Exact space–times in Einstein's general relativity*, Cambridge University Press, 2009.
25. Sven Hirsch, Demetre Kazaras, and Marcus Khuri, *Spacetime harmonic functions and the mass of* 3*–dimensional asymptotically flat initial data for the Einstein equations*, J. Diff. Geom. **122** (2022), 223–258.
26. Sven Hirsch and Yiyue Zhang, *The case of equality for the spacetime positive mass theorem*, J. Geom. Anal. **33** (2023), Paper No. 30, 13.
27. ______, *Initial data sets with vanishing mass are contained in pp–wave spacetimes*, ArXiv Preprint Server – ArXiv:2403.15984, 2024.
28. Lan–Hsuan Huang and Dan A. Lee, *Bartnik mass minimizing initial data sets and improvability of the dominant energy scalar*, ArXiv Preprint Server – ArXiv:2007.00593, 2020.
29. Robion C. Kirby, *The topology of* 4*–manifolds*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1374, Springer, 1989.

30. Arthur Komar, *Positive–definite energy density and global consequences for general relativity*, Phys. Rev. **129** (1963), 1873–1876.
31. Blaine Lawson and Marie–Louise Michelsohn, *Spin geometry*, Princeton University Press, 2016.
32. Dan A. Lee, *Geometric relativity*, AMS, 2021.
33. Thomas Leistner and Daniel Schliebner, *Completeness of compact Lorentzian manifolds with Abelian holonomy*, Math. Ann. **364** (2016), 1469–1503.
34. André Lichnerowicz, *Spineurs harmoniques*, C. R. Acad. Sci. Paris **257** (1963), 7–9.
35. Hermann Minkowski, *Die grundgleichungen für die elektromagnetischen vorgänge in bewegten körpern*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch–Physikalische Klasse **1908** (1908), 53–111.
36. Thomas Parker and Clifford H. Taubes, *On Witten's proof of the positive energy theorem*, Comm. Math. Phys. **84** (1982), no. 2, 223–238.
37. Cian Roche, Amir Babak Aazami, and Carla Cederbaum, *Exact parallel waves in general relativity*, Gen. Relativ. Gravit. **55** (2023), 40.
38. Richard Schoen and Shing–Tung Yau, *Proof of the positive mass theorem II.*, Comm. Math. Phys. **79** (1981), 231–260.
39. Hans Stephani, *Relativity: An introduction to special and general relativity*, 3 ed., Cambridge University Press, 2004.
40. Wikipedia, *Orthogonal group*, https://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonal_group.
41. Edward Witten, *A new proof of the positive energy theorem*, Comm. Math. Phys. **80** (1981), 381–402.