EVOLUZIONI DI STRUTTURE GEOMETRICHE

Carlo Mantegazza

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli" – Università di Napoli Federico II

Introduzione

I problemi riguardanti le evoluzioni di strutture geometriche sono stati molto studiati negli ultimi trent'anni. Una motivazione è l'analisi di modelli fisici con una forte componente geometrica come i sistemi multifase, ma anche l'applicazione ad algoritmi di analisi dati, guardando a questi ultimi da un punto di vista geometrico. L'altra principale motivazione è avere tecniche di deformazione canoniche che trasformino una struttura geometrica generica in un insieme ristretto di "modelli", mantenendo le proprietà interessanti inalterate. La novità in questa idea, già largamente utilizzata in geometria e topologia, è di sfruttare metodi analitici (basati su equazioni alle derivate parziali) per avere deformazioni con un controllo quantitativo delle quantità geometriche rilevanti di tali strutture.

TRE PROBLEMI DI EVOLUZIONE

Il Flusso di Ricci

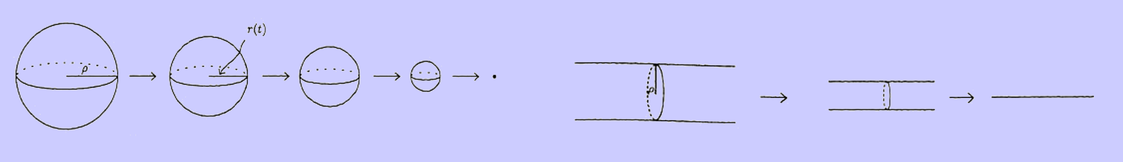
È il flusso geometrico più famoso e importante, principalmente a causa della sua applicazione alla dimostrazione della congettura di Poincaré da parte di Richard Hamilton e Grigori Perelman. Introdotto da Hamilton nel 1982 in [4], descrive l'evoluzione nel tempo della metrica di una varietà riemanniana $(M, g(t))$ secondo il sistema di equazioni alle derivate parziali

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\mathrm{Ric}_{g(t)}$$

dove $\mathrm{Ric}_{g(t)}$ è il *tensore di Ricci* della varietà $(M, g(t))$.
Il tensore di Ricci, che è una contrazione del *tensore di Riemann*, esprime una forma di curvatura di una varietà Riemanniana.

Il flusso deforma la metrica (e quindi la geometria locale) in maniera selettiva: contrae nelle direzioni per cui il tensore di Ricci è positivo e espande in quelle dove è negativo.

TEOREMA [HAMILTON – 1982]
Se una varietà Riemanniana tridimensionale compatta ha tensore di Ricci positivo, allora il flusso di Ricci (normalizzato) la deforma in un quoziente della 3–sfera.
Segue che se una varietà tridimensionale compatta e semplicemente connessa M ammette una metrica con tensore di Ricci positivo, allora M deve essere topologicamente la 3–sfera.



Il Moto per Curvatura Media

Il moto per curvatura media emerge naturalmente nella descrizione dell'evoluzione di interfacce in molti modelli fisici. Proposto da Mullins nel 1956, nella seconda parte degli anni 80 viene studiato estensivamente nei lavori di Gerhard Huisken [5] e Michael Gage – Richard Hamilton [2]. Il moto per curvatura media di una ipersuperficie regolare M_t di $\mathbb{R}^n$, parametrizzata al tempo t da una mappa $\varphi_t : M \to \mathbb{R}^n$ è dato da una soluzione del sistema di equazioni alle derivate parziali

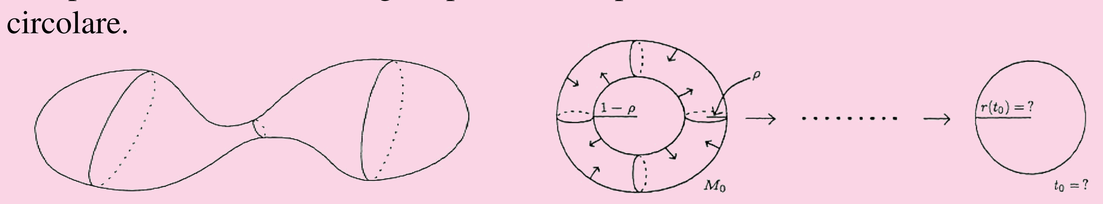
$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_t(p) = \mathrm{H}_t(p)$$

dove $\mathrm{H}_t(p)$ è il *vettore curvatura media* dell'ipersuperficie M_t nel punto $p \in M$.

Anche il flusso per curvatura media contrae l'ipersuperficie dove la curvatura è positiva e la espande in quelle dove è negativa. In effetti, ci sono fortissime analogie e fenomeni comuni tra i due flussi: in un certo senso, il moto per curvatura media può essere pensato come la "versione immersa" del flusso di Ricci.

TEOREMA [HUISKEN – 1984]
Un'ipersuperficie regolare, *convessa* e compatta di $\mathbb{R}^n$, evolvendo per curvatura media, "collassa" ad un singolo punto in tempo finito diventando asintoticamente sferica.

TEOREMA [GAGE & HAMILTON, GRAYSON – 1986/87]
Una curva semplice chiusa che si muove per curvatura nel piano diventa convessa e poi "collassa" in un singolo punto in tempo finito, diventando asintoticamente circolare.

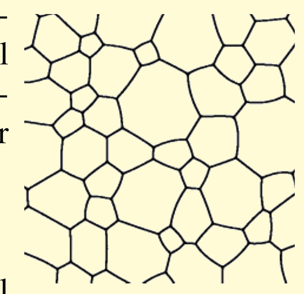


Entrambi questi sistemi di PDE sono una sorta di "equazioni del calore geometriche", infatti il tensore di Ricci si scrive come $\mathrm{Ric}_g = -\frac{1}{2}\Delta g +$ *termini di ordine basso* in un appropriato sistema di coordinate e la curvatura media è data da $\mathrm{H}_t(p) = \Delta\varphi_t(p)$ dove Δ è l'operatore di Laplace–Beltrami relativo alla metrica su M indotta dalla mappa φ_t.

Si può in effetti vedere che questi sono sistemi parabolici (degeneri) quasilineari di equazioni alle derivate parziali su varietà. Entrambi posseggono un'unica soluzione C^∞ per tempi piccoli se, rispettivamente, la varietà Riemanniana o l'ipersuperficie iniziale sono regolari e compatte. Inoltre, le soluzioni soddisfano principi di confronto e stime sulle derivate simili al caso delle equazioni paraboliche in $\mathbb{R}^n$, Sfortunatamente, è ben noto che le soluzioni in genere sviluppano singolarità di natura analitica o geometrica in tempo finito. L'analisi di tali singolarità è l'oggetto principale dello studio delle evoluzioni geometriche.

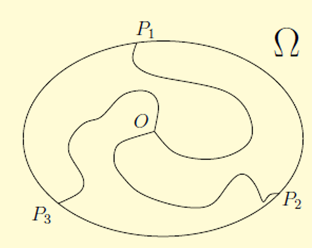
Il Flusso per Curvatura di un Network di Curve

Un esempio di evoluzione di struttura geometrica intrinsecamente non regolare (in realtà la meno singolare possibile) è il moto di un network di curve nel piano per curvatura. Il network evolve in modo che ogni curva della rete si muova per curvatura, cioè



$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma_t(s) = \mathrm{k}_t(s)$$

dove γ_t è una qualunque curva del network al tempo t e k_t il suo *vettore curvatura*.
Durante il moto le curve restano "incernierate" nei vertici, che si muovono anch'essi, alle curve concorrenti. Questo problema è una generalizzazione del moto per curvatura delle curve nel piano ma presenta fenomeni nuovi. Il problema dello studio del comportamento del network nel tempo ha un forte interesse applicativo in quanto modellizza l'evoluzione di sistemi bidimensionali multifase, considerando le curve come le interfacce tra le diverse fasi del sistema.



Il network più semplice in assoluto, detto "triodo", è dato da tre curve concorrenti in un punto O, vincolate a tre punti sul bordo di un dominio convesso Ω. Anche in questo caso semplice, come nel caso generale, la difficoltà maggiore è data dalla non possibilità, a causa della struttura "parzialmente" singolare, di utilizzare il principio di massimo per ottenere stime a priori, come invece viene fatto estensivamente nell'analisi del flusso di Ricci e del moto per curvatura media. Lo studio di questo problema è stato proposta da vari autori e il primo risultato di esistenza regolare del flusso per tempi piccoli è stato provato nel 1992 da Lia Bronsard e Fernando Reitich in [1]. Nella coppia di lavori [6,7], nel 2004 e nel 2014 abbiamo studiato la regolarità per ogni tempo dell'evoluzione di un tale network di tre curve concorrenti.

TEOREMA [BRONSARD & REITICH – 1992]
Per ogni triodo regolare iniziale come nella figura, esiste un unico flusso regolare per un certo intervallo positivo di tempo.

TEOREMA [MAGNI, MANTEGAZZA, NOVAGA & TORTORELLI – 2004, 2014]
Se durante il flusso di un triodo regolare la lunghezza di nessuna delle tre curve va a zero, l'evoluzione è regolare per ogni tempo.

ALCUNI RISULTATI E APPLICAZIONI

In generale, durante il flusso si sviluppano singolarità dove la curvatura va all'infinito e parti della varietà collassano su insiemi di dimensione minore. Lo studio di come questo avviene e la classificazione delle possibili forme "asintotiche" delle singolarità permettono di eseguire operazioni di "chirurgia topologica" quantitativa che conducono a risultati di classificazione geometrica. Il più importante di questi, la cui dimostrazione è stata resa possibile dal completamento di questo programma (proposto da Hamilton) da parte di Perelman [8] in dimensione 3, è la famosa *congettura di Poincaré.*

TEOREMA [HAMILTON, PERELMAN – 1990, 2002] La forma asintotica di una singolarità del flusso di Ricci di una 3–varietà compatta è data dal "cilindro" $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$.

TEOREMA [CONGETTURA DI POINCARÉ – HAMILTON, PERELMAN – 2002] Ogni 3–varietà compatta e semplicemente connessa è omeomorfa alla sfera $\mathbb{S}^3$.

Successivamente, questa tecnica è stata utilizzata secondo le stesse linee per dimostrare la *congettura di Thurston* che fornisce una classificazione topologica/geometrica di tutte le 3–varietọmpatte.

Infine, sempre per mezzo del flusso di Ricci (in ogni dimensione) è stato dimostrato il *teorema della sfera* che era un importante problema aperto proposto da Heinz Hopf nel 1926.

TEOREMA [TEOREMA DELLA SFERA – BRENDLE & SCHOEN – 2007] Ogni varietà Riemanniana le cui curvature sezionali stanno tutte nell'intervallo $(1/4, 1]$ è diffeomorfa alla sfera.

Lo studio del moto per curvatura media di una ipersuperficie è analogo a quello del flusso di Ricci di una varietà Riemanniana, ma l'analisi dello sviluppo di singolarità e la classificazione della loro forma asintotica è parziale al momento. Soltanto in casi speciali, come ad esempio nel moto di ipersuperfici con curvatura media positiva è quasi completo e un'analoga procedura di "chirurgia topologica" quantitativa è disponibile per alcune sottoclassi. In questo caso i risultati che si otterrebbero riguardano la struttura geometrico/topologica delle ipersuperfici (e dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ da loro bordati). Un problema parzialmente risolto per mezzo di questa tecnica di deformazione secondo il moto per curvatura media è il seguente *Schoenflies problem*, che rimane aperto in piena generalità.

CONGETTURA Una 3–sfera diffeomorficamente immersa in $\mathbb{R}^4$ borda un dominio diffeomorfo a $\mathbb{R}^4$.

TEOREMA [HUISKEN & SINESTRARI – 2009] Se la sfera immersa di cui sopra ha la somma delle sue due più piccole curvature principali positiva in ogni punto, allora borda un dominio diffeomorfo a $\mathbb{R}^4$.

Altre applicazioni delle deformazioni basate sul moto per curvatura media si hanno in relatività generale, in particolare nello studio dei buchi neri, e nella dimostrazione di disuguaglianze geometriche su varietà, considerando tale flusso anche quando l'ambiente non è più $\mathbb{R}^n$ ma una varietà riemanniana.

Infine, il moto per curvatura di curve interviene nella dimostrazione del teorema dell'esistenza di tre geodetiche chiuse su una superficie sferica e è largamente usato negli algoritmi di trattamento di immagini digitali.

L'analisi del comportamento di un network generale di curve che evolve per curvatura è agli inizi. Si può provare che finché la lunghezza di una curva (o equivalentemente una regione) non "collassa" il network e il flusso sono regolari. Recentemente, abbiamo provato alcuni risultati sul comportamento dei network nel caso la lunghezza di una curva vada a zero con curvatura controllata, mentre Ilmanen, Neves e Schulze hanno sviluppato un teorema di esistenza per tempi piccoli per un network generale con vertici di molteplicità qualunque.

TEOREMA [MANTEGAZZA, NOVAGA, PLUDA & SCHULZE – 2014] Se durante il flusso di un network regolare la lunghezza di ogni curva non va a zero, l'evoluzione è regolare per ogni tempo.

TEOREMA [MANTEGAZZA, NOVAGA & PLUDA – 2015] Se durante il flusso di un network regolare la lunghezza di una o più curve va a zero mentre la curvatura è globalmente limitata, il network limite che si ottiene ha vertici di molteplicità soltanto 3,4 o 5.

TEOREMA [ILMANEN, NEVES & SCHULZE – 2014] Per ogni network iniziale esiste un (non necessariamente unico) flusso regolare per curvatura in un intervallo di tempo positivo. Inoltre, tale network ha solo vertici di molteplicità 3.

EMAIL: *carlo.mantegazza@unina.it*
HOMEPAGE: *http://cvgmt.sns.it/HomePages/cm*

PROBLEMI APERTI E LINEE DI RICERCA

Flusso di Ricci: Estendere i risultati e le tecniche della dimensione 3 alla dimensione 4 (in dimensione 5 o più, si sa che non è possibile); classificare le soluzioni autosimili, "antiche" o "eterne" del flusso di Ricci; generalizzare il flusso ad insiemi non regolari, come varietà riemanniane con singolarità (ad esempio, coni) o, più in generale, spazi metrici (sotto ipotesi di struttura).

Moto per Curvatura Media: Completare lo studio delle singolarità – estendere le tecniche di chirurgia al caso delle ipersuperfici con curvatura media positiva; classificare le soluzioni autosimili, "antiche" o "eterne" del moto per curvatura media; analizzare le proprietà del flusso e delle sue singolarià senza ipotesi addizionali per un dato iniziale "generico".

Moto per Curvatura di Networks di Curve: Analisi della situazione in cui la lunghezza di una o più curve va a zero mentre la curvatura non è limitata – estensione dei risultati del caso a curvatura controllata; non–genericità della formazione di vertici con molteplicità 5; analisi del cambio di struttura topologica del network pre/post formazione di una singolarità; studio dell'evoluzione di interfacce 2–dimensionali di un sistema multifase in $\mathbb{R}^3$.

Referenze

[1] L. Bronsard & F. Reitich – "On three–phase boundary motion and the singular limit of a vector–valued Ginzburg–Landau equation", *Arch. Rat. Mech. Anal.* **124**, 1993, 355–379.

[2] M. Gage & R. Hamilton – "The heat equation shrinking convex plane curves", *J. Diff. Geom.* **23**, 1986, 69–95.

[3] M. Grayson – "The heat equation shrinks embedded plane curves to round points", *J. Diff. Geom.* **26**, 1987, 285–314.

[4] R. Hamilton – "Three–manifolds with positive Ricci curvature", *J. Diff. Geom.* **17**, 1982, 255–306.

[5] G. Huisken – "Flow by mean curvature of convex surfaces into spheres", *J. Diff. Geom.* **20**, 1984, 237–266.

[6] A. Magni, C. Mantegazza & M. Novaga – "Motion by curvature of planar networks – II", *Annali Sc. Norm. Super. Pisa CL. Sci.* , 2016, 117–144.

[7] C. Mantegazza, M. Novaga & V. M. Tortorelli – "Motion by curvature of planar networks", *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* **3**, 2004, 235–324.

[8] G. Perelman – "The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications", *ArXiv Preprint Server*, 2002.