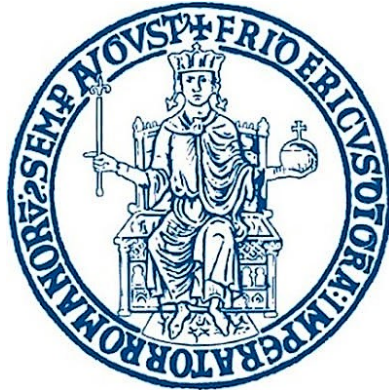


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II
SCUOLA POLITECNICA DELLE SCIENZE DI BASE



DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E APPLICAZIONI
"RENATO CACCIOPOLI"
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Frattali Autosimilari Il Metodo di Hutchinson

TESI DI LAUREA

RELATORE
PROF. CARLO MANTEGAZZA

CANDIDATO
ANTONIO PETRUCCI
Matr. N87002132

ANNO ACCADEMICO 2024/2025

Indice

Introduzione	1
Capitolo 1. Preliminari	4
1.1. Contrazioni e similitudini	4
1.2. Misure e dimensione di Hausdorff	7
Capitolo 2. Insiemi invarianti e autosimilari	11
2.1. Esistenza di insiemi invarianti	11
2.2. Insiemi autosimilari	14
2.3. Esempi	15
Capitolo 3. Il metodo di Hutchinson	26
3.1. Proprietà degli insiemi invarianti	26
3.2. Misure invarianti	28
3.3. La dimostrazione del metodo	41
Referenze	51
Ringraziamenti	52

Introduzione

Le origini della teoria degli insiemi frattali risalgono al XIX secolo, quando vennero introdotti, in modo isolato, alcuni esempi notevoli – quali l'insieme di Cantor (1869) e le curve di Peano (1890) e di Hilbert (1891) che “riempiono” il piano – che presentavano proprietà geometriche inusuali, destinate a essere riconosciute solo molto più tardi come caratteristiche tipiche dei frattali. È tuttavia solo negli anni settanta del Novecento che Benoît Mandelbrot [11] pose tali oggetti al centro di uno studio sistematico, coniando il termine “frattale” e dimostrando come insiemi dotati di dimensione non intera e di caratteristiche “autosimilari”, potessero costituire delle descrizioni matematiche per una vasta classe di fenomeni naturali: per esempio, linee costiere, nuvole, turbolenze, andamenti borsistici, etc.

Ciò che rende i frattali matematicamente significativi è proprio la loro autosimilarità; la proprietà per cui un oggetto geometrico può essere scomposto in parti, ciascuna delle quali è una copia in scala di se stesso. Volendo essere precisi, questa descrizione fa riferimento ad una tipologia di insiemi la cui autosimilarità è detta “esatta”, ovvero insiemi in cui la riproduzione in scala della loro struttura è completa, mentre si dice invece “statistica” se tale riproduzione è soltanto parziale (cioè solo di parti dell'insieme o solo di alcune proprietà). Esempi “classici” di insiemi esattamente autosimilari, che discuteremo in dettaglio nella Sezione 2.3, sono l'insieme di Cantor, la curva di Koch e il triangolo di Sierpiński, mentre un esempio di insieme che possiede un'autosimilarità solo parziale è il famoso *insieme di Mandelbrot* [18].

Noi ci concentreremo sulla teoria riguardante l'autosimilarità esatta, dove la misura di Hausdorff è lo strumento naturale per studiare questi oggetti. In particolare, la correlata dimensione di Hausdorff, che generalizza la nozione classica di dimensione e permette di assegnare valori frazionari a strutture che non sono né puntiformi né “piene”, è il concetto più adeguato per misurarne la “grandezza”.

Fino all'inizio degli anni '80 mancava un quadro teorico per analizzare in modo sistematico gli insiemi autosimilari. Questo vuoto è stato colmato dal lavoro di John E. Hutchinson del 1981, “*Fractals and self-similarity*” [10], in cui viene introdotto quello che oggi è noto come *metodo di Hutchinson*. Tale metodo consiste nell'associare a un insieme autosimilare in \mathbb{R}^n , una famiglia finita di similitudini contrattive (quelle che lo “replicano” al suo interno) e studiare le caratteristiche dell'insieme attraverso le proprietà di tale famiglia, in particolare, calcolarne esplicitamente la dimensione di Hausdorff.

Questa tesi si propone di esporre dettagliatamente metodo di Hutchinson, la cui dimostrazione utilizza risultati di geometria, di analisi funzionale e di teoria della misura. L'obiettivo finale sarà ottenere il teorema che sta al cuore del metodo (Teorema 3.32) che asserisce che, sotto un'ipotesi tecnica sulla famiglia di similitudini contrattive S_1, \dots, S_N che “descrive” un insieme autosimilare, detta “condizione dell'insieme aperto” (Definizione 3.26), la

dimensione di Hausdorff D di tale insieme è determinata dal risolvere l'equazione

$$\sum_{i=1}^N r_i^D = 1,$$

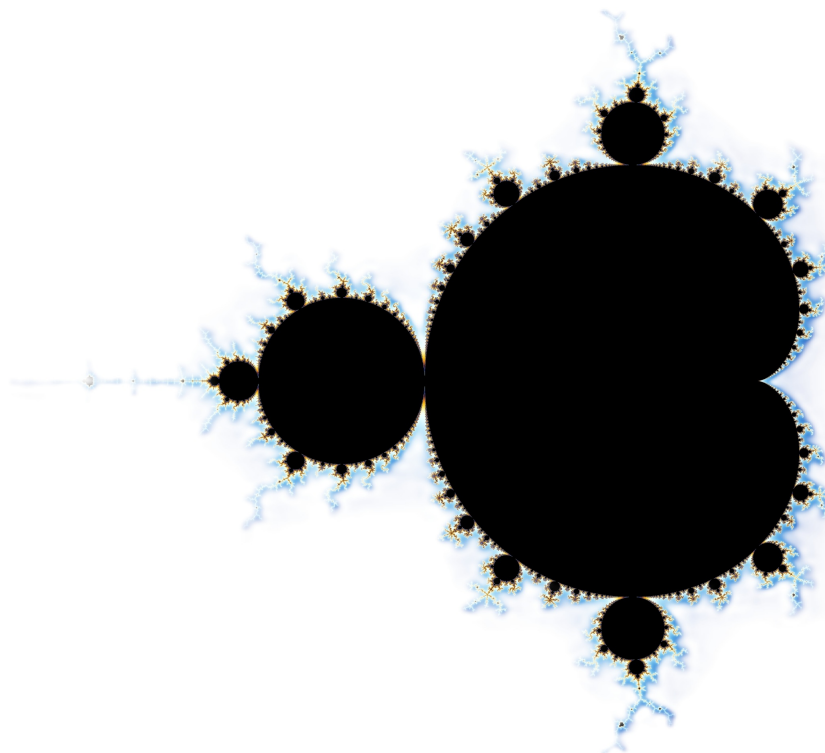
dove i valori $r_i \in (0, 1)$ sono i fattori di contrazione delle similitudini S_i .

La semplicità di questa conclusione mostra chiaramente l'importanza "operativa" del metodo, che lo rende fondamentale per la teoria degli insiemi autosimilari, in quanto la condizione dell'insieme aperto non è particolarmente restrittiva. Concluderemo infatti la tesi applicando il metodo a una serie di frattali autosimilari "classici" e "moderni", quindi calcolandone la dimensione di Hausdorff.

Il "grande assente" dalla teoria di Hutchinson è sfortunatamente, il frattale più conosciuto (anche al grande pubblico fuori dalla matematica), cioè l'*insieme di Mandelbrot* rappresentato nella figura che segue e definito come l'insieme dei punti $c \in \mathbb{C}$ tali che la successione definita per ricorrenza da

$$z_0 = 0 \quad \text{e} \quad z_{n+1} = z_n^2 + c,$$

è limitata in \mathbb{C} .



Per molte informazioni dettagliate sulle proprietà dell'insieme di Mandelbrot, si veda per esempio [18] e le referenze ivi menzionate.

Non è noto se l'insieme di Mandelbrot, oltre che a proprietà di autosimilarità statistica, possieda una "esatta" autosimilarità (si veda la discussione in [12] riguardo a tale possibilità), tuttavia è possibile studiarne alcune proprietà tramite estensioni della teoria (si veda [3, Sezione 8.3], per esempio). La dimensione di Hausdorff del suo bordo si determina con un

metodo diverso da quello di Hutchinson e risulta essere uguale a 2 (si veda [16]). Ovviamente, 2 è anche la dimensione di Hausdorff dell'intero insieme di Mandelbrot, contenendo dei punti interni.

CAPITOLO 1

Preliminari

Raccogliamo in questo primo capitolo una serie di definizioni, nozioni e risultati che ci serviranno in seguito.

1.1. Contrazioni e similitudini

DEFINIZIONE 1.1. Data $f : X \rightarrow X$ da uno spazio metrico (X, d) in sé, diremo che $f : X \rightarrow X$ è una mappa *lipschitziana* se

$$\text{Lip } f = \sup_{x \neq y} \frac{d(f(x), f(y))}{d(x, y)} < +\infty$$

e chiameremo $\text{Lip } f$ *costante di Lipschitz di f* .

Diremo inoltre che f è una *contrazione* se $\text{Lip } f < 1$.

Si ha il seguente fondamentale teorema.

TEOREMA 1.2 (Teorema di Banach–Caccioppoli). *Ogni contrazione $f : X \rightarrow X$ di uno spazio metrico completo (X, d) in sé ha un unico punto fisso $x \in X$, ossia tale che $f(x) = x$. Inoltre, per ogni $x_0 \in X$, la successione definita per ricorrenza da $x_n = f(x_{n-1})$ converge a x in X .*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo in primo luogo l'unicità del punto fisso di f . Supponiamo infatti che esistano $x \neq y \in X$ entrambi punti fissi di f , allora dal momento che f è una contrazione, si avrebbe

$$0 < d(x, y) = d(f(x), f(y)) < d(x, y),$$

che è chiaramente una contraddizione. Si noti che non abbiamo usato l'ipotesi di completezza dello spazio X .

Per mostrare l'esistenza di un punto fisso, consideriamo $x_0 \in X$ e definiamo la successione per ricorrenza

$$x_n = f(x_{n-1})$$

e mostriamo che è di Cauchy. Iniziamo stimando la distanza tra x_k e x_{k+1} : poiché f è lipschitziana, abbiamo

$$d(x_{k+1}, x_k) = d(f(x_k), f(x_{k-1})) \leq (\text{Lip } f) d(x_k, x_{k-1})$$

e iterando il procedimento k volte, otteniamo

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq (\text{Lip } f)^k d(x_1, x_0).$$

Se dunque $m > n$, per la disuguaglianza triangolare, abbiamo

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=n}^{m-1} d(x_{k+1}, x_k) \leq \sum_{k=n}^{m-1} (\text{Lip } f)^k d(x_1, x_0) = (\text{Lip } f)^n d(x_1, x_0) \sum_{k=0}^{m-n-1} (\text{Lip } f)^k,$$

da cui,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{(\text{Lip } f)^n}{1 - \text{Lip } f} d(x_1, x_0).$$

Per concludere, osserviamo che se $n \rightarrow \infty$, si ha $d(x_n, x_m) \rightarrow 0$, da cui la successione x_n è di Cauchy e per la completezza di X , esiste $x \in X$ tale che $x_n \rightarrow x$ in X .

Dalla continuità di f (essendo lipschitziana), passando al limite per $n \rightarrow \infty$ ambo i lati dell'equazione

$$x_n = f(x_{n-1}),$$

otteniamo $x = f(x)$, quindi x è il punto fisso di f . □

DEFINIZIONE 1.3 (Similitudini). Una mappa $S : X \rightarrow X$ da uno spazio metrico (X, d) in sé si dice *similitudine*, se esiste $r > 0$, detto *fattore di scala* di S , tale che

$$d(S(x), S(y)) = rd(x, y),$$

per ogni $x, y \in X$.

Diremo inoltre che una similitudine S è *contrattiva* se $r < 1$

Segue dal teorema di Banach–Caccioppoli che una similitudine contrattiva di uno spazio metrico completo in sé ha un unico punto fisso, in quanto (in generale) una similitudine S con fattore di scala $r > 0$, soddisfa $\text{Lip } S = r$.

LEMMA 1.4. Se $\{f_1, \dots, f_N\}$ è una famiglia finita di contrazioni di uno spazio metrico (X, d) in sé. Allora, per ogni $x_0 \in X$, esiste un raggio $R > 0$ tale che la palla chiusa $\overline{B}_R(x_0)$ di X , soddisfa

- (1) $f_i(\overline{B}_R(x_0)) \subseteq \overline{B}_R(x_0)$, per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$,
- (2) per ogni palla B (aperta o chiusa) di X , esiste $p_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $p \geq p_0$, si ha

$$f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(B) \subseteq \overline{B}_R(x_0),$$

per ogni $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, N\}$.

In particolare, queste conclusioni valgono per ogni famiglia finita di similitudini contrattive.

DIMOSTRAZIONE. Sia $C = \max\{C_1, \dots, C_N\} < 1$, dove C_i sono le costanti di Lipschitz delle contrazioni f_i . Fissato $x_0 \in X$, consideriamo

$$D = \max_{1 \leq i \leq N} d(f_i(x_0), x_0) \quad \text{e} \quad R > \frac{D}{1 - C}.$$

Allora $\overline{B}_R(x_0)$ soddisfa $f_i(\overline{B}_R(x_0)) \subseteq \overline{B}_R(x_0)$ per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, dunque si ha il punto (1). Infatti, se $x \in \overline{B}_R(x_0)$, si ha

$$d(f_i(x), x_0) \leq d(f_i(x), f_i(x_0)) + d(f_i(x_0), x_0) \leq C d(x, x_0) + D \leq CR + D < R,$$

per la scelta di $R > 0$ sopra, quindi $f_i(x) \in \overline{B}_R(x_0)$. Sia

$$D' = \max_{x \in B} d(x, x_0),$$

allora, se $x \in B$, si ha

$$\begin{aligned}
d(f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(x), x_0) &\leq d(f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(x), f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(x_0)) \\
&\quad + d(f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(x_0), f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_{p-1}}(x_0)) \\
&\quad \dots \\
&\quad + d(f_{i_1}(x_0), x_0) \\
&\leq C^p d(x, x_0) + C^{p-1} d(f_{i_p}(x_0), x_0) + \dots + d(f_{i_1}(x_0), x_0) \\
&\leq C^p D' + D(C^{p-2} + \dots + 1) \\
&< C^p D' + \frac{D}{1-C}.
\end{aligned}$$

Se dunque $p \in \mathbb{N}$ è sufficientemente grande, essendo $C < 1$ e ricordando che $R > \frac{D}{1-C}$, si ha

$$C^p D' < R - \frac{D}{1-C},$$

quindi,

$$d(f_{i_1} \circ \dots \circ f_{i_p}(x), x_0) < R,$$

da cui la conclusione al punto (2). □

Vediamo ora alcune proprietà delle similitudini di \mathbb{R}^n .

DEFINIZIONE 1.5. Definiamo le seguenti mappe di \mathbb{R}^n in sé:

- sia $\mu_r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'omotetia $\mu_r(x) = rx$, con $r > 0$,
- sia $\tau_b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la traslazione $\tau_b(x) = x - b$.

DEFINIZIONE 1.6. Una mappa $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è detta *trasformazione ortogonale* se conserva il prodotto scalare di \mathbb{R}^n , cioè $\langle O(x), O(y) \rangle = \langle x, y \rangle$, per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$ (dunque, conserva anche la norma di ogni vettore di \mathbb{R}^n).

PROPOSIZIONE 1.7. Una mappa $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una similitudine se e solo se $S = \mu_r \circ \tau_b \circ O$ per un'omotetia μ_r , traslazione τ_b e trasformazione ortogonale O .

DIMOSTRAZIONE. Data la similitudine S con fattore di scala $r > 0$, consideriamo la funzione $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da $g(x) = r^{-1}(S(x) - S(0))$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Allora,

$$S(x) = rg(x) + S(0) = r(g(x) + r^{-1}S(0))$$

da cui

$$S = \mu_r \circ \tau_{-r^{-1}S(0)} \circ g.$$

Per avere la tesi è allora sufficiente mostrare che g è una trasformazione ortogonale. Poiché

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} [\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2] = \frac{1}{2} [d(0, x)^2 + d(0, y)^2 - d(x, y)^2],$$

si ha

$$\begin{aligned}\langle g(x), g(y) \rangle &= \frac{1}{2} [\|g(x)\|^2 + \|g(y)\|^2 - \|g(x) - g(y)\|^2] = \\ &= \frac{1}{2r^2} [\|S(x) - S(0)\|^2 + \|S(y) - S(0)\|^2 - \|S(x) - S(y)\|^2] = \\ &= \frac{1}{2r^2} [d(S(x), S(0))^2 + d(S(y), S(0))^2 - d(S(x), S(y))^2] = \\ &= \frac{1}{2} [d(x, 0)^2 + d(y, 0)^2 - d(x, y)^2] = \langle x, y \rangle.\end{aligned}$$

Viceversa, se $S = \mu_r \circ \tau_b \circ O$, allora,

$$d(S(x), S(y)) = d(r(O(x) - b), r(O(y) - b)) = rd(O(x), O(y)) = rd(x, y),$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che

$$d(O(x), O(y)) = \|O(x) - O(y)\| = \|O(x - y)\| = \|x - y\| = d(x, y).$$

□

Sia $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una similitudine contrattiva, di punto fisso $a \in \mathbb{R}^n$ e fattore di scala $r > 0$. Se allora consideriamo la trasformazione ortogonale

$$O(x) = r^{-1}[S(x + a) - a],$$

si ha

$$S(x + a) = rO(x) + a$$

e con un cambio di variabile,

$$S(x) = rO(x - a) + a,$$

quindi concludiamo che

$$S = \tau_a^{-1} \circ \mu_r \circ O \circ \tau_a.$$

Dunque, dal momento che S è caratterizzata dal suo punto fisso $a \in \mathbb{R}^n$, dal suo fattore di scala $r > 0$ e dalla trasformazione ortogonale $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, possiamo introdurre la notazione

$$S = (a, r, O).$$

Segue che se $S_1 = (a_1, r_1, O_1)$ e $S_2 = (a_2, r_2, O_2)$, allora $S_1 \circ S_2 = (a, r, O)$, con $r = r_1 r_2$, $O = O_1 \circ O_2$ e

$$a = a_2 + (I - r_1 r_2 O_1 O_2)^{-1} (I - r_1 O_1)(a_2 - a_1).$$

1.2. Misure e dimensione di Hausdorff

DEFINIZIONE 1.8. Considerato E un sottoinsieme di uno spazio metrico (X, d) e $s \geq 0$. Allora, per ogni $\delta > 0$, definiamo le *premisure di Hausdorff* come

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \omega_s \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\text{diam } U_i}{2} \right)^s : U_i \text{ ricoprimento di } E \text{ con } \text{diam } U_i \leq \delta, \text{ per ogni } i \in \mathbb{N} \right\}$$

con

$$\omega_s = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2 + 1)}$$

e dove Γ è la *funzione Gamma di Eulero* (se $s \in \mathbb{N}$, allora ω_s è la misura di Lebesgue della palla unitaria di \mathbb{R}^s).

Dal momento che al diminuire di $\delta > 0$ la famiglia dei ricoprimenti ammissibili di E si riduce, si ha che $\delta \rightarrow \mathcal{H}_\delta^s(E)$ è una funzione monotona noncrescente, dunque esiste il limite di tale funzione, per $\delta \rightarrow 0$.

DEFINIZIONE 1.9 (Misura di Hausdorff). La *misura di Hausdorff s -dimensionale* di un insieme $E \subseteq X$ è definita come

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

Si ha allora che \mathcal{H}^s è una misura esterna su X , per ogni $s \geq 0$ (si veda [8, Section 3.1]). Inoltre, si mostra facilmente che \mathcal{H}^s è una *misura esterna metrica*, cioè per ogni $E, F \subseteq X$ con $d(E, F) > 0$, si ha

$$\mathcal{H}^s(E \cup F) = \mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F),$$

quindi, per il *criterio di Carathéodory* [7, Section 1.1, Theorem 5], la misura associata per Carathéodory (si veda [2, Section 1.5]), che indichiamo nello stesso modo, è boreliana.

PROPOSIZIONE 1.10. Per le misure \mathcal{H}^s valgono le seguenti proprietà, per ogni insieme $E \subseteq X$:

- (1) $\mathcal{H}^s(E)$ è monotona noncrescente in s ,
- (2) se $\mathcal{H}^s(E) = 0$ allora $\mathcal{H}^t(E) = 0$ per ogni $t > s$,
- (3) se $\mathcal{H}^s(E) > 0$ allora $\mathcal{H}^t(E) > 0$ per ogni $t < s$,
- (4) se $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$ allora $\mathcal{H}^t(E) = 0$ per ogni $t > s$,
- (5) se $\mathcal{H}^s(E) > 0$ allora $\mathcal{H}^t(E) = +\infty$ per ogni $t < s$.

DIMOSTRAZIONE. Se $t > s$ e U_i è un ricoprimento di un insieme $E \subseteq X$ con $\text{diam } U_i \leq \delta$, allora

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^t(E) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \omega_t \left(\frac{\text{diam } U_i}{2} \right)^t \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_t}{\omega_s} \left(\frac{\text{diam } U_i}{2} \right)^{t-s} \omega_s \left(\frac{\text{diam } U_i}{2} \right)^s \\ &\leq C \delta^{t-s} \omega_s \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\text{diam } U_i}{2} \right)^s, \end{aligned}$$

dove $C = \omega_t / (\omega_s 2^{t-s})$, che non dipende da δ .

Passando all'estremo inferiore sui ricoprimenti possibili U_i di E , otteniamo dunque

$$\mathcal{H}^t(E) \leq C \delta^{t-s} \mathcal{H}_\delta^s(E).$$

Se $\mathcal{H}^s(E) = +\infty$, la conclusione $\mathcal{H}^t(E) \leq \mathcal{H}^s(E)$ è ovvia, altrimenti, se $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$, passando al limite per $\delta \rightarrow 0$, si ha $\delta^{t-s} \rightarrow 0$, quindi $\mathcal{H}^t(E) = 0$. Da ciò segue il primo punto, che implica chiaramente il secondo e il terzo.

Per provare il quarto punto, che è equivalente al quinto, supponiamo $t > s$ e che $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta \in (0, 1)$ tale che

$$\mathcal{H}^t(E) \leq \mathcal{H}_\delta^t(E) + \varepsilon \leq \omega_s \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\text{diam}(C_i)}{2} \right)^t + \varepsilon,$$

per un qualunque ricoprimento di E con insiemi C_i di diametro minore di δ . Se dunque consideriamo un ricoprimento di E con insiemi C_i come sopra e tali che

$$\omega_s \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\text{diam}(C_i)}{2} \right)^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(E) + \varepsilon \leq \mathcal{H}^s(E) + \varepsilon < +\infty,$$

si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^t(E) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\text{diam}(C_i)}{2} \right)^t + \varepsilon \\ &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \omega_s \left(\frac{\text{diam}(C_i)}{2} \right)^s \left(\frac{\delta}{2} \right)^{t-s} + \varepsilon \\ &\leq (\mathcal{H}^s(E) + \varepsilon) \left(\frac{\delta}{2} \right)^{t-s} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Essendo $\mathcal{H}^s(E) < +\infty$, possiamo mandare $\delta \rightarrow 0$ e per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ concludiamo che $\mathcal{H}^t(E) = 0$, come volevamo dimostrare. \square

DEFINIZIONE 1.11 (Dimensione di Hausdorff). Definiamo la *dimensione di Hausdorff* di un insieme $E \subseteq X$ come

$$\dim_H E = \inf \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup \{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(E) = +\infty\}.$$

Osserviamo che se per $E \subseteq X$, si ha $0 < \mathcal{H}^s(E) < +\infty$, allora $\dim_H E = s$ (per le proprietà elencate nella Proposizione 1.10).

PROPOSIZIONE 1.12. *Valgono le seguenti proprietà della dimensione di Hausdorff:*

- (1) Se $E \subseteq F$, allora $\dim_H E \leq \dim_H F$.
- (2) Se E_n è una successione di insiemi e $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, allora

$$\dim_H E = \sup_{i \in \mathbb{N}} \dim_H E_i.$$

- (3) Se E è numerabile, allora $\dim_H E = 0$.

DIMOSTRAZIONE. Per mostrare la proprietà (1), osserviamo che se $E \subseteq F$, si ha $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F)$ per ogni $s \geq 0$. Allora $\mathcal{H}^r(F) = 0$, per ogni $r > \dim_H F$, che implica $\mathcal{H}^r(E) = 0$ per ogni $r > \dim_H F$, quindi $\dim_H E \leq \dim_H F$.

Dalla proprietà (1), segue che

$$\dim_H E \geq \dim_H E_i$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$. Se $\sup_{i \in \mathbb{N}} \dim_H E_i = +\infty$, per quanto appena visto, si ha $\dim_H E = +\infty$ e quindi la tesi. Sia allora $\sup_{i \in \mathbb{N}} \dim_H E_i < +\infty$ e $s > \dim_H E_i$, per ogni $i \in \mathbb{N}$, dunque per la σ -subadditività di \mathcal{H}^s si ha

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}^s(E_i).$$

Per la Definizione 1.11 di dimensione di Hausdorff, si ha che $\mathcal{H}^s(E_i) = 0$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ e $s \geq \sup_{i \in \mathbb{N}} \dim_H E_i$, quindi $\mathcal{H}^s(E) = 0$ per ogni $s \geq \sup_{i \in \mathbb{N}} \dim_H E_i$, ovvero $\dim_H E \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} \dim_H E_i$, da cui il punto (2).

Riguardo al punto (3), osserviamo che se E è numerabile allora $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$, dove gli E_i sono singoli punti, dunque per il punto (2) e il fatto che $\mathcal{H}^0(\{x\}) = \#\{x\} = 1$, quindi $\dim_H \{x\} = 0$ per ogni $x \in X$, si ha la tesi. \square

Se lo spazio metrico X è \mathbb{R}^n , si mostra che \mathcal{H}^n è la misura (esterna) di Lebesgue (si veda [9, Proposition 11.20]). In particolare, segue che $\dim_H \mathbb{R}^n = n$ e che ogni sottoinsieme ha dimensione di Hausdorff minore o uguale a n .

PROPOSIZIONE 1.13. *Consideriamo $f : X \rightarrow X$ una mappa lipschitziana, allora*

$$\mathcal{H}^s(f(E)) \leq (\text{Lip } f)^s \mathcal{H}^s(E).$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $C = \text{Lip } f$. Considerato U_i un ricoprimento di $E \subseteq X$ con $\text{diam } U_i \leq \delta$, chiamiamo $V_i = f(U_i)$. Allora, poiché

$$\text{diam } V_i \leq C \text{diam } U_i,$$

si ha che V_i è un ricoprimento di $f(E)$ con diametri limitati da $C\delta$, dunque

$$\mathcal{H}_{C\delta}^s(f(E)) \leq \omega_s \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\text{diam } V_i}{2} \right)^s \leq C^s \omega_s \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\text{diam } U_i}{2} \right)^s.$$

Per cui, passando all'estremo inferiore sui ricoprimenti di E , si ha

$$\mathcal{H}_{C\delta}^s(f(E)) \leq C^s \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

e facendo tendere $\delta \rightarrow 0$ si ottiene la tesi. \square

PROPOSIZIONE 1.14. *Sia $S : X \rightarrow X$ una similitudine con fattore di scala $r > 0$ allora,*

$$\mathcal{H}^s(S(E)) = r^s \mathcal{H}^s(E).$$

DIMOSTRAZIONE. L'inversa S^{-1} di S è anch'essa una similitudine di fattore di scala r^{-1} , dunque

$$d(S(x), S(y)) = rd(x, y)$$

e

$$d(S^{-1}(x), S^{-1}(y)) = r^{-1}d(x, y),$$

per ogni $x, y \in E$. Applicando allora la Proposizione 1.13 a S su E e a S^{-1} su $S(E)$, abbiamo

$$\mathcal{H}^s(S(E)) \leq r^s \mathcal{H}^s(E) \quad \text{e} \quad \mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(S^{-1}(S(E))) \leq r^{-s} \mathcal{H}^s(S(E)),$$

da cui segue la tesi. \square

PROPOSIZIONE 1.15. *Consideriamo $E \subseteq X$ e $f : X \rightarrow X$ una mappa lipschitziana. Allora $\dim_H f(E) \leq \dim_H E$.*

DIMOSTRAZIONE. Dalla Proposizione 1.13 si ha che $\mathcal{H}^s(f(E)) \leq (\text{Lip } f)^s \mathcal{H}^s(E)$. Dunque, se $\dim_H E < s$, allora $\mathcal{H}^s(E) = 0$ e $\mathcal{H}^s(f(E)) \leq (\text{Lip } f)^s \mathcal{H}^s(E) = 0$, quindi $\dim_H f(E) \leq s$ per ogni $s > \dim_H E$, quindi $\dim_H f(E) \leq \dim_H E$. \square

Segue immediatamente da questa proposizione che se $f : X \rightarrow X$ è una trasformazione bilipschitziana, cioè per due costanti positive C_1 e C_2 , si ha

$$C_1 d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq C_2 d(x, y),$$

per ogni $x, y \in X$, $\dim_H f(E) = \dim_H E$. In particolare, questo vale per ogni similitudine, che è ovviamente bilipschitziana con entrambe le costanti C_1 e C_2 pari al fattore di scala.

Insiemi invarianti e autosimilari

Quello che intuitivamente ci si aspetta da un insieme per poterlo dire “autosimilare” è che sia uguale a un’unione di “copie” (più piccole) disgiunte di se stesso, dove ogni “copia” è un’immagine dell’insieme stesso per una similitudine contrattiva. Per studiare questi insiemi è allora naturale analizzare tali famiglie di similitudini e nel fare ciò, considerare anche insiemi tali che queste “copie” possano sovrapporsi. Questi insiemi più generali si dicono *invarianti* (per una data famiglia di similitudini) e le loro proprietà, che studieremo in questo capitolo, varranno poi anche per quelli autosimilari. Il risultato principale che vedremo, il Teorema 2.8, è che a partire da una famiglia (finita) di similitudini contrattive da uno spazio metrico completo in sé, esiste ed è unico un insieme compatto non vuoto che sia invariante per l’azione di tali similitudini.

Da qui in poi, in tutta la tesi, con il termine “similitudine” indicheremo sempre, a meno di specificarlo esplicitamente, una similitudine contrattiva, cioè con fattore di scala $r < 1$, che in particolare è una contrazione.

DEFINIZIONE 2.1. Consideriamo E un sottoinsieme di uno spazio metrico (X, d) e $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di X in sé. Definiamo l’immagine di E per \mathcal{S} come

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^N S_i(E).$$

Definiamo inoltre $S^0(E) = E$, $S^1(E) = S(E)$ e ricorsivamente, $S^n(E) = S(S^{n-1}(E))$. L’operatore S è detto *operatore di Hutchinson*.

DEFINIZIONE 2.2 (Insiemi invarianti). Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di uno spazio metrico (X, d) in sé. Allora un sottoinsieme E di X si dice *invariante per \mathcal{S}* se

$$S(E) = E.$$

2.1. Esistenza di insiemi invarianti

Vogliamo mostrare in questa sezione che data una qualunque famiglia di similitudini \mathcal{S} da uno spazio metrico completo (X, d) in sé, esiste ed è unico un insieme compatto non vuoto di X che sia invariante per \mathcal{S} . A tale scopo definiremo una distanza sulla famiglia dei compatti non vuoti di X tale che lo spazio metrico risultante sia completo e l’operatore S (Definizione 2.1) sia una contrazione da tale spazio in sé, rientrando dunque nelle ipotesi del Teorema 1.2 per il quale si ha la conclusione.

In uno spazio metrico (X, d) , introduciamo la seguente notazione per l’*r*-ingrassato (o l’*r*-intorno) di un insieme $A \subseteq X$:

$$A_r = \{x \in X : d(x, A) \leq r\}$$

per ogni $r \in [0, +\infty)$ (si noti che $A_0 = \bar{A}$).

DEFINIZIONE 2.3 (Distanza di Hausdorff). Siano A, B sottoinsiemi limitati di uno spazio metrico (X, d) . Definiamo la *distanza di Hausdorff* tra A e B come

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) = \inf \{r \geq 0 : A \subseteq B_r, B \subseteq A_r\}.$$

Notiamo che definita in questo modo la distanza di Hausdorff è “ben posta”, nel senso che assume valori finiti, in quanto l’insieme di cui si considera l’estremo inferiore è non vuoto, essendo gli insiemi A e B limitati. Inoltre si ha che

$$d_{\mathcal{H}}(A, B) \leq r \quad \text{se e solo se} \quad A \subseteq B_r \quad \text{e} \quad B \subseteq A_r,$$

e $d_{\mathcal{H}}(A, B) = r$, se nessun $r' < r$ gode della stessa proprietà.

Dal momento che è facilmente dimostrabile che per un qualunque sottoinsieme A di X , si ha $d_{\mathcal{H}}(\overline{A}, A) = 0$, la distanza di Hausdorff non è una distanza sull’intera famiglia dei sottoinsiemi limitati di X , mentre se la restringiamo alla famiglia \mathcal{K} dei compatti non vuoti di X (che sono chiusi e limitati, in quanto lo spazio è di Hausdorff), lo diventa.

PROPOSIZIONE 2.4. Sia \mathcal{K} la famiglia dei sottoinsiemi compatti non vuoti di uno spazio metrico (X, d) , allora la distanza di Hausdorff $d_{\mathcal{H}}$ è una distanza su \mathcal{K} .

DIMOSTRAZIONE. La nonnegatività e la simmetria seguono ovviamente dalla definizione di $d_{\mathcal{H}}$. Proviamo la disuguaglianza triangolare. Siano $A, B, C \in \mathcal{K}$, con distanze di Hausdorff rispettivamente $r' = d_{\mathcal{H}}(A, B)$ e $r'' = d_{\mathcal{H}}(B, C)$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, valgono le seguenti inclusioni

$$A \subseteq B_{r'+\varepsilon}, \quad B \subseteq A_{r'+\varepsilon}, \quad B \subseteq C_{r''+\varepsilon} \quad \text{e} \quad C \subseteq B_{r''+\varepsilon},$$

da cui,

$$A \subseteq C_{r'+r''+2\varepsilon} \quad \text{e} \quad C \subseteq A_{r'+r''+2\varepsilon},$$

quindi, si ha che $d_{\mathcal{H}}(A, C) \leq r' + r'' + 2\varepsilon$ e mandando $\varepsilon \rightarrow 0$, otteniamo

$$d_{\mathcal{H}}(A, C) \leq d_{\mathcal{H}}(A, B) + d_{\mathcal{H}}(B, C).$$

Proviamo infine che solo due compatti uguali possono avere distanza nulla. Supponiamo infatti $d_{\mathcal{H}}(A, B) = 0$. Allora valgono le due inclusioni $A \subseteq \overline{B}$ e $B \subseteq \overline{A}$. Poiché A e B sono entrambi compatti, dunque chiusi, abbiamo che $A = B$. \square

Dimostriamo ora la completezza dello spazio metrico $(\mathcal{K}, d_{\mathcal{H}})$.

DEFINIZIONE 2.5. Un sottoinsieme E di uno spazio metrico (X, d) è *totalmente limitato* se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento finito di E con palle aperte di raggio ε , cioè

$$E \subseteq \bigcup_{n=1}^N B_{\varepsilon}(x_n).$$

Si ha allora la seguente caratterizzazione dei compatti di uno spazio metrico completo (si veda [5, Corollary 3.6, Chapter XIV]).

PROPOSIZIONE 2.6. Sia (X, d) uno spazio metrico completo, allora un insieme $K \subseteq X$ è compatto se e solo se è chiuso e totalmente limitato.

TEOREMA 2.7. L’insieme \mathcal{K} dei sottoinsiemi compatti non vuoti di uno spazio metrico completo (X, d) , con la distanza di Hausdorff $d_{\mathcal{H}}$ è uno spazio metrico completo.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo K_n una successione di Cauchy in $(\mathcal{K}, d_{\mathcal{H}})$. Definiamo il seguente insieme

$$K = \{x \in X : \text{esiste una successione } x_{n_k} \text{ con } x_{n_k} \in K_{n_k} \text{ tale che } x_{n_k} \rightarrow x\},$$

tramite un procedimento diagonale si ha che è un chiuso di X . Essendo K_n una successione di Cauchy, per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $n_k \in \mathbb{N}$ tale che $d_{\mathcal{H}}(K_m, K_{n_k}) < 1/2^k$, per ogni $m \geq n_k$. Possiamo dunque scegliere induttivamente (per la definizione della distanza di Hausdorff) una successione di punti $x_{n_k} \in K_{n_k}$ tale che

$$d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq d_{\mathcal{H}}(K_{n_{k+1}}, K_{n_k}) < 1/2^k.$$

Segue che x_{n_k} è una successione di Cauchy in X , quindi converge a un punto $x \in X$ che per definizione, appartiene K , che dunque non è vuoto.

Fissato $\varepsilon > 0$, sia $N \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq N$, si ha $d_{\mathcal{H}}(K_n, K_N) < \varepsilon/2$. Poiché K_N è compatto, esiste un suo ricoprimento finito con palle $B_{\varepsilon/2}(y_1), \dots, B_{\varepsilon/2}(y_m)$.

Per ogni $x \in K$, esiste una successione x_{n_k} con $x_{n_k} \in K_{n_k}$ e $x_{n_k} \rightarrow x$, dunque, per $k \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, $n_k \geq N$ e $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$ e dal momento che $d_{\mathcal{H}}(K_{n_k}, K_N) < \varepsilon/2$, si ha che $x_{n_k} \in (K_N)_{\varepsilon/2}$. Segue che $d(x_{n_k}, y_i) < \varepsilon/2$ per un qualche y_i , da cui $x \in B_{\varepsilon}(y_i)$, il che implica che K è totalmente limitato, quindi compatto, in quanto chiuso, per la Proposizione 2.6.

Per avere la tesi, rimane da mostrare la convergenza di K_n a K rispetto alla distanza $d_{\mathcal{H}}$. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $N \in \mathbb{N}$ tale che per $m, n \geq N$, si ha $d_{\mathcal{H}}(K_m, K_n) < \varepsilon/2$.

Mostriamo che $K \subseteq (K_n)_{\varepsilon}$ per $n \geq N$. Considerato $x \in K$, allora esiste una successione x_{n_k} con $x_{n_k} \in K_{n_k}$ e $x_{n_k} \rightarrow x$, dunque, per $k \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, $n_k \geq N$ e $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon/2$. Inoltre, per $n \geq N$, si ha $d_{\mathcal{H}}(K_{n_k}, K_n) < \varepsilon/2$, quindi esiste $y \in K_n$ con $d(x_{n_k}, y) < \varepsilon/2$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Mandando allora $k \rightarrow \infty$, otteniamo $d(x, y) < \varepsilon$, dunque $x \in (K_n)_{\varepsilon}$.

Infine mostriamo che $K_n \subseteq K_{\varepsilon}$, per $n \geq N$. Consideriamo $x \in K_n$, allora essendo la successione di compatti di Cauchy, possiamo scegliere induttivamente una successione di punti $x_{n_k} \in K_{n_k}$ tale che $d(x_{n_1}, x) < \varepsilon/2$ e

$$d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \varepsilon/2^k,$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Questa successione è ovviamente di Cauchy in X , dunque converge a un punto $y \in K$ e si ha

$$d(x, y) = \lim_{m \rightarrow \infty} d(x, x_m) \leq d(x, x_{n_1}) + \sum_{k=1}^{\infty} d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) < \varepsilon/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^k < \varepsilon.$$

Quindi $x \in K_{\varepsilon}$, da cui $K_n \subseteq K_{\varepsilon}$, dunque $d_{\mathcal{H}}(K_n, K) \leq \varepsilon$ per ogni $n \geq N$, concludendo la dimostrazione. \square

Possiamo ora dimostrare il teorema di esistenza di insiemi invarianti.

TEOREMA 2.8. Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di uno spazio metrico completo (X, d) in sé, allora esiste uno e un solo sottoinsieme compatto K non vuoto di X , tale che $S(K) = K$ (ossia è invariante per \mathcal{S} , Definizione 2.1). Inoltre, per ogni $E \in \mathcal{K}$, se consideriamo la successione $S^n(E)$ si ha che $S^n(E) \rightarrow K$ in $(\mathcal{K}, d_{\mathcal{H}})$, per $n \rightarrow \infty$.

DIMOSTRAZIONE. Per avere la tesi è sufficiente mostrare che l'operatore S manda \mathcal{K} in sé ed è una contrazione in $(\mathcal{K}, d_{\mathcal{H}})$, dunque applicare il Teorema 1.2.

Chiaramente, se $K \in \mathcal{K}$ allora $S(K) \in \mathcal{K}$, dal momento che è un'unione finita di compatti. Se $H, K \in \mathcal{K}$ con $d_{\mathcal{H}}(H, K) = d$, dunque $H \subseteq K_d$ e $K \subseteq H_d$, si ha

$$S_i(H) \subseteq (S_i(K))_{r_i d} \quad \text{e} \quad S_i(K) \subseteq (S_i(H))_{r_i d}$$

dove $r_i > 0$ sono i fattori di scala delle similitudini S_i , quindi

$$d_{\mathcal{H}}(S_i(H), S_i(K)) \leq r_i d,$$

per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$. Se allora $r = \max\{r_1, \dots, r_N\} < 1$, si ha facilmente che

$$d_{\mathcal{H}}(S(H), S(K)) \leq rd = rd_{\mathcal{H}}(H, K),$$

che è quanto volevamo dimostrare. \square

OSSERVAZIONE 2.9. Si noti che con la stessa linea, la conclusione di questo teorema si ottiene anche se le mappe S_i sono semplicemente delle contrazioni (non viene mai usato in realtà il fatto che siano delle similitudini).

D'ora in poi quando scriveremo "l'insieme invariante per S " ci riferiremo all'unico insieme invariante compatto e non vuoto, dato da questo teorema.

2.2. Insiemi autosimilari

DEFINIZIONE 2.10 (Insiemi autosimilari). Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di uno spazio metrico (X, d) in sé. Allora un sottoinsieme compatto K non vuoto di X si dice *autosimilare per \mathcal{S}* se:

- (1) K è invariante per \mathcal{S} , cioè $S(K) = K$,
- (2) considerato $k = \dim_H K$, si ha $\mathcal{H}^k(K) > 0$ e $\mathcal{H}^k(S_i(K) \cap S_j(K)) = 0$, se $i \neq j$.

Un esempio di insieme invariante ma non autosimilare è l'insieme di Cantor generalizzato con fattore di scala $r > 1/2$, descritto nell'Esempio 2.15. In tal caso, l'insieme invariante per la famiglia di similitudini è $[0, 1]$, che non è autosimilare (per $r > 1/2$).

OSSERVAZIONE 2.11. Mentre per un insieme invariante permettiamo alle sue "copie" date dalle similitudini di sovrapporsi senza restrizioni, per un insieme autosimilare richiediamo che tali sovrapposizioni (se vi sono) siano "piccole" nel senso della misura "naturale" sull'insieme, che è la misura di Hausdorff (con esponente la dimensione di Hausdorff dell'insieme), cioè che tali "copie" siano "essenzialmente" disgiunte.

Introduciamo ora il concetto di dimensione di similarità di una famiglia di similitudini \mathcal{S} , la prima tra gli "oggetti" che legano le proprietà della famiglia \mathcal{S} a quelle del suo insieme invariante K .

DEFINIZIONE 2.12 (Dimensione di similarità). Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di uno spazio metrico (X, d) in sé, con fattori di scala $r_i \in (0, 1)$, per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$. Allora, l'unico valore $D \in \mathbb{R}$ tale che

$$\sum_{i=1}^N r_i^D = 1$$

si dice *dimensione di similarità di \mathcal{S}* .

Osserviamo che questa definizione è ben posta dal momento che se consideriamo la funzione continua e monotona decrescente

$$t \mapsto \gamma(t) = \sum_{i=1}^N r_i^t,$$

si ha $\gamma(0) = N \geq 1$ e $\gamma(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow +\infty$, dunque esiste un unico valore $D \in \mathbb{R}$ tale che

$$\sum_{i=1}^N r_i^D = 1.$$

PROPOSIZIONE 2.13. *Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di uno spazio metrico (X, d) in sé e K il suo insieme invariante. Se $0 < \mathcal{H}^k(K) < +\infty$ (dunque $\dim_H K = k$), allora K è autosimilare se e solo se la dimensione di similarità D di \mathcal{S} coincide con k .*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $0 < \mathcal{H}^k(K) < +\infty$ e K autosimilare per la famiglia di similitudini $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$. Allora, dal momento che $\mathcal{H}^k(S_i(K) \cap S_j(K)) = 0$ per ogni $i \neq j$, si ha

$$\mathcal{H}^k(K) = \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^k(S_i(K)) = \sum_{i=1}^N r_i^k \mathcal{H}^k(K),$$

da cui $\sum_{i=1}^N r_i^k = 1$, quindi $D = k$.

Viceversa, se $D = k$, si ha $0 < \mathcal{H}^D(K) < +\infty$ e

$$\mathcal{H}^D(K) \leq \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^D(S_i(K)) = \sum_{i=1}^N r_i^D \mathcal{H}^D(K) = \mathcal{H}^D(K).$$

Dunque, deve essere

$$\mathcal{H}^D(K) = \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^D(S_i(K)),$$

che implica $\mathcal{H}^D(S_i(K) \cap S_j(K)) = 0$, per ogni $i \neq j$. \square

Chiaramente, questa proposizione fornisce un metodo di calcolo della dimensione di Hausdorff di un insieme, se sappiamo che è autosimilare.

2.3. Esempi

Vediamo alcuni noti esempi di insiemi in \mathbb{R}^n che sono autosimilari o invarianti. Questi insiemi appartengono alla classe di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n solitamente (e spesso informalmente) detti *frattali*, cioè di dimensione frazionaria (non intera). A noi interesserà la sottoclasse di quelli autosimilari, per i quali, sviluppando il *metodo di Hutchinson* nel seguito della tesi, saremo in grado di calcolarne la dimensione di Hausdorff.

Sfortunatamente, in genere questi *frattali autosimilari* non sono “classicamente” introdotti o definiti come degli insiemi invarianti per una famiglia di similitudini. Un esempio è la costruzione “standard” dell’insieme di Cantor per mezzo di successive eliminazioni di intervalli, in cui le similitudini non appaiono, ma se ne mostra l’esistenza “a posteriori” della definizione dell’insieme. Nel nostro contesto, avere delle similitudini che “determinano” (nel senso del Teorema 2.8) tali insiemi è strettamente necessario, in quanto il metodo di Hutchinson è basato sulla loro analisi. Dunque, in varie situazioni in cui si vogliono studiare degli insiemi frattali definiti con procedure diverse (ma “a posteriori” autosimilari), per poter

applicare questo metodo, le similitudini che “determinano” tali insiemi vanno innanzitutto effettivamente trovate esplicitamente.

Sottolineiamo che vi possono essere diverse famiglie di similitudini che hanno lo stesso insieme invariante (un esempio è dato dalla curva di Koch – Esempio 2.18) e ovviamente alcune sono più facili da studiare di altre, dunque la scelta della famiglia di similitudini (eventualmente alternativa, anche in presenza di già una famiglia) in un certo senso, fa parte del metodo.

Per scrivere in modo compatto le similitudini di \mathbb{R}^n , adotteremo la notazione introdotta alla fine della Sezione 1.1, cioè

$$S = (a, r, O)$$

dove $a \in \mathbb{R}^n$ è il punto fisso della similitudine, $r \in (0, 1)$ il suo fattore di scala e $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la trasformazione ortogonale associata.

In alcuni esempi che vedremo, ci servirà il seguente lemma.

LEMMA 2.14. *Sia K_n una successione monotona noncrescente di compatti non vuoti in uno spazio metrico completo (X, d) , allora K_n converge nella metrica di Hausdorff all'intersezione*

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo inizialmente che K è non vuoto, per la proprietà dell'intersezione finita di compatti in uno spazio metrico completo e chiaramente è compatto. La distanza di Hausdorff tra K_n e K è data da

$$d_{\mathcal{H}}(K_n, K) = \sup_{x \in K_n} d(x, K),$$

in quanto $\sup_{x \in K} d(x, K_n) = 0$, essendo $K \subseteq K_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Supponiamo per assurdo che tale distanza $d_{\mathcal{H}}(K_n, K) \not\rightarrow 0$ per $n \rightarrow \infty$, allora esistono $\varepsilon > 0$ e una sottosuccessione $x_{n_k} \in K_{n_k}$ tali che

$$d(x_{n_k}, K) > \varepsilon,$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Poiché tale successione x_{n_k} è tutta contenuta nel compatto K_1 , possiamo supporre che converga a $\bar{x} \in K_1$, ma essendo anche contenuta definitivamente in K_{n_k} , si ha che $\bar{x} \in K_{n_k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, da cui segue che $\bar{x} \in K$. Si ha allora la contraddizione che

$$0 < \varepsilon < d(x_{n_k}, K) \leq d(x_{n_k}, \bar{x}),$$

in quanto l'ultimo termine tende a zero, per $k \rightarrow \infty$. □

ESEMPIO 2.15 (Insiemi di Cantor generalizzati). Descriviamo la costruzione “classica” dell'insieme di Cantor \mathcal{C} . Sia $C_0 = [0, 1]$ e C_1 l'insieme ottenuto rimuovendo il terzo centrale (aperto) da C_0 , ossia $C_1 = C_0 \setminus (1/3, 2/3) = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Ripetendo tale procedimento sui segmenti rimanenti in C_1 , otteniamo C_2 e iterativamente, operando allo stesso modo sui segmenti di C_{n-1} , otteniamo C_n e così via. Allora, l'insieme di Cantor \mathcal{C} è dato da $\mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. La figura che segue mostra i primi passi di questa procedura.



Osserviamo che entrambi gli insiemi $C \cap [0, 1/3]$ e $C \cap [2/3, 1]$ sono copie “ridotte” di C per un fattore $1/3$ e “schiacciate” rispettivamente verso 0 e verso 1 . Se allora consideriamo la famiglia \mathcal{S} composta dalle due similitudini di \mathbb{R} in sé,

$$S_1 = (0, 1/3, \text{Id}) \quad \text{e} \quad S_2 = (1, 1/3, \text{Id}),$$

l’insieme di Cantor è l’insieme invariante per tale famiglia. Infatti, $S^n(C_0) = S^n([0, 1]) = C_n$ (gli insiemi definiti nella costruzione “classica” sopra) e per il Lemma 2.14, si ha che $C_n \rightarrow C$ nella distanza di Hausdorff, dunque $S^n(C_0) \rightarrow C$, se $n \rightarrow \infty$, da cui per l’asserzione finale del Teorema 2.8, l’insieme di Cantor C è l’insieme invariante per \mathcal{S} .

Se generalizziamo la costruzione dell’insieme di Cantor togliendo ad ogni “passaggio”, da ogni intervallo chiuso un intervallo aperto centrale di lunghezza $(1 - 2r)$ per la lunghezza dell’intervallo, con $r \in (0, 1/2]$, partendo da $[0, 1]$, si ottiene un insieme chiuso limite C^r che chiamiamo *insieme di Cantor generalizzato* (se $r = 1/3$, si ha $C^{1/3} = C$). In questo caso, C^r è un insieme invariante per la famiglia di similitudini \mathcal{S}^r data da

$$S_1^r = (0, r, \text{Id}) \quad \text{e} \quad S_2^r = (1, r, \text{Id}).$$

Allora, se $r < 1/2$, si ha che $S_1^r([0, 1]) \cap S_2^r([0, 1]) = \emptyset$, dunque anche $S_1^r(C^r) \cap S_2^r(C^r) = \emptyset$. Quindi, ricordando la Definizione 2.10, se mostriamo che la misura di Hausdorff di C^r è positiva, possiamo concludere che C^r è autosimilare per $\mathcal{S}^r = \{S_1^r, S_2^r\}$. Inoltre, se fosse anche finita, per la Proposizione 2.13, seguirebbe che la dimensione di Hausdorff di C^r sarebbe necessariamente uguale alla dimensione di similarità di \mathcal{S}^r data da $D = -\log 2 / \log r$, in quanto $2r^D = 1$ (in particolare, sarebbe $\log 2 / \log 3$ per l’insieme di Cantor).

Nel caso speciale $r = 1/2$, nella procedura non si toglie alcun intervallo, dunque $C^{1/2}$ è l’intervallo $[0, 1]$ (che ha dimensione e misura di Hausdorff uguali a 1), che infatti è dato dall’unione delle due “copie” di se stesso $S_1^{1/2}([0, 1]) = [0, 1/2]$ e $S_2^{1/2}([0, 1]) = [1/2, 1]$ (si noti che queste due copie si sovrappongono solo nel punto $1/2$, dunque su un insieme di misura di Hausdorff unidimensionale – coincidente con la misura di Lebesgue – uguale a zero). Quindi, l’intervallo $[0, 1]$ è autosimilare per $\mathcal{S}^{1/2} = \{S_1^{1/2}, S_2^{1/2}\}$.

Osserviamo che considerando la famiglia \mathcal{S}^r data dalle analoghe similitudini

$$S_1^r = (0, r, \text{Id}) \quad \text{e} \quad S_2^r = (1, r, \text{Id}),$$

con $r \in (1/2, 1)$, si ha ancora che l’intervallo $[0, 1]$ è invariante per le \mathcal{S}^r e chiaramente non è autosimilare (le “copie” $S_1^r([0, 1]) = [0, r]$ e $S_2^r([0, 1]) = [1 - r, 1]$ si sovrappongono in un intervallo di misura positiva).

Si noti che in questo caso la dimensione di similarità di \mathcal{S}^r è $D = -\log 2 / \log r$, diversa dalla dimensione di Hausdorff di $[0, 1]$, mostrando che la Proposizione 2.13 non vale se l’insieme

non è autosimilare. Inoltre, abbiamo che $[0, 1]$ è invariante per tutte le diverse famiglie di similitudini \mathcal{S}^r , per $r \in [1/2, 1)$, mentre è autosimilare solo per la famiglia $\mathcal{S}^{1/2}$.

Vediamo una linea diretta per calcolare la dimensione di Hausdorff degli insiemi di Cantor generalizzati \mathcal{C}^r , con $r \in (0, 1/2)$ che sfrutta la loro costruzione, ricordando che abbiamo un candidato naturale dato dalla dimensione di similarità $D = -\log 2 / \log r$ di \mathcal{S}^r .

All' n -esimo passo della costruzione, \mathcal{C}^r è costituito da 2^n intervalli chiusi I_i^n , ciascuno di lunghezza r^n . Una copertura di \mathcal{C}^r con insiemi di diametro non maggiore di r^n è allora data dall'unione di tali intervalli, dunque, per ogni $s \in [0, 1]$, si ha

$$\mathcal{H}_{r^n}^s(\mathcal{C}^r) \leq \omega_s \sum_{i=1}^{2^n} \left(\frac{\text{diam}(I_i^n)}{2} \right)^s = \omega_s \cdot 2^n \cdot (r^n/2)^s = \omega_s (2r^s)^n / 2^s.$$

Mandando $n \rightarrow \infty$, distinguiamo tre casi:

- Se $2r^s > 1$, cioè $s > -\log 2 / \log r$, passando al limite si ottiene $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}^r) \leq +\infty$, che non ci dà alcuna informazione.
- Se $2r^s < 1$, cioè $s < -\log 2 / \log r$, si ha $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}^r) = 0$.
- Se $2r^s = 1$, cioè $s = -\log 2 / \log r$, abbiamo $\mathcal{H}^s(\mathcal{C}^r) \leq 1$.

Per concludere, mostriamo che per $s_0 = -\log 2 / \log r$ la misura di Hausdorff $\mathcal{H}^{s_0}(\mathcal{C}^r)$ è non nulla, limitandola dal basso. Fissato $\delta > 0$, sia U_i un ricoprimento di \mathcal{C}^r con $\text{diam}(U_i) \leq \delta$ e con $r^n \leq \delta < r^{n-1}$. Ovviamente, possiamo supporre che ogni U_i sia un intervallo (considerandone la convessificazione, che non ne cambia il diametro). Allora ogni intervallo U_i interseca almeno uno e al più due degli intervalli presenti al passo n -esimo della costruzione di \mathcal{C}^r (poiché la distanza tra due intervalli è almeno $(1 - 2r)r^{n-1}$). Quindi,

$$\sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(U_i))^{s_0} \geq \frac{1}{2} 2^n (r^n)^{s_0} = \frac{1}{2} (2r^{s_0})^n = \frac{1}{2}$$

(dove abbiamo usato che $2r^{s_0} = 1$), da cui otteniamo, passando all'estremo inferiore sui ricoprimenti possibili di \mathcal{C}^r ,

$$\mathcal{H}_{\delta}^{s_0}(\mathcal{C}^r) \geq \omega_{s_0} (1/2^{s_0}) \frac{1}{2},$$

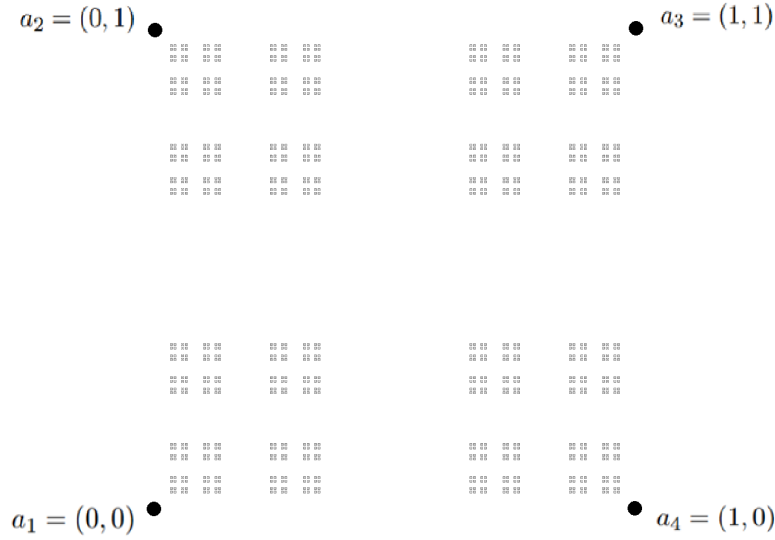
per ogni $\delta > 0$. Concludiamo quindi che $\mathcal{H}^{s_0}(\mathcal{C}^r) \geq \omega_{s_0} / 2^{s_0+1}$.

Abbiamo dunque determinato che $s_0 = -\log 2 / \log r$ è la dimensione di Hausdorff dell'insieme di Cantor generalizzato \mathcal{C}^r , per $r \in (0, 1/2)$ (in particolare, per l'insieme di Cantor, si ha $\dim_H \mathcal{C} = \log 2 / \log 3$) e che, com'era da aspettarsi, coincide con la dimensione di similarità della famiglia \mathcal{S}^r . Inoltre, abbiamo mostrato anche che $0 < \mathcal{H}^{s_0}(\mathcal{C}^r) < +\infty$, dunque \mathcal{C}^r è un insieme autosimilare per \mathcal{S} , per quanto detto sopra (alternativamente, ciò segue anche dalla Proposizione 2.13).

Ometteremo nei prossimi esempi il calcolo "diretto" della misura di Hausdorff dell'insieme invariante K , in quanto più complesso di quello visto per gli insiemi di Cantor generalizzati. Di conseguenza, non potremo concludere al momento, che K sia autosimilare e di dimensione di Hausdorff D , per mezzo della Proposizione 2.13. Tuttavia, mostreremo col "metodo di Hutchinson" (Teorema 3.32), che entrambe queste conclusioni si verificano.

ESEMPIO 2.16 (Polvere di Cantor). La *polvere di Cantor* è definita come il prodotto cartesiano $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ nel piano di due insiemi di Cantor "classici" \mathcal{C} .

Consideriamo la famiglia \mathcal{S} data dalle quattro similitudini $S_i = (a_i, 1/3, \text{Id})$ di \mathbb{R}^2 , dove a_1, a_2, a_3, a_4 sono i quattro vertici del quadrato di lato unitario $[0, 1] \times [0, 1]$, come nella figura seguente.



Si ha allora che la polvere di Cantor è l'insieme invariante per \mathcal{S} . Infatti, osserviamo che coincide con l'intersezione degli insiemi chiusi della successione Q_n , ottenuta come segue: Q_0 è il quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$, l'insieme Q_1 si ottiene dividendo Q_0 in nove quadrati di lato $1/3$ e selezionando solo i quattro che condividono almeno un vertice con Q_0 , ossia

$$Q_1 = ([0, 1/3] \cup [2/3, 1]) \times ([0, 1/3] \cup [2/3, 1])$$

e così via, ripetendo questo procedimento sui quadrati di Q_1 , si ottiene Q_2 e ricorsivamente Q_n . Poiché $S^n(Q_0) = Q_n$, per il Lemma 2.14, si ha che $Q_n = S^n(Q_0) \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ nella distanza di Hausdorff, dunque per il Teorema 2.8, la polvere di Cantor $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ è l'insieme invariante per \mathcal{S} .

La dimensione di similarità D della famiglia \mathcal{S} si ottiene dall'uguaglianza

$$4(1/3)^D = 1,$$

dunque $D = \log 4 / \log 3$, che sarà la dimensione di Hausdorff della polvere di Cantor (si noti che vale che la dimensione di un prodotto è la somma delle dimensioni).

OSSERVAZIONE 2.17. In questo esempio abbiamo visto che è possibile costruire insiemi autosimilari come prodotti cartesiani di un insieme autosimilare fissato con se stesso. Inoltre, se $s \in [0, 1]$ è la dimensione di Hausdorff dell'insieme in \mathbb{R} , allora il prodotto cartesiano di n volte tale insieme sarà un sottoinsieme di \mathbb{R}^n con dimensione di Hausdorff ns .

Se allora consideriamo gli insiemi di Cantor generalizzati \mathcal{C}^r , questi hanno dimensione di Hausdorff $s \in (0, 1]$ al variare di $r \in (0, 1/2]$, dunque

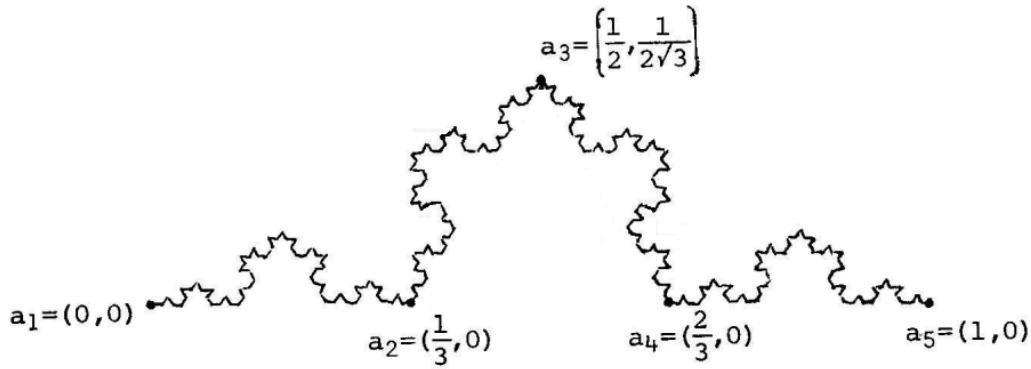
$$\prod_{i=1}^n \mathcal{C}^r \subseteq \mathbb{R}^n$$

ha dimensione di Hausdorff $ns \in (0, n]$. Abbiamo quindi un modo per esibire un insieme autosimilare di \mathbb{R}^n con qualunque dimensione di Hausdorff tra 0 e n .

ESEMPIO 2.18 (Curva di Koch). La *curva di Koch* nel piano, nella sua costruzione classica, si ottiene come limite delle poligonali costruite nel seguente modo (si veda [6, Capitolo 3, Sezione I], per esempio): poniamo $K_0 = [0, 1] \times \{0\}$ e K_1 la poligonale ottenuta dividendo K_0 in tre segmenti uguali e rimuovendo quello centrale, per poi sostituirlo con gli altri due lati del triangolo equilatero costruito su di esso. Una volta costruita K_1 , ripetiamo il procedimento per tutti i suoi segmenti e così via, ricorsivamente, ottenendo una successione di curve poligonali K_n (che sono insiemi chiusi).

Si può allora provare che con un'appropriata parametrizzazione delle curve K_n , queste convergono uniformemente a una curva continua limite nel piano, detta curva di Koch. Inoltre, gli insiemi K_n convergono al supporto compatto K di tale curva (chiamato usualmente anch'esso curva di Koch), rispetto alla distanza di Hausdorff (si veda [13]).

Consideriamo i punti a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 del piano come nella figura che segue e l'insieme di similitudini $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, dove $S_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ è l'unica similitudine che mappa il segmento orientato $\overrightarrow{a_1 a_5}$ in $\overrightarrow{a_i a_{i+1}}$, per ogni $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.



La scelta di questa famiglia di similitudini è chiaramente legata alla costruzione descritta sopra e si mostra che la curva di Koch K ne è l'insieme invariante (si veda [13] per una dimostrazione).

Consideriamo ora un'altra famiglia di similitudini che ha anch'essa come insieme invariante la curva di Koch, ossia $\mathcal{S}' = \{S'_1, S'_2\}$, dove S'_1 e S'_2 sono le similitudini unicamente determinate dal fatto che mappano il segmento orientato $\overrightarrow{a_1 a_5}$ rispettivamente in $\overrightarrow{a_3 a_1}$ e in $\overrightarrow{a_5 a_3}$. Osserviamo che

$$S'_1 \circ S'_2 = S_1, \quad S'_1 \circ S'_1 = S_2, \quad S'_2 \circ S'_2 = S_3, \quad S'_2 \circ S'_1 = S_4,$$

da cui si deduce facilmente che $S'(K) = K$ (valendo $S(K) = K$), dunque K è l'insieme invariante anche per \mathcal{S}' . Abbiamo quindi un esempio del fatto menzionato in precedenza, che diverse famiglie di similitudini possono avere lo stesso insieme invariante.

Calcoliamo le dimensioni di similarità delle due famiglie di similitudini, che coincidono con la dimensione di Hausdorff della curva di Koch. Chiaramente, le similitudini S_i hanno tutte un fattore di scala uguale a $1/3$, mentre con un facile argomento di geometria elementare, quelli di S'_1 e S'_2 sono $\sqrt{3}/3$.

Dunque, la dimensione di similarità D di \mathcal{S} soddisfa

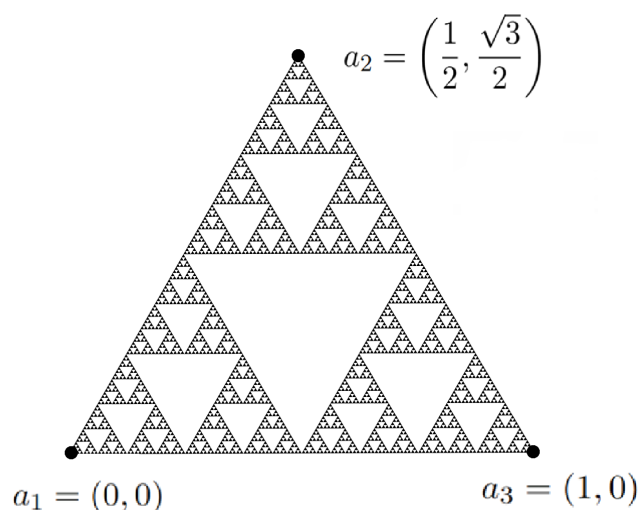
$$4(1/3)^D = 1,$$

da cui, $D = \log 4 / \log 3$ e per quella D' di \mathcal{S}' si ha

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{D'} = 1,$$

quindi $D' = \log 4 / \log 3$ che, non sorprendentemente, coincide con D .

ESEMPIO 2.19 (Triangolo di Sierpiński). Il *triangolo di Sierpiński* T è l'insieme del piano ottenuto come l'intersezione infinita degli insiemi chiusi della successione T_n , definiti come segue: T_0 è un triangolo equilatero di vertici a_1, a_2, a_3 (facendo riferimento alla figura sotto) e T_1 si ottiene dividendo T_0 in quattro triangoli equilateri di lato $1/2$, per poi rimuovere il triangolo "centrale" (aperto). Si ripete poi il procedimento sui triangoli di T_1 , ottenendo T_2 e così via ricorsivamente tutti gli insiemi T_n .



Consideriamo i punti a_1, a_2, a_3 come nella figura e la famiglia \mathcal{S} data dalle tre similitudini $S_i = (a_i, 1/2, \text{Id})$ di \mathbb{R}^2 . Poiché $S^n(T_0) = T_n$, per il Lemma 2.14, si ha che $T_n = S^n(T_0) \rightarrow T$ nella distanza di Hausdorff, dunque per il Teorema 2.8, il triangolo di Sierpiński T è l'insieme invariante per \mathcal{S} .

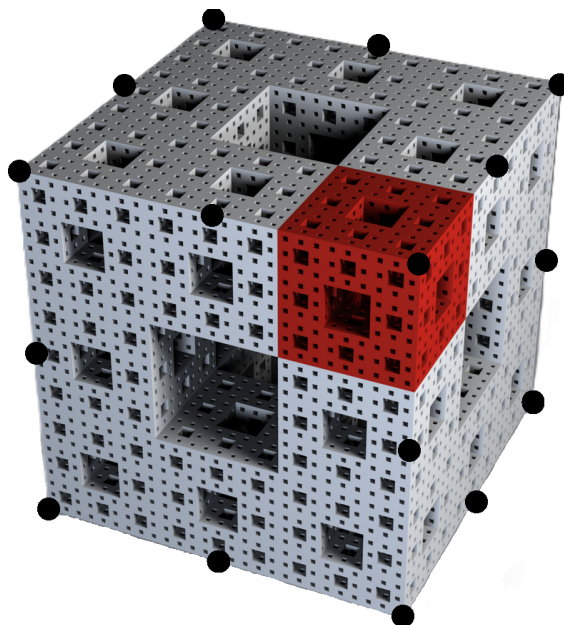
Calcoliamo la dimensione di similarità D di \mathcal{S} : i fattori di scala sono tutti $1/2$, dunque

$$3(1/2)^D = 1,$$

da cui $D = \log 3 / \log 2$, che vedremo essere la dimensione di Hausdorff di T .

ESEMPIO 2.20 (Spugna di Menger). La *spugna di Menger* M nello spazio euclideo, si ottiene come l'intersezione infinita di una successione di insiemi chiusi M_n ottenuti come segue: M_0 è un cubo di lato unitario e M_1 è ottenuto dividendo M_0 in ventisette cubi di lato $1/3$

ed eliminando quelli (aperti) al “centro” di ogni faccia, nonché quello al “centro” del cubo. L'insieme M_2 si ha poi ripetendo il procedimento sui cubi rimanenti in M_1 e iterativamente, si ottiene ogni insieme chiuso M_n .

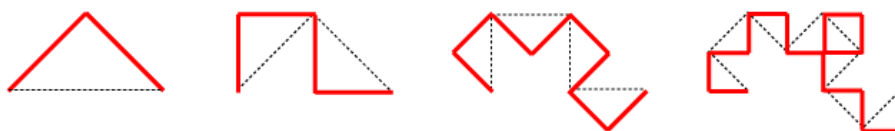


Definiamo la famiglia di similitudini $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_{20}\}$ di \mathbb{R}^3 , dove $S_i = (a_i, 1/3, \text{Id})$ e i venti punti a_i sono evidenziati nella figura, cioè sono i vertici e i punti medi degli spigoli del cubo. Poiché $S^n(M_0) = M_n$, per il Lemma 2.14, si ha che $M_n = S^n(M_0) \rightarrow M$ nella distanza di Hausdorff, dunque per il Teorema 2.8, la spugna di Menger M è l'insieme invariante per \mathcal{S} . La dimensione di similarità D di \mathcal{S} è data dalla formula

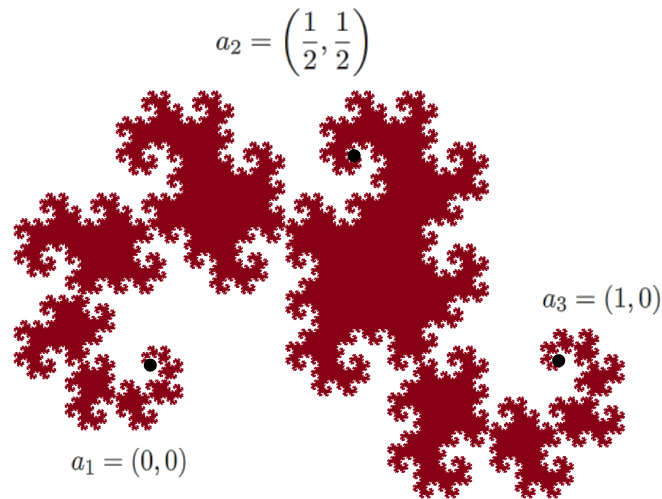
$$20(1/3)^D = 1,$$

quindi $D = \log 20 / \log 3$, che sarà la dimensione di Hausdorff di M .

ESEMPIO 2.21 (Curva del drago [17]). Analogamente alla curva di Koch (Esempio 2.18), la *curva del drago* D nel piano è il limite di una successione di poligoni costruite nel seguente modo (si veda [14], per esempio): poniamo $D_0 = [0, 1] \times \{0\}$ e D_1 la poligonale costituita dai due lati del triangolo rettangolo costruito sopra D_0 . Una volta costruita D_1 , ripetiamo il procedimento sui suoi segmenti e così via, ottenendo una successione di poligoni D_n (che sono insiemi chiusi). Riportiamo di seguito le figure di D_1, D_2, D_3, D_4 .



Tale successione di curve, parametrizzate appropriatamente, converge uniformemente alla curva limite rappresentata dall'insieme in rosso nella figura seguente.



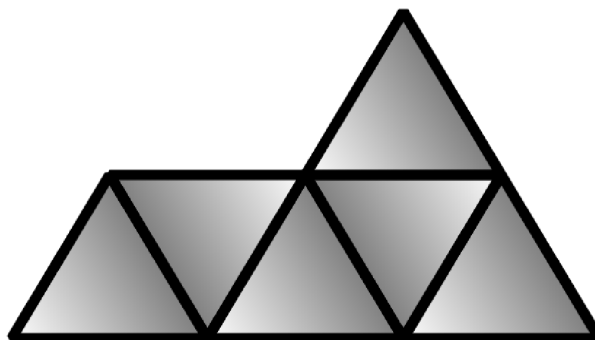
Considerando i tre punti a_1, a_2, a_3 evidenziati in questa figura, si può dimostrare che la curva del drago è l'insieme invariante per la famiglia di similitudini $\mathcal{S} = \{S_1, S_2\}$ di \mathbb{R}^2 , dove S_1 è l'unica similitudine che mappa il segmento orientato $\overrightarrow{a_1 a_3}$ in $\overrightarrow{a_1 a_2}$, mentre S_2 è l'unica che lo mappa in $\overrightarrow{a_3 a_2}$.

Si ha chiaramente che i fattori di scala delle due similitudini di \mathcal{S} sono uguali entrambi a $1/\sqrt{2}$, dunque la dimensione di similarità D di \mathcal{S} si ottiene dall'uguaglianza

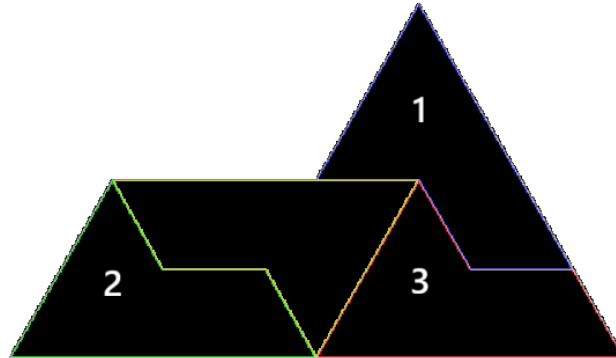
$$2(1/\sqrt{2})^D = 1,$$

quindi $D = 2$, che sarà la dimensione di Hausdorff della curva del drago.

ESEMPIO 2.22 (Frattale della sfinge [19]). Sia F_0 l'insieme dato dall'unione di sei triangoli equilateri disposti come nella figura che segue.

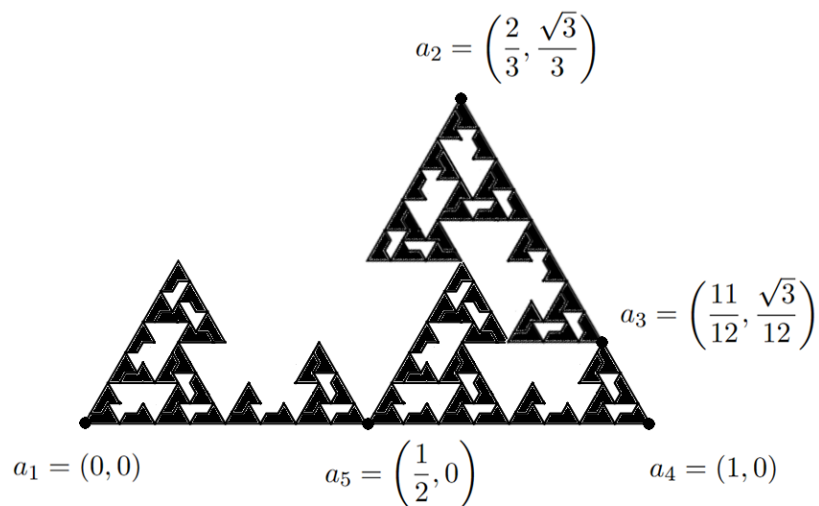


Questo insieme può essere diviso in quattro sue “copie”, che chiameremo “piastrelle”, nel modo seguente:



e definiamo F_1 come l'insieme ottenuto rimuovendo la “piastrella centrale” aperta (non numerata in figura). L'insieme F_2 è poi ottenuto ripetendo il procedimento sulle “piastrelle” di F_1 . Iterando questa operazione, otteniamo allora una successione di insiemi chiusi F_n e il *frattale della sfinge* nel piano è dato dalla loro intersezione (si veda [19]).

Consideriamo i punti nel piano a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 , come nella figura seguente e la famiglia delle similitudini $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$ con S_1 l'unica similitudine che mappa il segmento orientato $\overrightarrow{a_1 a_4}$ in $\overrightarrow{a_3 a_2}$, S_2 l'unica che lo mappa in $\overrightarrow{a_5 a_1}$ e S_3 l'unica che lo mappa in $\overrightarrow{a_4 a_5}$.



Poiché si verifica facilmente che $S^n(F_0) = F_n$, per il Lemma 2.14, si ha che $F_n = S^n(F_0) \rightarrow F$ nella distanza di Hausdorff, dunque per il Teorema 2.8, il frattale della sfinge F è l'insieme invariante per \mathcal{S} .

Calcoliamo la dimensione di similarità D di \mathcal{S} : poiché tutte le similitudini S_i hanno fattore di scala uguale a $1/2$, si ha

$$3(1/2)^D = 1$$

da cui $D = \log 3 / \log 2$ (come il triangolo di Sierpiński – si osservi che in entrambi i casi, ad ogni passaggio della costruzione, si “rimuove un quarto” dell'insieme).

Il metodo di Hutchinson

Con *metodo di Hutchinson* (presentato in [10]) ci riferiamo a un risultato, il Teorema 3.32, che ci permette di stabilire che un insieme (frattale) invariante per una famiglia finita di similitudini (che soddisfa un'ipotesi detta *condizione dell'insieme aperto* – Definizione 3.26) ha dimensione di Hausdorff uguale alla dimensione di similarità della famiglia di similitudini, quindi è autosimilare, per la Proposizione 2.13. Dunque, dato un insieme frattale, il calcolo della sua dimensione di Hausdorff si riduce ad un elementare calcolo (eventualmente numerico), a patto di essere in grado di trovare una famiglia di similitudini per cui l'insieme è invariante e che soddisfi la condizione dell'insieme aperto.

Per poter sviluppare la teoria, vedremo nelle prossime sezioni alcune proprietà degli insiemi invarianti e introdurremo il concetto di *misura invariante* associata ad una famiglia di similitudini.

3.1. Proprietà degli insiemi invarianti

Data una famiglia di similitudini $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ da uno spazio metrico completo (X, d) in sé, per ogni $S_i \in \mathcal{S}$, indichiamo con r_i la sua costante di Lipschitz e con s_i il suo unico punto fisso (che esiste per il Teorema 1.2).

Introduciamo inoltre la notazione $S_{i_1 \dots i_p}$ per indicare la composizione di p mappe di \mathcal{S} , ossia

$$S_{i_1 \dots i_p} = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_p},$$

con $i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, N\}$ e denotiamo con $s_{i_1 \dots i_p}$ il suo punto fisso, mentre la sua costante di Lipschitz sarà chiaramente $r_{i_1} \dots r_{i_p}$. Per ogni insieme $E \subseteq X$, chiamiamo

$$E_{i_1 \dots i_p} = S_{i_1 \dots i_p}(E),$$

la sua immagine per la mappa $S_{i_1 \dots i_p}$, in particolare, $E_i = S_i(E)$. Allora,

$$S^p(E) = \bigcup_{i_1, \dots, i_p} E_{i_1 \dots i_p}$$

e segue immediatamente che se K è invariante per \mathcal{S} , si ha

$$K = \bigcup_{i_1, \dots, i_p} K_{i_1 \dots i_p}.$$

PROPOSIZIONE 3.1. *Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di uno spazio metrico completo (X, d) in sé e consideriamo un sottoinsieme limitato E di X . Allora, per ogni successione $i_j \in \{1, \dots, N\}$ si ha $\text{diam}(E_{i_1 \dots i_p}) \rightarrow 0$, se $p \rightarrow \infty$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché $S_{i_1 \dots i_p}$ è una contrazione con fattore di scala $r_{i_1} \dots r_{i_p}$, per ogni $p \in \mathbb{N}$ si ha $\text{diam}(E_{i_1 \dots i_p}) \leq r_{i_1} \dots r_{i_p} \text{diam}(E) \leq r^p \text{diam}(E)$, dove $r = \max\{r_1, \dots, r_N\} < 1$. Avendo E diametro finito, in quanto limitato, la tesi segue. \square

DEFINIZIONE 3.2. Fissato $N \in \mathbb{N}$, denotiamo con $\langle i_1, \dots, i_p \rangle$ una p -upla ordinata di numeri interi appartenenti a $\{1, \dots, N\}$.

Data una p -upla $\alpha = \langle i_1, \dots, i_p \rangle$, definiamo

- $i\alpha$ come la $(p+1)$ -upla $\langle i, i_1, \dots, i_p \rangle$, per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$,
- $\beta\alpha$ come la $(p+q)$ -upla $\langle j_1, \dots, j_q, i_1, \dots, i_p \rangle$, per ogni q -upla $\beta = \langle j_1, \dots, j_q \rangle$.

DEFINIZIONE 3.3. Fissato $N \in \mathbb{N}$, denotiamo con

$$\mathbf{C}(N) = \{1, \dots, N\}^{\mathbb{N}},$$

l'insieme delle successioni a valori in $\{1, \dots, N\}$, dotato della topologia prodotto, considerando su ogni fattore $\{1, \dots, N\}$ la topologia discreta.

Per rappresentare un elemento di $\mathbf{C}(N)$, scriveremo semplicemente $i_1 \dots i_p \dots$, oppure α , per indicare $\alpha_1 \dots \alpha_p \dots$, mentre con $\overline{i_1 \dots i_p}$ intenderemo la successione infinita (periodica) $i_1 \dots i_p i_1 \dots i_p i_1 \dots i_p \dots$.

Inoltre, estendiamo a $\alpha \in \mathbf{C}(N)$ le notazioni che abbiamo adottato per le p -uple, cioè:

- $i\alpha = i\alpha_1 \dots \alpha_p \dots$, per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$,
- $\beta\alpha = i_1 \dots i_q \alpha_1 \dots \alpha_p \dots$, per ogni q -upla $\beta = \langle j_1, \dots, j_q \rangle$.

LEMMA 3.4. Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di uno spazio metrico completo (X, d) in sé e K il suo insieme invariante. Allora, se $i_1 \dots i_p \dots \in \mathbf{C}(N)$, la successione $p \mapsto K_{i_1 \dots i_p}$ è decrescente e $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} K_{i_1 \dots i_p}$ contiene un singolo punto di K che denoteremo con $k_{i_1 \dots i_p \dots}$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché K è invariante per \mathcal{S} , si ha che per ogni $p \in \mathbb{N}$,

$$K_{i_1 \dots i_p} = S_{i_1 \dots i_p}(K) = S_{i_1 \dots i_p} \left(\bigcup_{i_\ell=1}^N S_{i_\ell}(K) \right) = \bigcup_{i_\ell=1}^N S_{i_1 \dots i_\ell}(K) = \bigcup_{i_\ell=1}^N K_{i_1 \dots i_p i_\ell}$$

e quest'ultima unione chiaramente contiene $K_{i_1 \dots i_p i_{p+1}}$. Dunque, la successione $K_{i_1 \dots i_p}$ è decrescente e il suo limite è $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} K_{i_1 \dots i_p}$ che è non vuoto, per la proprietà dell'intersezione finita di compatti in uno spazio metrico completo.

Infine, poiché $\text{diam}(K_{i_1 \dots i_p}) \rightarrow 0$ se $p \rightarrow \infty$, per la Proposizione 3.1, l'insieme $\bigcap_{p \in \mathbb{N}} K_{i_1 \dots i_p}$ è un singolo punto di K (essendo K chiuso). \square

LEMMA 3.5. Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di uno spazio metrico completo (X, d) in sé e K il suo insieme invariante. Allora, $k_{\overline{i_1 \dots i_p}} = s_{i_1 \dots i_p} \in K$. Inoltre, $s_{i_1 \dots i_p} \rightarrow k_{i_1 \dots i_p \dots}$.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che, poiché le similitudini S_i sono bigettive, si ha

$$S_{j_1 \dots j_q}(k_{i_1 \dots i_p \dots}) \in S_{j_1 \dots j_q} \left(\bigcap_{p=1}^{\infty} K_{i_1 \dots i_p} \right) = \bigcap_{p=1}^{\infty} K_{j_1 \dots j_q i_1 \dots i_p} = \{k_{j_1 \dots j_q i_1 \dots i_p \dots}\},$$

per ogni $j_1, \dots, j_q \in \{1, \dots, N\}$. Quindi, $S_{i_1 \dots i_p}(k_{\overline{i_1 \dots i_p}}) = k_{\overline{i_1 \dots i_p}}$ e avendo $S_{i_1 \dots i_p}$ un unico punto fisso, si ha $s_{i_1 \dots i_p} = k_{\overline{i_1 \dots i_p}} \in K$. \square

TEOREMA 3.6. Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di uno spazio metrico completo (X, d) in sé e K il suo insieme invariante. Allora,

$$K = \{k_{i_1 \dots i_p \dots} : i_1 \dots i_p \dots \in \mathbf{C}(N)\}.$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo l'insieme dei punti fissi delle mappe $S_{i_1 \dots i_p}$,

$$F = \{s_{i_1 \dots i_p} : p \in \mathbb{N} \text{ e } i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, N\}\}$$

e mostriamo che $K = \overline{F}$. In primo luogo, dal Lemma 3.5 si ha che $s_{i_1 \dots i_p} \in K$, per ogni p e successione $i_1 \dots i_p \dots \in \mathbf{C}(N)$, dunque $F \subseteq K$ e ovviamente, dal momento che K è chiuso, anche la chiusura di F vi è contenuta.

D'altra parte, considerato $k \in K$, dal momento che

$$k \in K = \bigcup_{i_1, \dots, i_p} K_{i_1 \dots i_p},$$

allora esiste $i_1 \dots i_p$ tale che $k \in K_{i_1 \dots i_p}$. Dunque, poiché $s_{i_1 \dots i_p} \in F \subseteq K$ e

$$d(s_{i_1 \dots i_p}, k) \leq \text{diam}(K_{i_1 \dots i_p}) \rightarrow 0,$$

se $p \rightarrow \infty$, concludiamo che k è il limite di una successione di elementi dall'insieme dei punti fissi delle mappe $S_{i_1 \dots i_p}$, da cui $K \subseteq \overline{F}$ e quindi la tesi, in quanto, per il Lemma 3.5, si ha che l'insieme dei punti di aderenza di F coincide con l'insieme dei punti $k_{i_1 \dots i_p \dots}$. \square

Chiaramente, questo teorema fornisce una descrizione più costruttiva di un insieme invariante, rispetto alla Definizione 2.2. Per mezzo di essa possiamo definire la *mappa coordinata di K* , ossia

$$\pi : \alpha \in \mathbf{C}(N) \rightarrow k_\alpha \in K.$$

PROPOSIZIONE 3.7. *Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di uno spazio metrico completo (X, d) in sé e K il suo insieme invariante. Allora la mappa π è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo $\alpha \in \mathbf{C}(N)$ e $\varepsilon > 0$. Dal momento che per la Proposizione 3.1, si ha $\text{diam}(K_{\alpha_1 \dots \alpha_p}) \rightarrow 0$, cioè per ogni $\delta > 0$, esiste $q \in \mathbb{N}$ tale che $\text{diam}(K_{\alpha_1 \dots \alpha_p}) < \delta$, per ogni $p > q$. Dunque, poiché $k_\alpha \in K_{\alpha_1 \dots \alpha_p}$ per ogni $p \in \mathbb{N}$, esiste $\bar{p} \in \mathbb{N}$ tale che $K_{\alpha_1 \dots \alpha_{\bar{p}}} \subseteq B_\varepsilon(k_\alpha)$ (scelto $\delta < \varepsilon/2$). Se allora consideriamo

$$B = \{\beta \in \mathbf{C}(N) : \beta_i = \alpha_i, \text{ per ogni } i \leq \bar{p}\},$$

che è un aperto di $\mathbf{C}(N)$ contenente α , possiamo osservare che $\pi(B)$ è composto da tutti i punti $k_{\alpha_1 \dots \alpha_{\bar{p}} \beta_{\bar{p}+1} \dots}$, che dunque appartengono a $K_{\alpha_1 \dots \alpha_{\bar{p}}}$. Quindi $\pi(B) \subseteq K_{\alpha_1 \dots \alpha_{\bar{p}}} \subseteq B_\varepsilon(k_\alpha)$, da cui la continuità di π in α e la tesi, per l'arbitrarietà di $\alpha \in \mathbf{C}(N)$. \square

PROPOSIZIONE 3.8. *Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di uno spazio metrico completo (X, d) in sé e C un sottoinsieme chiuso di X tale che*

$$S_i(C) \subseteq C,$$

per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, allora l'insieme K invariante per \mathcal{S} è contenuto in C .

In particolare, $K \subseteq \overline{B}_R(x_0)$, dove $\overline{B}_R(x_0)$ è una palla come nel Lemma 1.4.

DIMOSTRAZIONE. Essendo C chiuso, (C, d) è anch'esso uno spazio metrico completo e per ipotesi, \mathcal{S} è una famiglia di similitudini contrattive di C in sé. Dunque, per il Teorema 2.8, esiste un unico compatto non vuoto $K_C \subseteq C$ invariante per \mathcal{S} . Chiaramente, K_C è compatto e invariante anche per la famiglia \mathcal{S} su X , dunque $K_C = K$ per unicità, da cui $K \subseteq C$. \square

3.2. Misure invarianti

In tutto il seguito le misure sono di Borel, cioè la σ -algebra dei misurabili contiene gli insiemi boreliani.

DEFINIZIONE 3.9. Data una misura positiva μ su uno spazio X , denoteremo con $\|\mu\| = \mu(X)$ la sua variazione totale.

DEFINIZIONE 3.10. Definiamo il *supporto* di una misura di Borel positiva μ su uno spazio metrico (X, d) , come l'insieme chiuso

$$\text{supp } \mu = X \setminus \bigcup \{V \subseteq X : V \text{ aperto e } \mu(V) = 0\}.$$

DEFINIZIONE 3.11. Una misura di Borel positiva μ su uno spazio metrico (X, d) , si dice *regolare* se per ogni insieme misurabile $E \subseteq X$, si ha

$$\mu(E) = \inf \{\mu(A) : A \supseteq E, A \text{ aperto}\}$$

e

$$\mu(E) = \sup \{\mu(K) : K \subseteq E, K \text{ compatto}\}.$$

DEFINIZIONE 3.12. Sia \mathcal{M} l'insieme delle misure di Borel positive, regolari e con supporto limitato su uno spazio metrico (X, d) . Inoltre, definiamo

$$\mathcal{M}^1 = \{\mu \in \mathcal{M} : \|\mu\| = 1\}.$$

Denotiamo con $C(X)$ lo spazio delle funzioni continue a valori reali sullo spazio metrico (X, d) e sia $C_b(X) \subseteq C(X)$ il sottospazio di quelle limitate, che è uno spazio di Banach con la norma uniforme $\|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$. Allora, per ogni misura finita $\mu \in \mathcal{M}$, l'operatore

$$T : \varphi \in C_b(X) \rightarrow \int_X \varphi d\mu \in \mathbb{R}$$

è lineare e limitato, in quanto

$$|T(\varphi)| = \left| \int_X \varphi d\mu \right| \leq \|\varphi\|_\infty \|\mu\|,$$

per ogni $\varphi \in C_b(X)$.

DEFINIZIONE 3.13. Considerata $f : X \rightarrow X$ una mappa continua che manda insiemi limitati in insiemi limitati (per esempio, f lipschitziana), definiamo l'operatore

$$f_\# : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M},$$

dato da

$$f_\# \mu(E) = \mu(f^{-1}(E)),$$

per ogni $E \subseteq X$ boreliano.

Banalmente, $\|\mu\| = \|f_\# \mu\|$, inoltre, per ogni $\varphi \in C_b(X)$, si ha

$$\int_X \varphi d(f_\# \mu) = \int_X \varphi \circ f d\mu.$$

DEFINIZIONE 3.14. Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di uno spazio metrico (X, d) in sé e sia D la dimensione di similarità di \mathcal{S} . Considerati $\rho_i = r_i^D$, per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, definiamo l'applicazione $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ data da

$$S(\mu) = \sum_{i=1}^N \rho_i S_{i\#} \mu.$$

Definiamo inoltre $S^0(\mu) = \mu$, $S^1(\mu) = S(\mu)$ e ricorsivamente $S^p(\mu) = S(S^{p-1}(\mu))$. Diremo allora che μ è *invariante* per \mathcal{S} se $S(\mu) = \mu$.

Segue che $\|S(\mu)\| = \|\mu\|$, per ogni $\mu \in \mathcal{M}$ e di conseguenza anche $\|S^p(\mu)\| = \|\mu\|$. Infatti, poiché $\|S_{i\#}\mu\| = \|\mu\|$, abbiamo

$$\|S(\mu)\| = S(\mu)(X) = \sum_{i=1}^N \rho_i S_{i\#}\mu(X) = \sum_{i=1}^N \rho_i \mu(S_i^{-1}(X)) = \sum_{i=1}^N \rho_i \mu(X) = \mu(X) = \|\mu\|.$$

Dunque, è ben definita l'applicazione $S : \mathcal{M}^1 \rightarrow \mathcal{M}^1$ che sarà l'oggetto della nostra analisi.

DEFINIZIONE 3.15. Sia (X, d) uno spazio metrico, considerate $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1$ e

$$H = \{ \varphi \in C(X) : \|\varphi\|_\infty \leq 1 \text{ e } \text{Lip } \varphi \leq 1 \}.$$

Definiamo

$$L(\mu, \nu) = \sup_{\varphi \in H} \left| \int_X \varphi d\mu - \int_X \varphi d\nu \right|,$$

PROPOSIZIONE 3.16. Sia (X, d) uno spazio metrico, allora L è una distanza su \mathcal{M}^1 .

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo innanzitutto che per ogni $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1$, si ha $L(\mu, \nu) < +\infty$. Sia $B = \overline{B}_R(a)$ una palla chiusa tale che $\text{supp } \mu \cup \text{supp } \nu \subseteq B$, che esiste poiché le due misure hanno supporto limitato. Allora, per ogni $\varphi \in H$, si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_X \varphi d\mu - \int_X \varphi d\nu \right| &= \left| \int_X (\varphi - \varphi(a)) d\mu + \int_X \varphi(a) d\mu - \int_X (\varphi - \varphi(a)) d\nu - \int_X \varphi(a) d\nu \right| \\ &= \left| \int_X (\varphi - \varphi(a)) d\mu - \int_X (\varphi - \varphi(a)) d\nu \right| \\ &\leq \int_X |\varphi - \varphi(a)| d\mu + \int_X |\varphi - \varphi(a)| d\nu, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato il fatto che $\mu(X) = \nu(X) = 1$. Inoltre, poiché $\text{Lip } \varphi \leq 1$, si ha

$$\int_X |\varphi(x) - \varphi(a)| d\mu \leq \int_X d(x, a) d\mu = \int_B d(x, a) d\mu \leq R\mu(B) = R$$

e valendo lo stesso per ν , concludiamo

$$\left| \int_X \varphi d\mu - \int_X \varphi d\nu \right| \leq 2R$$

per ogni $\varphi \in H$, dunque $L(\mu, \nu) \leq 2R$.

La nonnegatività di L e la disuguaglianza triangolare sono banali, ci rimane dunque da mostrare che se $L(\mu, \nu) = 0$, allora $\mu = \nu$. Osserviamo che $L(\mu, \nu) = 0$ implica

$$\int_X \varphi d\mu = \int_X \varphi d\nu,$$

per ogni $\varphi \in H$ e per linearità, questa uguaglianza si estende a ogni funzione lipschitziana e limitata. Se F è un chiuso di X , definiamo la successione di funzioni che converge puntualmente a χ_F ,

$$\varphi_n(x) = \max(0, 1 - nd(x, F)),$$

per $n \in \mathbb{N}$, ognuna delle quali soddisfa $0 \leq \varphi_n \leq 1$. Inoltre, ogni φ_n è lipschitziana di costante $1/n$. Allora, per quanto detto sopra e per il teorema di convergenza dominata (μ e

ν sono misure finite, quindi la funzione costante uguale a 1 è integrabile), si ha

$$\mu(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi_n d\nu = \nu(F),$$

cioè μ e ν coincidono sui chiusi di X . Essendo due misure regolari, segue che $\mu = \nu$. \square

PROPOSIZIONE 3.17. *Se lo spazio metrico (X, d) è compatto, allora lo spazio metrico (\mathcal{M}^1, L) è completo.*

DIMOSTRAZIONE. Per la compattezza di X si ha che $C(X)$ coincide con lo spazio delle funzioni continue a supporto compatto su X , quindi per il teorema di rappresentazione di Riesz [15, Theorem 6.19], si ha che

$$C(X)^* = \{ \text{misure di Borel con segno regolari su } X \}$$

(dove le misure sono con segno dal momento che stiamo considerando funzioni continue a valori reali). Dunque, \mathcal{M}^1 è contenuto nella palla unitaria chiusa di $C(X)^*$, che per il teorema di Banach–Alaoglu [4, Theorem 3.15], è compatta rispetto alla topologia debole*. Inoltre, la compattezza implica la separabilità di X , in quanto spazio metrico e questa a sua volta implica la separabilità di $C(X)$ (si veda [5, Theorem 3.3], per esempio), quindi la topologia debole* sulla palla unitaria chiusa di $C(X)^*$ è metrizzabile (si veda [4, Theorem 3.28]) e ciò implica che tale palla è anche sequenzialmente compatta.

Se allora μ_n è una successione di Cauchy in (\mathcal{M}^1, L) , esiste una sottosuccessione μ_{n_k} che converge debolmente* a una misura di Borel regolare μ , che è positiva, in quanto tutte le misure μ_{n_k} sono positive (sempre per il teorema di rappresentazione di Riesz [15, Theorem 6.19]). Inoltre, poiché per la convergenza debole*, si ha che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \varphi d\mu_{n_k} = \int_X \varphi d\mu, \quad (3.1)$$

per ogni $\varphi \in C(X)$, segue che tale misura limite μ soddisfa

$$\|\mu\| = \mu(X) = \int_X 1 d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X 1 d\mu_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k}(X) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_{n_k}\| = 1,$$

quindi anch'essa appartiene a \mathcal{M}^1 .

Se $H \subseteq C(X)$ è un sottoinsieme compatto, allora $\mu_{n_k} \rightarrow \mu$ “uniformemente” su H , cioè

$$\sup_{\varphi \in H} \left| \int_X \varphi d\mu_{n_k} - \int_X \varphi d\mu \right| \rightarrow 0,$$

per $k \rightarrow \infty$.

Infatti, se questo non valesse, potremmo trovare $\varepsilon > 0$ e una sottosuccessione di μ_{n_k} (che continuiamo a chiamare μ_{n_k}) e una successione $\varphi_k \in H$, tale che

$$\left| \int_X \varphi_k d\mu_{n_k} - \int_X \varphi_k d\mu \right| \geq \varepsilon > 0,$$

inoltre, per la compattezza di H (eventualmente passando a un'ulteriore sottosuccessione), possiamo anche supporre che $\varphi_k \rightarrow \varphi$ in $C(X)$. Allora, si avrebbe

$$\begin{aligned} \left| \int_X \varphi d\mu_{n_k} - \int_X \varphi d\mu \right| &\geq \left| \int_X \varphi_k d\mu_{n_k} - \int_X \varphi_k d\mu \right| - \left| \int_X (\varphi - \varphi_k) d\mu_{n_k} \right| - \left| \int_X (\varphi_k - \varphi) d\mu \right| \\ &\geq \varepsilon - 2\|\varphi - \varphi_k\|_\infty \rightarrow \varepsilon > 0, \end{aligned}$$

se $k \rightarrow \infty$, che è una contraddizione dal momento che vale l'equazione (3.1). Osserviamo ora che l'insieme di funzioni

$$H = \{ \varphi \in C(X) : \|\varphi\|_\infty \leq 1 \text{ e } \text{Lip } \varphi \leq 1 \}$$

è compatto, per il teorema di Ascoli–Arzelà generale (si veda [5, Chapter XII, Theorem 6.4]), dal momento che è una famiglia di funzioni equi-limitate ed equi-lipschitziane (dunque equicontinue), quindi

$$L(\mu_{n_k}, \mu) = \sup_{\varphi \in H} \left| \int_X \varphi d\mu_{n_k} - \int_X \varphi d\mu \right| \rightarrow 0,$$

per $k \rightarrow \infty$, cioè la successione di Cauchy di misure μ_n ha una sottosuccessione convergente a $\mu \in \mathcal{M}^1$ e questo implica che tutta la successione converge a μ in (\mathcal{M}^1, L) . Dunque, lo spazio metrico (\mathcal{M}^1, L) è completo. \square

TEOREMA 3.18. *Sia (X, d) uno spazio metrico con la proprietà di Heine–Borel (le palle chiuse sono compatte), $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di (X, d) in sé e $S : \mathcal{M}^1 \rightarrow \mathcal{M}^1$ l'applicazione associata definita precedentemente. Allora, esiste una e una sola misura $\mu \in \mathcal{M}^1$ tale che $S(\mu) = \mu$, cioè invariante per \mathcal{S} . Inoltre, per ogni $\nu \in \mathcal{M}^1$, la successione delle iterate $S^p(\nu)$ converge a μ nello spazio metrico (\mathcal{M}^1, L) .*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo $\mu, \nu \in \mathcal{M}^1$ e $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 1-lipschitziana e limitata in modulo da 1. Sia $r = \max\{r_1, \dots, r_N\} < 1$, allora si ha,

$$\begin{aligned} \left| \int_X \varphi dS(\mu) - \int_X \varphi dS(\nu) \right| &= \left| \int_X \varphi d\left(\sum_{i=1}^N \rho_i S_{i\#}\mu \right) - \int_X \varphi d\left(\sum_{i=1}^N \rho_i S_{i\#}\nu \right) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^N \rho_i \int_X \varphi d(S_{i\#}\mu) - \sum_{i=1}^N \rho_i \int_X \varphi d(S_{i\#}\nu) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^N \rho_i \int_X (\varphi \circ S_i) d\mu - \sum_{i=1}^N \rho_i \int_X (\varphi \circ S_i) d\nu \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^N \rho_i \left[\int_X (\varphi \circ S_i) d\mu - \int_X (\varphi \circ S_i) d\nu \right] \right|, \end{aligned}$$

dove i valori ρ_1, \dots, ρ_N sono dati dalla Definizione 3.14 (ricordiamo che hanno somma uguale a 1).

Osserviamo che per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$,

$$\text{Lip}(\varphi \circ S_i) \leq \text{Lip } \varphi \text{ Lip } S_i \leq r$$

e ovviamente, $\|\varphi \circ S_i\|_\infty \leq \|\varphi\|_\infty \leq 1$. Se dunque definiamo $\psi_i = (\varphi \circ S_i)/r$, abbiamo che $\text{Lip } \psi_i \leq 1$, da cui

$$\left| \int_X (\varphi \circ S_i) d\mu - \int_X (\varphi \circ S_i) d\nu \right| = r \left| \int_X \psi_i d\mu - \int_X \psi_i d\nu \right| \leq rL(\mu, \nu),$$

quindi,

$$\left| \int_X \varphi dS(\mu) - \int_X \varphi dS(\nu) \right| \leq \sum_{i=1}^N \rho_i rL(\mu, \nu) = rL(\mu, \nu) \sum_{i=1}^N \rho_i = rL(\mu, \nu)$$

e considerando l'estremo superiore su tutte le funzioni $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $\|\varphi\|_\infty \leq 1$ e $\text{Lip } \varphi \leq 1$, concludiamo

$$L(S(\mu), S(\nu)) \leq rL(\mu, \nu).$$

Poiché $r < 1$, l'operatore S è dunque una contrazione dello spazio metrico (\mathcal{M}^1, L) in sé. Consideriamo una palla chiusa $\overline{B} = \overline{B}_R(x_0) \subseteq X$ come nel Lemma 1.4, quindi tale che $S_i(\overline{B}) \subseteq \overline{B}$, per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$ e definiamo $\mathcal{M}_B^1 \subseteq \mathcal{M}^1$ come la famiglia delle misure in \mathcal{M}^1 con supporto in \overline{B} . Dunque, poiché \overline{B} è compatta (per la proprietà di Heine–Borel di X), segue dalla Proposizione 3.17 che (\mathcal{M}_B^1, L) è uno spazio metrico completo. Se allora $\mu \in \mathcal{M}_B^1$, si ha $S(\mu) \in \mathcal{M}_B^1$. Infatti, se $\mu \in \mathcal{M}$ con $\|\mu\| = 1$ e $\text{supp } \mu \subseteq \overline{B}$, per la Definizione 3.14, si ha $\|S(\mu)\| = 1$ e dal momento che

$$S(\mu) = \sum_{i=1}^N \rho_i S_{i\#} \mu,$$

si ha che

$$\text{supp } S(\mu) = \bigcup_{i=1}^N \text{supp } S_{i\#} \mu = \bigcup_{i=1}^N S_i(\text{supp } \mu) \subseteq \bigcup_{i=1}^N S_i(\overline{B}) \subseteq \overline{B}.$$

Allora, la mappa $S : \mathcal{M}_B^1 \rightarrow \mathcal{M}_B^1$ è ben definita ed è una contrazione per quanto visto nella parte iniziale, dunque per il Teorema 1.2, esiste un'unica misura $\mu \in \mathcal{M}_B^1 \subseteq \mathcal{M}^1$ tale che $S(\mu) = \mu$. Inoltre μ è l'unica misura invariante anche in \mathcal{M}^1 , poiché la completezza non è necessaria per la conclusione di unicità nel Teorema 1.2, come osservato nella sua dimostrazione.

Infine, se $\nu \in \mathcal{M}^1$ e B' è una palla di X che ne contiene il supporto, segue dal secondo punto del Lemma 1.4, che esiste $p_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $p \geq p_0$ si ha $S^p(B') \subseteq \overline{B}$, dunque $S^p(\nu) \in \mathcal{M}_B^1$, da cui segue che la successione $S^p(\nu)$ converge a μ in (\mathcal{M}_B^1, L) , quindi anche in (\mathcal{M}^1, L) , se $p \rightarrow \infty$. \square

Costruiamo ora una misura esterna τ^* su $\mathbf{C}(N)$ associata a una famiglia di similitudini $S = \{S_1, \dots, S_N\}$ dallo spazio metrico (X, d) in sé, con il "procedimento di Carathéodory" (per quanto segue, si faccia riferimento a [2, Section 1.5]).

Sia \mathcal{F} la famiglia dei seguenti *insiemi cilindrici*, o semplicemente *cilindri* di $\mathbf{C}(N)$:

$$C(i_1, \dots, i_n) = \{\alpha \in \mathbf{C}(N) : \alpha_1 = i_1, \dots, \alpha_n = i_n\},$$

con l'aggiunta di \emptyset (come "cilindro degenere"). Si ha allora facilmente che \mathcal{F} è un semianello. Definiamo poi la funzione d'insieme $\rho : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ come segue:

$$\rho(\emptyset) = 0 \quad \text{e} \quad \rho(C(i_1, \dots, i_n)) = \rho_{i_1} \rho_{i_2} \cdots \rho_{i_n},$$

dove ρ_1, \dots, ρ_N sono dati dalla Definizione 3.14.

PROPOSIZIONE 3.19. *La funzione d'insieme ρ è una premisura su \mathcal{F} .*

DIMOSTRAZIONE. Poiché per definizione $\rho(\emptyset) = 0$, per avere la tesi, è sufficiente mostrare la σ -additività di ρ sugli elementi di \mathcal{F} .

Innanzitutto, osserviamo che per ogni cilindro $C = C(j_1, \dots, j_m)$, essendo l'unione disgiunta dei cilindri $C(j_1, \dots, j_m, j)$ con $j = 1, \dots, N$, si ha

$$\rho(C) = \sum_{j=1}^N \rho(C(j_1, \dots, j_m, j)). \quad (3.2)$$

Infatti, dalla definizione di ρ , abbiamo

$$\rho(C) = \rho(C(j_1, \dots, j_m)) = \rho_{j_1} \cdots \rho_{j_m}$$

e

$$\sum_{j=1}^N \rho(C(j_1, \dots, j_m, j)) = \sum_{j=1}^N \rho_{j_1} \cdots \rho_{j_m} \rho_j = \left(\sum_{j=1}^N \rho_j \right) \rho_{j_1} \cdots \rho_{j_m} = \rho_{j_1} \cdots \rho_{j_m},$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla Definizione 3.14, poiché la somma dei valori ρ_j è uguale a 1.

Supponiamo ora che $C = C(j_1, \dots, j_m)$ sia un'unione finita disgiunta di cilindri $C_n \in \mathcal{F}$, per $n = 1, \dots, \ell$. Segue che per essere contenuti in C , i cilindri C_n devono essere della forma

$$C_n = C(j_1, \dots, j_m, i_1^n, \dots, i_{m(n)}^n),$$

con $m(n) > 0$ (nel caso di uguaglianza, ci riduciamo al caso banale, dove esiste $n \in \{1, \dots, \ell\}$ tale che $C_n = C$, dunque $\ell = 1$ e l'additività segue).

Consideriamo $M = \max\{m(n) \in \mathbb{N} : n \in \{1, \dots, N\}\}$ e un cilindro Z tra i C_n tale che $m(n) = M$. Allora Z sarà del tipo

$$Z = C(j_1, \dots, j_m, i_1, \dots, i_M)$$

e osserviamo che dal momento che i cilindri C_n sono disgiunti, non può esistere un cilindro C_n di "lunghezza" $m + m(n) < m + M$ e tale che

$$i_1^n = i_1, \dots, i_k^n = i_k$$

per ogni $k \leq m(n)$, altrimenti tale cilindro intersecherebbe il cilindro Z . Consideriamo dunque una qualunque successione $\gamma \in \mathbf{C}(N)$ tale che

$$\gamma_1 = j_1, \dots, \gamma_m = j_m, \gamma_{m+1} = i_1, \dots, \gamma_{m+M-1} = i_{M-1}, \gamma_{m+M} \neq i_M.$$

Chiaramente $\gamma \in C$ e $\gamma \notin Z$, quindi poiché non può esistere un cilindro C_n di "lunghezza" $m(n) < M$ contenente γ , per quanto osservato sopra ed essendo i cilindri C_n una partizione di C , deve necessariamente esistere un cilindro di "lunghezza" $m + M$ in cui appare γ e che fa parte della famiglia dei cilindri C_n . Tale cilindro avrà dunque la forma

$$C(j_1, \dots, j_m, i_1, \dots, i_{M-1}, \gamma_{m+M}).$$

Tuttavia, dall'arbitrarietà di γ_{m+M} in $\{1, \dots, N\} \setminus \{i_M\}$, si ha che tutti i cilindri del tipo

$$C(j_1, \dots, j_m, i_1, \dots, i_{M-1}, i),$$

per $i = 1, \dots, N$, appartengono alla partizione C_n di C e questo accade per ogni $(M-1)$ -upla i_1, \dots, i_{M-1} che compare nella descrizione di Z .

Dunque, dall'equazione (3.2), otteniamo che

$$\rho(C(j_1, \dots, j_m, i_1, \dots, i_{M-1})) = \sum_{i=1}^N \rho(C(j_1, \dots, j_m, i_1, \dots, i_{M-1}, i)),$$

quindi, se chiamiamo \mathcal{T}_M la famiglia finita dei cilindri $C(j_1, \dots, j_m, i_1, \dots, i_{M-1})$ così ottenuti, si ha

$$\sum_{n=1}^{\ell} \rho(C_n) = \sum_{\substack{n=1 \\ C_n \text{ tali che} \\ m(n) < M}}^{\ell} \rho(C_n) + \sum_{C \in \mathcal{T}_M} \rho(C).$$

Procedendo con lo stesso ragionamento sull'unione di \mathcal{T}_M con la famiglia finita dei cilindri C_n con $m(n) < M$, al secondo passo il massimo di $m(n)$ sarà $M - 1$ e così via. Dunque, in $M - m$ passi otteniamo

$$\sum_{n=1}^{\ell} \rho(C_n) = \sum_{\substack{n=1 \\ C_n \text{ tali che} \\ m(n) < M}}^{\ell} \rho(C_n) + \sum_{C \in \mathcal{T}_M} \rho(C) = \cdots = \rho(C),$$

cioè concludiamo che ρ è finitamente additiva.

Infine, sia C un'unione numerabile disgiunta di cilindri $C_n \in \mathcal{F}$. Notiamo, come sopra, che poiché $C = C(j_1, \dots, j_m)$, si ha che ogni C_n è del tipo

$$C_n = C(j_1, \dots, j_m, i_1^n, \dots, i_{m(n)}^n).$$

Consideriamo allora, per ogni $L \in \mathbb{N}$, l'insieme di indici $I_L = \{n \in \mathbb{N} : m(n) \leq L\}$ e osserviamo che essendo I_L finito, per le proprietà di semianello di \mathcal{F} , segue che

$$C \setminus \bigcup_{k \in I_L} C_k = \bigcup_{B \in \mathcal{G}_L} B,$$

con $\mathcal{G}_L \subseteq \mathcal{F}$ una famiglia finita di cilindri disgiunti. Notiamo poi che per $L \rightarrow \infty$, si ha che $I_L \nearrow \mathbb{N}$, quindi $\mathcal{G}_L \searrow \emptyset$, dal momento che i cilindri C_n sono una partizione di C e la successione di insiemi

$$L \mapsto \bigcup_{k \in I_L} C_k$$

è nondecreciente e convergente a $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$. Quindi, per l'additività finita, otteniamo l'uguaglianza

$$\rho(C) = \sum_{k \in I_L} \rho(C_k) + \sum_{B \in \mathcal{G}_L} \rho(B),$$

per ogni $L \in \mathbb{N}$ e mandando $L \rightarrow \infty$ si ha la tesi. \square

Definita dunque la misura esterna τ^* su $\mathbf{C}(N)$ generata da ρ , come

$$\tau^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \rho(C_n) : A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right\},$$

per ogni $A \subseteq \mathbf{C}(N)$, dal momento che ρ è una premisura su \mathcal{F} , per il teorema di estensione di Carathéodory–Fréchet [2, Theorem 1.13], esiste una σ -algebra \mathcal{M}_C , detta dei "misurabili alla Carathéodory", tale che τ^* ristretta a \mathcal{M}_C è una misura, che denoteremo con τ . Inoltre, si ha che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{M}_C$ e che ρ e τ^* (e conseguentemente τ) coincidono su \mathcal{F} (si veda [2, subsection 1.5.2]). Infine, poiché \mathcal{F} è una base per la topologia prodotto su $\mathbf{C}(N)$, genera la σ -algebra dei boreliani, dunque la misura τ è di Borel.

PROPOSIZIONE 3.20. *La misura τ ha supporto uguale a $\mathbf{C}(N)$, variazione totale uguale a 1 ed è regolare.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che $\text{supp } \tau = \mathbf{C}(N)$, dal momento che ogni aperto non vuoto di $\mathbf{C}(N)$ contiene un cilindro non banale, che ha misura positiva.

Consideriamo i cilindri $C(i)$ per $i = 1, \dots, N$, che sono una partizione di $\mathbf{C}(N)$, dunque

$$\tau(\mathbf{C}(N)) = \sum_{i=1}^N \tau(C(i)) = \sum_{i=1}^N \rho(C(i)) = \sum_{i=1}^N \rho_i = 1.$$

Infine, poiché $\mathbf{C}(N)$ è compatto, τ è una misura finita e gli aperti si scrivono come unione numerabile di cilindri, segue che τ è regolare. \square

LEMMA 3.21. Sia τ^* la misura esterna su $\mathbf{C}(N)$ come sopra. Per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, definiamo le applicazioni

$$\sigma_i : \alpha \mapsto i\alpha \in \mathbf{C}(N),$$

per ogni $\alpha \in \mathbf{C}(N)$. Allora,

$$\tau^* = \sum_{i=1}^N \rho_i \sigma_{i\#} \tau^*.$$

dove, commettendo un abuso di notazione, indichiamo con $\sigma_{i\#} \tau^*$ la misura esterna data da

$$\sigma_{i\#} \tau^*(A) = \tau^*(\sigma_i^{-1}(A)),$$

per ogni $A \subseteq \mathbf{C}(N)$.

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo inizialmente che per ogni $A \subseteq \mathbf{C}(N)$, si ha

$$\sum_{i=1}^N \rho_i \sigma_{i\#} \tau^*(A) \leq \tau^*(A). \quad (3.3)$$

Per la definizione di τ^* , per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento in cilindri C_n di A tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(C_n) \leq \tau^*(A) + \varepsilon.$$

Poiché per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, abbiamo

$$\sigma_i^{-1}(A) \subseteq \sigma_i^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_i^{-1}(C_n),$$

segue che

$$\sigma_{i\#} \tau^*(A) = \tau^*(\sigma_i^{-1}(A)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau^*(\sigma_i^{-1}(C_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(\sigma_i^{-1}(C_n)),$$

in quanto $\sigma_i^{-1}(C_n)$ è un cilindro di $\mathbf{C}(N)$. Infatti, se $C_n = C(i_1, \dots, i_m)$, allora $\sigma_i^{-1}(C_n)$ è

- \emptyset , se $i_1 \neq i$,
- il cilindro $C(i_2 \dots i_m)$, se $i_1 = i$.

Dunque $\rho(\sigma_i^{-1}(C_n)) = 0$, se C_n "non inizia" con i e

$$\rho_i \rho(\sigma_i^{-1}(C_n)) = \rho(C_n), \quad (3.4)$$

se C_n "inizia" con i . Allora,

$$\sum_{i=1}^N \rho_i \sigma_{i\#} \tau^*(A) \leq \sum_{i=1}^N \rho_i \sum_{n=1}^{\infty} \rho(\sigma_i^{-1}(C_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{i=1 \\ C_n \text{ "inizia" \\ con } i}}^N \rho_i \rho(\sigma_i^{-1} C_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(C_n) \leq \tau^*(A) + \varepsilon$$

dove l'ultima uguaglianza vale poiché per ogni C_n esiste un unico $j_n \in \{1, \dots, N\}$ tale che C_n "inizia" per j_n , da cui

$$\sum_{\substack{i=1 \\ C_n \text{ "inizia" con } i}}^n \rho_i \rho(\sigma_i^{-1}(C_n)) = \rho_{j_n} \rho(\sigma_{j_n}^{-1}(C_n)) = \rho(C_n),$$

per l'uguaglianza (3.4). Mandando $\varepsilon \rightarrow 0$, si ha la disuguaglianza (3.3). Mostriamo la disuguaglianza opposta, ossia

$$\tau^*(A) \leq \sum_{i=1}^N \rho_i \sigma_{i\#} \tau^*(A).$$

Per ogni $i = 1, \dots, N$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esistono ricoprimenti di $\sigma_i^{-1}(A)$ con cilindri C_n^i tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(C_n^i) \leq \tau^*(\sigma_i^{-1}(A)) + \varepsilon/N.$$

Osserviamo che

$$A = \bigcup_{i=1}^N \sigma_i(\sigma_i^{-1}(A)) \subseteq \bigcup_{i=1}^N \sigma_i \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^i \right) = \bigcup_{i=1}^N \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_i(C_n^i),$$

dunque,

$$\begin{aligned} \tau^*(A) &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \rho(\sigma_i(C_n^i)) = \sum_{i=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} \rho_i \rho(C_n^i) \\ &\leq \sum_{i=1}^N \rho_i (\tau^*(\sigma_i^{-1}(A)) + \varepsilon/N) = \sum_{i=1}^N \rho_i \sigma_{i\#} \tau^*(A) + \varepsilon \end{aligned}$$

e mandando $\varepsilon \rightarrow 0$, si ha la tesi. \square

TEOREMA 3.22. *Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di uno spazio metrico completo (X, d) (con la proprietà di Heine–Borel) in sé e K il suo insieme invariante. Siano π la mappa*

$$\pi : \alpha \in \mathbf{C}(N) \rightarrow k_\alpha \in K,$$

definita nella Sezione 3.1 (alla fine), τ la misura su $\mathbf{C}(N)$ associata a \mathcal{S} e μ la misura invariante per \mathcal{S} . Allora, $\mu = \pi_{\#} \tau$ e $\text{supp } \mu = K$.

DIMOSTRAZIONE. Poiché sappiamo, per la Proposizione 3.7, che la mappa π è continua, segue che la misura $\pi_{\#} \tau$ è ben definita, di Borel, con variazione totale uguale a 1 e regolare, in quanto queste proprietà valgono per la misura τ , per costruzione e per la Proposizione 3.20. Inoltre, sempre da tale Proposizione, si ha che $\text{supp } \tau = \mathbf{C}(N)$, dunque il supporto di $\pi_{\#} \tau$ è l'immagine del supporto di τ tramite la mappa π , cioè K che è compatto. Quindi concludiamo che $\pi_{\#} \tau \in \mathcal{M}^1$.

Considerate, per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, le applicazioni

$$\sigma_i : \alpha \in \mathbf{C}(N) \rightarrow i\alpha \in \mathbf{C}(N),$$

come nel Lemma 3.21, dalla definizione di π si ha che $\pi \circ \sigma_i = S_i \circ \pi$ e sempre da tale lemma, abbiamo che

$$\tau = \sum_{i=1}^N \rho_i \sigma_{i\#}(\tau).$$

Dunque,

$$S(\pi_{\#}\tau) = \sum_{i=1}^N \rho_i S_{i\#}(\pi_{\#}\tau) = \sum_{i=1}^N \rho_i \pi_{\#}(\sigma_{i\#}\tau) = \pi_{\#} \sum_{i=1}^N \rho_i (\sigma_{i\#}\tau) = \pi_{\#}\tau,$$

da cui, per l'unicità della misura μ invariante per S data dal Teorema 3.18, concludiamo che

$$\mu = \pi_{\#}\tau$$

che ha K come supporto. □

Osserviamo che la conclusione di questo teorema non è in contrasto col Teorema 3.18, ossia che $\text{supp } \mu \subseteq \overline{B}$, dove \overline{B} è una palla data dal Lemma 1.4, in quanto $K \subseteq \overline{B}$, come detto nella Proposizione 3.8.

Concludiamo questa sezione ritornando sul fatto che famiglie diverse di similitudini possono avere il medesimo insieme invariante. Nell'Esempio 2.18, abbiamo visto che la curva di Koch è l'insieme invariante per due famiglie tali che le similitudini in una sono le composizioni finite di quelle nell'altra. Cerchiamo allora di formalizzare questa situazione e di individuare una condizione sufficiente affinché si verifichi.

Data una p -upla ordinata α di numeri in $\{1, \dots, N\}$ e $\beta \in \mathbf{C}(N)$, introduciamo la notazione $\alpha \preceq \beta$, se $\alpha_k = \beta_k$ per ogni $k = 1, \dots, p$. Adotteremo inoltre questa notazione anche nel caso in cui β è una q -upla (con $q \geq p$) che soddisfi la medesima condizione.

Nel seguito, con "un insieme di n -uple" intenderemo un insieme di n -uple ordinate di numeri in $\{1, \dots, N\}$, con $n \in \mathbb{N}$ che può variare da elemento a elemento di tale insieme.

DEFINIZIONE 3.23. Dato un insieme I di n -uple, abbiamo che

- I è sicuro se per ogni $\beta \in \mathbf{C}(N)$, esiste almeno un $\alpha \in I$ tale che $\alpha \preceq \beta$,
- I è stretto se per ogni $\beta \in \mathbf{C}(N)$, esiste esattamente un $\alpha \in I$ tale che $\alpha \preceq \beta$.

Osserviamo che banalmente, se I è stretto, allora è sicuro.

PROPOSIZIONE 3.24. Sia $S = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di uno spazio metrico completo (X, d) in sé e K il suo insieme invariante. Se I è un insieme di n -uple sicuro, si ha

$$K = \bigcup_{\alpha \in I} K_{\alpha}.$$

Inoltre, nel caso in cui I sia finito, definendo

$$S_I = \{S_{\alpha} : \alpha \in I\}$$

come la famiglia (finita) di similitudini che si ottiene componendo le applicazioni S_i secondo le n -uple di I e denotando con K_I l'insieme invariante per S_I , si ha $K_I = K$.

DIMOSTRAZIONE. Dal Lemma 3.4, per la decrescenza della successione $p \mapsto K_{i_1 \dots i_p}$, si ha

$$K \supseteq \bigcup_{\alpha \in I} K_{\alpha}.$$

Consideriamo ora $k \in K$, allora dal Teorema 3.6, abbiamo che esiste $i = i_1 \dots i_k \dots \in \mathbf{C}(N)$ tale che $k = k_i$, mentre dall'ipotesi che I è sicuro, esiste $\alpha \in I$ tale che $\alpha \preceq i$, dunque dal Lemma 3.4, si ha che $k = k_i \in K_\alpha$ e l'inclusione opposta

$$K \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} K_\alpha.$$

La parte finale della tesi si ottiene osservando che se K soddisfa l'identità appena dimostrata, allora è l'insieme invariante per S_I , dunque il Teorema 2.8 ne garantisce l'unicità. \square

La seguente proposizione è l'analoga versione per le misure.

PROPOSIZIONE 3.25. *Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di uno spazio metrico (X, d) (con la proprietà di Heine–Borel) in sé con dimensione di similarità D . Siano $\rho_i = r_i^D$, dove r_i è il fattore di scala di S_i e μ la misura invariante per \mathcal{S} . Se I è un insieme di n -uple stretto, definiti per ogni $\alpha = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_j \rangle \in I$, i valori $\rho_\alpha = \rho_{\alpha_1} \cdots \rho_{\alpha_j}$, si ha*

$$\mu = \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha S_{\alpha\#} \mu. \quad (3.5)$$

Inoltre, nel caso in cui I sia finito, definendo

$$S_I = \{S_\alpha : \alpha \in I\}$$

come la famiglia (finita) di similitudini che si ottiene componendo le applicazioni S_i secondo le n -uple di I , μ è la misura invariante per S_I .

DIMOSTRAZIONE. Dal Teorema 3.22, si ha che $\mu = \pi_{\#} \tau$, dunque la tesi è equivalente all'uguaglianza

$$\pi_{\#} \tau = \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha S_{\alpha\#} (\pi_{\#} \tau).$$

Se consideriamo, per ogni $\alpha \in I$, le mappe continue

$$\sigma_\alpha : i \in \mathbf{C}(N) \rightarrow \alpha i \in \mathbf{C}(N),$$

banalmente, $S_\alpha \circ \pi = \pi \circ \sigma_\alpha$, dunque $S_{\alpha\#} (\pi_{\#} \tau) = \pi_{\#} (\sigma_{\alpha\#} \tau)$, da cui

$$\pi_{\#} \tau = \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha S_{\alpha\#} (\pi_{\#} \tau) = \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha \pi_{\#} (\sigma_{\alpha\#} \tau) = \pi_{\#} \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha \sigma_{\alpha\#} \tau.$$

La dimostrazione si riduce quindi a provare che $\tau^* = \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha \sigma_{\alpha\#} \tau^*$ e questo si può ottenere ripercorrendo la dimostrazione del Lemma 3.21.

Mostriamo inizialmente che per ogni $A \subseteq \mathbf{C}(N)$, si ha

$$\sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha \sigma_{\alpha\#} \tau^*(A) \leq \tau^*(A). \quad (3.6)$$

Per la definizione di τ^* , per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento in cilindri C_n di A tale che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(C_n) \leq \tau^*(A) + \varepsilon.$$

Poiché per ogni $\alpha \in I$, abbiamo

$$\sigma_\alpha^{-1}(A) \subseteq \sigma_\alpha^{-1} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_\alpha^{-1}(C_n),$$

segue che

$$\sigma_{\alpha\#}\tau^*(A) = \tau^*(\sigma_\alpha^{-1}(A)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau^*(\sigma_\alpha^{-1}(C_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(\sigma_\alpha^{-1}(C_n)),$$

in quanto $\sigma_\alpha^{-1}(C_n)$ è un cilindro di $\mathbf{C}(N)$. Infatti, se $\alpha = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_k \rangle$ e $C_n = C(i_1, \dots, i_m)$, allora $\sigma_\alpha^{-1}(C_n)$ è

- \emptyset , se $i_1 \neq \alpha_1, \dots, i_k \neq \alpha_k$,
- il cilindro $C(i_{k+1}, \dots, i_m)$, se $i_1 = \alpha_1, \dots, i_k = \alpha_k$.

Dunque $\rho(\sigma_\alpha^{-1}(C_n)) = 0$, se C_n "non inizia" con α e

$$\rho_\alpha \rho(\sigma_\alpha^{-1}(C_n)) = \rho(C_n), \quad (3.7)$$

se C_n "inizia" con α . Allora,

$$\sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha \sigma_{\alpha\#} \tau^*(A) \leq \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha \sum_{\substack{n=1 \\ C_n \text{ "inizia" \\ con } \alpha}}^{\infty} \rho(\sigma_\alpha^{-1}(C_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in I \\ C_n \text{ "inizia" \\ con } \alpha}} \rho_\alpha \rho(\sigma_\alpha^{-1}(C_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(C_n) \leq \tau^*(A) + \varepsilon,$$

dove l'ultima uguaglianza vale in quanto per ogni insieme C_n , esiste un'unica p_n -upla $\langle i_1^n, \dots, i_{p_n}^n \rangle$ tale che $C_n = C(i_1^n, \dots, i_{p_n}^n)$, dunque per ogni $\gamma \in C_n$, si ha $\gamma_1 = i_1^n, \dots, \gamma_{p_n} = i_{p_n}^n$ e dal momento che I è stretto, esiste allora un'unica $\alpha \in I$ tale che $\alpha \preceq \gamma$, per ogni $\gamma \in C_n$. Quindi, per ogni C_n esiste un'unica $\alpha_n \in I$ tale che C_n "inizia" per α_n , da cui

$$\sum_{\substack{\alpha \in I \\ C_n \text{ "inizia" \\ con } \alpha}} \rho_\alpha \rho(\sigma_\alpha^{-1}(C_n)) = \rho_{\alpha_n} \rho(\sigma_{\alpha_n}^{-1}(C_n)) = \rho(C_n),$$

per l'uguaglianza (3.7). Mandando $\varepsilon \rightarrow 0$, si ha la disuguaglianza (3.6). Mostriamo la disuguaglianza opposta, ossia

$$\tau^*(A) \leq \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha \sigma_{i_\#} \tau^*(A),$$

per ogni $A \subseteq \mathbf{C}(N)$.

L'insieme I è al più numerabile, essendo numerabile l'intera famiglia delle n -uple a valori in $\{1, \dots, N\}$, quindi possiamo scrivere

$$I = \{\alpha^1, \dots, \alpha^k, \dots\}.$$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ esistono ricoprimenti con cilindri $C_n^{\alpha^k}$ di $\sigma_{\alpha^k}^{-1}(A)$ tali che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho(C_n^{\alpha^k}) \leq \tau^*(\sigma_{\alpha^k}^{-1}(A)) + \varepsilon / \rho_{\alpha^k} 2^k$$

e osserviamo che

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_{\alpha^k}(\sigma_{\alpha^k}^{-1}(A)) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \sigma_{\alpha^k} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n^{\alpha^k} \right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma_{\alpha^k}(C_n^{\alpha^k}),$$

dunque,

$$\begin{aligned}\tau^*(A) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \rho(\sigma_{\alpha^k}(C_n^{\alpha^k})) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \rho_{\alpha^k} \rho(C_n^{\alpha^k}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{\alpha^k} \left(\tau^*(\sigma_{\alpha^k}^{-1}(A)) + \varepsilon / \rho_{\alpha^k} 2^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_{\alpha^k} \sigma_{\alpha^k} \tau^*(A) + \varepsilon.\end{aligned}$$

Mandando allora $\varepsilon \rightarrow 0$, si ha la disuguaglianza cercata, da cui la tesi.

Infine, poiché $\mu = \pi_{\#} \tau$ soddisfa l'identità (3.5), è la misura invariante per S_I , per l'unicità data dal Teorema 3.18. \square

3.3. La dimostrazione del metodo

In questa sezione finale, lo spazio metrico sarà \mathbb{R}^n con la distanza standard, sottolineando che tutto quanto segue vale anche in uno spazio metrico completo (X, d) con la proprietà di Heine–Borel. Assumeremo che ogni famiglia di similitudini $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ da \mathbb{R}^n in sé, sia ordinata in modo tale che i fattori di scala relativi alle applicazioni S_i soddisfino $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_N$. Inoltre, con $K \subseteq \mathbb{R}^n$ denoteremo l'insieme invariante per \mathcal{S} , dato dal Teorema 2.8 e con μ la misura invariante per \mathcal{S} , data dal Teorema 3.18. Infine, $D \in \mathbb{R}$ indicherà la dimensione di similarità di \mathcal{S} e $\rho_i = r_i^D$.

DEFINIZIONE 3.26 (Condizione dell'insieme aperto). Diremo che una famiglia di similitudini $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ di \mathbb{R}^n in sé, soddisfa la *condizione dell'insieme aperto*, se esiste un sottoinsieme O di \mathbb{R}^n non vuoto, aperto e limitato, tale che

- (1) $\bigcup_{i=1}^N O_i \subseteq O$,
- (2) $O_i \cap O_j = \emptyset$, se $i \neq j$,

dove $O_i = S_i(O)$.

Questa condizione sarà sufficiente affinché la dimensione di Hausdorff dell'insieme K invariante per \mathcal{S} e la dimensione di similarità della famiglia coincidano. Si noti che argomentando come nella dimostrazione del Lemma 1.4, c'è sempre una palla aperta che soddisfa la condizione (1).

Vedremo come molte delle famiglie di similitudini che “determinano” gli insiemi frattali visti nella Sezione 2.3, soddisfano la condizione dell'insieme aperto. Un esempio di famiglia di similitudini che invece *non* la soddisfa è dato dalla famiglia \mathcal{S}^r , con $r > 1/2$, definita nell'Esempio 2.15 (si veda l'Osservazione 3.33 per chiarimenti).

PROPOSIZIONE 3.27. *Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di \mathbb{R}^n in sé che soddisfa la condizione dell'insieme aperto con l'insieme O . Osserviamo che $\overline{O_{i_1 \dots i_p}} = (\overline{O})_{i_1 \dots i_p}$ e indichiamo con $\overline{O}_{i_1 \dots i_p}$ tale insieme. Allora si ha,*

- (1) $O \supseteq O_{i_1} \supseteq O_{i_1 i_2} \supseteq \dots \supseteq O_{i_1 i_2 \dots i_p} \supseteq \dots$,
- (2) $K_{i_1 \dots i_p} \subseteq \overline{O}_{i_1 \dots i_p}$,
- (3) $K_{j_1 \dots j_p} \cap O_{i_1 \dots i_p} = \emptyset$, se $(j_1, \dots, j_p) \neq (i_1, \dots, i_p)$.

DIMOSTRAZIONE. Riguardo al punto (1), fissati i_p e i_{p-1} in $\{1, \dots, N\}$, si ha

$$O_{i_{p-1} i_p} = S_{i_{p-1}}(O_{i_p}) \subseteq S_{i_{p-1}}(O) = O_{i_{p-1}} \subseteq O.$$

Iterando questo argomento per tutti gli indici i_1, \dots, i_{p-2} , si ha la tesi.

Per mostrare il punto (2), osserviamo che dal momento che $O_i \subseteq O$ per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$,

allora $\overline{O}_i \subseteq \overline{O}$ per ogni $i \in \{1, \dots, N\}$, quindi \overline{O} soddisfa le ipotesi della Proposizione 3.8, da cui $K \subseteq \overline{O}$. Allora applicando $S_{i_1 \dots i_p}$ a entrambi i lati di questa inclusione, otteniamo $K_{i_1 \dots i_p} \subseteq \overline{O}_{i_1 \dots i_p}$.

Per ottenere il punto (3), notiamo che banalmente, se $O_{j_1 \dots j_p} \cap O_{i_1 \dots i_p} = \emptyset$, allora $\overline{O}_{j_1 \dots j_p} \cap O_{i_1 \dots i_p} = \emptyset$. Per ottenere la conclusione, è allora sufficiente osservare che dal punto (2), si ha $K_{j_1 \dots j_p} \subseteq \overline{O}_{j_1 \dots j_p}$. \square

LEMMA 3.28. *Supponiamo che S soddisfi la condizione dell'insieme aperto con l'insieme O . Se I è un insieme di n -uple stretto, allora gli insiemi O_α con $\alpha \in I$, sono disgiunti.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $\alpha, \beta \in I$ con $\alpha \neq \beta$. Sia $p \in \mathbb{N}$ il massimo intero per cui esiste una p -upla $\langle i_1, \dots, i_p \rangle$ tale che $\langle i_1, \dots, i_p \rangle \prec \alpha$ e $\langle i_1, \dots, i_p \rangle \prec \beta$. Se per assurdo la "lunghezza" di α (o di β) fosse p , considerata allora $\gamma \in \mathbf{C}(N)$ tale che $\beta \preceq \gamma$, si avrebbe $\alpha \preceq \beta \preceq \gamma$, il che è assurdo dal momento che $\alpha, \beta \in I$, che è stretto. Quindi, α e β hanno "lunghezza" maggiore di p e dunque esistono $i_{p+1}, j_{p+1} \in \{1, \dots, N\}$ tali che $\langle i_1, \dots, i_p, i_{p+1} \rangle \prec \alpha$ e $\langle i_1, \dots, i_p, j_{p+1} \rangle \prec \beta$, con $i_{p+1} \neq j_{p+1}$ (per la massimalità di p). Allora, $O_\alpha \subseteq O_{i_1 \dots i_p i_{p+1}}$ e $O_\beta \subseteq O_{i_1 \dots i_p j_{p+1}}$ per il punto (1) della Proposizione 3.27, quindi

$$O_\alpha \cap O_\beta \subseteq S_{i_1 \dots i_p}(O_{i_{p+1}} \cap O_{j_{p+1}}) = \emptyset.$$

\square

Per dimostrare il metodo di Hutchinson vogliamo sfruttare la Proposizione 2.13. Se D è la dimensione di similarità di una famiglia di similitudini S con insieme invariante K , mostreremo che $0 < \mathcal{H}^D(K) < +\infty$, da cui $\dim_H K = D$ e di conseguenza, avremo che l'insieme K è autosimilare, per tale proposizione.

Cominciamo con la stima dall'alto su $\mathcal{H}^D(K)$.

PROPOSIZIONE 3.29. *Sia $S = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di \mathbb{R}^n in sé, K il suo insieme invariante e D la sua dimensione di similarità. Allora, le premisure $\mathcal{H}_\delta^D(K)$ sono indipendenti da $\delta > 0$, dunque uguali a $\mathcal{H}^D(K)$ per ogni $s \geq 0$. Chiaramente, segue che $\mathcal{H}^D(K) < +\infty$, quindi $\dim_H K \leq D$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia U_j un ricoprimento di K con insiemi di diametro minore o uguale a $\delta > 0$. Allora, poiché $\text{diam } S_i(U_j) = r_i \text{ diam } U_j$, si ha che la famiglia di insiemi $S_i(U_j)$, al variare di $i \in \{1, \dots, N\}$ e $j \in \mathbb{N}$, è anch'esso un ricoprimento di K con insiemi di diametro minore o uguale a $r\delta$, posto $r = \max\{r_1, \dots, r_N\} < 1$. Dunque,

$$\mathcal{H}_{r\delta}^s(K) \leq \omega_s \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{diam } S_i(U_j)}{2} \right)^D = \omega_s \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\text{diam } U_j}{2} \right)^D r_i^D = \omega_s \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\text{diam } U_j}{2} \right)^D$$

e considerando l'estremo inferiore su tutti i ricoprimenti di K di diametro minore o uguale a δ , concludiamo che $\mathcal{H}_{r\delta}^s(K) \leq \mathcal{H}_\delta^s(K)$ e dal momento che l'altra disuguaglianza è ovvia, in realtà abbiamo l'uguaglianza. Iterando questo ragionamento, otteniamo che $\mathcal{H}_{r^k \delta}^s(K) = \mathcal{H}_\delta^s(K)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, da cui segue la tesi, in quanto $r^k \rightarrow 0$, se $k \rightarrow \infty$ e la funzione $\delta \mapsto \mathcal{H}_\delta^s(K)$ è monotona nondecrescente. \square

Vediamo poi un paio di lemmi preliminari che ci serviranno per mostrare la stima dal basso su $\mathcal{H}^D(K)$.

LEMMA 3.30. Sia μ una misura di Borel su \mathbb{R}^n . Se per $s \in [0, +\infty)$, esistono una costante $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tali che per ogni palla chiusa $B = \overline{B}_R \subseteq \mathbb{R}^n$ con raggio $R \leq \varepsilon$, si ha

$$\mu(B) \leq C\omega_s R^s,$$

allora,

$$\mu(E) \leq 2^s C \mathcal{H}^s(E),$$

per ogni insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ boreliano.

DIMOSTRAZIONE. Sia U_i un ricoprimento di E con $\text{diam } U_i \leq \delta \leq \varepsilon$. Allora, poiché ogni insieme U_i è contenuto in una palla chiusa $\overline{B}_{R_i}(x_i)$ di raggio $R_i = \text{diam } U_i \leq \varepsilon$, si ha

$$\mu(E) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \leq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{B}_{R_i}(x_i)\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\overline{B}_{R_i}(x_i)) \leq C\omega_s \sum_{i=1}^{\infty} R_i^s = C2^s \omega_s \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\text{diam } U_i}{2}\right)^s$$

da cui $\mu(E) \leq 2^s C \mathcal{H}_\delta^s(E)$, considerando l'estremo inferiore sui ricoprimenti di E . La tesi segue mandando $\delta \rightarrow 0$. \square

LEMMA 3.31. Siano $0 < C_1 < C_2$, $\delta > 0$ e U_i una famiglia di insiemi aperti disgiunti di \mathbb{R}^n . Supponiamo che ogni U_i contenga una palla di raggio δC_1 e sia contenuto in una palla di raggio δC_2 . Allora, al massimo $(1 + 2C_2)^n / C_1^n$ degli insiemi U_i intersecano la palla chiusa $\overline{B}_\delta(x)$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\overline{U}_i, \dots, \overline{U}_k$ intersechino $\overline{B}_\delta(x)$. Allora ognuno di questi insiemi è un sottoinsieme di $\overline{B}_{(1+2C_2)\delta}(x)$, per la disuguaglianza triangolare. La somma dei volumi delle k palle disgiunte di raggio δC_1 , per ipotesi contenute negli U_i , deve essere minore del volume della palla $\overline{B}_{(1+2C_2)\delta}(x)$, dunque

$$k\omega_n \delta^n C_1^n \leq \omega_n (1 + 2C_2)^n \delta^n$$

e quindi $k \leq (1 + 2C_2)^n / C_1^n$. \square

Possiamo ora finalmente mostrare il teorema principale della tesi.

TEOREMA 3.32 (Metodo di Hutchinson). Sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_N\}$ una famiglia di similitudini di \mathbb{R}^n in sé, K il suo insieme invariante e D la sua dimensione di similarità. Se \mathcal{S} soddisfa la condizione dell'insieme aperto, allora $0 < \mathcal{H}^D(K) < +\infty$ (dunque $\dim_H K = D$) e la misura μ invariante per \mathcal{S} è data da

$$\mu = \frac{\mathcal{H}^D|_K}{\mathcal{H}^D(K)}.$$

Segue che l'insieme K è autosimilare e ha dimensione di Hausdorff D , per la Proposizione 2.13.

DIMOSTRAZIONE. Sia O dato dalla condizione dell'insieme aperto. La stima dall'alto su $\mathcal{H}^D(K)$ è data dalla Proposizione 3.29, dunque è sufficiente mostrare che $\mathcal{H}^D(K) > 0$.

Consideriamo la misura $\mu \in \mathcal{M}^1$ invariante per \mathcal{S} , che per il Teorema 3.22, ha supporto in K e dunque $\mu(K) = \|\mu\| = 1$. Per poter applicare il Lemma 3.30 all'insieme invariante K con $s = D$, mostriamo allora che esiste una costante $C > 0$ tale che per ogni palla chiusa $\overline{B}_R(x)$ di \mathbb{R}^n con raggio $R \leq 1$, si ha

$$\mu(\overline{B}_R(x)) \leq C\omega_D R^D.$$

Poiché $\text{supp } \mu = K$, abbiamo che $\mu(\overline{B}_R(x)) = \mu(\overline{B}_R(x) \cap K)$, costruiamo dunque un ricoprimento opportuno di $\overline{B}_R(x) \cap K$, per maggiorarne la misura μ . Consideriamo i fattori di

scala (in ordine crescente) r_i delle similitudini S_i , quindi tutti minori o uguali di $r_N < 1$ e per ogni $j_1 \dots j_p \dots \in \mathbf{C}(N)$, sia $q \in \mathbb{N}$ il primo intero tale che

$$r_1 R \leq r_{j_1} \cdots r_{j_q} \leq R. \quad (3.8)$$

Mostriamo che questa è una buona definizione per ogni $j_1 \dots j_p \dots \in \mathbf{C}(N)$. Infatti, dal momento che r_1 è il minimo dei fattori di scala, indipendentemente da j_1 , si ha che

$$r_1 R \leq r_{j_1},$$

nel caso in cui dovesse accadere che $R < r_{j_1}$ (ossia $q \neq 1$), seguirebbe

$$r_1 R \leq r_{j_2} R < r_{j_1} r_{j_2}$$

e così via, procedendo ricorsivamente, se $R < r_{j_1} \cdots r_{j_k}$ (ossia $q \neq k$), allora

$$r_1 R \leq r_{j_1} \cdots r_{j_k} r_{j_{k+1}}.$$

Se questo procedimento ricorsivo non si interrompesse, allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ si avrebbe $R < r_{j_1} \cdots r_{j_k} \leq r_N^k$ che per $k \rightarrow \infty$, tende a zero, che è un assurdo.

Sia I l'insieme delle q -uple $\langle j_1, \dots, j_q \rangle$ così selezionate e notiamo che I è banalmente stretto per costruzione, quindi dalla Proposizione 3.24, si ha che

$$K = \bigcup_{\alpha \in I} K_\alpha,$$

dunque $\{K_\alpha : \alpha \in I\}$ è un ricoprimento di $\overline{B}_R(x) \cap K$. Inoltre, dal Lemma 3.28 segue che $\{O_{j_1 \dots j_q} : \langle j_1, \dots, j_q \rangle \in I\}$ è una collezione di insiemi aperti disgiunti. Considerando che O è aperto e limitato, esistono una palla di raggio C_1 contenuta in esso e una palla di raggio C_2 in cui è contenuto, allora per ogni $\langle j_1, \dots, j_q \rangle \in I$ si ha che $O_{j_1 \dots j_q}$ contiene una palla di raggio $r_{j_1} \cdots r_{j_q} C_1$, quindi di raggio $r_1 R C_1$ ed è contenuto in una palla di raggio $r_{j_1} \cdots r_{j_q} C_2$, quindi di raggio $R C_2$. Segue dal Lemma 3.31 che al massimo $(1 + 2C_2)^n (r_1 C_1)^{-n}$ degli insiemi $\overline{O}_{j_1 \dots j_q}$ intersecano $\overline{B}_R(x)$ e dal momento che dal punto (2) della Proposizione 3.27, abbiamo $K_{j_1 \dots j_q} \subseteq \overline{O}_{j_1 \dots j_q}$, si ha che al massimo $(1 + 2C_2)^n (r_1 C_1)^{-n}$ dei compatti $K_{j_1 \dots j_q}$ con $\langle j_1, \dots, j_q \rangle \in I$, intersecano $\overline{B}_R(x)$, dunque i compatti K_α che hanno intersezione non vuota con $\overline{B}_R(x) \cap K$ sono in numero finito. Chiamiamo allora I' l'insieme di n -uple finito per cui se $\beta \in I'$, si ha che $\overline{B}_R(x) \cap K_\beta \neq \emptyset$.

Per la Proposizione 3.25, considerati $\rho_\alpha = \rho_{\alpha_1} \cdots \rho_{\alpha_h}$, per ogni $\alpha = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_h \rangle \in I$, possiamo riscrivere μ come

$$\mu = \sum_{\alpha \in I} \rho_\alpha S_{\alpha\#} \mu.$$

Inoltre, poiché $\text{supp } \mu = K$, si ha che $\text{supp } S_{\alpha\#} \mu = K_\alpha$ per ogni $\alpha \in I$, da cui considerando che $\overline{B}_R(x)$ interseca solo i compatti K_β con $\beta \in I'$, otteniamo

$$\mu(\overline{B}_R(x)) = \sum_{\beta \in I'} \rho_\beta S_{\beta\#} \mu(\overline{B}_R(x) \cap K_\beta).$$

Osserviamo allora che per $\beta \in I'$, si ha

$$\rho_\beta S_{\beta\#} \mu(K_\beta) = \rho_\beta \mu(S_\beta^{-1}(K_\beta)) = \rho_\beta \|\mu\| = \rho_\beta = r_{\beta_1}^D \cdots r_{\beta_h}^D \leq R^D,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue dall'equazione (3.8), che è soddisfatta da ogni $\beta \in I$.
Dunque,

$$\mu(\overline{B}_R(x)) = \sum_{\beta \in I'} \rho_\beta S_{\beta\#} \mu(\overline{B}_R(x) \cap K_\beta) \leq \sum_{\beta \in I'} \rho_\beta S_{\beta\#} \mu(K_\beta) \leq \sum_{\beta \in I'} R^D$$

e ricordando che la cardinalità di I' è al più $\frac{(1+2C_2)^n}{r_1^n C_1^n}$, si ha

$$\sum_{\beta \in I'} R^D \leq \frac{(1+2C_2)^n}{r_1^n C_1^n} R^D = C\omega_D R^D.$$

Segue allora dal Lemma 3.30,

$$\mathcal{H}^D(K) \geq \frac{\mu(K)}{2^D C} = \frac{1}{2^D C} > 0,$$

che è quanto volevamo dimostrare.

Per la Proposizione 2.13, abbiamo che K è autosimile, dunque $\mathcal{H}^D(K_i \cap K_j) = 0$, se $i \neq j$, da cui K_1, \dots, K_N è una partizione di K a meno di insiemi di misura \mathcal{H}^D -nulla, quindi

$$\mathcal{H}^D|_K = \sum_{i=1}^N \mathcal{H}^D|_{S_i(K)} = \sum_{i=1}^N r_i^D S_{i\#} \mathcal{H}^D|_K,$$

dove l'ultimo passaggio segue dal fatto che per una similitudine S con fattore di scala $r > 0$, si ha $S_{\#} \mathcal{H}^s = r^{-s} \mathcal{H}^s$, per la Proposizione 1.14.

Allora, posto

$$\sigma = \frac{\mathcal{H}^D|_K}{\mathcal{H}^D(K)},$$

si ha banalmente che $\|\sigma\| = 1$ e che

$$\sigma = \sum_{i=1}^N r_i^D S_{i\#} \sigma,$$

dunque, deve essere $\sigma = \mu$, per l'unicità della misura invariante per S data dal Teorema 3.18. \square

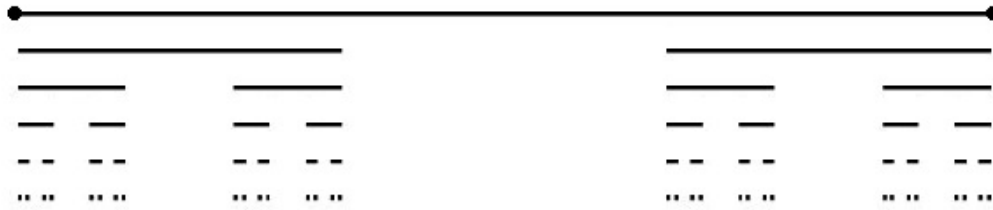
La condizione dell'insieme aperto non è molto restrittiva, in particolare vediamo ora, con l'eccezione della famiglia di similitudini \mathcal{S}^r per $r > 1/2$, nell'Esempio 2.15, che è soddisfatta da tutte le famiglie di similitudini negli esempi di insiemi frattali presentati nella Sezione 2.3, che dunque sono autosimili.

OSSERVAZIONE 3.33. Abbiamo visto nell'Esempio 2.15 che la famiglia di similitudini \mathcal{S}^r , per $r > 1/2$, ha come insieme invariante l'intervallo $[0, 1]$, di dimensione di Hausdorff 1, mentre la dimensione di similarità è $-\log 2 / \log r$. Dunque, per il Teorema 3.32, la famiglia \mathcal{S}^r non può soddisfare la condizione dell'insieme aperto, altrimenti queste due dimensioni coinciderebbero.

ESEMPIO 3.34 (Insiemi di Cantor generalizzati). Consideriamo nuovamente, per $0 < r < 1/2$, la famiglia \mathcal{S}^r costituita dalle due seguenti similitudini di \mathbb{R} :

$$S_1^r = (0, r, \text{Id}) \quad \text{e} \quad S_2^r = (1, r, \text{Id}),$$

come nell'Esempio 2.15.



Abbiamo visto in tale esempio che gli insiemi di Cantor generalizzati C^r sono autosimilari, con una dimostrazione diretta. Mostriamo comunque che la famiglia \mathcal{S}^r soddisfa la condizione dell'insieme aperto. È infatti immediato vedere che l'insieme $O = (0, 1)$ soddisfa entrambe le richieste della Definizione 3.26):

$$S_1^r(0, 1) = (0, r) \quad \text{e} \quad S_2^r(0, 1) = (1 - r, 1),$$

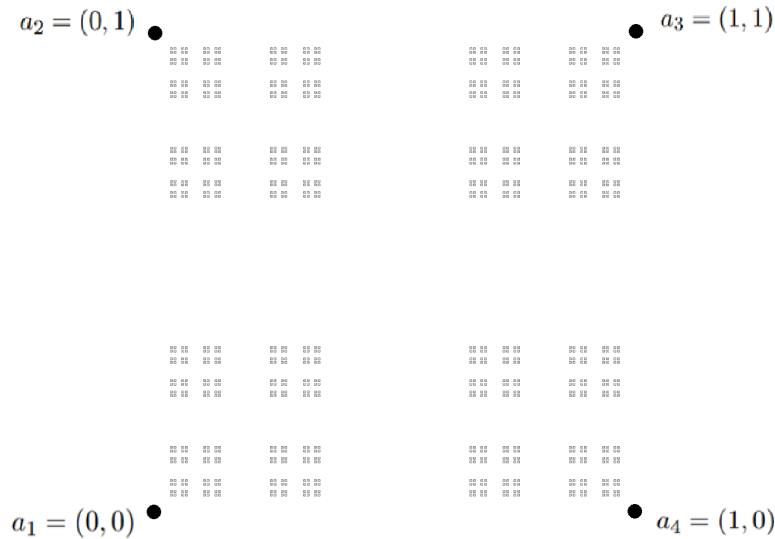
dunque, per ogni $0 < r \leq 1/2$, si ha

$$(1) \quad (0, r) \cup (1 - r, 1) \subseteq (0, 1),$$

$$(2) \quad (0, r) \cap (1 - r, 1) = \emptyset,$$

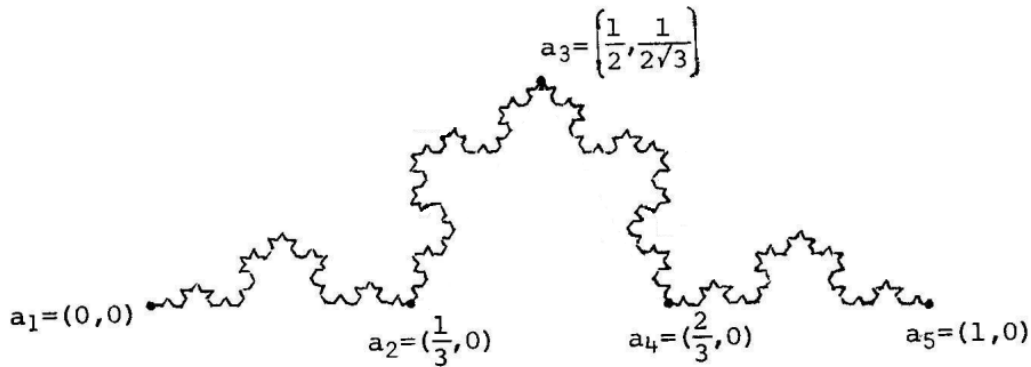
da cui, per il Teorema 3.32, si ha $\dim_H C^r = -\log 2 / \log r$, uguale alla dimensione di similarità di \mathcal{S} . In particolare, per l'insieme di Cantor "classico", $\dim_H C = -\log 2 / \log 3$.

ESEMPIO 3.35 (Polvere di Cantor). Abbiamo visto nell'Esempio 2.16 che la polvere di Cantor $C \times C$ è l'insieme invariante della famiglia \mathcal{S} data dalle similitudini $S_i = (a_i, 1/3, \text{Id})$ di \mathbb{R}^2 , dove gli a_i sono i vertici del quadrato nella figura seguente.



È allora immediato che il quadrato aperto di vertici a_1, a_2, a_3, a_4 soddisfa le condizioni sull'insieme O nella Definizione 3.26 della condizione dell'insieme aperto. Dunque, per il Teorema 3.32 si ha che $\dim_H C \times C = \log 4 / \log 3$, cioè la dimensione di similarità di \mathcal{S} .

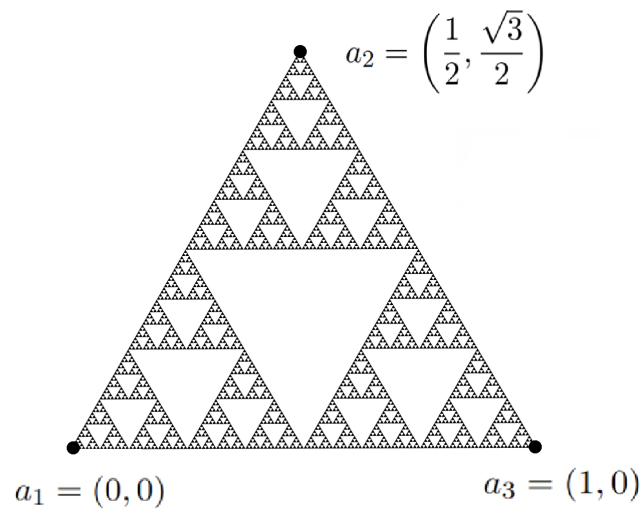
ESEMPIO 3.36 (Curva di Koch). Per la curva di Koch K , consideriamo la seconda delle due famiglie di similitudini di \mathbb{R}^2 viste nell'Esempio 2.18, che l'hanno come insieme invariante, ossia $\mathcal{S}' = \{S'_1, S'_2\}$, dove S'_1 e S'_2 sono le uniche similitudini che mappano il segmento orientato $\overrightarrow{a_1 a_5}$ rispettivamente in $\overrightarrow{a_3 a_1}$ e in $\overrightarrow{a_5 a_3}$.



Tale famiglia soddisfa la condizione dell'insieme aperto considerando come insieme O nella Definizione 3.26, il triangolo aperto T di vertici $\{a_1, a_3, a_5\}$. Infatti, S'_1 e S'_2 mappano T rispettivamente nei triangoli aperti T_1 di vertici $\{a_1, a_2, a_3\}$ e T_2 di vertici $\{a_3, a_4, a_5\}$, che chiaramente sono disgiunti e hanno unione contenuta in T . Dunque per il Teorema 3.32 si ha che $\dim_H K = 2 \log 2 / \log 3$, la dimensione di similarità di \mathcal{S} .

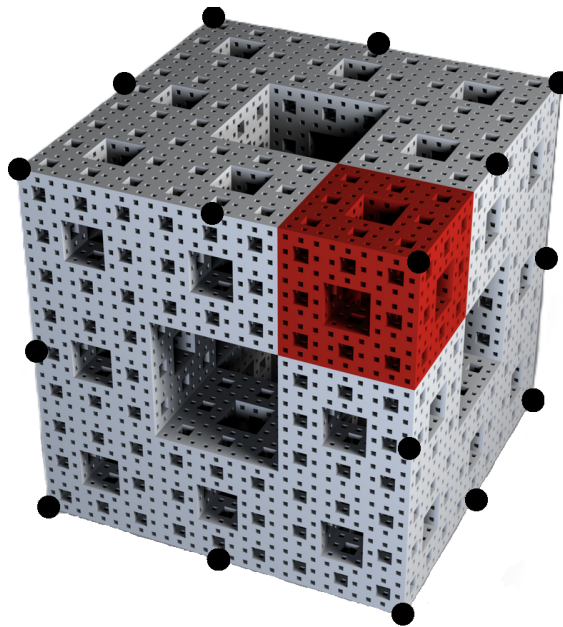
OSSERVAZIONE 3.37. Abbiamo scelto di considerare la seconda famiglia di similitudini nell'Esempio 2.18, in quanto l'insieme aperto per \mathcal{S}' si trova intuitivamente e in modo immediato, mentre quello per \mathcal{S} non è così facile da individuare.

ESEMPIO 3.38 (Triangolo di Sierpiński). Per il triangolo di Sierpiński T , visto nell'Esempio 2.19, consideriamo la famiglia $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, S_3\}$ di similitudini di \mathbb{R}^2 , che lo ha come insieme invariante, con $S_i = (a_i, 1/2, \text{Id})$, dove gli a_i sono i punti indicati nell'immagine seguente.



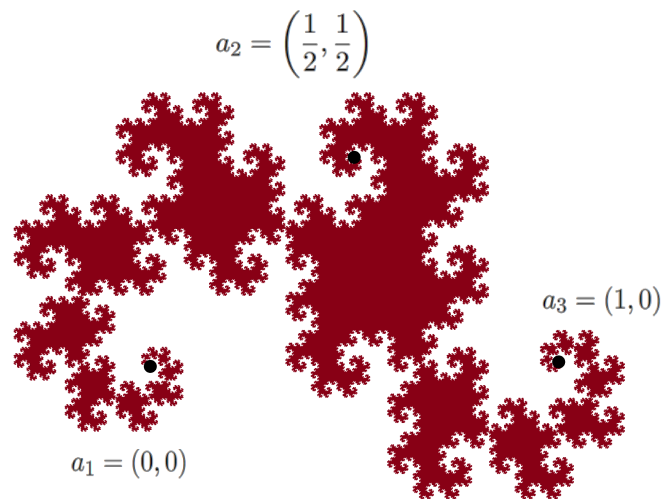
È allora evidente che il triangolo aperto di vertici $\{a_1, a_2, a_3\}$ sia l'aperto che soddisfa le richieste della condizione dell'insieme aperto per la famiglia \mathcal{S} , poiché l'azione di ogni similitudine S_i su tale triangolo, consiste nel dimezzarne i lati e "schiacciarlo" verso il vertice a_i . Dunque, per il Teorema 3.32 si ha che $\dim_H T = \log 3 / \log 2$, uguale alla dimensione di similarità di \mathcal{S} .

ESEMPIO 3.39 (Spugna di Menger). La spugna di Menger M nell'Esempio 2.20, è l'insieme invariante della famiglia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_{20}\}$ di similitudini di \mathbb{R}^3 date da $S_i = (a_i, 1/3, \text{Id})$, dove i punti a_i , indicati nella figura che segue, sono i vertici e i punti medi degli spigoli di un cubo unitario chiuso Q .



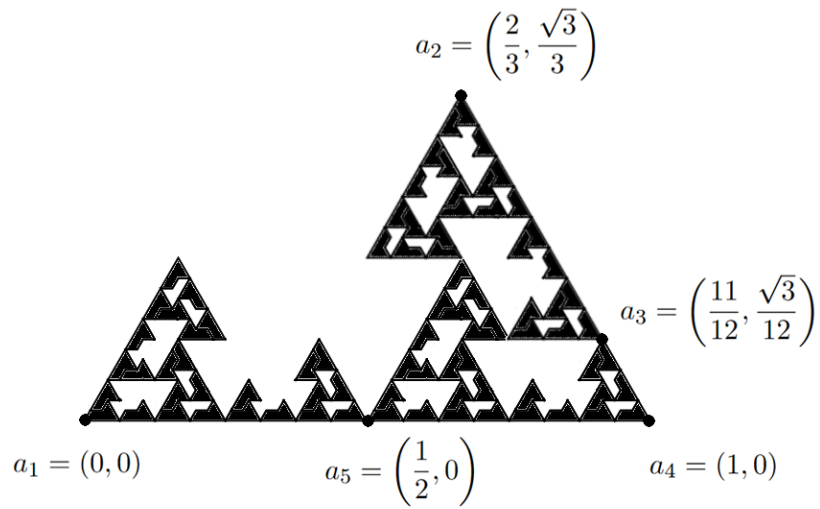
Si vede facilmente che il cubo aperto $\overset{\circ}{Q}$ soddisfa le richieste per O nella Definizione 3.26. Dunque, per il Teorema 3.32 si ha che $\dim_H M = \log 20 / \log 3$, essendo quest'ultima la dimensione di similarità di S .

ESEMPIO 3.40 (Curva del drago). La curva del drago D vista nell'Esempio 2.21, è l'insieme invariante della famiglia di similitudini $S = \{S_1, S_2\}$ di \mathbb{R}^2 , con S_1 e S_2 (facendo riferimento alla figura che segue) le uniche che mappano il segmento orientato $\overrightarrow{a_1 a_3}$ rispettivamente in $\overrightarrow{a_1 a_2}$ e in $\overrightarrow{a_3 a_2}$.

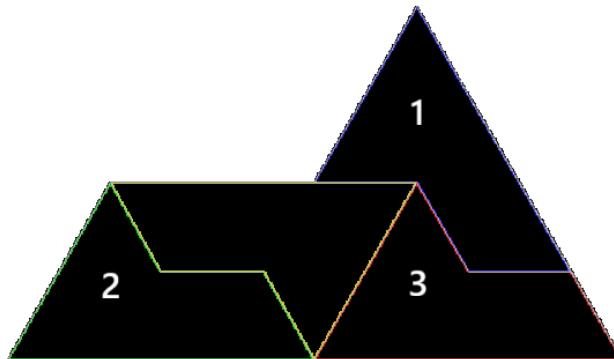


In questo caso, mostrare che S soddisfa la condizione dell'insieme aperto, cioè esibire un aperto O che verifichi le condizioni della Definizione 3.26, non è banale. Nel lavoro [1] viene dimostrato che si può scegliere $O = \overset{\circ}{D}$, quindi per il Teorema 3.32, si ha che $\dim_H D = 2$, che è la dimensione di similarità di S .

ESEMPIO 3.41 (Frattale della sfinge). Facendo riferimento alla figura che segue, abbiamo visto nell'Esempio 2.22 che il frattale della sfinge F è l'insieme invariante per la famiglia $S = \{S_1, S_2, S_3\}$ di similitudini di \mathbb{R}^2 , con S_1 l'unica che mappa il segmento orientato $\overrightarrow{a_1 a_4}$ in $\overrightarrow{a_3 a_2}$, S_2 l'unica che lo mappa in $\overrightarrow{a_5 a_1}$ e S_3 l'unica che lo mappa in $\overrightarrow{a_4 a_5}$.



È allora facile vedere che possiamo scegliere come aperto O nella Definizione 3.26, la parte interna della “piastrella” non numerata nella figura sotto, vista nell’Esempio 2.22:



Dunque, per il Teorema 3.32, si ha che $\dim_H F = \log 3 / \log 2$, la dimensione di similarità di S .

Referenze

1. S. Akiyama, Y. Kamiya, and F. Wen, *Non-intersective dragon curves*, <https://arxiv.org/html/2401.07002v1>, 2024.
2. L. Ambrosio, G. Da Prato, and A. Mennucci, *Introduction to measure theory and integration*, Appunti. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. 10, Edizioni della Normale, 2011.
3. M. Barnsley, *Fractals everywhere*, Academic Press, 1988.
4. H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*, Masson, 1983.
5. J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, 1966.
6. G. A. Edgar, *Classics on fractals*, Taylor & Francis, 2004.
7. L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1992.
8. K. Falconer, *Fractal geometry*, third ed., John Wiley & Sons, 2014.
9. G. B. Folland, *Real analysis*, second ed., John Wiley & Sons, 1999.
10. J. E. Hutchinson, *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), no. 5, 713–747.
11. B. B. Mandelbrot, *Les objets fractals. Forme, hasard et dimension*, Nouvelle Bibliothèque Scientifique, Flammarion Éditeur, 1975.
12. MathOverflow, *Is there some known way to create the Mandelbrot set (the boundary), with an iterated function system?*, <https://mathoverflow.net/q/74458>.
13. L. Riddle, *Convergence of the Koch construction*, <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/kcurve/kochconvergence.htm>.
14. ———, *Heighway dragon*, <https://larryriddle.agnesscott.org/ifs/heighway/heighway.htm>.
15. W. Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill, 1987.
16. M. Shishikura, *The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets*, Ann. of Math. **147** (1998), no. 2, 225–267.
17. Wikipedia, *Curva del drago di Heighway*, https://it.wikipedia.org/wiki/Curva_del_drago_di_Heighway.
18. ———, *Mandelbrot set*, https://en.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot_set.
19. ———, *Sphinx tiling*, https://en.wikipedia.org/wiki/Sphinx_tiling.