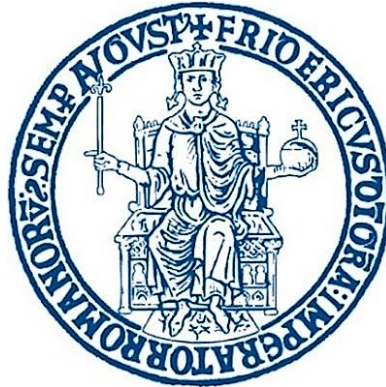


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II
SCUOLA POLITECNICA DELLE SCIENZE DI BASE



DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E APPLICAZIONI
"RENATO CACCIOPPOLI"
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN
MATEMATICA

Deformazioni di Cheeger
Costruzione di Esempi di Varietà a
Curvatura Sezionale Nonnegativa

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

RELATORE
PROF. CARLO MANTEGAZZA

CANDIDATO
ANTONIO G. DI NATALE
Matr. N98000480

ANNO ACCADEMICO 2024/2025

Indice

Introduzione	1
Capitolo 1. Preliminari	2
1.1. Richiami di geometria riemanniana	2
1.2. Gruppi di Lie e spazi omogenei	4
1.3. Biquozienti	7
1.4. Un cenno alle sfere esotiche	8
1.5. Spazi simmetrici	9
1.6. Gruppi di omologia e numeri di Betti	9
Capitolo 2. Varietà con curvatura sezionale nonnegativa	11
2.1. Alcuni teoremi fondamentali in curvatura nonnegativa o positiva	11
2.2. Esempi di spazi a curvatura nonnegativa o positiva	13
Capitolo 3. Deformazioni di Cheeger	16
3.1. Preliminari	16
3.2. Deformazioni di Cheeger	18
3.3. Il teorema di Cheeger	21
3.4. Applicazioni	22
3.5. Biquozienti e deformazioni di Cheeger	25
3.6. Osservazioni conclusive	26
Capitolo 4. Esempi	28
4.1. Condizioni di positività per biquozienti	28
4.2. Le varietà di Aloff–Wallach	31
4.3. Conclusioni	33
Ringraziamenti	34
Bibliografia	35

Introduzione

La presente tesi si inserisce nell'ambito della geometria riemanniana e ha come obiettivo principale lo studio delle deformazioni di Cheeger come strumento per la costruzione di esempi di varietà riemanniane con curvatura sezionale nonnegativa. Il lavoro è ispirato al *survey* di Wolfgang Ziller *Examples of Riemannian Manifolds with Nonnegative Sectional Curvature* [40] e si propone di rielaborarne e approfondirne alcuni aspetti, con particolare attenzione al ruolo delle azioni dei gruppi di Lie nella produzione di nuove metriche con buone proprietà di curvatura.

Nel primo capitolo vengono richiamati alcuni concetti fondamentali della geometria differenziale e riemanniana, necessari per lo sviluppo formale della teoria. Vengono discussi i gruppi di Lie, gli spazi omogenei e i biquozienti, i quali costituiscono storicamente una delle principali fonti di varietà a curvatura nonnegativa. Dopo aver introdotto le nozioni di azione di gruppo e sommersione riemanniana, viene mostrato come tali strutture permettano di trasferire proprietà geometriche dallo spazio totale allo spazio quoziente. In questo quadro, i biquozienti emergono come una generalizzazione naturale degli spazi omogenei, prestandosi in modo ottimale alla costruzione esplicita di nuovi esempi geometrici.

Nel secondo capitolo vengono presentati i risultati classici riguardanti le varietà a curvatura nonnegativa o positiva. Attraverso teoremi fondamentali – quali quelli di *Bonnet–Myers*, *di Synge*, *di splitting* e *dell'anima (del soul)* – si evidenziano i vincoli topologici imposti da tali condizioni geometriche. Viene inoltre fornita una serie di esempi noti in letteratura.

Il terzo capitolo, che costituisce il nucleo centrale del testo, è dedicato allo studio delle *deformazioni di Cheeger*. Viene descritta la costruzione generale di tali deformazioni, interpretate come una modifica controllata e continua della metrica lungo le orbite di un'azione isometrica di un gruppo di Lie compatto e ne vengono analizzate rigorosamente le conseguenze per la curvatura tramite la formula di O'Neill. In particolare, si evidenzia come queste deformazioni preservino e spesso “migliorino” la curvatura, “spingendola” verso la positività.

Nel quarto e ultimo capitolo vengono presentati esempi concreti di applicazione delle deformazioni di Cheeger. Vengono analizzati in dettaglio gli *spazi di Eschenburg* e le *varietà Aloff–Wallach*.

Nel complesso, il lavoro intende illustrare la forza e l'eleganza delle deformazioni di Cheeger nello studio delle varietà a curvatura nonnegativa, collocando tale tecnica nel più ampio contesto della geometria riemanniana contemporanea.

CAPITOLO 1

Preliminari

1.1. Richiami di geometria riemanniana

Elenchiamo brevemente alcuni fatti basilari di geometria riemanniana. Possibili riferimenti per questa sezione sono, ad esempio, i libri [1, 20, 30].

Data una varietà differenziabile M , indichiamo con TM il fibrato tangente di M , le cui sezioni sono i campi vettoriali e con TM^* il fibrato cotangente, le cui sezioni sono le 1-forme differenziali. Denotiamo con $T_s^r M$ il fibrato vettoriale dato dall'unione degli spazi vettoriali $T_s^r M_p = \otimes^s T_p^* M \otimes^r T_p M$, per $p \in M$ e le sue sezioni $\Gamma(T_s^r M)$ sono i tensori di tipo (r, s) . In coordinate locali, se $T \in \Gamma(T_s^r M)$, abbiamo

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}},$$

con

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T \left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r} \right)$$

(con la convenzione di Einstein di sommare sugli indici ripetuti, che adotteremo d'ora in poi). Inoltre, poichè esiste un isomorfismo lineare naturale tra $T_s^r M_p$ e lo spazio delle mappe multilineari da $\oplus^s T_p^* M \oplus^r T_p M$ a $\mathbb{R}$ per ogni $p \in M$, un tensore $T \in \Gamma(T_s^r M)$ può essere visto come una funzione $C^\infty(M)$ -lineare dal $C^\infty(M)$ -modulo $\Gamma(\oplus^s TM \oplus^r TM^*)$ a $C^\infty(M)$.

DEFINIZIONE 1.1. Una *varietà riemanniana* (M, g) è una varietà differenziabile M dotata di un *tensore metrico* $g \in \Gamma(T_2^0 M)$, che è una forma bilineare simmetrica definita positiva in ogni punto $p \in M$.

Per mezzo del tensore metrico, siamo quindi in grado di misurare la *lunghezza* di una curva $\gamma : I \rightarrow M$ in (M, g) di classe C^1 , come segue

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_I |\dot{\gamma}(t)|_{g_{\gamma(t)}} dt,$$

dove, in generale $|v|_{g_p} = \sqrt{g_p(v, v)}$, per ogni vettore $v \in T_p M$. Pertanto, possiamo definire la *distanza riemanniana* d^M come

$$d^M(p, q) = \inf \{ \mathcal{L}(\gamma) \mid \gamma : I \rightarrow M \text{ è una curva } C^1 \text{ tra } p \text{ e } q \},$$

rendendo M uno spazio metrico la cui topologia coincide con la topologia originale di M come varietà differenziabile.

La metrica g induce su M una misura di volume canonica μ che in una carta in coordinate locali può essere scritta come $d\mu = \sqrt{\det g_{ij}} d\mathcal{L}^n$, dove $\mathcal{L}^n$ è la misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 1.2. Se (M, g) è una varietà riemanniana, esiste un'unica connessione affine ∇ , chiamata *connessione di Levi-Civita*, che è simmetrica e compatibile con la metrica, ovvero un'applicazione

$$\begin{aligned} \nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

tale che

- è $C^\infty(M)$ -lineare in X e $\mathbb{R}$ -lineare in Y ,

- vale la seguente formula

$$\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y,$$

per ogni $X, Y \in \Gamma(TM)$ e ogni $f \in C^\infty(M)$,

- soddisfa la relazione

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

per ogni $X, Y \in \Gamma(TM)$ (simmetria),

- si ha

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

per ogni $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ (compatibilità con la metrica).

Per il teorema di Hopf–Rinow (si veda [20], ad esempio), se M con la distanza riemanniana è uno spazio metrico completo, per ogni punto $p \in M$ e vettore $v \in T_p M$, esiste un'unica geodetica $\gamma_v : \mathbb{R} \rightarrow M$ tale che $\gamma_v(0) = p$ e $\dot{\gamma}_v(0) = v$. Quindi, per ogni $p \in M$, la mappa esponenziale $\exp_p : T_p M \rightarrow M$, è definita come

$$\exp_p(tv) = \gamma_v(t).$$

In tutta la tesi, (M, g) sarà una varietà riemanniana liscia, connessa e completa (come spazio metrico) senza bordo, a meno che non sia specificato diversamente.

DEFINIZIONE 1.3. Il raggio di iniettività in $p \in M$ è definito come

$$\text{inj}(p) = \sup \{ \varepsilon > 0 \mid \exp_p \text{ è un diffeomorfismo tra } B_\varepsilon(O_p) \text{ e un aperto di } M \}$$

dove $B_\varepsilon(O_p) \subseteq T_p M$ è la palla aperta di centro O_p e raggio $\varepsilon > 0$:

$$B_\varepsilon(O_p) = \{v \in T_p M \mid |v|_p < \varepsilon\}$$

ed è ben noto essere positivo per ogni $p \in M$.

Il raggio di iniettività di M è quindi $\inf_{p \in M} \text{inj}(p)$.

Uno degli invarianti (per isometria) fondamentali associati a una varietà riemanniana è la sua *curvatura*, che misura quanto la geometria locale della varietà si discosti da quella dello spazio euclideo.

DEFINIZIONE 1.4. L'operatore di Riemann è l'applicazione

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

definita da

$$R(X, Y)Z = \nabla_{Y, X}^2 Z - \nabla_{X, Y}^2 Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]} Z,$$

per ogni X, Y, Z campi vettoriali su M .

Questo operatore misura l'“errore” nello scambiare le derivate covarianti rispetto a X e Y di un campo vettoriale.

DEFINIZIONE 1.5. Il tensore di Riemann Riem è il tensore di tipo $(0, 4)$ definito come

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W),$$

per ogni X, Y, Z, W campi vettoriali su M , ovvero la versione di tipo $(0, 4)$ dell'operatore di Riemann.

Si noti che questo tensore misura il fallimento della derivata covariante seconda nell'essere commutativa.

In coordinate locali, abbiamo

$$R_{ijkl} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^m - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^m \right) g_{ml},$$

dove $\Gamma_{ij}^k = (\nabla_{\partial/\partial x_i} \partial/\partial x_j)^k$ sono i simboli di Christoffel della connessione di Levi–Civita.

DEFINIZIONE 1.6. Il *tensore di Ricci* Ric è il tensore di tipo $(0, 2)$ definito da $(X, Y) \mapsto R(X, Y)$ pari alla traccia dell'endomorfismo $Z \rightarrow R(X, Z)Y$, per ogni coppia di campi vettoriali X, Y su M .

In coordinate locali, vale

$$R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl} = g^{jl} R_{jilk} = -g^{jl} R_{ijk l} = -g^{jl} R_{jik l},$$

per le simmetrie del tensore di Riemann; inoltre, segue anche che Ric è simmetrico, ovvero $R_{ik} = R_{ki}$.

DEFINIZIONE 1.7. La *curvatura scalare* $R \in C^\infty(M)$ è la traccia del tensore di Ricci

$$R = \text{tr Ric} = g^{ij} R_{ij}.$$

DEFINIZIONE 1.8. Dato un punto $p \in M$ e un piano $\sigma \subseteq T_p M$ generato da due vettori linearmente indipendenti $v, w \in T_p M$, si definisce la *curvatura sezionale* di σ come

$$\text{Sec}(\sigma) = \frac{\langle R(v, w)w, v \rangle}{\|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2}.$$

Geometricamente, la curvatura sezionale misura la curvatura della superficie bidimensionale ottenuta come esponenziale del piano σ nel punto p .

ESEMPIO 1.9 (Spazio euclideo). Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ con la metrica standard ha curvatura sezionale identicamente nulla.

ESEMPIO 1.10 (Sfere). La sfera $\mathbb{S}^n$ munita della metrica indotta (dall'immersione) da $\mathbb{R}^{n+1}$ ha curvatura sezionale costante e positiva.

1.2. Gruppi di Lie e spazi omogenei

I gruppi di Lie sono gruppi che ammettono una struttura di varietà differenziabile compatibile con la moltiplicazione. Se g è una metrica riemanniana su un gruppo di Lie G , diciamo che g è *bi-invariante* se è invariante per traslazioni sia a sinistra che a destra:

$$L_h^* g = g \quad \text{e} \quad R_h^* g = g, \quad \text{per ogni } h \in G.$$

La curvatura si esprime allora come segue (si veda [20]):

$$\text{Sec}(X, Y) = \frac{1}{4} \|[X, Y]\|_g^2$$

da cui $\text{Sec}(X, Y) \geq 0$.

Se G è un gruppo di Lie compatto con una metrica bi-invariante e $H \subseteq G$ sottogruppo chiuso, il quoziente G/H assume la struttura di varietà differenziabile e la proiezione canonica $\pi : G \rightarrow G/H$ definisce un fibrato principale. A livello dell'algebra di Lie $\mathfrak{g}$ di G , la metrica bi-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ permette di considerare la decomposizione ortogonale

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m},$$

dove $\mathfrak{h}$ è l'algebra di Lie di H (che costituisce lo spazio verticale tangente alle fibre della proiezione) e $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^\perp$ è lo spazio orizzontale. La restrizione del prodotto interno a $\mathfrak{m}$ induce su G/H una metrica riemanniana naturale e G -invariante. Rispetto a tale metrica, la proiezione π risulta essere una sommersione riemanniana.

Per analizzare la curvatura del quoziente, si ricorre alla *formula di O'Neill* per le sommersioni riemanniane. Tale formula stabilisce una relazione fondamentale tra la curvatura sezionale dello spazio totale (nel nostro caso G) e quella dello spazio base G/H . Dati due campi vettoriali ortonormali X, Y su G/H , i loro sollevamenti orizzontali $\tilde{X}, \tilde{Y}$ su G sono univocamente determinati e appartengono alla distribuzione orizzontale. La formula di O'Neill afferma che

$$\text{Sec}_{G/H}(X, Y) = \text{Sec}_G(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \frac{3}{4} \|\tilde{X}, \tilde{Y}\|^\vee\|^2, \quad (1.1)$$

dove $[\cdot, \cdot]^\vee$ indica la proiezione ortogonale della parentesi di Lie sullo spazio verticale (in questo contesto, la proiezione sull'algebra $\mathfrak{h}$).

Poiché, per quanto detto sopra, avendo G una metrica bi-invariante, si ha

$$Sec_G(\tilde{X}, \tilde{Y}) = \frac{1}{4} \|[\tilde{X}, \tilde{Y}]\|^2,$$

sostituendo questa espressione nella formula di O'Neill e valutando la curvatura nell'origine $[e] \in G/H$, è possibile identificare i vettori tangenti $X, Y \in T_{[e]}(G/H)$ direttamente con elementi ortonormali dello spazio orizzontale $\mathfrak{m}$. Il loro commutatore in $\mathfrak{g}$ si scompone unicamente nella somma della componente orizzontale e di quella verticale:

$$[X, Y] = [X, Y]_{\mathfrak{m}} + [X, Y]_{\mathfrak{h}}.$$

Poiché la decomposizione $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ è ortogonale,

$$\|[X, Y]\|^2 = \|[X, Y]_{\mathfrak{m}}\|^2 + \|[X, Y]_{\mathfrak{h}}\|^2.$$

Riscrivendo la formula di O'Neill alla luce di questa scomposizione, si ottiene allora

$$\begin{aligned} Sec_{G/H}(X, Y) &= \frac{1}{4} \|[X, Y]\|^2 + \frac{3}{4} \|[X, Y]_{\mathfrak{h}}\|^2 \\ &= \frac{1}{4} (\|[X, Y]_{\mathfrak{m}}\|^2 + \|[X, Y]_{\mathfrak{h}}\|^2) + \frac{3}{4} \|[X, Y]_{\mathfrak{h}}\|^2 \\ &= \frac{1}{4} \|[X, Y]_{\mathfrak{m}}\|^2 + \|[X, Y]_{\mathfrak{h}}\|^2. \end{aligned}$$

Poiché l'espressione finale è data dalla somma di quantità nonnegative, si deduce immediatamente che

$$Sec_{G/H}(X, Y) \geq 0.$$

Essendo la metrica G -invariante, questa proprietà calcolata nell'origine si estende globalmente tramite le isometrie indotte dall'azione del gruppo, dunque la varietà quoziente G/H possiede curvatura sezionale ovunque nonnegativa (come G).

DEFINIZIONE 1.11. Sia G un gruppo di Lie che agisce in modo differenziabile su una varietà M . Si dice che l'azione è *transitiva* se per ogni coppia di punti $p, q \in M$ esiste un elemento $g \in G$ tale che $g \cdot p = q$. In tal caso, la varietà M è detta *spazio omogeneo*.

Geometricamente, la transitività dell'azione di G significa che tutti i punti di M sono indistinguibili: la geometria di M appare la stessa in ogni punto e questo rende gli spazi omogenei particolarmente adatti a costruzioni esplicite e a calcoli concreti. In particolare, ciò permette di costruire metriche riemanniane con determinate proprietà di curvatura attraverso quozienti e deformazioni della metrica.

DEFINIZIONE 1.12. Sia G un gruppo di Lie che agisce su una varietà differenziabile M . Fissato un punto $p \in M$, si definisce *gruppo di isotropia* (o *stabilizzatore*) di p il sottogruppo

$$G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}.$$

Il gruppo di isotropia quantifica la simmetria che viene preservata fissando il punto p . Poiché l'azione è liscia, G_p risulta essere un sottogruppo chiuso di G e di conseguenza, è esso stesso un gruppo di Lie. Inoltre, nel caso in cui l'azione di G su M sia transitiva, i gruppi di isotropia relativi a punti diversi sono tutti coniugati tra loro.

Un fatto fondamentale della teoria delle azioni di gruppo è che la mappa naturale

$$G/G_p \rightarrow M, \quad gG_p \mapsto g \cdot p,$$

è un diffeomorfismo. In particolare, ogni spazio omogeneo M può essere identificato in modo canonico con un quoziente del tipo G/H , dove H è un sottogruppo chiuso di G . Questa descrizione fornisce un modello geometrico concreto, permettendo di tradurre lo

studio dei problemi topologici e differenziali su M in termini di proprietà algebriche del gruppo G e del suo sottogruppo H .

Dal punto di vista metrico, se il gruppo di Lie G è compatto, esso ammette sempre una metrica riemanniana bi-invariante. In questo contesto, l'azione di G sul quoziente G/H avviene per isometrie e la proiezione canonica

$$\pi: G \rightarrow G/H$$

definisce una sommersione riemanniana rispetto alla metrica naturalmente indotta sullo spazio di base G/H . Come detto sopra, si deduce che la curvatura sezionale del quoziente G/H è ovunque nonnegativa. Tale struttura spiega il motivo per cui gli spazi omogenei costituiscano, storicamente e concettualmente, una delle principali fonti per la costruzione di esempi di varietà riemanniane a curvatura sezionale nonnegativa.

OSSERVAZIONE 1.13. Intuitivamente, un'azione (da parte di un gruppo G) è isometrica (ad esempio su una varietà riemanniana (M, g)) se ogni elemento del gruppo G “muove”, per così dire, la varietà M senza deformarla, cioè lascia inalterati lunghezze, angoli e metrica riemanniana. In pratica $g \in G$ si comporta come una particolare isometria per M , ovvero come una rotazione della sfera o una traslazione nel piano euclideo o una simmetria di uno spazio curvo. Quindi l'azione non “stira” o “schiaccia” la varietà M .

Formalmente, sia (M, g) una varietà riemanniana e $\Phi: G \times M \rightarrow M$ definita da $(a, x) \mapsto a \cdot x$ un'azione differenziale del gruppo di Lie G sulla varietà M . Si dice che quest'azione che G esegue su M è un'azione per isometria se ogni elemento di G è un'isometria riemanniana, cioè

$$\Phi_a^* g = g, \text{ per ogni } a \in G,$$

dove $\Phi_a^* g$ è il pull-back della metrica.

Una forma equivalente, più concreta, potrebbe essere

$$g_x(v, w) = g_{a \cdot x}(d\Phi_a(v), d\Phi_a(w)),$$

per ogni $a \in G$, per ogni punto $x \in M$ e per ogni $v, w \in T_x M$.

Tutti gli esempi noti di varietà a curvatura sezionale positiva, oltre agli spazi simmetrici di rango 1, possono essere descritti come quozienti di gruppi di Lie compatti e molti esempi a curvatura nonnegativa derivano da spazi omogenei mediante deformazioni della metrica (si veda [40])

La sfera $\mathbb{S}^n$ costituisce un esempio fondamentale di spazio omogeneo e può essere realizzata come il quoziente

$$\mathbb{S}^n \simeq SO(n+1)/SO(n).$$

Per dimostrare questa identificazione, si consideri l'azione naturale del gruppo speciale ortogonale $SO(n+1)$ su $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, definita dalla consueta moltiplicazione matrice-vettore

$$SO(n+1) \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n, \quad (A, x) \mapsto Ax.$$

Tale azione è transitiva, poichè è sempre possibile mappare un qualsiasi punto $x \in \mathbb{S}^n$ in un qualsiasi altro punto $y \in \mathbb{S}^n$ mediante un'opportuna rotazione dello spazio $\mathbb{R}^{n+1}$ (ovvero, esiste sempre $A \in SO(n+1)$ tale che $Ax = y$).

Per esplicitare la struttura di spazio omogeneo, è sufficiente calcolare il gruppo di isotropia (o stabilizzatore) di un punto specifico della sfera, ad esempio il vettore della base canonica $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{S}^n$:

$$\text{Stab}(e_{n+1}) = \{A \in SO(n+1) \mid Ae_{n+1} = e_{n+1}\}.$$

Affinchè una matrice $A \in SO(n+1)$ fissi il vettore e_{n+1} , la sua ultima colonna deve coincidere esattamente con e_{n+1} . Essendo A una matrice ortogonale, le sue righe e le sue colonne formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^{n+1}$; di conseguenza, anche l'ultima riga deve

essere composta interamente da zeri, a eccezione dell'ultimo elemento che vale 1. Le matrici appartenenti allo stabilizzatore assumono quindi necessariamente la seguente forma a blocchi

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Poichè il determinante deve essere unitario, si ha $\det(A) = \det(B) = 1$. Inoltre, la condizione di ortogonalità $AA^t = \text{Id}_{n+1}$ impone che $BB^t = \text{Id}_n$. Si deduce immediatamente che il blocco B deve appartenere a $SO(n)$.

Geometricamente, le matrici di questa forma rappresentano tutte e sole le rotazioni dell'iperpiano n -dimensionale ortogonale alla direzione di e_{n+1} , lasciando invariato quest'ultimo asse. Segue pertanto che $\text{Stab}(e_{n+1}) \cong SO(n)$ e per il teorema fondamentale sulle azioni transitive lisce, si ottiene il diffeomorfismo naturale $\mathbb{S}^n \simeq SO(n+1)/SO(n)$.

Con un argomento analogo, si vede facilmente che lo spazio proiettivo reale $\mathbb{RP}^n$ è dato da

$$\mathbb{RP}^n \simeq SO(n+1)/O(n).$$

Più in generale, gran parte spazi "classici" della geometria differenziale possono essere descritti come quozienti di gruppi di Lie compatti.

1.3. Biquozienti

I biquozienti costituiscono una classe naturale di varietà che generalizza gli spazi omogenei e che gioca un ruolo centrale nella costruzione di esempi di varietà riemanniane a curvatura sezionale nonnegativa.

Ricordiamo cosa sono le sommersioni riemanniane. Una sommersione (nel senso differenziale) è un'applicazione differenziabile

$$\pi : M \rightarrow B$$

tale per cui

$$d\pi_p : T_p M \rightarrow T_{\pi(p)} B$$

sia suriettivo per ogni $p \in M$. Geometricamente, π proietta lo spazio totale M sulla base B , "annullando" le direzioni tangenti alle fibre. Da questo segue che le fibre $\pi^{-1}(b)$ sono sottovarietà differenziabili e localmente M è diffeomorfa al prodotto $\pi^{-1}(b) \times B$.

Considerata una sommersione tra due varietà riemanniane $\pi : (M, g) \rightarrow (B, \tilde{g})$, sia $\text{Ker}(d\pi_p)$ lo spazio *verticale*, cioè lo spazio tangente alla fibra in p :

$$\text{Ker}(d\pi_p) = T_p(\pi^{-1}(\pi(p))).$$

Allora, si definisce *sommersione riemanniana* una sommersione liscia $\pi : M \rightarrow B$ tale che il differenziale $d\pi_p$ ristretto allo spazio orizzontale $T_p(\pi^{-1}(\pi(p)))^\perp$, cioè lo spazio ortogonale alla fibra (allo spazio verticale), dato da

$$d\pi_p : (T_p(\pi^{-1}(\pi(p)))^\perp, g) \rightarrow (T_p(\pi^{-1}(\pi(p))), \tilde{g}),$$

sia un'isometria per ogni $p \in M$. In altre parole, lungo le "direzioni orizzontali" viene preservata la metrica.

Tipicamente, si considera un gruppo compatto H che agisce per isometrie su M ; la proiezione sul quoziente

$$B = M/H, \quad \pi : M \rightarrow M/H$$

definisce la sommersione. In questo scenario, la metrica su B viene scelta imponendo che il differenziale $d\pi_p$ sia un'isometria sui vettori orizzontali, garantendo così che la geometria della base sia direttamente indotta da quella di M .

Sia ora G un gruppo di Lie compatto e $H \subseteq G \times G$ un suo sottogruppo chiuso. Consideriamo l'azione di H su G definita da

$$(h_1, h_2) \cdot g = h_1 g h_2^{-1}, \quad (h_1, h_2) \in H, g \in G.$$

Se tale azione è libera (ovvero $(h_1, h_2) \cdot g = g \Rightarrow (h_1, h_2) = (e, e)$) o localmente libera, lo spazio quoziente

$$G//H = H \backslash G$$

eredita una struttura di varietà differenziabile, detta appunto *biquoziente*.

Si noti come i biquozienti generalizzino naturalmente gli spazi omogenei classici G/H : questi ultimi si recuperano quando H è immerso “diagonalmente” come $H = \{(h, e)\}$ (azione solo a sinistra) o $H = \{(e, h)\}$ (azione solo a destra). Nei biquozienti, invece, l'azione avviene simultaneamente su entrambi i lati.

Poichè G è compatto, esso ammette sempre una metrica riemanniana bi-invariante. Rispetto a tale metrica, l'azione di H è isometrica e il biquoziente $G//H$ eredita una metrica tramite la proiezione canonica

$$\pi: G \rightarrow G//H,$$

che risulta essere una sommersione riemanniana.

Un punto cardine osservato da Cheeger, è che le sommersioni riemanniane preservano la nonnegatività della curvatura sezionale: se la metrica su G ha curvatura nonnegativa, anche quella indotta su $G//H$ manterrà questa proprietà. Ciò rende i biquozienti una fonte naturale e privilegiata di esempi a curvatura nonnegativa.

Una caratteristica essenziale dei biquozienti è la presenza di ampi gruppi di simmetrie residue, che permettono di applicare le cosiddette *deformazioni di Cheeger*. Questa tecnica consiste nel modificare la metrica lungo le orbite di un'azione isometrica di un gruppo compatto. Nel contesto dei biquozienti, queste deformazioni vengono utilizzate per “migliorare” il profilo della curvatura: partendo da metriche inizialmente solo nonnegativamente curve, è spesso possibile ottenere curvatura positiva su un insieme aperto e denso, o raggiungere la cosiddetta curvatura quasi positiva. Questo procedimento è uno degli strumenti principali per la costruzione di esempi.

Numerose varietà classiche, comprese alcune sfere esotiche di dimensione 7, possono essere descritte come biquozienti di gruppi di Lie compatti. I lavori di Grove e Ziller (come vedremo nel prossimo capitolo) hanno dimostrato come una vasta classe di questi spazi ammetta metriche a curvatura nonnegativa attraverso tecniche di incollamento e deformazione. Tuttavia, sebbene abbondino gli esempi a curvatura nonnegativa, sono pochissimi i biquozienti per i quali è nota l'esistenza di una metrica a curvatura sezionale *strettamente* positiva. Individuare nuove famiglie o dimostrare ostruzioni generali al riguardo resta un problema aperto.

1.4. Un cenno alle sfere esotiche

Menzioniamo qui brevemente le sfere esotiche in relazione alle varietà riemanniane a curvatura sezionale nonnegativa. Per una trattazione approfondita, si rimanda al lavoro classico di Gromoll e Meyer [22], in cui viene studiato il celebre esempio della sfera esotica Σ^7 . Tale varietà ammette una metrica a curvatura sezionale nonnegativa, ottenuta come quoziente di un'azione isometrica di $\mathbb{S}^1$ su un gruppo di Lie (configurandosi quindi come una sommersione riemanniana). Questo esempio è particolarmente significativo poichè permette l'applicazione della formula di O'Neill (1.1) per il controllo e il trasferimento della curvatura.

Dal punto di vista topologico, una sfera esotica Σ^n è una varietà omeomorfa alla sfera $\mathbb{S}^n$, ma dotata di una struttura differenziabile non equivalente (ovvero, non è diffeomorfa a quella standard di $\mathbb{S}^n$). Se per dimensioni $n \leq 3$ la struttura differenziabile è unica, il

caso $n = 4$ rimane un problema aperto (per un'analisi dettagliata delle 4-varietà, si rimanda a [14]).

Queste sfere esotiche 7-dimensionali occupano un ruolo storico e tecnico importante: furono i primi esempi di strutture esotiche, esibiti da Milnor nel 1956, inoltre sono realizzate come quozienti di gruppi di Lie o come fibrati non banali.

L'interesse per questi oggetti nasce dalla costante ricerca di varietà compatte che ammettano metriche a curvatura nonnegativa. Le costruzioni basate su gruppi di Lie e biquozienti producono spesso varietà altamente simmetriche che, sorprendentemente, si rivelano essere sfere esotiche. Segnaliamo infine che mentre la curvatura nonnegativa appare una condizione relativamente "flessibile" (nel senso che può essere supportata anche da strutture differenziabili non standard), la richiesta di curvatura positiva sembra essere invece estremamente stringente e vincolata alla topologia standard.

1.5. Spazi simmetrici

Gli spazi simmetrici rappresentano una classe di varietà riemanniane che godono della massima simmetria possibile, agendo come modelli ideali per lo studio della relazione tra geometria e topologia. Una varietà riemanniana M si dice *localmente simmetrica* se la sua curvatura è parallela ($\nabla \text{Riem} = 0$); globalmente, ciò equivale a richiedere che per ogni punto $p \in M$ esista un'isometria involutiva σ_p (detta simmetria centrale) che ammette p come punto fisso isolato.

Dal punto di vista della teoria dei gruppi, ogni spazio simmetrico connesso può essere espresso come un quoziente omogeneo G/K , dove G è il gruppo delle isometrie della varietà e K è il sottogruppo di isotropia di un punto.

Un invariante fondamentale di uno spazio simmetrico è il suo *rango*, definito come la dimensione massima di una sottovarietà piatta (*flat*) totalmente geodetica e isometrica a uno spazio euclideo $\mathbb{R}^k$ immersa in M .

Nel contesto dello studio della curvatura nonnegativa o positiva, assumono un ruolo centrale gli *spazi simmetrici di rango 1*. In questi spazi, le uniche sottovarietà piatte sono le geodetiche stesse ($k = 1$), il che implica una struttura geometrica molto rigida. La classificazione di Cartan identifica i seguenti modelli compatti di rango 1:

- *Sfera standard* $\mathbb{S}^n$: l'unico modello a curvatura sezionale costante positiva.
- *Spazio proiettivo complesso* $\mathbb{CP}^n$: dotato della metrica di Fubini-Study, con curvatura sezionale K compresa nell'intervallo $1 \leq K \leq 4$.
- *Spazio proiettivo quaternionico* $\mathbb{HP}^n$: con curvatura analogamente limitata tra 1 e 4.
- *Piano proiettivo di Cayley* $\mathbb{OP}^2$: un esempio eccezionale basato sull'algebra degli ottonioni.

Gli spazi simmetrici di rango 1 sono di fondamentale importanza nello studio dei biquozienti per diverse ragioni. In primo luogo, essi costituiscono i rari esempi di varietà con curvatura sezionale positiva. In secondo luogo, le *fibrizioni di Hopf*, che collegano questi spazi (come ad esempio $\mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{CP}^n$), sono esempi canonici di sommersioni riemanniane. Molte costruzioni di biquozienti traggono ispirazione da questi modelli, cercando di "perturbare" la loro struttura simmetrica tramite deformazioni di Cheeger per esplorare se la proprietà di avere curvatura positiva possa essere preservata anche in assenza di una simmetria così elevata.

1.6. Gruppi di omologia e numeri di Betti

Sia M una varietà differenziabile compatta; per ogni $k \in \mathbb{N}$, denotiamo con $H_k(M; \mathbb{Z})$ il k -esimo gruppo di omologia singolare di M , che fornisce una misura della "presenza di buchi" k -dimensionali nello spazio. Tali gruppi costituiscono invarianti topologici fondamentali.

Nel contesto del presente lavoro, risulta utile considerare l'omologia a coefficienti reali $H_k(M; \mathbb{R}) \cong H_k(M; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$, che assume la struttura di spazio vettoriale reale di dimensione

finita. La dimensione di tale spazio definisce il k -esimo numero di Betti di M

$$b_k(M) = \dim H_k(M; \mathbb{R}).$$

I numeri di Betti offrono una descrizione quantitativa della topologia globale: ad esempio, $b_0(M)$ indica il numero di componenti connesse, mentre $b_1(M)$ e $b_2(M)$ misurano rispettivamente la presenza di cicli e superfici chiuse non banali. Per una varietà compatta e orientabile di dimensione n , vale la *dualità di Poincarè* $b_k(M) = b_{n-k}(M)$, che impone una simmetria intrinseca nella struttura omologica.

L'importanza di questi invarianti in ambito riemanniano emerge tramite il *teorema di de Rham*, che stabilisce l'isomorfismo $H_k(M; \mathbb{R}) \simeq H_{\text{dR}}^k(M)$. Ciò permette di interpretare $b_k(M)$ come la dimensione dello spazio delle k -forme armoniche sulla varietà. Tale legame è importante poichè le condizioni di curvatura (nonnegativa o positiva) impongono restrizioni forti sui numeri di Betti, agendo come ostruzioni topologiche all'esistenza di determinate metriche.

CAPITOLO 2

Varietà con curvatura sezionale nonnegativa

Il fatto di avere curvatura sezionale nonnegativa o positiva impone forti vincoli geometrico/topologici sulla varietà, ma è comunque sufficientemente flessibile da includere una vasta classe di esempi, che comprendono spazi omogenei, prodotti, fibrati e quozienti.

Tra i risultati fondamentali, ricordiamo i teoremi di *Bonnet–Myers*, di *Synge*, dell'*anima* (di Cheeger, Gromoll e Meyer), di *splitting* (di Cheeger e Gromoll), della *sfera* (di Brendle e Schoen), vari teoremi di confronto e teoremi che mettono in relazione la curvatura con proprietà topologiche come il gruppo fondamentale e i numeri di Betti (si veda [20], per esempio).

2.1. Alcuni teoremi fondamentali in curvatura nonnegativa o positiva

DEFINIZIONE 2.1. Si dice che la varietà riemanniana (M, g) ha curvatura sezionale nonnegativa ($Sec \geq 0$), se per ogni piano $\sigma \subseteq T_p M$, con $p \in M$ si ha

$$Sec(\sigma) \geq 0$$

e analogamente, si dice che (M, g) ha curvatura sezionale positiva ($Sec > 0$), se

$$Sec(\sigma) > 0, \text{ per ogni } \sigma.$$

Vediamo alcuni dei teoremi menzionati sopra e le loro conseguenze geometrico/topologiche.

TEOREMA 2.2 (Teorema di Bonnet–Myers – “versione curvatura sezionale” [32, 33]). *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa con curvatura sezionale maggiore o uguale a $k > 0$, allora*

- M è compatta;
- $\text{diam}(M) \leq \pi/\sqrt{k}$;
- $\pi_1(M)$ è finito.

Si noti che la finitezza del gruppo fondamentale è un vincolo molto forte, per esempio sul toro $\mathbb{T}^2$ o su una qualunque superficie compatta diversa dalla sfera, cioè di genere maggiore di zero, non si può avere una metrica con $Sec > 0$, in quanto il loro gruppo fondamentale non è finito. Lo stesso vale per $\mathbb{T}^n$ o per una qualunque varietà completa del tipo $M \times \mathbb{S}^1$.

TEOREMA 2.3 (Teorema di Synge [36]). *Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta, connessa n -dimensionale, con curvatura sezionale positiva. Allora:*

- Se n è dispari, allora M è orientabile;
- Se n è pari, allora M è orientabile e semplicemente connessa.

Una conseguenza del teorema di Synge è che non esistono metriche riemanniane a curvatura sezionale positiva su una varietà compatta, orientabile e di dimensione pari, se non è semplicemente connessa. In particolare, $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ non ammette tali metriche, avendo gruppo fondamentale $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Menzioniamo qui la famosa *congettura di Hopf*, degli anni '50, che asserisce che non esistono metriche riemanniane a curvatura sezionale positiva su $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

CONGETTURA. La varietà prodotto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ non ammette una metrica riemanniana con curvatura sezionale positiva.

Se vera, questa congettura suggerisce che la struttura di prodotto possa essere un'ostruzione alla positività della curvatura, anche quando entrambi i fattori ammettono metriche a curvatura positiva.

TEOREMA 2.4 (Teorema dell'anima o del "soul" [13, 21]). *Sia (M, g) una varietà riemanniana n -dimensionale, completa, non compatta e con curvatura sezionale $\text{Sec} \geq 0$. Allora esiste una sottovarietà compatta e totalmente convessa (dunque totalmente geodetica) $S \subseteq M$ con $\text{Sec}^S \geq 0$ (con la metrica indotta), detta anima (o soul), per cui M è diffeomorfa al fibrato normale $NS \subseteq TM$ di S in M , con un diffeomorfismo che fa corrispondere $S \subseteq M$ alla sezione nulla di NS . Se inoltre $\text{Sec} > 0$, si ha che S è un punto, dunque M è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$.*

Essendo il soul compatto e retraendosi la varietà su di esso, M deve avere il tipo di omotopia di una varietà compatta. Ciò porta a escludere, per esempio, varietà con più di una "end" all'infinito, varietà con gruppi di omologia non finitamente generati o prodotti di superfici che ammettono metriche iperboliche. Inoltre, se la curvatura sezionale è positiva, la varietà può essere solo $\mathbb{R}^n$ topologicamente.

TEOREMA 2.5 (Teorema di splitting di Cheeger–Gromoll [12, 17] – "versione curvatura sezionale"). *Se una varietà riemanniana completa (M, g) con $\text{Sec} \geq 0$ contiene una "retta", cioè una geodetica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ minimale tra ogni coppia di suoi punti, allora*

$$M = \mathbb{R} \times N$$

isometricamente, per una varietà riemanniana (N, h) con curvatura sezionale nonnegativa.

Una conseguenza sono i seguenti risultati e l'esclusione dal poter avere curvatura nonnegativa, per esempio, di tutte le varietà che ammettono una metrica a curvatura negativa o le loro somme connesse, oppure varietà con infiniti "manici".

TEOREMA 2.6 (Teorema di struttura delle varietà compatte con $\text{Sec} \geq 0$ [12]). *Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta di dimensione n con $\text{Sec} \geq 0$, allora il suo rivestimento universale riemanniano $(\tilde{M}, \tilde{g})$ è isometrico a un prodotto cartesiano $(\mathbb{R}^k \times N, g_{\text{can}}^{\mathbb{R}^k} + h)$, dove (N, h) è una varietà riemanniana compatta di dimensione $n - k$ con curvatura sezionale nonnegativa.*

TEOREMA 2.7 (Teorema di struttura di Cheeger–Gromoll per il gruppo fondamentale [12]). *Se M è una varietà compatta che ammette una metrica con curvatura sezionale nonnegativa, allora esiste un sottogruppo abeliano di indice finito del gruppo fondamentale.*

Se si impone alla curvatura sezionale nonnegativa sia un limite inferiore che uno superiore, è utile introdurre la cosiddetta costante di pinching δ , definita come

$$\delta = \frac{\min \text{Sec}}{\max \text{Sec}}.$$

Si hanno allora i seguenti teoremi di classificazione (recognition) e finitezza.

TEOREMA 2.8 (Teorema di Berger–Klingenberg [5, 29]). *Sia (M, g) una varietà riemanniana n -dimensionale, compatta e semplicemente connessa, con $\delta \geq 1/4$. Allora M è omeomorfa a $\mathbb{S}^n$ oppure è isometrica a $\mathbb{CP}^n$, $\mathbb{HP}^n$ o $\mathbb{CaP}^2$ dotati della loro metrica standard di Fubini–Study.*

In particolare, si ha il teorema della sfera "topologica".

TEOREMA 2.9 (Teorema della sfera "topologica" [5, 29]). *Sia (M, g) una varietà riemanniana n -dimensionale, compatta e semplicemente connessa, con $\delta > 1/4$ (si noti la disuguaglianza stretta). Allora M è omeomorfa a $\mathbb{S}^n$.*

Quest'ultimo è stato poi migliorato dal seguente risultato di Brendle e Schoen in [8] (si tenga presente l'esistenza delle sfere esotiche – si veda la Sezione 1.4).

TEOREMA 2.10 (Teorema della sfera "differenziabile" [8]). *Sia (M, g) una varietà riemanniana n -dimensionale, compatta e semplicemente connessa, con $\delta > 1/4$. Allora M è diffeomorfa a $\mathbb{S}^n$ con la sua struttura differenziale standard.*

TEOREMA 2.11 (Teorema di Cheeger [9]). *Data una costante positiva ϵ , esiste solo un numero finito di tipi di diffeomorfismo di varietà riemanniane e compatte semplicemente connesse (M^{2n}, g) che soddisfano la condizione $\delta \geq \epsilon$.*

TEOREMA 2.12 (Teorema di Fang–Rong e Petrunin–Tuschmann [18, 34]). *Data una costante positiva ϵ , esiste solo un numero finito di tipi di diffeomorfismo di varietà compatte M^{2n+1} di dimensione dispari che soddisfano le condizioni $\pi_1(M) = \pi_2(M) = 0$ (ovvero varietà semplicemente e 2–semplicemente connesse) e $\delta \geq \epsilon$.*

Questi risultati mostrano come il controllo stretto sul range della curvatura (*pinching*) riduca drasticamente le possibilità topologiche della varietà, confinandola in classi ben precise o limitandone la variabilità strutturale. Un'altra limitazione di tipo topologico è data dal seguente teorema di Gromov che esclude le varietà con gruppi fondamentali “grandi”.

TEOREMA 2.13 (Teorema di Gromov sui numeri di Betti [23]). *Se M è una varietà riemanniana compatta di dimensione $n \in \mathbb{N}$ con $\text{Sec} \geq 0$, esiste una costante $c(n)$ tale che $b_i(M, F) \leq c(n)$, cioè i numeri di Betti sono superiormente limitati da una costante universale che dipende solo dalla dimensione di M . Inoltre, il gruppo fondamentale ha al più $c(n)$ generatori.*

Infine, vi sono vari “teoremi di confronto” geometrici in curvatura nonnegativa, tra i quali il seguente è uno dei più significativi.

TEOREMA 2.14 (Teorema di Toponogov [11] – Caso $\text{Sec} \geq 0$). *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa con $\text{Sec}_M \geq 0$.*

Sia $\Delta(p, q, r) \subseteq M$ un triangolo geodetico, cioè tale che i lati siano minimizzanti. Siano

$$d(p, q) = a, \quad d(p, r) = b, \quad d(q, r) = c$$

le lunghezze di tali lati, allora esiste un triangolo euclideo $\tilde{\Delta}(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}) \subseteq \mathbb{R}^2$ con lati di stessa lunghezza

$$|\tilde{p}\tilde{q}| = a, \quad |\tilde{p}\tilde{r}| = b, \quad |\tilde{q}\tilde{r}| = c$$

tale che vale la seguente proprietà di confronto degli angoli,

$$\angle qpr \geq \angle \tilde{q}\tilde{p}\tilde{r}.$$

Inoltre, per ogni punto m sul lato geodetico qr , se $\tilde{m}$ è il punto corrispondente sul lato $\tilde{q}\tilde{r}$, allora

$$d(p, m) \geq |\tilde{p}\tilde{m}|.$$

Inoltre, valgono anche teoremi di confronto più “analitici”, come il *teorema di confronto del laplaciano e dell’hessiano* (si veda [20]).

2.2. Esempi di spazi a curvatura nonnegativa o positiva

I teoremi della sezione precedente implicano restrizioni di tipo geometrico/topologico sulle varietà a curvatura nonnegativa o positiva, dunque è naturale la ricerca di nuovi esempi oltre a quelli noti, che derivano tutti da spazi simmetrici di rango 1, quozienti di gruppi di Lie, biquozienti e “deformazioni di Cheeger”, che vedremo nel seguito della tesi.

Esistono due procedure naturali per generare nuove metriche a curvatura nonnegativa a partire da esempi noti. Se (M_1, g_1) e (M_2, g_2) sono varietà dotate di metriche a curvatura nonnegativa, la metrica prodotto su $M_1 \times M_2$ eredita banalmente la medesima proprietà.

La seconda costruzione, di portata più ampia, consiste nel considerare i quozienti o, più in generale, le *sommersioni riemanniane*. Ricordiamo che una mappa liscia $\pi: M \rightarrow B$ tra due varietà riemanniane è definita *sommersione riemanniana* se il differenziale $d\pi$ è un’isometria sui vettori orizzontali (ovvero i vettori ortogonali alle fibre). Analogamente a quanto detto per i gruppi di Lie nella Sezione 1.2, per una sommersione, la relazione tra la curvatura dello spazio totale M e quella della base B è governata dalla *formula di O’Neill*,

$$\text{Sec}_B(X, Y) = \text{Sec}_M(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \frac{3}{4} \|[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v\|^2, \quad (2.1)$$

dove

- X, Y sono campi vettoriali su B ;
- $\tilde{X}, \tilde{Y}$ sono i rispettivi sollevamenti orizzontali di X e Y su M ;
- $[\tilde{X}, \tilde{Y}]^v$ indica la componente verticale del commutatore (ovvero la parte tangente alla fibra).

Dalla formula si evince immediatamente che se M ha curvatura nonnegativa, anche B gode della stessa proprietà. Risulta inoltre evidente l'importanza di questo strumento: in alcuni casi favorevoli, lo spazio base B può acquisire curvatura positiva anche se lo spazio totale presenta direzioni a curvatura nulla.

L'esempio più comune di sommersione riemanniana è dato dal quoziente $\pi: M \rightarrow M/G$, dove G è un gruppo di Lie compatto che agisce in modo libero e isometrico su M . La metrica indotta su M/G viene comunemente definita *metrica quoziente*.

Un terzo metodo per generare nuove metriche a curvatura nonnegativa a partire da una data è rappresentato dalle *deformazioni di Cheeger*. Questo procedimento fu introdotto inizialmente da Berger in [6], il quale considerò delle metriche sulle sfere ottenute “restringendo” la metrica lungo la direzione della fibrazione di Hopf (si veda [20]). Tale tecnica permise di produrre varietà di dimensione dispari caratterizzate da un piccolo raggio di iniettività e da una curvatura positivamente “pinched”. Il metodo è stato successivamente sviluppato e generalizzato da Cheeger in [10].

Abbiamo visto nelle sezioni del capitolo precedente come ottenere esempi di varietà a curvatura nonnegativa considerando gruppi di Lie compatti G dotati di una metrica bi-invariante che operano su uno spazio omogeneo, oppure considerandone quozienti o biquozienti per un loro sottogruppo chiuso. Da queste costruzioni, otteniamo il seguente risultato centrale.

TEOREMA 2.15. *Una metrica bi-invariante su G induce una metrica con curvatura sezionale nonnegativa su ogni spazio omogeneo G/H e su ogni biquoziente $G//H$.*

Menzioniamo che la prima volta in cui i biquozienti sono stati introdotti in ambito geometrico risale al lavoro [22], nel quale è stato dimostrato che una 7-sfera esotica ammette una metrica a curvatura nonnegativa.

Un'altra classe speciale di esempi a curvatura nonnegativa è stata costruita sempre da Cheeger in [10].

TEOREMA 2.16 (Cheeger [10]). *La somma connessa di due qualsiasi spazi simmetrici di rango uno ammette una metrica con curvatura sezionale nonnegativa.*

Nel lavoro [37] è stato successivamente dimostrato che alcune di queste varietà di Cheeger, seppur non tutte, possono essere viste a loro volta come biquozienti. La tecnica di incollamento (*gluing*) utilizzata per dimostrare questo teorema è stata successivamente oggetto di una significativa generalizzazione applicata alle cosiddette *varietà di coomogeneità uno* in [25].

DEFINIZIONE 2.17. Una varietà riemanniana (M, g) si dice di *coomogeneità uno* se ammette l'azione isometrica di un gruppo di Lie compatto G tale che l'orbita principale dell'azione abbia codimensione pari a 1. Equivalentemente, la varietà è di coomogeneità uno se il suo spazio delle orbite M/G è uno spazio topologico unidimensionale, tipicamente omeomorfo a un intervallo $[a, b]$, a un cerchio $\mathbb{S}^1$, a una semiretta o alla retta reale.

Questo ha permesso di dimostrare che sotto opportune condizioni, una varietà compatta di coomogeneità con un'azione del gruppo G , ammette una metrica G -invariante con curvatura sezionale nonnegativa. Elenchiamo alcune conseguenze di questo risultato [25, 31]:

- ogni fibrato principale in $\mathrm{SO}(k)$ su $\mathbb{S}^4$ ammette una metrica con curvatura nonnegativa;

- ogni fibrato in sfere su $\mathbb{S}^4$ ammette una metrica con curvatura sezionale nonnegativa;
- ciascuno dei 4 tipi di diffeomorfismi orientati di $\mathbb{RP}^5$ ammette una metrica con curvatura sezionale nonnegativa;
- delle 14 sfere esotiche (non orientate) 7-dimensionali, 10 di esse ammettono una metrica con curvatura nonnegativa.

Concludiamo questa breve panoramica sulle varietà *compatte* a curvatura nonnegativa (la letteratura al riguardo è molto ampia, si veda [40]), osservando infine che in dimensione due una varietà compatta a curvatura nonnegativa è diffeomorfa a $\mathbb{S}^2$ per il teorema di Gauss-Bonnet e in dimensione tre, a $\mathbb{S}^3$ o $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ grazie al celebre teorema di Hamilton in [27], per mezzo del flusso di Ricci. In dimensione quattro, le varietà compatte, semplicemente connesse e *razionalmente ellittiche* (a meno di torsione, i gruppi di omotopia non nulli sono in numero finito – si veda [19]) sono omeomorfe a $\mathbb{S}^4$, $\mathbb{CP}^2$, $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ o $\mathbb{CP}^2 \# \pm \mathbb{CP}^2$. È naturale congetturare che ogni 4-varietà compatta e semplicemente connessa, con curvatura nonnegativa sia effettivamente diffeomorfa a una di queste (*congettura di Bott in dimensione 4* – si veda [24]) e che solo le prime due possano ammettere curvatura positiva.

Se una varietà con curvatura nonnegativa *non è compatta*, il teorema del soul, Teorema 2.4 implica una restrizione stringente, cioè che è un fibrato vettoriale su una varietà compatta (il soul) con curvatura nonnegativa. Se inoltre la curvatura è positiva, la varietà è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Ciò risulta particolarmente interessante per i fibrati vettoriali sulle sfere. Si può mostrare che ogni fibrato vettoriale su $\mathbb{S}^n$, per $n = 1, 2, 3$, ammette curvatura nonnegativa. Grove e Ziller [26] hanno dimostrato che ogni fibrato vettoriale su $\mathbb{S}^4$ e ogni fibrato vettoriale su $\mathbb{CP}^2$ che non sia spin, ammette una metrica completa con curvatura sezionale nonnegativa (questa classe di fibrati vettoriali è piuttosto ampia: sono classificati da un intero arbitrario quando la dimensione della fibra è tre e da due interi se la dimensione della fibra è quattro). Per quanto riguarda i fibrati vettoriali sulle restanti 4-varietà compatte e semplicemente connesse con curvatura nonnegativa note, ovvero $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ e $\mathbb{CP}^2 \# \pm \mathbb{CP}^2$, la maggior parte di essi ammette curvatura nonnegativa (si veda [37, 39]). Per i fibrati vettoriali su $\mathbb{S}^n$ con $n > 4$, si sa che tutti i fibrati vettoriali su $\mathbb{S}^5$ e la maggior parte di quelli su $\mathbb{S}^7$, ammettono curvatura nonnegativa [25]. Tuttavia, in entrambi i casi esistono solo un numero finito di fibrati di questo tipo. Infine, nel lavoro [35], Rigas ha dimostrato che ogni fibrato vettoriale su $\mathbb{S}^n$, dopo averne fatto la somma diretta con un fibrato banale di dimensione sufficientemente grande, ammette una metrica con curvatura nonnegativa.

Gli esempi noti con curvatura *positiva* sono sorprendentemente rari. Ciò che è ancora più sorprendente è che essi sono tutti ottenuti come quozienti di un gruppo di Lie compatto, equipaggiato con una metrica bi-invariante o con una deformazione di Cheeger di una metrica bi-invariante, quozientato per un gruppo di isometrie. Si ha che la difficoltà nel mostrare nuovi esempi aumenta con la dimensione (a causa della maggiore difficoltà nel calcolare il tensore di curvatura e nello stimare la curvatura sezionale) e di fatto, gli esempi noti esistono solo in dimensione bassa. Questi consistono in alcuni spazi omogenei in dimensione 6, 7, 12, 13 e 24, dovuti a Berger [6], Wallach [38] e Aloff-Wallach [2] e in biquozienti in dimensione 6, 7 e 13, dovuti a Eschenburg [15, 16] e Bazaikin [3]. L'ingrediente principale per tutti questi esempi sono le deformazioni di Cheeger di una metrica bi-invariante fissata su un gruppo di Lie.

Gli spazi omogenei che ammettono una metrica (omogenea) con curvatura positiva sono stati classificati da Wallach in dimensione pari [38] e da Bérard-Bergery in dimensione dispari [4]. Invece, non esiste una classificazione generale dei biquozienti a curvatura positiva. Una linea di ricerca attuale è dunque quella di tentare di classificare tali biquozienti, oppure di “iterare” le suddette operazioni di deformazione delle metriche.

CAPITOLO 3

Deformazioni di Cheeger

In questo capitolo ci proponiamo di trattare in modo dettagliato il metodo delle *deformazioni di Cheeger*, che rappresentano uno degli strumenti principali per produrre nuovi esempi di varietà riemanniane a curvatura sezionale nonnegativa a partire da metriche già note. Rimandiamo, per un approfondimento al lavoro originale di Cheeger [10] in cui vengono studiati degli esempi concreti di varietà riemanniane compatte a curvatura sezionale nonnegativa, con l'obiettivo di analizzare quanto questa condizione imponga o meno rigidità topologica. Cheeger osservò che la curvatura nonnegativa, pur essendo una condizione forte dal punto di vista geometrico, non determina in modo rigido la struttura topologica della varietà; esistono famiglie infinite di varietà non diffeomorfe o non omeomorfe tra loro, che ammettono tutte metriche con curvatura sezionale nonnegativa.

Il prototipo storico, ovvero l'antenato diretto, di queste deformazioni sono le *sfere di Berger*. Per esplorare il comportamento della curvatura, Marcel Berger in [6] considerò la sfera standard di dimensione dispari, in particolare $\mathbb{S}^3$ e la sua *fibrazione di Hopf* (si veda [20]), le cui fibre sono cerchi $\mathbb{S}^1$ con l'idea di "schiacciare" o "restringere" la metrica lungo la direzione di queste fibre (ossia lungo l'azione di $\mathbb{S}^1$), mantenendola inalterata nelle direzioni ortogonali. Le metriche ottenute tramite questo procedimento generano le cosiddette *sfere di Berger*. Questa operazione preserva la curvatura sezionale positiva, pur alterando il raggio di iniettività e il valore della curvatura. Jeff Cheeger colse questa intuizione di Berger e la generalizzò estendendo l'idea di "compressione" lungo le orbite a una varietà arbitraria soggetta all'azione di un gruppo (di Lie) di isometrie. Cheeger ha così formalizzato e generalizzato la tecnica di Berger, applicandola all'azione di un generico gruppo di Lie compatto G su una varietà riemanniana M . Invece di limitarsi alle fibre di Hopf, Cheeger ha introdotto l'elegante stratagemma formale di considerare la varietà prodotto $M \times G$ dotata della metrica $g + \frac{1}{t}Q$, per poi utilizzare una sommersione riemanniana per passare al quoziente, ottenendo la metrica deformata g_t . Al crescere del parametro $t > 0$, la metrica si comprime esattamente lungo le orbite del gruppo, in perfetta analogia con quanto operato da Berger sulle fibre. Applicando una deformazione di Cheeger alla sfera standard $\mathbb{S}^3$ rispetto all'azione isometrica di $\mathbb{S}^1$ associata alla fibrazione di Hopf, si riottiene esattamente la famiglia delle sfere di Berger che introdusse questo raffinato espediente per un caso specifico di grande rilevanza geometrica, mentre Cheeger ha sviluppato la teoria generale, oggi impiegata sistematicamente per la costruzione di quasi tutti i nuovi esempi di varietà a curvatura nonnegativa o positiva.

3.1. Preliminari

Sia (M, g) una varietà riemanniana e sia G un gruppo di Lie compatto che agisce su M mediante isometrie. Denotiamo tale azione con

$$\Phi: G \times M \longrightarrow M$$

e scriveremo più semplicemente $g \cdot p = \Phi(g, p)$ per indicare l'azione dell'elemento $g \in G$ sul punto $p \in M$.

Sia $\mathfrak{g}$ l'algebra di Lie associata al gruppo G . Poiché G è compatto, è noto che esiste su $\mathfrak{g}$ un prodotto scalare $Q: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ che è $\text{Ad}(G)$ -invariante, ovvero tale per cui

$$Q(\text{Ad}_g X, \text{Ad}_g Y) = Q(X, Y)$$

per ogni $g \in G$ e per ogni $X, Y \in \mathfrak{g}$, dove Ad_g denota l'azione aggiunta del gruppo sulla sua algebra. Nel seguito, assumeremo fissato un tale prodotto scalare Q .

Per collegare la struttura algebrica di $\mathfrak{g}$ con la geometria della varietà M , si introducono i *campi vettoriali fondamentali*.

DEFINIZIONE 3.1. Per ogni $X \in \mathfrak{g}$, si definisce *campo vettoriale fondamentale* su M generato da X il campo X^* il cui valore in un punto $q \in M$ è dato da

$$X^*(q) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) \cdot q.$$

Geometricamente, valutare $X^*(p)$ equivale a considerare la curva $\gamma(t) = \exp(tX) \cdot p$, che giace interamente nell'orbita $G \cdot p$ e calcolarne la velocità nell'istante iniziale. Questo legame tra i campi fondamentali e le orbite è formalizzato dal seguente teorema di struttura.

TEOREMA 3.2. Sia G un gruppo di Lie che agisce in modo differenziabile sulla varietà M . Fissato $p \in M$, si consideri la sua orbita $G \cdot p = \{g \cdot p \mid g \in G\}$ e il suo gruppo di isotropia (o stabilizzatore) $G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}$. Allora:

- (1) G_p è un sottogruppo di Lie chiuso di G ;
- (2) l'orbita $G \cdot p$ è una sottovarietà immersa di M , diffeomorfa al quoziente G/G_p ;
- (3) lo spazio tangente all'orbita in p è generato dai campi fondamentali

$$T_p(G \cdot p) = \{X^*(p) \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

DIMOSTRAZIONE. I primi due punti sono risultati classici della teoria delle azioni di gruppi di Lie (si veda ad esempio [30]). Per dimostrare il terzo punto, si consideri l'applicazione liscia

$$\Phi_p: G \longrightarrow M, \quad \Phi_p(g) = g \cdot p.$$

Per definizione, l'immagine di tale mappa è esattamente l'orbita $G \cdot p$. Il differenziale di Φ_p nell'elemento neutro $e \in G$ è un'applicazione lineare $d\Phi_p(e): T_e G \rightarrow T_p M$. Poiché $T_e G \cong \mathfrak{g}$, per ogni $X \in \mathfrak{g}$ si ottiene

$$d\Phi_p(e)(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_p(\exp(tX)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tX) \cdot p = X^*(p).$$

Poiché l'orbita è una sottovarietà immersa, il suo spazio tangente coincide con l'immagine del differenziale $d\Phi_p(e)$, da cui segue la tesi

$$T_p(G \cdot p) = \text{Im}(d\Phi_p(e)) = \{X^*(p) \mid X \in \mathfrak{g}\}.$$

□

Sia $\mathfrak{g}_p = \text{Lie}(G_p)$ l'algebra di Lie dello stabilizzatore. Direttamente dalla definizione di campo fondamentale, si osserva che $X^*(p) = 0$ se e solo se il flusso $\exp(tX)$ fissa il punto p , ovvero se e solo se $X \in \mathfrak{g}_p$. L'applicazione $X \mapsto X^*(p)$ ha dunque nucleo pari a $\mathfrak{g}_p$.

Sfruttando il prodotto scalare $\text{Ad}(G)$ -invariante Q introdotto in precedenza, possiamo definire il complemento ortogonale di $\mathfrak{g}_p$ in $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{m}_p = (\mathfrak{g}_p)^{\perp_Q},$$

ottenendo così la decomposizione Q -ortogonale

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \oplus \mathfrak{m}_p.$$

La scelta del sottospazio $\mathfrak{m}_p$ risulta cruciale, in quanto permette di identificare in modo canonico e lineare le direzioni tangenti all'orbita, evitando di lavorare nello spazio quoziente $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p$.

PROPOSIZIONE 3.3. *L'applicazione $\Psi: \mathfrak{m}_p \rightarrow T_p(G \cdot p)$ definita da $\Psi(X) = X^*(p)$ è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

DIMOSTRAZIONE. Come mostrato nella dimostrazione del Teorema 3.2, l'applicazione lineare da $\mathfrak{g}$ a $T_p(G \cdot p)$ che associa $X \mapsto X^*(p)$ è suriettiva e ha nucleo $\mathfrak{g}_p$. Dunque, $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p \cong T_p(G \cdot p)$ e poiché $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_p \oplus \mathfrak{m}_p$, la restrizione della proiezione canonica a $\mathfrak{m}_p$ fornisce un isomorfismo naturale $\mathfrak{m}_p \cong \mathfrak{g}/\mathfrak{g}_p$. Componendo questi due isomorfismi, si conclude che la restrizione dell'applicazione ai soli vettori di $\mathfrak{m}_p$ è una biiezione su $T_p(G \cdot p)$. $\square$

Questo isomorfismo è fondamentale nel contesto delle deformazioni di Cheeger, poiché consente di tradurre lo studio della geometria riemanniana dell'orbita in un problema puramente algebrico sull'algebra di Lie. In particolare, è possibile codificare la restrizione della metrica g tramite un opportuno endomorfismo di $\mathfrak{m}_p$.

PROPOSIZIONE 3.4. *Esiste un unico endomorfismo lineare*

$$P: \mathfrak{m}_p \longrightarrow \mathfrak{m}_p$$

simmetrico e definito positivo rispetto a Q , tale che

$$g_p(X^*(p), Y^*(p)) = Q(PX, Y)$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{m}_p$.

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 3.3, ogni vettore tangente all'orbita $G \cdot p$ si rappresenta in modo unico nella forma $X^*(p)$ per un certo $X \in \mathfrak{m}_p$. La restrizione della metrica riemanniana g_p allo spazio tangente dell'orbita definisce pertanto una forma bilineare simmetrica su $\mathfrak{m}_p$, data da

$$B_p(X, Y) = g_p(X^*(p), Y^*(p)).$$

Poiché $(\mathfrak{m}_p, Q)$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita dotato di prodotto scalare, per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste un unico endomorfismo lineare $P: \mathfrak{m}_p \rightarrow \mathfrak{m}_p$ tale che

$$B_p(X, Y) = Q(PX, Y)$$

per ogni $X, Y \in \mathfrak{m}_p$. La simmetria di P rispetto a Q discende direttamente dalla simmetria della forma bilineare B_p :

$$Q(PX, Y) = B_p(X, Y) = B_p(Y, X) = Q(PY, X) = Q(X, PY).$$

Infine, l'operatore P risulta essere definito positivo in quanto la metrica g_p è definita positiva. Infatti, preso un vettore non nullo $X \in \mathfrak{m}_p$, per l'isomorfismo stabilito in precedenza si ha $X^*(p) \neq 0$, da cui

$$Q(PX, X) = g_p(X^*(p), X^*(p)) > 0.$$

$\square$

OSSERVAZIONE 3.5. L'operatore P descrive interamente la metrica indotta sulle orbite dall'azione del gruppo. Nel quadro delle deformazioni di Cheeger, modificare la metrica originaria lungo le orbite si tradurrà algebricamente in una perturbazione mirata dell'operatore P . Questo costituisce il punto di partenza per l'analisi e la costruzione di nuove varietà a curvatura nonnegativa.

3.2. Deformazioni di Cheeger

Una *deformazione di Cheeger* è una tecnica geometrica che permette di perturbare con continuità una metrica riemanniana su una varietà dotata di un'azione isometrica di un gruppo di Lie. L'idea fondamentale è quella di accoppiare la varietà originale con il gruppo di isometrie e sfruttare una sommersione riemanniana per indurre una nuova famiglia di metriche g_t dipendente da un parametro $t > 0$. Geometricamente, questa operazione ha l'effetto di

“schiacciare” progressivamente la metrica lungo le orbite dell’azione al crescere di t , mantenendola inalterata nelle direzioni ortogonali. Questa deformazione gode della notevole proprietà di preservare (o migliorare) la nonnegatività della curvatura sezionale originaria.

Entriamo ora nei dettagli della costruzione. Riprendendo le notazioni della sezione precedente, sia (M, g) una varietà riemanniana e G un gruppo di Lie compatto che agisce su di essa mediante isometrie. Fissiamo su $\mathfrak{g}$ il prodotto scalare $\text{Ad}(G)$ –invariante Q .

Consideriamo la varietà prodotto $M \times G$ equipaggiata con la famiglia di metriche prodotto a un parametro,

$$g_{M \times G} = g + \frac{1}{t}Q, \quad t > 0,$$

dove su G si considera la metrica bi–invariante indotta da Q riscalata del fattore $1/t$.

Si introduce quindi un’azione di G su $M \times G$, definita ponendo per ogni $\tilde{g} \in G$,

$$\tilde{g} \cdot (p, h) = (\tilde{g}p, \tilde{g}h).$$

Essendo il prodotto delle azioni originarie su M e su G , tale azione diagonale risulta isometrica rispetto alla metrica $g_{M \times G}$.

Lo spazio quoziente $(M \times G)/G$ rispetto a questa azione è naturalmente diffeomorfo alla varietà di partenza M . Infatti, due punti (p, h) e (p', h') appartengono alla stessa orbita se e solo se esiste $g \in G$ tale che $(p', h') = (gp, gh)$; da ciò si deduce che ogni classe di equivalenza contiene un unico rappresentante della forma $(h^{-1}p, e)$. Il diffeomorfismo con M è pertanto realizzato esplicitamente dalla proiezione

$$\pi: M \times G \longrightarrow M, \quad \pi(p, h) = h^{-1}p.$$

Poiché l’azione di G su $M \times G$ è isometrica, la mappa π definisce una sommersione riemanniana. La *metrica deformata* g_t su M è, per definizione, la metrica indotta da tale sommersione affinché π sia riemanniana.

Per descrivere esplicitamente l’operatore associato alla metrica g_t in termini di Q e dell’operatore originale P , è necessario determinare i sollevamenti orizzontali (*horizontal lifts*) rispetto alla sommersione π . Iniziamo calcolando il differenziale di π .

LEMMA 3.6. *Il differenziale della sommersione $\pi(p, h) = h^{-1}p$ nel punto (p, e) applicato a un vettore $(X^*(p), Y) \in T_{(p,e)}(M \times G)$, con $X, Y \in \mathfrak{g}$, è dato da*

$$d\pi_{(p,e)}(X^*(p), Y) = X^*(p) - Y^*(p).$$

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di differenziale, valutiamo la derivata lungo una curva passante per (p, e) con vettore tangente $(X^*(p), Y)$:

$$d\pi_{(p,e)}(X^*(p), Y) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \pi(\exp(sX) \cdot p, \exp(sY)).$$

Applicando la definizione di π , si ha

$$\pi(\exp(sX) \cdot p, \exp(sY)) = \exp(-sY) \cdot (\exp(sX) \cdot p).$$

Derivando in $s = 0$ tramite la regola di Leibniz per l’azione di gruppo, si ottiene

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\exp(-sY) \cdot p) + \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (e \cdot (\exp(sX) \cdot p)) = -Y^*(p) + X^*(p).$$

□

Siamo ora in grado di calcolare il sollevamento orizzontale lungo le direzioni tangenti all’orbita. Ricordiamo dalla sezione precedente che tali direzioni sono identificate dallo spazio $\mathfrak{m}_p$.

PROPOSIZIONE 3.7. Sia $X \in \mathfrak{m}_p$. Il sollevamento orizzontale del vettore $X^*(p) \in T_p M$ nel punto (p, e) rispetto alla sommersione π è dato da $\tilde{X} = (U^*(p), Y)$, dove

$$U = P^{-1}(P^{-1} + t\text{Id})^{-1}X, \quad Y = -t(P^{-1} + t\text{Id})^{-1}X.$$

DIMOSTRAZIONE. Cerchiamo un vettore $\tilde{X} = (U^*(p), Y) \in T_{(p,e)}(M \times G)$ con $U, Y \in \mathfrak{m}_p$. La condizione di sollevamento $d\pi_{(p,e)}(\tilde{X}) = X^*(p)$ impone, in virtù del lemma precedente, che $U^*(p) - Y^*(p) = X^*(p)$. Essendo l'applicazione $W \mapsto W^*(p)$ un isomorfismo su $\mathfrak{m}_p$, ciò equivale alla relazione algebrica

$$U - Y = X. \quad (3.1)$$

Inoltre, $\tilde{X}$ deve essere orizzontale, ovvero ortogonale allo spazio verticale

$$\mathcal{V}_{(p,e)} = \text{Ker}(d\pi_{(p,e)}).$$

I vettori verticali sono della forma $(Z^*(p), Z)$ per ogni $Z \in \mathfrak{g}$. Richiediamo dunque l'ortogonalità rispetto alla metrica $g_{M \times G}$:

$$g_p(U^*(p), Z^*(p)) + \frac{1}{t}Q(Y, Z) = 0 \quad \text{per ogni } Z \in \mathfrak{g}.$$

Esprimendo la metrica g_p tramite l'operatore P , si ha $Q(PU, Z) + \frac{1}{t}Q(Y, Z) = 0$. Per la non degenerazione del prodotto scalare, deve valere

$$Y = -tPU.$$

Sostituendo questa uguaglianza nella formula (3.1), otteniamo $U + tPU = X$, da cui $U = (\text{Id} + tP)^{-1}X$. Sfruttando l'identità algebrica $(\text{Id} + tP)^{-1} = P^{-1}(P^{-1} + t\text{Id})^{-1}$, si ricavano le espressioni desiderate per U e conseguentemente, per Y . $\square$

Il passo conclusivo consiste nel calcolare la nuova metrica g_t sulle direzioni tangenti all'orbita. Essendo π una sommersione riemanniana, la norma di $X^*(p)$ rispetto a g_t coincide con la norma del suo sollevamento orizzontale rispetto a $g_{M \times G}$,

$$\begin{aligned} g_t(X^*(p), X^*(p)) &= g_p(U^*(p), U^*(p)) + \frac{1}{t}Q(Y, Y) \\ &= Q(PU, U) + \frac{1}{t}Q(-tPU, -tPU) \\ &= Q(PU, U) + tQ(P^2U, U) \\ &= Q((P + tP^2)U, U). \end{aligned}$$

Sostituendo $U = (\text{Id} + tP)^{-1}X$ e notando che $(P + tP^2)(\text{Id} + tP)^{-1} = P$, si ottiene

$$g_t(X^*(p), X^*(p)) = Q(P(\text{Id} + tP)^{-1}X, (\text{Id} + tP)^{-1}X).$$

Sfruttando la simmetria degli operatori in gioco, l'espressione si semplifica in

$$g_t(X^*(p), X^*(p)) = Q((P^{-1} + t\text{Id})^{-1}X, X).$$

Da questa identità segue immediatamente che la metrica deformata g_t sulle direzioni tangenti all'orbita è descritta dal nuovo endomorfismo

$$P_t = (P^{-1} + t\text{Id})^{-1}.$$

Osserviamo che per $t \rightarrow 0$ si recupera l'operatore originario $P_0 = P$. Per $t > 0$, l'operatore P_t riduce strettamente la norma dei vettori: gli autovalori λ_i di P vengono trasformati in $\frac{\lambda_i}{1+t\lambda_i}$, realizzando lo "schiacciamento" geometrico delle orbite anticipato all'inizio della sezione.

Infine, se $X \in T_p M$ è un vettore ortogonale all'orbita $G \cdot p$, il suo sollevamento orizzontale in (p, e) è banalmente $(X, 0)$. Ne consegue che

$$g_t(X, X) = g(X, X),$$

ossia la metrica resta perfettamente invariata sulle direzioni trasversali all'azione. Questo fatto evidenzia la natura delle deformazioni di Cheeger: la geometria viene alterata esclusivamente lungo i gradi di libertà dell'azione del gruppo G .

3.3. Il teorema di Cheeger

Un risultato fondamentale, dovuto a Cheeger e introdotto nel suo lavoro [10], afferma che la curvatura sezionale della metrica g_t non diminuisce al crescere del parametro di deformazione t . In particolare, se la varietà originaria (M, g) ha curvatura sezionale nonnegativa, allora anche (M, g_t) gode della medesima proprietà per ogni $t > 0$.

Questo risultato, combinato con la flessibilità nella scelta dell'azione del gruppo G , rende le deformazioni di Cheeger uno strumento estremamente potente per la costruzione di nuovi esempi di varietà riemanniane a curvatura sezionale nonnegativa o positiva, come verrà illustrato in seguito.

Prima di enunciare il teorema principale, è utile ricordare un fatto geometrico classico sulle sommersioni che funge da precursore per l'intera teoria.

TEOREMA 3.8 (Cheeger [10]). *Se una varietà (M, g) ha curvatura nonnegativa e un gruppo di Lie G vi agisce isometricamente e in modo libero, allora il quoziente M/G , munito della metrica indotta dalla sommersione, ha curvatura nonnegativa.*

L'idea di Cheeger consiste nell'applicare la formula di O'Neill (2.1) non direttamente a $M \rightarrow M/G$, ma alla famiglia di sommersioni riemanniane $\pi_t: (M \times G, g + \frac{1}{t}Q) \rightarrow (M, g_t)$, dove Q è una metrica bi-invariante su G .

Enunciamo ora in maniera formale il teorema centrale sulla monotonia della curvatura, seguendo la formulazione data da Ziller in [40].

TEOREMA 3.9 (Cheeger–Ziller). *Sia G un gruppo di Lie compatto che agisce isometricamente su una varietà riemanniana (M, g) e sia Q una metrica bi-invariante su G . Sia g_t la deformazione di Cheeger di g ottenuta tramite la sommersione riemanniana*

$$\pi_t: \left(M \times G, g + \frac{1}{t}Q \right) \longrightarrow (M, g_t), \quad \pi_t(p, h) = h^{-1}p.$$

Allora vale la disuguaglianza

$$Sec_{g_t}(\sigma_t) \geq Sec_g(\sigma)$$

per ogni piano $\sigma \subseteq T_p M$, dove σ_t è il piano in $T_p M$ (visto come spazio tangente della varietà deformata) corrispondente a σ tramite l'identificazione naturale dei piani indotta dall'isomorfismo orizzontale della sommersione.

In particolare, vale l'implicazione

$$Sec_g \geq 0 \implies Sec_{g_t} \geq 0 \quad \text{per ogni } t > 0.$$

Questo risultato ammette una formulazione differenziale equivalente e molto espressiva.

TEOREMA 3.10 (Formulazione differenziale). *Nelle stesse ipotesi del Teorema 3.9, per ogni piano σ si ha*

$$\frac{d}{dt} Sec_{g_t}(\sigma_t) \geq 0.$$

Di conseguenza, la funzione $t \mapsto Sec_{g_t}(\sigma_t)$ è non decrescente.

Osserviamo che la disuguaglianza risulta stretta esattamente per quei piani che non sono puramente orizzontali rispetto all'azione, ovvero che possiedono una componente orbitale non nulla. La dimostrazione del Teorema 3.9 si basa su un'attenta applicazione della formula di O'Neill.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.9. Per $t > 0$, consideriamo su $M \times G$ la metrica prodotto $\tilde{g}_t = g + \frac{1}{t}Q$. Indichiamo con π_t la consueta sommersione riemanniana che induce g_t su M .

Siano $X, Y \in T_p M$ due vettori ortonormali che generano il piano σ . Per valutare la curvatura sezionale $\text{Sec}_{g_t}(X, Y)$, consideriamo i loro sollevamenti orizzontali $\tilde{X}, \tilde{Y}$ in un punto $(p, e) \in M \times G$. Dalla teoria delle sommersioni riemanniane, la formula di O'Neill (2.1) stabilisce che

$$\text{Sec}_{g_t}(X, Y) = \text{Sec}_{\tilde{g}_t}(\tilde{X}, \tilde{Y}) + \frac{3}{4} \|[\tilde{X}, \tilde{Y}]^\mathcal{V}\|_{\tilde{g}_t}^2 \quad (3.2)$$

dove l'apice $\mathcal{V}$ indica la proiezione ortogonale sullo spazio verticale $\mathcal{V}_{(p,e)} = \text{Ker}(d\pi_t)$.

Innanzitutto, analizziamo il primo termine a destra dell'uguaglianza. Poiché $\tilde{g}_t$ è una metrica prodotto, i piani orizzontali in $M \times G$ ereditano la curvatura dai due fattori. Poiché la metrica bi-invariante Q su G ha curvatura sezionale sempre nonnegativa, la curvatura del prodotto è limitata inferiormente dalla curvatura del fattore M :

$$\text{Sec}_{\tilde{g}_t}(\tilde{X}, \tilde{Y}) \geq \text{Sec}_g(X, Y).$$

Per concludere la dimostrazione è sufficiente osservare che il secondo termine nella formula (3.2) è intrinsecamente nonnegativo. È tuttavia istruttivo esplicitarne la struttura geometrica. Sappiamo che ogni vettore dello spazio verticale in (p, e) si scrive in modo univoco nella forma $(Z^*(p), -Z)$ per un certo $Z \in \mathfrak{g}$. Pertanto, la componente verticale del commutatore $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ sarà un vettore di questo tipo, associato a un elemento $Z_0 \in \mathfrak{g}$ (che dipende dai campi X e Y). Calcolando la norma quadrata di tale componente verticale rispetto alla metrica prodotto $\tilde{g}_t$, si ottiene

$$\|[\tilde{X}, \tilde{Y}]^\mathcal{V}\|_{\tilde{g}_t}^2 = \|(Z_0^*(p), -Z_0)\|_{\tilde{g}_t}^2 = g_p(Z_0^*(p), Z_0^*(p)) + \frac{1}{t}Q(-Z_0, -Z_0).$$

Per la simmetria e bilinearità del prodotto scalare, $Q(-Z_0, -Z_0) = Q(Z_0, Z_0)$, da cui

$$\|[\tilde{X}, \tilde{Y}]^\mathcal{V}\|_{\tilde{g}_t}^2 = \|Z_0^*(p)\|_g^2 + \frac{1}{t}\|Z_0\|_Q^2 \geq 0.$$

Sostituendo queste informazioni nella formula (3.2), si ottiene infine

$$\text{Sec}_{g_t}(X, Y) \geq \text{Sec}_g(X, Y) + \frac{3}{4} \left(\|Z_0^*(p)\|_g^2 + \frac{1}{t}\|Z_0\|_Q^2 \right) \geq \text{Sec}_g(X, Y),$$

il che completa la dimostrazione. □

OSSERVAZIONE 3.11. L'espressione esplicita del termine positivo derivante dalla parte verticale ha un significato geometrico profondo. Il termine $\frac{3}{4}\|[\tilde{X}, \tilde{Y}]^\mathcal{V}\|^2$ misura quanto il commutatore di due campi orizzontali "ruoti" e si sviluppi all'interno dell'orbita. Inoltre, si noti la dipendenza esplicita dal parametro t : il contributo alla curvatura contiene il termine $\frac{1}{t}\|Z_0\|_Q^2$. Al crescere di t , la metrica g_t viene "compressa" lungo le orbite, quindi nel calcolo della curvatura tramite la sommersione, il contributo positivo garantito dalla formula di O'Neill si amplifica, confermando la natura non decrescente della curvatura sotto la deformazione.

3.4. Applicazioni

Il Teorema 3.9 costituisce uno strumento potente per la costruzione e l'analisi di varietà a curvatura nonnegativa. Vediamo alcune applicazioni.

3.4.1. Spazi omogenei e biquozienti. Iniziamo analizzando l'effetto della deformazione di Cheeger sugli spazi omogenei.

PROPOSIZIONE 3.12. *Sia $M = G/H$ uno spazio omogeneo dotato di una metrica g invariante rispetto all'azione a sinistra di G . Allora la deformazione di Cheeger rispetto a tale azione produce una famiglia di metriche g_t che rimangono G -invarianti per ogni $t > 0$.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo che la deformazione g_t è indotta dalla sommersione riemanniana $\pi: (M \times G, \tilde{g}_t) \rightarrow M$, dove $\tilde{g}_t = g + \frac{1}{t}Q$. L'azione a sinistra di un elemento $k \in G$ su M si solleva naturalmente all'azione diagonale su $M \times G$ data da $k \cdot (p, h) = (kp, kh)$. Questa azione diagonale è un'isometria per la metrica prodotto $\tilde{g}_t$: sul primo fattore si ha invarianza poiché g è G -invariante per ipotesi, mentre sul secondo fattore si ha invarianza in quanto Q è bi-invariante. Poiché la sommersione π è equivariante rispetto a queste azioni (ossia $\pi(kp, kh) = h^{-1}k^{-1}kp = h^{-1}p = k \cdot \pi(p, h)$) non appena il gruppo è abeliano, altrimenti si modifica l'azione a destra), la metrica indotta g_t eredita l'invarianza. $\square$

TEOREMA 3.13. *Sia G/H uno spazio omogeneo che ammette una metrica G -invariante g con curvatura sezionale nonnegativa. Allora la metrica deformata g_t ha anch'essa curvatura sezionale nonnegativa e il numero di piani con curvatura sezionale nulla diminuisce strettamente.*

DIMOSTRAZIONE. La nonnegatività di g_t discende banalmente dal Teorema 3.9. Per analizzare i piani a curvatura nulla, ricordiamo che per ogni piano $\sigma = \text{span}\{X, Y\} \subseteq T_p M$, si ha

$$\text{Sec}_{g_t}(\sigma) = \text{Sec}_g(\sigma) + \frac{3}{4} \|[\tilde{X}, \tilde{Y}]^\vee\|_{\tilde{g}_t}^2. \quad (3.3)$$

Il termine additivo si annulla se e solo se il commutatore dei sollevamenti orizzontali è puramente orizzontale. Di conseguenza, tutti i piani σ che non verificano questa condizione geometrica molto restrittiva (in particolare i "piani misti" che intersecano non banalmente i sottospazi tangenti alle orbite) acquistano un contributo strettamente positivo. Pertanto, un piano che risultava piatto rispetto a g , se possiede una componente orbitale adeguata, assumerà curvatura positiva rispetto a g_t . $\square$

COROLLARIO 3.14. *Se la metrica iniziale possiede piani piatti generati esclusivamente da simmetrie orbitali, tali piani vengono eliminati dalla deformazione per $t > 0$.*

TEOREMA 3.15. *Se G è un gruppo di Lie compatto dotato di metrica bi-invariante, allora ogni suo biquoziente $G//H$ ammette una metrica a curvatura sezionale nonnegativa.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la metrica bi-invariante sull'algebra di Lie $\mathfrak{g}$. È un fatto noto di geometria riemanniana che la connessione di Levi-Civita per tale metrica è data da $\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X, Y]$. Il tensore di curvatura risulta quindi essere $R(X, Y)Z = -\frac{1}{4}[[X, Y], Z]$. Calcolando la curvatura sezionale per un piano generato dai vettori ortonormali X, Y , si ottiene

$$\text{Sec}_G(X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X \rangle = \frac{1}{4} \|[X, Y]\|^2 \geq 0.$$

La metrica bi-invariante su G ha dunque curvatura nonnegativa (ed è nulla se e solo se i vettori commutano). Il biquoziente $G//H$ è ottenuto tramite una sommersione riemanniana per l'azione libera di H . Per la formula di O'Neill (2.1), la curvatura della base gode dell'aggiunta del termine positivo della norma della componente verticale, garantendo così $\text{Sec}_{G//H} \geq 0$. $\square$

Questa tecnica di deformazione e quoziente trova la sua applicazione più celebre nella sfera esotica di Gromoll-Meyer [22]. Ricordiamo brevemente che il gruppo *simplettico compatto* $\text{Sp}(n)$ è definito come il gruppo delle matrici quaternioniche $n \times n$ unitarie, ovvero $\text{Sp}(n) = \{A \in \text{GL}(n, \mathbb{H}) \mid A^* A = I\}$. Esso è l'analogo quaternionico del gruppo unitario $\text{U}(n)$. In particolare, $\text{Sp}(1)$ è canonicamente diffeomorfo alla sfera $\mathbb{S}^3$. Ponendo

$G = \mathrm{Sp}(2)$ e $H = \mathbb{S}^3 \cong \mathrm{Sp}(1)$, con H che agisce su $\mathrm{Sp}(2)$ bilateralmente, si ha che il quoziente $\Sigma^7 = \mathrm{Sp}(2)/\mathbb{S}^3$ produce una varietà che Gromoll e Meyer dimostrarono essere una sfera esotica (omeomorfa ma non diffeomorfa alla 7-sfera standard). Applicando prima una deformazione di Cheeger su $\mathrm{Sp}(2)$ e poi passando al biquoziente, si può dotare Σ^7 di una metrica a curvatura nonnegativa, ottenendo il primo esempio storico di sfera esotica con tale proprietà.

3.4.2. Fibrati “fat” (Fat bundles). La tecnica di deformazione si applica in modo molto elegante ai fibrati principali per produrre metriche con proprietà di positività.

Sia $\pi: P \rightarrow B$ un fibrato principale con gruppo di struttura G . Una *connessione* su P è definita da una 1-forma $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ equivariante. La *curvatura della connessione* è la 2-forma $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ definita dall’equazione di struttura di Cartan

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)].$$

DEFINIZIONE 3.16. Un fibrato principale dotato di connessione si dice *fat* se per ogni coppia di vettori orizzontali linearmente indipendenti X, Y , la forma di curvatura non si annulla,

$$\Omega(X, Y) \neq 0.$$

TEOREMA 3.17. Se un fibrato principale $\pi: P \rightarrow B$ è fat, l’applicazione della deformazione di Cheeger lungo le fibre di P produce una metrica con curvatura positiva su tutti i piani misti.

L’idea alla base di questo risultato risiede nel fatto che il tensore A di O’Neill associato alla sommersione del fibrato coincide essenzialmente con la curvatura della connessione Ω . La condizione di “fatness” assicura che il termine $\frac{3}{4}\|A_t\|^2$ nella formula di monotonia sia strettamente positivo, garantendo un miglioramento sistematico della curvatura sezionale.

3.4.3. Deformazioni iterate.

DEFINIZIONE 3.18. Sia (M, g) una varietà riemanniana. La *distribuzione di nullità* (nullity distribution) in un punto $p \in M$ è il sottospazio

$$\mathcal{N}_p(g) = \{X \in T_p M \mid R(X, Y) = 0 \text{ per ogni } Y \in T_p M\}.$$

L’effetto della deformazione di Cheeger sulla distribuzione di nullità è descritto dalla seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 3.19. Sia G un gruppo che agisce isometricamente su (M, g) e sia g_t la sua deformazione di Cheeger. Allora per ogni $t > 0$,

$$\mathcal{N}_p(g_t) \subseteq \mathcal{N}_p(g) \cap (T_p(G \cdot p))^\perp.$$

DIMOSTRAZIONE. Un vettore X appartiene a $\mathcal{N}_p(g_t)$ se annulla la curvatura sezionale $\mathrm{Sec}_{g_t}(X, Y)$ per ogni Y . Per la formula (3.3), ciò implica che per ogni Y devono annullarsi simultaneamente $\mathrm{Sec}_g(X, Y)$ e la componente orbitale del commutatore. Di conseguenza, X doveva già appartenere a $\mathcal{N}_p(g)$ ed essere inoltre puramente ortogonale alle orbite generate da G , da cui la tesi. $\square$

Per sfruttare appieno questa proposizione, è necessario che l’azione del gruppo G non sia banale. Ricordiamo che un’azione di G su M induce un omomorfismo $\Phi: G \rightarrow \mathrm{Diff}(M)$. L’azione si dice *efficace* se $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{e\}$, ovvero se nessun elemento non identico di G fissa globalmente M . Si dice *quasi-efficace* se $\mathrm{Ker}(\Phi)$ è discreto (il che, per G compatto, implica che sia finito).

LEMMA 3.20. Se l’azione di G su M è quasi-efficace, l’azione del gruppo quoziente

$$\overline{G} = G / \mathrm{Ker}(\Phi)$$

è efficace e induce la medesima deformazione di Cheeger.

DIMOSTRAZIONE. Gli elementi del nucleo $\text{Ker}(\Phi)$ agiscono banalmente su M , producendo campi fondamentali identicamente nulli. Pertanto, essi non espandono le orbite né modificano la metrica $\tilde{g}_t$ lungo direzioni rilevanti per la sommersione riemanniana. La geometria della deformazione è interamente governata dall'azione effettiva di $\overline{G}$. $\square$

L'ipotesi di quasi-efficacia è cruciale nell'analisi della nullità: se l'azione non fosse quasi-efficace, esisterebbero direzioni orbitali globalmente nulle (generate da $\text{Ker}(\Phi)$) che la deformazione di Cheeger non potrebbe "curvare", invalidando la restrizione espressa nella Proposizione 3.19.

Concludiamo illustrando un utile teorema "di iterazione", che permette di abbattere progressivamente la distribuzione di nullità applicando la deformazione di Cheeger in sequenza rispetto a una catena di sottogruppi.

TEOREMA 3.21. *Sia (M, g) una varietà riemanniana e si consideri una catena di sottogruppi compatti*

$$H_1 \subseteq H_2 \subseteq \cdots \subseteq H_k \subseteq \text{Iso}(M, g).$$

Definiamo induttivamente la famiglia di metriche $g^{(0)} = g$ e $g^{(i)}$ come la deformazione di Cheeger di $g^{(i-1)}$ rispetto all'azione di H_i . Siano inoltre $\mathcal{H}_i(p) = (T_p(H_i \cdot p))^\perp$ le distribuzioni orizzontali. Allora:

- (1) *La curvatura sezionale non decresce a ogni passo: $\text{Sec}_{g^{(i)}} \geq \text{Sec}_{g^{(i-1)}}$.*
- (2) *Per ogni $p \in M$, la distribuzione di nullità si restringe progressivamente:*

$$\mathcal{N}_p(g^{(k)}) \subseteq \mathcal{N}_p(g) \cap \bigcap_{i=1}^k \mathcal{H}_i(p).$$

DIMOSTRAZIONE. Il primo punto è una diretta applicazione induttiva del Teorema 3.9. Per il secondo punto, procediamo per induzione su i . Per la Proposizione 3.19, sappiamo che $\mathcal{N}_p(g^{(i)}) \subseteq \mathcal{N}_p(g^{(i-1)}) \cap \mathcal{H}_i(p)$. Iterando questa inclusione dall'indice k all'indietro fino a 1, si ottiene l'intersezione completa delle distribuzioni orizzontali con la nullità iniziale. $\square$

Poiché gli spazi $\mathcal{H}_i(p)$ decrescono all'aumentare della dimensione delle orbite di H_i , l'intersezione $\bigcap_{i=1}^k \mathcal{H}_i(p)$ si assottiglia progressivamente. Se le azioni dei vari H_i sono sufficientemente ricche (e quasi-efficaci) da esplorare l'intero spazio tangente, tale intersezione si riduce al solo vettore nullo, implicando l'annullamento completo della distribuzione di nullità.

3.5. Biquozienti e deformazioni di Cheeger

In questa sezione proponiamo uno studio strutturale delle famiglie di biquozienti di gruppi di Lie compatti che ammettono metriche a curvatura sezionale nonnegativa ottenute tramite deformazioni di Cheeger. L'obiettivo non è quello di fornire una classificazione – che, come osservato in precedenza, al momento risulta fuori portata – bensì di presentare le proprietà fondamentali e lo schema operativo ricorrente utile per contestualizzare e costruire tali metriche.

Come abbiamo già discusso nei capitoli precedenti, se G è un gruppo di Lie compatto e $H \subseteq G \times G$ è un sottogruppo chiuso che agisce liberamente su G , lo spazio quoziente $G//H$ è una varietà differenziabile. Inoltre, se G è equipaggiato con una metrica bi-invariante Q , la sommersione riemanniana $\pi: G \rightarrow G//H$ induce sul biquoziente una metrica naturale che, in virtù della formula di O'Neill (2.1), possiede curvatura sezionale nonnegativa.

Questa metrica indotta presenta sempre curvatura nonnegativa, ma in generale non è positiva. I piani a curvatura nulla originati dalla proiezione sono spesso legati alla presenza di fattori abeliani o di specifiche decomposizioni riduttive dell'algebra di Lie di G . Il punto chiave dell'approccio di Cheeger per migliorare tale metrica consiste nello sfruttare le eventuali simmetrie residue del quoziente.

Per analizzare agevolmente queste simmetrie, è utile introdurre una notazione alternativa per i biquozienti. Nel caso molto frequente in cui il sottogruppo agente sia un prodotto diretto $H = H_1 \times H_2$, con $H_1, H_2 \subseteq G$ sottogruppi chiusi, è naturale identificare il biquoziente $G/(H_1 \times H_2)$ con il *doppio quoziente* $H_1 \backslash G / H_2$.

OSSERVAZIONE 3.22. Con il termine doppio quoziente $H_1 \backslash G / H_2$ si intende lo spazio ottenuto quozientando il gruppo di Lie G rispetto all'azione a sinistra di H_1 e all'azione a destra di H_2 . Tali azioni sono definite rispettivamente da

$$h_1 \cdot g = h_1 g, \quad g \cdot h_2 = g h_2^{-1}.$$

Nel seguito si assumerà implicitamente che l'azione combinata di $H_1 \times H_2$ su G sia libera, in modo che il doppio quoziente risulti essere una varietà differenziabile.

Supponiamo ora che esista un ulteriore sottogruppo compatto $K \subseteq G$ che agisce isometricamente sul doppio quoziente $H_1 \backslash G / H_2$. Dal punto di vista operativo, affinché l'azione di K discenda naturalmente al biquoziente, è tipicamente richiesto che K commuti con H_1 e H_2 , oppure che sia contenuto nel normalizzatore di uno dei due sottogruppi.

Se tale condizione è soddisfatta, è possibile applicare una deformazione di Cheeger rispetto all'azione di K , ottenendo una nuova famiglia di metriche g_t dipendente dal parametro $t > 0$. I casi studiati in letteratura, in particolare da Grove e Ziller [25], suggeriscono uno schema ricorrente:

- (1) si parte da un gruppo di Lie compatto G dotato di una metrica bi-invariante Q ;
- (2) si considerano due sottogruppi $H_1, H_2 \subseteq G$ tali che l'azione prodotto sia libera, garantendo che $H_1 \backslash G / H_2$ sia una varietà differenziabile;
- (3) si dota il doppio quoziente della metrica indotta dalla sommersione riemanniana, che assicura una curvatura di base nonnegativa;
- (4) si individua un sottogruppo K (spesso un fattore centrale o un sottogruppo del normalizzatore) che agisce isometricamente sul biquoziente;
- (5) si applica una deformazione di Cheeger rispetto all'azione di K .

Questo procedimento produce una famiglia di metriche a curvatura sezionale nonnegativa che migliora sistematicamente le proprietà geometriche della metrica iniziale. Come dimostrato nel Teorema 3.9, la deformazione riduce rigorosamente la distribuzione di nullità, pur non riuscendo sempre a eliminare completamente tutti i piani piatti.

Ci teniamo a sottolineare che questo approccio non conduce, almeno allo stato attuale, a una classificazione completa dei biquozienti a curvatura nonnegativa. In particolare, la richiesta della presenza di simmetrie “residue” sufficientemente ricche da poter curvare tutti i piani piatti è una condizione severa, che esclude a priori numerosi esempi. Tuttavia, il metodo descritto fornisce un metodo costruttivo estremamente potente ed elegante per generare nuove famiglie di metriche e per studiare la struttura geometrica di quelle già note.

3.6. Osservazioni conclusive

Il punto di vista adottato in questo capitolo mostra come le deformazioni di Cheeger non siano soltanto un artificio tecnico per produrre singoli esempi isolati, ma costituiscano una strategia strutturale profonda per lo studio delle varietà a curvatura sezionale nonnegativa. In questo contesto, l'analisi delle famiglie di biquozienti fornisce un terreno geometrico naturale su cui testare l'efficacia del metodo.

L'attenzione è stata posta specificamente sul ruolo delle azioni isometriche residue: la possibilità di sfruttarle in modo sistematico permette di migliorare le proprietà di curvatura della metrica iniziale, indipendentemente dalla forma del gruppo o del sottogruppo considerati. L'obiettivo non è riprodurre gli esempi noti in letteratura, ma piuttosto metterne in evidenza l'impalcatura costruttiva comune, chiarendo in quali situazioni geometriche le deformazioni risultino effettivamente determinanti.

Un'incarnazione perfetta di questo paradigma, ampiamente discussa nel lavoro di Ziller [40], è rappresentata dagli *spazi di Eschenburg*. Si tratta di biquozienti della forma

$$E_{p,q,r} = \mathrm{SU}(3)/\mathbb{T}^2,$$

dove $\mathbb{T}^2$ è un toro bidimensionale che agisce sul gruppo di Lie semplice $\mathrm{SU}(3)$ tramite un'azione a sinistra e a destra codificata da terne di interi (p, q, r) , soggette a opportune condizioni di coprimialità. Dal punto di vista geometrico, questi spazi sono generati dall'azione isometrica di un toro bidimensionale $\mathbb{T}^2$ sul gruppo di Lie compatto e semplice $\mathrm{SU}(3)$. Poiché l'azione avviene simultaneamente a sinistra e a destra, le orbite toriche si intrecciano in modo complesso all'interno della varietà di gruppo. Il passaggio al quoziente produce così varietà compatte dotate di una topologia non banale, pur originandosi da uno spazio totale geometricamente rigido.

Questi spazi, introdotti da J.-H. Eschenburg, costituiscono l'esempio canonico in cui la presenza di simmetrie residue sufficientemente ampie permette un'applicazione ottimale delle deformazioni. Partendo da una metrica bi-invariante su $\mathrm{SU}(3)$ e applicando la tecnica di Cheeger, è possibile dotare le varietà $E_{p,q,r}$ di metriche a curvatura sezionale nonnegativa e per specifiche scelte dei parametri, talvolta anche di curvatura positiva.

In conclusione, sebbene questo approccio non fornisca una classificazione completa – traguardo al momento inaccessibile – offre un solido quadro concettuale e mostra chiaramente come la sinergia tra la topologia non banale dei biquozienti e la flessibilità delle deformazioni di Cheeger rappresenti una delle fonti più ricche per la geometria in curvatura nonnegativa.

CAPITOLO 4

Esempi

In questo capitolo studiamo alcune condizioni sotto le quali i biquozienti di gruppi di Lie compatti ammettono metriche riemanniane con curvatura sezionale positiva. I risultati fondamentali in questa direzione sono dovuti originariamente a Cheeger, Gromoll ed Eschenburg e sono stati in seguito sistematizzati da Ziller in [40].

Sfruttando la teoria delle deformazioni di Cheeger sviluppata nel capitolo precedente, mostreremo come sia possibile alterare metriche inizialmente dotate solo di curvatura non-negativa per ottenere, sotto opportune ipotesi strutturali, metriche con curvatura positiva.

4.1. Condizioni di positività per biquozienti

Fissiamo un gruppo di Lie compatto G dotato di una metrica bi-invariante Q e siano H_1, H_2 due suoi sottogruppi chiusi. Ricordiamo che il biquoziente $H_1 \backslash G / H_2$ è definito come lo spazio delle orbite rispetto all'azione isometrica

$$(h_1, h_2) \cdot g = h_1 g h_2^{-1}.$$

Assumendo che tale azione sia libera, il quoziente risulta essere una varietà differenziabile. L'obiettivo è comprendere quando tale varietà possa ereditare, o acquisire tramite deformazione, una metrica riemanniana con curvatura sezionale positiva.

Prima di ricercare condizioni di positività, è necessario comprendere in quali casi si formino piani con curvatura nulla. La presenza di tali piani, infatti, costituisce l'ostruzione primaria alla positività della curvatura sezionale.

LEMMA 4.1. *Sia G un gruppo di Lie compatto con una metrica bi-invariante e sia $M = H_1 \backslash G / H_2$ un biquoziente tale per cui l'azione di $H_1 \times H_2$ su G sia libera. Sia $\pi: G \rightarrow M$ la sommersione riemanniana naturale. Se esistono due vettori linearmente indipendenti $X, Y \in \mathfrak{g}$, orizzontali nel punto $g \in G$, tali che*

$$[X, Y] = 0,$$

allora il piano generato da $\pi_ X$ e $\pi_* Y$ ha curvatura sezionale nulla in M .*

DIMOSTRAZIONE. La proiezione $\pi: (G, Q) \rightarrow (M, g_M)$ è una sommersione riemanniana. Per la formula di O'Neill (2.1), valutata per i vettori orizzontali X e Y , si ha

$$Sec_M(\pi_* X, \pi_* Y) = Sec_G(X, Y) + \frac{3}{4} \|[X, Y]^\mathcal{V}\|^2,$$

dove l'apice $\mathcal{V}$ denota la proiezione sullo spazio verticale. Poichè la metrica su G è bi-invariante, vale la formula esplicita

$$Sec_G(X, Y) = \frac{1}{4} \|[X, Y]\|^2$$

(avendo assunto, senza perdita di generalità, che X e Y siano ortonormali). Se i due campi commutano, ossia $[X, Y] = 0$, segue banalmente che $Sec_G(X, Y) = 0$ e che la componente verticale $[X, Y]^\mathcal{V}$ è anch'essa nulla. Pertanto, $Sec_M(\pi_* X, \pi_* Y) = 0$, dimostrando che il piano generato da $\pi_* X$ e $\pi_* Y$ è piatto. $\square$

Questo lemma mostra che la presenza di sottoalgebre abeliane di dimensione almeno due, interamente contenute nella distribuzione orizzontale, produce inevitabilmente piani a curvatura nulla nel quoziente. Lo studio della curvatura positiva si riduce dunque, in prima istanza, alla ricerca di configurazioni in cui tali coppie di vettori commutanti non possano esistere.

È in questo frangente che le deformazioni di Cheeger rivelano la loro utilità cruciale. Come stabilito dal Teorema 3.9, deformare la metrica rispetto a un'ulteriore simmetria fa accrescere la curvatura nei piani non puramente orizzontali. Il seguente risultato, dovuto a Eschenburg, formalizza questo principio fornendo un criterio algebrico per la positività.

TEOREMA 4.2 (Criterio di Eschenburg). *Sia G un gruppo di Lie compatto e semplice e sia $M = H_1 \backslash G / H_2$ un suo biquoziente. Se per ogni coppia di vettori orizzontali linearmente indipendenti $X, Y \in \mathfrak{g}$ si ha $[X, Y] \neq 0$, allora esiste una deformazione di Cheeger della metrica naturale tale per cui M ammette una metrica con curvatura sezionale positiva.*

DIMOSTRAZIONE. L'idea, sviluppata originariamente da Eschenburg e sistematizzata in [40], si basa sull'eliminazione mirata dei piani piatti. Rispetto alla metrica bi-invariante iniziale su G , i soli piani a curvatura nulla sono generati da vettori che commutano. Nel quoziente M , per la formula di O'Neill (2.1), la curvatura può annullarsi se e solo se $[X, Y] = 0$. Per ipotesi del teorema, non esistono coppie di vettori orizzontali che commutano; di conseguenza, gli unici piani piatti in M devono necessariamente avere una componente orbitale (verticale) non banale rispetto a un'opportuna azione di simmetria. Applicando una deformazione di Cheeger rispetto all'azione isometrica di un sottogruppo compatto appropriato $K \subseteq G$, il Teorema 3.9 garantisce che la curvatura su tali piani misti aumenti in modo stretto, mentre per i piani puramente orizzontali essa era già positiva per l'ipotesi $[X, Y] \neq 0$. Selezionando opportunamente K e il parametro di deformazione t , la curvatura di M diviene positiva ovunque. $\square$

Una delle conseguenze più celebri di questo criterio è la costruzione degli *spazi di Eschenburg*, che rappresentano storicamente i primi esempi di varietà compatte, semplicemente connesse e con curvatura positiva a non ammettere una struttura di spazio omogeneo.

DEFINIZIONE 4.3 (Spazio di Eschenburg). Sia $G = \mathrm{SU}(3)$. Dati due vettori a componenti intere $p = (p_1, p_2, p_3)$ e $q = (q_1, q_2, q_3)$ tali che

$$p_1 + p_2 + p_3 = q_1 + q_2 + q_3,$$

si definisce un'azione isometrica del cerchio $\mathbb{S}^1$ su $\mathrm{SU}(3)$ ponendo, per ogni $z \in \mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C}$,

$$z \cdot g = \mathrm{diag}(z^{p_1}, z^{p_2}, z^{p_3}) g \mathrm{diag}(z^{-q_1}, z^{-q_2}, z^{-q_3}).$$

Se i parametri interi garantiscono che tale azione sia libera, la varietà quoziente

$$E_{p,q} = \mathrm{SU}(3) / \mathbb{S}^1$$

prende il nome di *spazio di Eschenburg*.

TEOREMA 4.4 (Eschenburg [15]). *Se i parametri definienti soddisfano la disuguaglianza*

$$p_i \notin [\min(q_1, q_2, q_3), \max(q_1, q_2, q_3)] \quad \text{per ogni } i = 1, 2, 3,$$

(o viceversa scambiando il ruolo di p e q), allora lo spazio di Eschenburg $E_{p,q}$ ammette una metrica con curvatura sezionale positiva.

Prima di procedere alla dimostrazione di questo teorema, è opportuno richiamare alcuni strumenti algebrici (un possibile riferimento per quanto segue è [28]). L'analisi dettagliata di tali strutture per il gruppo $\mathrm{SU}(3)$ è originariamente dovuta a Eschenburg [15] ed è ripresa sistematicamente da Ziller in [40].

DEFINIZIONE 4.5. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie reale (o complessa) di dimensione finita. Una *sottoalgebra di Cartan* è una sottoalgebra $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ nilpotente (nel caso generale) o abeliana massimale (nel caso di algebre semisemplici compatte) che coincide con il proprio normalizzatore, ovvero tale per cui

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}.$$

Poiché nel nostro contesto operiamo con l'algebra di Lie semisemplice compatta $\mathfrak{su}(3)$, una sottoalgebra di Cartan corrisponderà semplicemente a una sua sottoalgebra abeliana massimale.

ESEMPIO 4.6. Nell'algebra di Lie $\mathfrak{su}(3) = \text{Lie}(\text{SU}(3))$, una scelta canonica per la sottoalgebra di Cartan $\mathfrak{t}$ è l'insieme delle matrici diagonali anti-hermitiane a traccia nulla:

$$\mathfrak{t} = \left\{ \begin{pmatrix} i\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & i\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & i\theta_3 \end{pmatrix} \mid \theta_1, \theta_2, \theta_3 \in \mathbb{R}, \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 0 \right\}.$$

Tale sottoalgebra ha dimensione $\dim \mathfrak{t} = 2$, che coincide per definizione con il rango del gruppo $\text{SU}(3)$. Ricordiamo, inoltre, che l'algebra $\mathfrak{su}(3)$ si identifica con lo spazio tangente $T_e \text{SU}(3)$ e che l'usuale mappa esponenziale $\exp: \mathfrak{su}(3) \rightarrow \text{SU}(3)$ mappa elementi dell'algebra in elementi del gruppo.

Al fine di studiare la struttura di $\mathfrak{su}(3)$, risulta utile passare attraverso la sua complessificazione.

DEFINIZIONE 4.7 (Algebra di Lie $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$). Si definisce $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ l'algebra di Lie complessa delle matrici 3×3 a traccia nulla:

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \{X \in M_3(\mathbb{C}) \mid \text{tr}(X) = 0\},$$

equipaggiata con l'usuale operazione di commutatore $[X, Y] = XY - YX$. Essa è l'algebra associata al gruppo speciale lineare complesso $\text{SL}(3, \mathbb{C})$.

OSSERVAZIONE 4.8. L'algebra complessa $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ ha dimensione $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = 8$. È un fatto strutturale noto che l'algebra $\mathfrak{su}(3)$ ne costituisca la *forma reale compatta*, un legame essenziale per trasportare la teoria degli spazi di radici dal caso complesso a quello reale.

Il seguente risultato fornisce la decomposizione strutturale su cui si basa l'analisi dei piani a curvatura nulla nel Teorema di Eschenburg.

PROPOSIZIONE 4.9. Fissata una sottoalgebra di Cartan $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{su}(3)$, esiste una decomposizione in somma diretta ortogonale

$$\mathfrak{su}(3) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha},$$

dove i $\mathfrak{g}_{\alpha}$ sono gli spazi delle radici reali, ciascuno dei quali ha dimensione reale pari a 2.

DIMOSTRAZIONE. Si consideri la complessificazione $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ e la rispettiva sottoalgebra di Cartan complessa $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ (costituita dalle matrici diagonali a traccia nulla). Scegliendo come base le matrici elementari E_{ij} (con $i \neq j$), ogni elemento $X \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ si decompone unicamente.

Per ogni matrice diagonale $H = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$, l'azione dell'operatore aggiunto ad_H sulle matrici elementari è data da

$$[H, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij}.$$

Le forme lineari $\alpha_{ij}(H) = \lambda_i - \lambda_j$ definiscono le radici dell'algebra, fornendo la decomposizione complessa

$$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{h}^{\mathbb{C}} \oplus \bigoplus_{i \neq j} \mathbb{C}E_{ij}.$$

Restringendo l'analisi alla forma reale compatta $\mathfrak{su}(3)$, ogni coppia di radici complesse opposte $\pm\alpha$ genera un sottospazio vettoriale reale $\mathfrak{g}_\alpha$ bidimensionale, invariante per l'azione simultanea di $\mathfrak{t}$. Ciò produce esattamente la decomposizione reale cercata. $\square$

TRACCIA DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.4. La dimostrazione si basa sull'applicazione del criterio di Eschenburg, Teorema 4.2. Si dota inizialmente $SU(3)$ della metrica bi-invariante indotta dalla forma di Killing, rispetto alla quale la curvatura sezionale è nulla solo su piani generati da campi commutanti.

Il generatore infinitesimale dell'azione di $\mathbb{S}^1$ è l'elemento dell'algebra di Lie $\mathfrak{su}(3)$ dato da

$$Z = \text{diag}(ip_1, ip_2, ip_3) - \text{diag}(iq_1, iq_2, iq_3).$$

In un generico punto $g \in SU(3)$, lo spazio verticale $\mathcal{V}_g$ è generato dal campo fondamentale Z_g^* e la distribuzione orizzontale $\mathcal{H}_g$ è il suo complemento ortogonale, ossia l'insieme dei vettori $X \in \mathfrak{su}(3)$ tali che $\langle X, Z \rangle = 0$.

Per dimostrare l'assenza di vettori orizzontali commutanti, Eschenburg sfrutta la teoria di struttura dell'algebra $\mathfrak{su}(3)$. Fissata una sottoalgebra di Cartan $\mathfrak{t}$ (come l'insieme delle matrici diagonali anti-hermitiane a traccia nulla), si utilizza la nota decomposizione in spazi di radici

$$\mathfrak{su}(3) = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha}.$$

Analizzando le possibili combinazioni di vettori all'interno di questa decomposizione, si dimostra che la condizione algebrica sugli interi p_i e q_j implica che nessuna coppia di vettori commutanti (i quali devono necessariamente risiedere in un'unica sottoalgebra abeliana bidimensionale coniugata a $\mathfrak{t}$) possa appartenere interamente alla distribuzione orizzontale $\mathcal{H}$.

Pertanto, non esistono $X, Y \in \mathcal{H}$ linearmente indipendenti con $[X, Y] = 0$. A questo punto, per eliminare i rimanenti piani a curvatura nulla (che ora possiedono obbligatoriamente una componente verticale), si applica una deformazione di Cheeger. Nello specifico, si sfrutta l'azione del sottogruppo $U(2) \subseteq SU(3)$, che commuta con l'azione di $\mathbb{S}^1$ in modo compatibile. Grazie a questa deformazione, i piani non degeneri acquisiscono curvatura positiva su tutto il biquoziente. $\square$

Gli spazi di Eschenburg dimostrano che i biquozienti costituiscono una classe geometrica estremamente ricca e flessibile. Negli anni successivi, tecniche analoghe hanno permesso di identificare ulteriori famiglie di biquozienti di $SU(n)$ e di altri gruppi classici (come gli spazi di Bazaikin – si veda [3]) dotate di curvatura positiva.

4.2. Le varietà di Aloff–Wallach

Come anticipato nella sezione precedente per gli spazi di Eschenburg, la costruzione di metriche con specifiche proprietà di curvatura sui quozienti di gruppi di Lie compatibili richiede una scelta canonica per la metrica bi-invariante di partenza. Tale scelta ricade naturalmente sulla forma di Killing.

Ricordiamo brevemente che, data un'algebra di Lie reale di dimensione finita $\mathfrak{g}$, la *forma di Killing* è la forma bilineare simmetrica $B: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$B(X, Y) = \text{tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y),$$

dove $\text{ad}_X(Y) = [X, Y]$ è la rappresentazione aggiunta. Per le note proprietà della traccia, la forma di Killing risulta essere ad-invariante, ovvero soddisfa l'identità $B([X, Y], Z) + B(Y, [X, Z]) = 0$.

Per il criterio di Cartan, la forma di Killing è non degenera se e solo se l'algebra $\mathfrak{g}$ è semisemplice. Inoltre, è un fatto standard della teoria dei gruppi di Lie (si veda, ad esempio, [28])

che se $\mathfrak{g}$ è l'algebra associata a un gruppo compatto e semisemplice, la sua forma di Killing è definita negativa. Di conseguenza, il tensore

$$\langle X, Y \rangle = -B(X, Y)$$

definisce un prodotto scalare definito positivo e $\text{Ad}(G)$ -invariante su $\mathfrak{g}$.

Nel caso specifico del gruppo speciale unitario $G = \text{SU}(3)$ e della sua algebra $\mathfrak{su}(3)$, tale prodotto scalare induce in modo naturale la metrica riemanniana bi-invariante standard. Questa metrica ci permette di definire, per un dato sottogruppo chiuso H , la fondamentale decomposizione ortogonale

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m},$$

dove $\mathfrak{m} = \mathfrak{h}^\perp$. Questa struttura identifica canonicamente lo spazio tangente al quoziente G/H nel punto base con il sottospazio orizzontale $\mathfrak{m}$, costituendo l'impalcatura preliminare indispensabile per lo studio geometrico delle varietà di Aloff-Wallach.

Nel contesto dello studio delle varietà riemanniane a curvatura sezionale positiva, le varietà di Aloff-Wallach, introdotte in [2], rappresentano un esempio classico e fondamentale. Esse costituiscono una famiglia infinita di varietà omogenee compatte di dimensione sette che ammettono metriche riemanniane con curvatura sezionale positiva. Storicamente, hanno fornito uno dei primissimi esempi di varietà a curvatura positiva non omeomorfe a spazi simmetrici.

DEFINIZIONE 4.10. Siano $p, q \in \mathbb{Z}$. Si definisce il sottogruppo circolare $S_{p,q}^1 \subseteq \text{SU}(3)$ come l'insieme delle matrici

$$S_{p,q}^1 = \{ \text{diag}(e^{ip\theta}, e^{iq\theta}, e^{-i(p+q)\theta}) \mid \theta \in \mathbb{R} \}.$$

L'applicazione $\theta \mapsto \text{diag}(e^{ip\theta}, e^{iq\theta}, e^{-i(p+q)\theta})$ è un omomorfismo continuo da $\mathbb{R}$ in $\text{SU}(3)$ con nucleo discreto; la sua immagine $S_{p,q}^1$ è pertanto un sottogruppo di Lie compatto (isomorfo a $\mathbb{S}^1$) e chiuso all'interno di $\text{SU}(3)$.

DEFINIZIONE 4.11 (Varietà di Aloff-Wallach). Siano $p, q \in \mathbb{Z}$ due interi coprimi. Si definisce *varietà di Aloff-Wallach* lo spazio omogeneo quoziente

$$W_{p,q} = \text{SU}(3)/S_{p,q}^1.$$

La condizione geometrica cruciale è che p e q siano coprimi: se così non fosse, esisterebbero elementi non nulli di θ per cui l'azione risulterebbe banale. Essendo coprimi, l'azione di moltiplicazione a destra di $S_{p,q}^1$ su $\text{SU}(3)$ è libera. Poichè stiamo quozientando un gruppo di Lie compatto di dimensione 8 per un'azione libera di un sottogruppo chiuso di dimensione 1, il quoziente $W_{p,q}$ eredita naturalmente la struttura di varietà differenziabile compatta e omogenea di dimensione $\dim(W_{p,q}) = 8 - 1 = 7$.

TEOREMA 4.12 (Aloff-Wallach [2]). *Per ogni coppia di interi coprimi (p, q) , la varietà $W_{p,q}$ ammette una metrica riemanniana con curvatura sezionale positiva.*

Diamo una traccia della dimostrazione. Sia $\mathfrak{h}$ l'algebra di Lie unidimensionale del sottogruppo $H = S_{p,q}^1$. Come anticipato all'inizio della sezione, la metrica indotta dalla forma di Killing fornisce la decomposizione $\text{Ad}(H)$ -invariante $\mathfrak{su}(3) = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$. Considerando la rappresentazione isotropa $\text{Ad}|_H: H \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{m})$ e sfruttando il fatto che H è abeliano, il sottospazio $\mathfrak{m}$ si decompone a sua volta in tre sottomoduli bidimensionali irriducibili e mutuamente ortogonali

$$\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_1 \oplus \mathfrak{m}_2 \oplus \mathfrak{m}_3.$$

Geometricamente, questi sottospazi corrispondono alle direzioni associate alle radici del sistema di radici di $\mathfrak{su}(3)$ rispetto al toro massimale che contiene H .

È un teorema fondamentale della teoria degli spazi omogenei (si veda Besse [7]) che ogni metrica riemanniana $\text{SU}(3)$ -invariante su $W_{p,q}$ è in corrispondenza biunivoca con un prodotto scalare su $\mathfrak{m}$ che sia $\text{Ad}(H)$ -invariante. Poichè i sottomoduli $\mathfrak{m}_i$ sono in generale

inequivalenti per l'azione di H , per il *lemma di Schur* ogni prodotto scalare invariante deve preservare tale decomposizione ortogonale. Possiamo dunque costruire una famiglia a tre parametri di metriche omogenee scalando la metrica bi-invariante di partenza $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sui singoli blocchi:

$$\langle X, Y \rangle_{\mathbf{a}} = a_1 \langle X_1, Y_1 \rangle + a_2 \langle X_2, Y_2 \rangle + a_3 \langle X_3, Y_3 \rangle,$$

dove X_i, Y_i sono le proiezioni dei vettori lungo $\mathfrak{m}_i$ e i parametri $a_1, a_2, a_3 > 0$ rappresentano i gradi di libertà della deformazione.

Il calcolo della curvatura sezionale per una generica metrica omogenea è un problema algebrico standard ma computazionalmente complesso. La famiglia a tre parametri richiede l'utilizzo della formula generale per gli spazi omogenei, la quale coinvolge non solo le proiezioni orizzontali e verticali del commutatore $[X, Y]$, ma anche i termini legati all'operatore bilineare $U(X, Y)$ che misura lo scostamento della metrica dall'essere bi-invariante.

Attraverso un'analisi dettagliata dei coefficienti strutturali dell'algebra $\mathfrak{su}(3)$ ristretti ai blocchi $\mathfrak{m}_i$, Aloff e Wallach dimostrano che, allontanandosi opportunamente dalla metrica standard (ad esempio scegliendo parametri del tipo $a_1 = a_2 = 1$ e $a_3 = t$ per un $t \in (0, 1)$ sufficientemente piccolo, realizzando di fatto una deformazione di tipo Cheeger lungo un sottogruppo intermedio), il tensore di curvatura diventa strettamente definito positivo per ogni piano bidimensionale non degenere. Ciò gli permette di ottenere l'esistenza di una metrica a curvatura positiva per ogni varietà della famiglia.

4.3. Conclusioni

In questo capitolo conclusivo abbiamo mostrato come le deformazioni di Cheeger portino alla costruzione esplicita di metriche a curvatura sezionale positiva.

Sfruttando la struttura algebrica fornita dalla forma di Killing – essenziale per definire un prodotto scalare $\text{Ad}(G)$ -invariante definito positivo sui gruppi di Lie compatti e semi-semplci – abbiamo analizzato il comportamento geometrico dei quozienti. La conseguente decomposizione ortogonale dell'algebra di Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ si è rivelata l'impalcatura fondamentale per tradurre lo studio differenziale della curvatura in un problema algebrico sistematico.

Questo approccio ci ha permesso di esplorare due delle classi di varietà più celebri e geometricamente ricche: gli spazi di Eschenburg e le varietà omogenee di Aloff–Wallach $W_{p,q} = \text{SU}(3)/S_{p,q}^1$. Entrambe costituiscono famiglie infinite di varietà compatte che ammettono metriche a curvatura positiva pur non possedendo la rigidità strutturale degli spazi simmetrici, fornendo così i primi esempi storici di questo tipo.

Il punto comune a tali costruzioni risiede nella manipolazione geometricamente controllata delle metriche invarianti. Che si tratti di applicare una deformazione di Cheeger per conferire curvatura positiva ai piani piatti residui nei biquozienti (come nel caso degli spazi di Eschenburg), o di calibrare i parametri di una metrica omogenea lungo i sottomoduli irriducibili dello spazio tangente (come nel caso delle varietà di Aloff–Wallach), la teoria delle azioni dei gruppi di Lie si è dimostrata lo strumento cardine per il successo tale metodo.

Ringraziamenti

*“Vorrei ringraziare tutti colo che mi sono stati vicino
dall’inizio alla fine di questo percorso,
che mi hanno emotivamente sostenuto e incoraggiato”*

Bibliografia

1. M. Abate and F. Tovena, *Geometria differenziale*, Springer, 2011.
2. S. Aloff and N. R. Wallach, *An infinite family of distinct 7-manifolds admitting positively curved Riemannian structures*, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 93–97.
3. Y. V. Bazaikin, *On a family of 13-dimensional closed Riemannian manifolds of positive curvature*, Siberian Math. J. **37** (1996), 1219–1237.
4. L. Bérard-Bergery, *Les variétés riemanniennes homogènes simplement connexes de dimension impaire à courbure strictement positive*, J. Math. Pures Appl. (9) **55** (1976), no. 1, 47–68.
5. M. Berger, *Les variétés riemanniennes à courbure positive démontrées par le théorème de pincement*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **28** (1960), 165–168.
6. ———, *Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (3) **15** (1961), 179–246.
7. A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer, Berlin, 2008.
8. S. Brendle and R. Schoen, *Manifolds with $1/4$ -pinched curvature are space forms*, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), 287–307.
9. J. Cheeger, *Finiteness theorems for Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **92** (1970), 61–74.
10. ———, *Some examples of manifolds of nonnegative curvature*, J. Differential Geom. **8** (1973), 623–628.
11. J. Cheeger and D. G. Ebin, *Comparison theorems in Riemannian geometry*, Amer. Math. Soc., 2008.
12. J. Cheeger and D. Gromoll, *The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature*, J. Differential Geom. **6** (1971/72), 119–128.
13. ———, *On the structure of complete manifolds of nonnegative curvature*, Ann. of Math. (2) **96** (1972), 413–443.
14. S. K. Donaldson and P. B. Kronheimer, *The geometry of four-manifolds*, Oxford University Press, 1997.
15. J.-H. Eschenburg, *New examples of manifolds with strictly positive curvature*, Invent. Math. **66** (1982), 469–480.
16. ———, *Inhomogeneous spaces of positive curvature*, Differential Geom. Appl. **2** (1992), 123–146.
17. J.-H. Eschenburg and E. Heintze, *An elementary proof of the Cheeger–Gromoll splitting theorem*, Ann. Global Anal. Geom. **2** (1984), 141–151.
18. F. Fang and X. Rong, *The least number of generators of fundamental groups and curvature*, Duke Math. J. **98** (1999), 1–13.
19. Y. Félix, S. Halperin, and J.-C. Thomas, *Rational homotopy theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 205, Springer, 2001.
20. S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, third ed., Universitext, Springer, 2004.
21. D. Gromoll and W. Meyer, *On complete open manifolds of positive curvature*, Ann. of Math. (2) **90** (1969), 75–90.
22. ———, *An exotic sphere with nonnegative sectional curvature*, Ann. of Math. (2) **100** (1974), 401–406.
23. M. Gromov, *Curvature, diameter and Betti numbers*, Comment. Math. Helv. **56** (1981), 179–195.
24. K. Grove, *Geometry of, and via, symmetries*, Conformal, Riemannian and Lagrangian geometry (Knoxville, TN, 2000), Univ. Lecture Ser., vol. 27, Amer. Math. Soc., 2002, pp. 31–53.
25. K. Grove and W. Ziller, *Curvature and symmetry of Milnor spheres*, Ann. of Math. (2) **152** (2000), 331–367.
26. ———, *Lifting group actions and nonnegative curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 2865–2890.
27. R. S. Hamilton, *Three-manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. **17** (1982), 255–306.
28. S. Helgason, *Differential geometry, lie groups, and symmetric spaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 34, Amer. Math. Soc., 2001.
29. W. Klingenberg, *Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **9** (1961), 43–46.
30. J. M. Lee, *Riemannian manifolds*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 176, Springer, 1997.
31. S. López de Medrano, *Involutions on manifolds*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 59, Springer, 1971.
32. S. B. Myers, *Riemannian manifolds in the large*, Duke Math. J. **1** (1935), 39–49.
33. ———, *Riemannian manifolds with positive mean curvature*, Duke Math. J. **8** (1941), 401–404.
34. A. Petrunin and W. Tuschmann, *Diffeomorphism finiteness, positive pinching, and available volume*, Ann. of Math. (2) **150** (1999), 597–614.
35. A. Rigas, *Some bundles of non-negative curvature*, Math. Ann. **232** (1978), 187–193.
36. J. L. Synge, *On the connectivity of spaces of positive curvature*, Quart. J. Math. Oxford Ser. **7** (1936), 316–320.

- 37. B. Totaro, *Cheeger manifolds and the classification of biquotients*, J. Differential Geom. **61** (2002), 397–451.
- 38. N. R. Wallach, *Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature*, Ann. of Math. (2) **96** (1972), 277–295.
- 39. D. Yang, *On complete metrics of nonnegative curvature on 2-plane bundles*, Pacific J. Math. **171** (1995), 569–583.
- 40. W. Ziller, *Examples of Riemannian manifolds with non-negative sectional curvature*, Surveys in Differential Geometry, vol. XI, International Press, 2007, pp. 63–102.