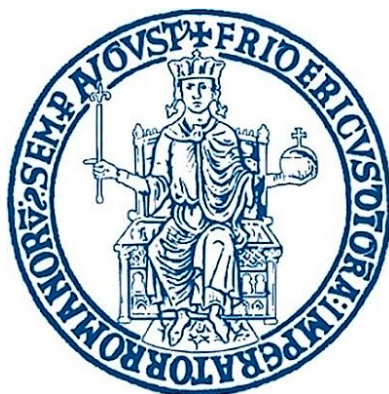


UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II
SCUOLA POLITECNICA DELLE SCIENZE DI BASE



DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E APPLICAZIONI
"RENATO CACCIOPOLI"
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA

Su Alcuni Risultati della Teoria Descrittiva degli Insiemi

TESI DI LAUREA

RELATORE
PROF. CARLO MANTEGAZZA

CANDIDATO
FRANCESCO CARPENTIERI
Matr. N87002259

ANNO ACCADEMICO 2025/2026

Indice

Introduzione	1
Capitolo 1. Richiami di teoria degli insiemi	4
1.1. Cardinalità e assioma della scelta	4
1.2. Insiemi ben ordinati e ordinali	11
1.3. L'operazione di Suslin	18
Capitolo 2. Richiami di topologia	24
2.1. Spazi polacchi	24
2.2. Il teorema di Cantor–Bendixson	25
2.3. Teoremi di trasferimento	28
2.4. Categoria	32
Capitolo 3. Insiemi di Borel	35
3.1. Insiemi e funzioni misurabili	35
3.2. Topologie di Borel	38
3.3. Misure	41
3.4. La gerarchia di Borel	42
Capitolo 4. Insiemi analitici	45
4.1. Insiemi analitici, coanalitici e proiettivi	45
4.2. L'operazione di Suslin e gli insiemi analitici	49
4.3. I teoremi di separazione e il teorema di Suslin	51
4.4. Funzioni boreliane iniettive e il teorema di Lusin	53
4.5. Proprietà di regolarità	56
Capitolo 5. Insiemi della retta reale e conclusioni	62
Bibliografia	67

Introduzione

La *teoria descrittiva degli insiemi* studia classi di sottoinsiemi definibili in spazi polacchi e si colloca all'incrocio tra logica matematica, topologia e analisi reale. Nella sua forma classica, si propone di classificare tali insiemi in base alla complessità delle operazioni necessarie per costruirli e di stabilire quali proprietà di regolarità essi soddisfino: misurabilità secondo Lebesgue, proprietà di Baire e proprietà dell'insieme perfetto.

Le origini della teoria possono essere fatte risalire agli inizi del XX secolo, in particolare ai lavori di Émile Borel, René-Louis Baire e Henri Lebesgue. Tali lavori si inseriscono in una discussione più ampia sulla nozione astratta di funzione introdotta da Peter Gustav Lejeune Dirichlet [17] e Bernhard Riemann [19]. In questa concezione, una funzione era una corrispondenza arbitraria tra oggetti, assegnata senza una procedura esplicita di costruzione. I matematici francesi guardavano con cautela a una definizione così generale, poiché le funzioni effettivamente studiate in analisi erano normalmente descritte da formule, serie, limiti o procedimenti costruttivi. Divenne quindi naturale cercare di distinguere le funzioni definibili in modo accettabile dalle funzioni arbitrarie.

Nel 1898, Émile Borel introdusse la classe degli insiemi oggi detti boreliani [4]. Poco dopo, nella sua tesi del 1899, René-Louis Baire studiò le funzioni ottenibili a partire dalle funzioni continue mediante iterazioni del limite puntuale [2]. Queste funzioni, oggi dette *funzioni di Baire*, costituivano una delle prime formalizzazioni sistematiche dell'idea di funzione definibile.

Un momento decisivo fu il lavoro pubblicato da Henri Lebesgue nel 1905 [16]. In esso Lebesgue introdusse e studiò le funzioni rappresentabili analiticamente, definendole come la più piccola classe di funzioni contenente le funzioni costanti e le proiezioni, chiusa rispetto alle operazioni algebriche e al passaggio al limite puntuale. Lebesgue dimostrò che tali funzioni coincidono con le funzioni di Baire e con le funzioni boreliane.

In quello stesso lavoro compariva però un errore destinato a rivelarsi fondamentale per la nascita della teoria descrittiva degli insiemi. Lebesgue considerava funzioni implicitamente definite a partire da funzioni di Baire. Più precisamente, se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di Baire e se, per ogni x , l'equazione

$$f(x, y) = 0$$

ha un'unica soluzione y , allora tale soluzione definisce una funzione implicita di x . Lebesgue affermò che questa funzione implicita fosse ancora di Baire. La sua argomentazione usava però un lemma falso: la proiezione di un insieme di Borel sarebbe sempre un insieme di Borel. L'errore nasceva dal fatto che la proiezione conserva le unioni numerabili, ma non conserva in generale le intersezioni numerabili.

Nel 1917, Mikhail Suslin, allievo di Nikolai Luzin all'Università di Mosca, individuò l'errore e mostrò che la proiezione di un insieme boreliano non è necessariamente boreliana [20]. Questa scoperta portò all'introduzione di una nuova classe di insiemi, più ampia di quella

dei boreliani: gli *insiemi analitici*. In termini moderni, essi possono essere descritti come proiezioni di boreliani, oppure come immagini continue dello spazio di Baire.

Lusin e Suslin stabilirono le proprietà fondamentali di questa nuova classe. Da un lato, gli insiemi analitici estendono propriamente i boreliani: esistono analitici non boreliani. Dall'altro, nonostante la loro definizione più complessa, essi conservano forti proprietà di regolarità: sono misurabili secondo Lebesgue, hanno la proprietà di Baire e soddisfano la proprietà dell'insieme perfetto. In particolare, un insieme analitico non numerabile contiene una copia dello spazio di Cantor e ha quindi cardinalità uguale a quella del continuo.

Questo ultimo fatto ha anche un significato storico importante. Nei primi decenni del Novecento era naturale cercare, all'interno delle classi di insiemi più regolari e definibili, possibili controesempi all'ipotesi del continuo. I risultati di Cantor–Bendixson per i chiusi e per i boreliani, poi quelli di Lusin e Suslin per gli analitici, mostrarono che questa ricerca non poteva avere successo in tali classi: ogni boreliano o analitico non numerabile ha già cardinalità del continuo. Solo molto più tardi, con i lavori di Kurt Gödel [9] e Paul Cohen [6], si sarebbe compreso che l'ipotesi del continuo è indipendente dagli assiomi usuali della teoria degli insiemi.

Un altro risultato centrale è il teorema di Suslin: un insieme è boreliano se e solo se è analitico e ha complementare analitico. In simboli,

$$\Delta_1^1(X) = \mathcal{B}(X)$$

per ogni spazio polacco X . Questo teorema chiarisce esattamente dove si colloca la differenza tra boreliani e analitici: un analitico manca di essere boreliano solo perché il suo complementare non è analitico.

Il teorema di Lusin sulle immagini boreliane iniettive completa, in un altro senso, la correzione dell'argomento di Lebesgue. In generale, l'immagine di un boreliano mediante una funzione boreliana può non essere boreliana. Tuttavia, se la funzione è iniettiva, allora l'immagine di un boreliano è ancora boreliana. Questo risultato mostra quale parte dell'intuizione di Lebesgue possa essere salvata: la stabilità rispetto alle immagini non vale senza ipotesi aggiuntive, ma torna a valere sotto l'ipotesi di iniettività.

Dopo i lavori di Lusin e Suslin, la teoria si sviluppò attorno agli insiemi proiettivi, ottenuti alternando proiezione e complementazione a partire dai boreliani. A differenza degli analitici e dei coanalitici, per i livelli proiettivi superiori le proprietà di regolarità non sono dimostrabili in ZFC nella stessa generalità e richiedono, in generale, ulteriori ipotesi assiomatiche. In questa tesi ci limiteremo principalmente al primo livello della gerarchia proiettiva, cioè agli insiemi analitici e coanalitici.

La tesi segue tre fili conduttori. Il primo è storico e riguarda l'errore di Lebesgue: vedremo perché la proiezione di un boreliano può uscire dalla classe dei boreliani e in quale senso il teorema di Lusin risolve il problema. Il secondo riguarda la cardinalità: mostreremo che boreliani e analitici non possono fornire controesempi all'ipotesi del continuo, poiché ogni loro sottoinsieme non numerabile della retta reale ha cardinalità del continuo. Il terzo riguarda il confronto tra le principali classi descrittive: aperti, chiusi, boreliani, analitici, proiettivi e insiemi misurabili secondo Lebesgue hanno grandezze molto diverse come famiglie di sottoinsiemi della retta reale.

Nel primo capitolo richiameremo gli strumenti insiemistici necessari, tra cui cardinalità, ordinali, induzione transfinita e operazione di Suslin. Nel secondo capitolo introdurremo gli spazi polacchi e le nozioni topologiche di base, inclusa la categoria di Baire. Nel terzo capitolo studieremo gli insiemi di Borel, le funzioni boreliane e alcune tecniche di raffinamento

topologico. Nel quarto capitolo introdurremo gli insiemi analitici e coanalitici, dimostreremo i teoremi di separazione, il teorema di Suslin e il teorema di Lusin, infine studieremo le proprietà di regolarità degli analitici. Nell'ultimo capitolo riassumeremo i risultati ottenuti nel caso dei sottoinsiemi della retta reale.

CAPITOLO 1

Richiami di teoria degli insiemi

In questo capitolo richiamiamo le nozioni fondamentali della teoria degli insiemi necessarie per il seguito. Partendo dai concetti di base, come quello di equipotenza, introdurremo poi l'assioma della scelta e alcune sue forme equivalenti, come il lemma di Zorn, che utilizzeremo per dimostrare risultati non banali sull'aritmetica cardinale.

Successivamente, tratteremo la teoria degli insiemi ben ordinati e degli ordinali. Questo ci porterà a sviluppare l'induzione transfinita, uno strumento indispensabile per la costruzione della gerarchia di Borel.

Infine, introdurremo un concetto fondamentale: l'operazione di Suslin. Essa rappresenta lo strumento essenziale che permette di generare gli insiemi analitici, il cui studio è uno degli obiettivi centrali di questa tesi.

1.1. Cardinalità e assioma della scelta

DEFINIZIONE 1.1. Due insiemi A e B si dicono *equipotenti* e si scrive $A \equiv B$, se esiste una funzione di A in B bigettiva.

Dalla definizione appena data segue che ogni insieme è equipotente a se stesso, che $A \equiv B$ implica $B \equiv A$ (e anche $\mathcal{P}(A) \equiv \mathcal{P}(B)$) e che se $A \equiv B$ e $B \equiv C$, allora $A \equiv C$.

DEFINIZIONE 1.2. Un insieme A si dice *finito* se è vuoto o se esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A \equiv \{0, \dots, n-1\}$. Se A non è finito, è detto *infinito*. Infine, A si dice *numerabile* se è finito oppure se $A \equiv \mathbb{N}$, mentre se un insieme non è numerabile è detto *non numerabile*.

Si dimostra facilmente che ogni sottoinsieme di un insieme numerabile è numerabile, che un insieme non vuoto A è numerabile se e solo se esiste una funzione $f: \mathbb{N} \rightarrow A$ suriettiva e tramite il metodo diagonale si prova che anche $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ è numerabile (e quindi, per induzione, anche $\mathbb{N}^k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, con $k \geq 1$). Infine, anche l'insieme delle successioni finite di numeri naturali è numerabile. La prima dimostrazione dell'esistenza di insiemi non numerabili fu data da Georg Cantor nel 1874.

TEOREMA 1.3 (Cantor). *L'intervallo $\mathbb{I} = [0, 1]$ è non numerabile.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che l'intervallo $[0, 1]$ sia numerabile e sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sua enumerazione. Definiamo per induzione due successioni $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ nel modo seguente. Poniamo $a_0 = 0, b_0 = 1$ e, supposto di aver definito $a_0, \dots, a_n$ e $b_0, \dots, b_n$ tali che $a_0 < \dots < a_n < b_n < \dots < b_0$, siano i_n il primo intero i tale che $a_n < x_i < b_n$ e j_n il primo intero j tale che $x_{i_n} < x_j < b_n$. Tali indici esistono poiché gli intervalli aperti (a_n, b_n) e (x_{i_n}, b_n) sono non vuoti e l'enumerazione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ contiene tutti i punti di $[0, 1]$. Poniamo dunque $a_{n+1} = x_{i_n}$ e $b_{n+1} = x_{j_n}$. Per costruzione $a_0 < \dots < a_n < b_n < \dots < b_0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Posto $x = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$, allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \leq x \leq b_n$. Se per qualche intero n fosse $x = a_n$ allora $\sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = x = a_n < a_{n+1}$, il che è assurdo. Analogamente se

esistesse un $n \in \mathbb{N}$ tale che $x = b_n$ allora $x \leq b_{n+1} < b_n = x$, ancora un assurdo; dunque $a_n < x < b_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infine, se esistesse un $k \in \mathbb{N}$ tale che $x = x_k$ allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si avrebbe $a_n < x_k < b_n$ e quindi $i_n \leq k$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Tuttavia, la successione $\{a_{n+1}\}_{n \in \mathbb{N}} = \{x_{i_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è strettamente crescente, quindi gli indici sono necessariamente distinti e la successione $\{i_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ non può essere superiormente limitata. Da questo assurdo segue la tesi. $\square$

Se X e Y sono insiemi, indichiamo con X^Y l'insieme delle funzioni di Y in X . Tramite un argomento diagonale è immediato mostrare che l'insieme $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ delle successioni di 0 e di 1 è non numerabile. Inoltre, ricorrendo alle funzioni caratteristiche, si mostra facilmente che $\mathcal{P}(X) \equiv \{0, 1\}^X$ per ogni insieme X .

DEFINIZIONE 1.4. Siano A e B due insiemi. Diciamo che la cardinalità di A è minore o uguale alla cardinalità di B e scriviamo $A \leq_c B$, se esiste un'applicazione di A in B iniettiva. Se $A \leq_c B$ e $A \not\equiv B$, diciamo che la cardinalità di A è strettamente minore della cardinalità di B e scriviamo $A <_c B$.

Chiaramente $\emptyset \leq_c A$ per ogni insieme A . Inoltre, se $A \leq_c B$ e $B \leq_c C$ allora $A \leq_c C$. Il seguente classico teorema, anch'esso dovuto a Cantor, mostra che è possibile costruire una successione di insiemi ognuno con cardinalità strettamente maggiore del precedente.

TEOREMA 1.5 (Cantor). Sia X un insieme. Allora $X <_c \mathcal{P}(X)$.

DIMOSTRAZIONE. Se X è vuoto, l'asserto è banale. Sia dunque $X \neq \emptyset$. L'applicazione $x \in X \mapsto \{x\} \in \mathcal{P}(X)$ è iniettiva, quindi $X \leq_c \mathcal{P}(X)$. Mostriamo che non esiste nessuna applicazione di X in $\mathcal{P}(X)$ suriettiva. Sia $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ una funzione arbitraria e poniamo

$$A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}.$$

Se esistesse $x_0 \in X$ tale che $A = f(x_0)$, allora $x_0 \in A$ se e solo se $x_0 \notin A$, il che è assurdo. $\square$

Il seguente risultato è uno strumento fondamentale per dimostrare l'equipotenza tra insiemi. Fu inizialmente provato da Cantor con l'utilizzo dell'assioma della scelta. La seguente dimostrazione, dovuta a Dedekind, non ne fa uso.

TEOREMA 1.6 (Schröder–Bernstein). Siano X e Y due insiemi. Se $X \leq_c Y$ e $Y \leq_c X$ allora $X \equiv Y$.

DIMOSTRAZIONE. Siano $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ due applicazioni iniettive. Mostriamo innanzitutto che esiste un insieme $E \subseteq X$ tale che

$$g(Y \setminus f(E)) = X \setminus E.$$

A tale scopo consideriamo l'applicazione $\mathcal{H} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definita ponendo

$$\mathcal{H}(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A))$$

e definiamo una successione di sottoinsiemi di X per induzione: $A_0 = \emptyset$ e $A_{n+1} = \mathcal{H}(A_n)$. Poniamo $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Una semplice verifica mostra, utilizzando l'iniettività di g , che $\mathcal{H}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}(A_n)$. Essendo poi $A_0 = \emptyset$ si ha che E è un punto fisso per $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}(E) = \mathcal{H}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}(A_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{n+1} = E.$$

Dal fatto che $\mathcal{H}(E) = E$, cioè $E = X \setminus g(Y \setminus f(E))$, otteniamo $X \setminus E = g(Y \setminus f(E))$. Definiamo ora $h : X \rightarrow Y$ come

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in X \setminus E \end{cases}$$

L'applicazione h è ben definita ed è chiaramente una bigezione tra X e Y . $\square$

Come applicazione del teorema di Schröder–Bernstein possiamo provare il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1.7. *L'insieme dei numeri reali è equipotente all'insieme delle parti dei numeri naturali, ovvero $\mathbb{R} \equiv \mathcal{P}(\mathbb{N})$.*

DIMOSTRAZIONE. La funzione $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ definita ponendo

$$f(A) = \sum_{n \in A} \frac{2}{3^{n+1}}$$

è iniettiva. Infatti, se $A \neq B$, esiste il minimo $k \in \mathbb{N}$ tale che $k \in A \triangle B$. Senza perdita di generalità, supponiamo $k \in A \setminus B$. Allora

$$f(A) - f(B) \geq \frac{2}{3^{k+1}} - \sum_{n > k} \frac{2}{3^{n+1}} > 0,$$

quindi $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \leq_c \mathbb{R}$. Analogamente, la funzione $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ definita da

$$g(x) = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$$

è iniettiva, da cui $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{Q})$. Infine, essendo $\mathbb{N} \equiv \mathbb{Q}$, si ha $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \equiv \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ e quindi $\mathbb{R} \leq_c \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Dal teorema di Schröder–Bernstein segue la tesi. $\square$

Da quanto appena mostrato si ha dunque anche $\mathbb{R} \equiv \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Inoltre, poiché per ogni terna di insiemi A , B e C , vale $(A^B)^C \equiv A^{B \times C}$, si ricava che gli insiemi $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $\mathbb{R}^k$ sono equipotenti a $\mathbb{R}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 1$.

Trattiamo ora un assioma indispensabile per il seguito: l'assioma della scelta. Si tratta di un principio potente e non costruttivo che garantisce l'esistenza di funzioni di scelta per insiemi di cardinalità arbitraria, estendendo una proprietà banalmente vera per famiglie finite.

È fondamentale ricordare che questo principio è indipendente dagli assiomi della teoria assiomatica di Zermelo–Fraenkel. La sua non-contraddittorietà rispetto a ZF fu provata nel 1938 da Kurt Gödel [9]. La prova di indipendenza fu invece completata nel 1963/64 da Paul Cohen [6, 7]. Tramite l'introduzione della tecnica del forcing, Cohen provò l'esistenza di modelli di ZF in cui l'assioma della scelta fallisce, mostrandone l'indecidibilità. L'aggiunta di tale principio al sistema di Zermelo–Fraenkel definisce il sistema ZFC, che costituisce la base assiomatica standard della matematica moderna.

ASSIOMA 1.8 (Assioma della scelta). *Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi non vuoti. Allora esiste una funzione $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ tale che $f(i) \in A_i$ per ogni $i \in I$.*

Tale assioma ha profonde conseguenze sull'aritmetica cardinale degli insiemi infiniti, ad esempio è necessario (almeno nella sua versione più debole per famiglie numerabili) per mostrare che l'unione numerabile di insiemi numerabili è ancora numerabile. Vediamone ora un'altra applicazione. Una definizione alternativa di insieme infinito (dovuta a Dedekind) che non richiede la costruzione dell'insieme dei numeri naturali è la seguente.

DEFINIZIONE 1.9. Un insieme si dice *infinito secondo Dedekind* se è equipotente a una sua parte propria.

È immediato verificare che un insieme infinito secondo Dedekind è infinito. L'implicazione opposta invece è meno banale, richiede l'assioma della scelta ed è conseguenza del seguente teorema.

TEOREMA 1.10. Se X è un insieme infinito e A un suo sottoinsieme finito, allora $X \equiv X \setminus A$.

DIMOSTRAZIONE. Se $A = \emptyset$ l'asserto è banale. Supponiamo dunque A non vuoto, quindi $A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$. Per l'assioma della scelta esiste una funzione $f : \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow X$ tale che $f(E) \in E$ per ogni insieme non vuoto $E \subseteq X$. Tramite f , estendiamo gli elementi di A definendo per induzione una successione $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ di elementi distinti di X . Poniamo $a_n = f(X \setminus A)$. Supposto di aver definito $a_0, \dots, a_{n+k}$ per un intero $k \in \mathbb{N}$, l'insieme $X \setminus \{a_0, \dots, a_{n+k}\}$ è non vuoto in quanto X è per ipotesi infinito. Possiamo pertanto porre

$$a_{n+k+1} = f(X \setminus \{a_0, \dots, a_{n+k}\}).$$

Allora l'applicazione $h : X \rightarrow X \setminus A$ definita ponendo

$$h(x) = \begin{cases} a_{n+k} & \text{se } x = a_k \text{ per qualche } k \in \mathbb{N} \\ x & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è una bigezione tra X e $X \setminus A$. Infatti, la successione $\{a_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è costituita da elementi distinti; pertanto h è iniettiva e ogni elemento di $X \setminus A$ appartiene alla sua immagine. $\square$

Come conseguenza del teorema precedente è possibile mostrare che se X è un insieme infinito, allora $\mathbb{N} \leq_c X$. L'assioma della scelta permette inoltre di dimostrare che se X e Y sono insiemi tali che esiste una funzione di X in Y suriettiva allora $Y \leq_c X$. Osserviamo che anche le implicazioni inverse dei risultati appena enunciati sono vere (assumendo $Y \neq \emptyset$ nel secondo caso) e dimostrabili entrambe in ZF senza l'uso della scelta.

È anche interessante notare che l'assioma della scelta ha conseguenze profonde non solo sulla cardinalità degli insiemi ma anche sulla logica formale. Infatti, in contesti di logica intuizionista, dove il principio del terzo escluso non è assunto come assioma, l'assioma della scelta è sufficientemente forte da implicarne la validità come mostrato da Diaconescu [8].

Una forma equivalente dell'assioma della scelta è il lemma di Zorn. Prima di poterlo enunciare richiamiamo alcune definizioni.

DEFINIZIONE 1.11. Una relazione binaria su un insieme si dice *ordine parziale* se è riflessiva, transitiva e antisimmetrica. Se P è un insieme e $\leq$ è un ordine parziale su P allora la coppia $(P, \leq)$ si dice *insieme parzialmente ordinato*. Un ordine parziale su un insieme P si dice *totale* se due elementi qualsiasi di P sono confrontabili, ovvero se per ogni $x, y \in P$ vale $x \leq y$ oppure $y \leq x$. Infine, se $\leq$ è un ordine parziale su P e $x, y \in P$ poniamo $x < y$ se $x \leq y$ e $x \neq y$.

DEFINIZIONE 1.12. Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato e sia $A \subseteq P$. Un elemento $x \in P$ si dice *maggiorante* di A se $y \leq x$ per ogni $y \in A$. Se x è un maggiorante di A e $x \in A$ allora si dice *massimo* di A . Simmetricamente, un elemento $m \in A$ si dice *minimo* di A se $m \leq y$ per ogni $y \in A$. Se l'insieme dei maggioranti di A ammette un minimo, tale elemento è detto *estremo superiore* di A . Un elemento $x \in P$ è detto *massimale* se non esiste alcun $y \in P$ tale che $x < y$. Infine, un sottoinsieme $C \subseteq P$ si dice *catena* se la restrizione dell'ordine su C è totale.

ASSIOMA 1.13 (Lemma di Zorn). *Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato e non vuoto tale che ogni catena ha un maggiorante in P . Allora P ha un elemento massimale.*

TEOREMA 1.14. *Il lemma di Zorn e l'assioma della scelta sono equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione che presentiamo è quella classica di Halmos [11, 12, Cap. 16]. Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di insiemi non vuoti e poniamo

$$\mathcal{F} = \left\{ g : J \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid J \subseteq I \text{ e } g(j) \in A_j \text{ per ogni } j \in J \right\}.$$

Ordiniamo $\mathcal{F}$ secondo la relazione di prolungamento. Se $g_1, g_2 \in \mathcal{F}$ con domini J_1, J_2 , poniamo $g_1 \leq g_2$ se $J_1 \subseteq J_2$ e $g_2|_{J_1} = g_1$. La coppia $(\mathcal{F}, \leq)$ è chiaramente un insieme parzialmente ordinato e non vuoto in quanto contiene la funzione vuota. Sia $\mathcal{C} = \{g_k\}_{k \in K}$ una catena in $\mathcal{F}$ e mostriamo che $\mathcal{C}$ ha un maggiorante. Definiamo $g = \bigcup_{k \in K} g_k$, il cui dominio è $J = \bigcup_{k \in K} \text{dom}(g_k)$. Poiché $\mathcal{C}$ è una catena, g è ben definita. Inoltre, poiché per ogni $j \in J$ esiste k tale che $j \in \text{dom}(g_k)$ e quindi $g(j) = g_k(j) \in A_j$, si ha dunque che $g \in \mathcal{F}$ ed è chiaramente un maggiorante per $\mathcal{C}$. Per il lemma di Zorn esiste un elemento massimale f . Sia J il suo dominio, supponiamo per assurdo che $J \subset I$ e sia $k \in I \setminus J$. Poiché per ipotesi A_k è non vuoto, esiste $x_k \in A_k$. Allora, la funzione $h : J \cup \{k\} \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ definita ponendo

$$h(y) = \begin{cases} f(y) & \text{se } y \in J \\ x_k & \text{se } y = k \end{cases}$$

soddisfa $h \in \mathcal{F}$ e $f < h$, il che è assurdo per la massimalità di f . Dunque $J = I$ e f è la funzione di scelta.

Supponiamo ora che sia vero l'assioma della scelta. Sia $(P, \leq)$ un insieme parzialmente ordinato non vuoto in cui ogni catena $C \subseteq P$ ammette un maggiorante in P e supponiamo per assurdo che P non abbia alcun elemento massimale. Allora, per ogni $x \in P$, l'insieme $S_x = \{y \in P \mid y > x\}$ degli elementi strettamente maggiori di x è non vuoto. Poniamo $\mathcal{S} = \{S_x \mid x \in P\}$. Per l'assioma della scelta, esiste una funzione $g : \mathcal{S} \rightarrow P$ tale che $g(S_x) \in S_x$ per ogni $x \in P$. Definiamo una funzione $f : P \rightarrow P$ ponendo $f(x) = g(S_x)$. Per costruzione $f(x) > x$ per ogni $x \in P$. Inoltre, sia $\mathcal{C}$ l'insieme di tutte le catene di P . Per ipotesi, ogni catena ha un insieme non vuoto di maggioranti. Utilizzando nuovamente l'assioma della scelta, esiste una funzione $h : \mathcal{C} \rightarrow P$ tale che $h(C)$ sia un maggiorante di C per ogni catena C . Inoltre, P è non vuoto, dunque esiste $a \in P$. Diciamo che un sottoinsieme $T \subseteq P$ è una *torre* se $a \in T$, se $x \in T$ implica $f(x) \in T$ e se per ogni catena $C \subseteq T$ si ha $h(C) \in T$. La famiglia $\mathcal{F}$ di tutte le torri non è vuota, poiché P stesso è una torre così come l'intersezione T_0 di tutte le torri in $\mathcal{F}$. Al fine di mostrare che T_0 è una catena sia

$$K = \{x \in T_0 \mid \text{per ogni } y \in T_0 \text{ si ha } y \leq x \text{ oppure } x \leq y\} \subseteq T_0.$$

Una verifica standard, seguendo la dimostrazione classica di Halmos [11, Cap. 16], mostra che K è ancora una torre; omettiamo i dettagli. Poiché T_0 è l'intersezione di tutte le torri e $K \subseteq T_0$, dalla minimalità di T_0 segue che $T_0 \subseteq K$. Dunque $K = T_0$ e quindi T_0 è totalmente ordinato, cioè è una catena. Pertanto T_0 ammette un maggiorante che, per la terza proprietà della torre, soddisfa $m = h(T_0) \in T_0$, mentre per la seconda proprietà si ha $f(m) \in T_0$. Poiché m è un maggiorante di T_0 , si deve avere $f(m) \leq m$, tuttavia f soddisfa per costruzione $m < f(m)$. Da questa contraddizione segue che P deve possedere almeno un elemento massimale. $\square$

Come applicazione classica del lemma di Zorn, si può dimostrare che ogni spazio vettoriale ammette una base. È interessante notare che tale risultato non è solo una conseguenza dell'assioma della scelta (in quanto conseguenza del lemma di Zorn), ma gli è equivalente, come mostrato da Blass in [3].

Concludiamo la sezione presentando due applicazioni del lemma di Zorn all'aritmetica cardinale. Il primo di questi risultati garantisce che le grandezze di due qualsiasi insiemi sono confrontabili.

TEOREMA 1.15. *Per ogni coppia di insiemi X e Y si ha $X \leq_c Y$ oppure $Y \leq_c X$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{F}$ l'insieme delle funzioni iniettive definite su un sottoinsieme di X e a valori in Y , ovvero

$$\mathcal{F} = \{f : A \rightarrow Y \mid A \subseteq X, f \text{ iniettiva}\}.$$

L'insieme $\mathcal{F}$ dotato della relazione di prolungamento è un insieme parzialmente ordinato e non vuoto in quanto contiene la funzione vuota. Sia $\mathcal{C} = \{f_i\}_{i \in I}$ una catena in $\mathcal{F}$ e definiamo $f = \bigcup_{i \in I} f_i$. Poiché $\mathcal{C}$ è una catena f è ben definita ed è iniettiva. Dunque $f \in \mathcal{F}$ ed è chiaramente un maggiorante per $\mathcal{C}$. Per il lemma di Zorn $\mathcal{F}$ ammette un elemento massimale $g : A \rightarrow Y$. Se $A = X$, allora g è una funzione iniettiva da X a Y e quindi $X \leq_c Y$. Se $g(A) = Y$, allora $g^{-1} : Y \rightarrow A \subseteq X$ è una funzione iniettiva e quindi $Y \leq_c X$. Se per assurdo fosse $A \subset X$ e $g(A) \subset Y$ allora esisterebbero $x_0 \in X \setminus A$ e $y_0 \in Y \setminus g(A)$. In tal caso, definiamo $h : A \cup \{x_0\} \rightarrow Y$ ponendo

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \in A \\ y_0 & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

Poiché $y_0 \notin g(A)$, h è iniettiva, ma $h \in \mathcal{F}$ ed è un prolungamento proprio di g , il che ne contraddice la massimalità. $\square$

Come nota storica, osserviamo che questo teorema è in realtà equivalente all'assioma della scelta. Il primo a provare tale equivalenza fu Friedrich Hartogs nel 1915 [13], tramite un classico lemma che tratteremo nella prossima sezione.

Il secondo risultato di aritmetica cardinale permette di stabilire l'equipotenza tra un insieme infinito e il suo quadrato cartesiano. Premettiamo un lemma.

LEMMA 1.16. *Per ogni insieme infinito X si ha $X \times \{0, 1\} \equiv X$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia

$$\mathcal{F} = \{f : A \times \{0, 1\} \rightarrow A \mid A \subseteq X \text{ e } f \text{ bigettiva}\}.$$

Poiché X è un insieme infinito, esso contiene un sottoinsieme infinito numerabile $D \subseteq X$ ed essendo $D \times \{0, 1\} \equiv D$ la famiglia $\mathcal{F}$ è non vuota. Dotiamo $\mathcal{F}$ della relazione di prolungamento $\leq$. Seguendo un'argomentazione del tutto analoga a quella presentata nella dimostrazione del Teorema 1.15, si verifica facilmente che ogni catena in $(\mathcal{F}, \leq)$ ammette un maggiorante in $\mathcal{F}$. Per il lemma di Zorn la famiglia $\mathcal{F}$ possiede un elemento massimale $f : A \times \{0, 1\} \rightarrow A$. Mostriamo che $A \equiv X$. Per il Teorema 1.10, essendo X infinito, è sufficiente provare che il complementare $X \setminus A$ è un insieme finito. Supponiamo per assurdo che $X \setminus A$ sia infinito. Allora esso contiene un sottoinsieme infinito numerabile $B \subseteq X \setminus A$. Essendo B numerabile, esiste una funzione bigettiva $g : B \times \{0, 1\} \rightarrow B$. Allora possiamo

definire un'applicazione $h : (A \cup B) \times \{0, 1\} \rightarrow A \cup B$ ponendo

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A \times \{0, 1\} \\ g(x) & \text{se } x \in B \times \{0, 1\} \end{cases}$$

L'applicazione h è una bigezione che prolunga propriamente f , il che significa che $h \in \mathcal{F}$ e $f < h$. Questo contraddice la massimalità di f in $\mathcal{F}$. Di conseguenza, $X \setminus A$ deve essere necessariamente finito. Pertanto, per il Teorema 1.10, si ha $A \equiv X$. Poiché $A \times \{0, 1\} \equiv A$, segue $X \times \{0, 1\} \equiv X$. $\square$

TEOREMA 1.17 (Tarski). *Per ogni insieme infinito X si ha $X \times X \equiv X$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché X è infinito, esso contiene un sottoinsieme N infinito numerabile. Fissiamo una bigezione $f_0 : N \times N \rightarrow N$ e poniamo

$$\mathcal{F} = \{f : A \times A \rightarrow A \mid N \subseteq A \subseteq X, f \text{ bigettiva e } f|_{N \times N} = f_0\}.$$

Ordiniamo $\mathcal{F}$ mediante la relazione di prolungamento: se $f : A \times A \rightarrow A$ e $g : B \times B \rightarrow B$ appartengono a $\mathcal{F}$, poniamo $f \leq g$ se $A \subseteq B$ e $g|_{A \times A} = f$. Ancora una volta $\mathcal{F}$ è un insieme parzialmente ordinato, non vuoto, poiché contiene f_0 e soddisfa le ipotesi del lemma di Zorn. Dunque esiste un elemento massimale $f : A \times A \rightarrow A$. In particolare, poiché $N \subseteq A$, l'insieme A è infinito. Supponiamo per assurdo che A non sia equipotente a X , cioè $A <_c X$. Per il Teorema 1.15 si ha $X \setminus A \leq_c A$ oppure $A \leq_c X \setminus A$. Assumiamo $X \setminus A \leq_c A$ e, per il Lemma 1.16, siano $A_1, A_2 \subseteq A$ due sottoinsiemi disgiunti equipotenti ad A e tali che $A_1 \cup A_2 = A$. Allora

$$X = A \cup (X \setminus A) \leq_c A_1 \cup A_2 = A <_c X,$$

il che è assurdo. Quindi $A \leq_c X \setminus A$ e $X \setminus A$ contiene un sottoinsieme B equipotente ad A . Dal Lemma 1.16, applicato iterativamente, segue che B può essere partizionato in un numero finito arbitrario di sottoinsiemi disgiunti, ciascuno equipotente a B . In particolare, B è unione di tre sottoinsiemi disgiunti B_1, B_2, B_3 , ciascuno equipotente a B . Poiché $B \equiv A$ e, per costruzione, $A \times A \equiv A$, si ha

$$B \times A \equiv A \times A \equiv A \equiv B, \quad B \times B \equiv A \times A \equiv A \equiv B, \quad A \times B \equiv A \times A \equiv A \equiv B.$$

Dunque esistono tre bigezioni $f_1 : B \times A \rightarrow B_1$, $f_2 : B \times B \rightarrow B_2$ e $f_3 : A \times B \rightarrow B_3$. Allora, posto $C = A \cup B$, definiamo $g : C \times C \rightarrow C$ ponendo

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in A \times A \\ f_1(x, y) & \text{se } (x, y) \in B \times A \\ f_2(x, y) & \text{se } (x, y) \in B \times B \\ f_3(x, y) & \text{se } (x, y) \in A \times B \end{cases}$$

L'applicazione g è una bigezione tra $C \times C$ e C che prolunga propriamente f , contraddicendo la massimalità. Dunque deve essere $A \equiv X$. Poiché, per costruzione, $A \times A \equiv A$, e poiché $A \equiv X$, segue che

$$X \times X \equiv A \times A \equiv A \equiv X.$$

Pertanto $X \times X \equiv X$. $\square$

Questo risultato fu provato da Alfred Tarski nel 1924, il quale ne dimostrò anche l'equivalenza con l'assioma della scelta [22]. A tal proposito citiamo una nota storica legata al tentativo di pubblicazione di questo risultato. Come riferito dallo stesso Tarski molti anni più tardi [18], quando egli tentò di inviare questo teorema ai *Comptes Rendus de l'Académie*

des Sciences di Parigi, i matematici Maurice Fréchet e Henri Lebesgue si rifiutarono di presentare il lavoro. Fréchet motivò il rifiuto sostenendo che l'implicazione tra due proposizioni ben note (assumendo l'assioma della scelta come vero) non costituisse un risultato originale. Lebesgue, per contro, rifiutò l'articolo affermando che l'implicazione tra due proposizioni false (ritenendo egli l'assioma della scelta falso) fosse priva di qualsiasi interesse scientifico. Il teorema fu infine pubblicato sulla rivista polacca *Fundamenta Mathematicae*.

1.2. Insiemi ben ordinati e ordinali

Prima di passare a trattare la nozione di ordinale, richiamiamo alcuni strumenti relativi agli insiemi ben ordinati, congiuntamente all'induzione transfinita, necessaria per definire la gerarchia degli insiemi di Borel.

DEFINIZIONE 1.18. Un insieme parzialmente ordinato $(W, \leq)$ si dice *ben ordinato* e la relazione $\leq$ si dice *buon ordinamento*, se ogni sottoinsieme non vuoto di W è dotato di minimo. Due insiemi ben ordinati $(W, \leq_W)$ e $(V, \leq_V)$ si dicono *simili* e si scrive $W \sim V$, se esiste una funzione $f : W \rightarrow V$ bigettiva tale che $x \leq_W y$ se e solo se $f(x) \leq_V f(y)$.

DEFINIZIONE 1.19. Se $(W, \leq)$ è un insieme ben ordinato e $w \in W$, un elemento $w^- \in W$ tale che $w^- < w$ e non esiste alcun $v \in W$ che soddisfa $w^- < v < w$ si dice *predecessore immediato* di w . Un elemento $w \in W$ che ha un predecessore immediato si dice *successore*, mentre un elemento $w \in W$, diverso dal minimo, che non ha un predecessore immediato si dice *limite*. Se W è un insieme ben ordinato e $u \in W$ l'insieme $W(u) = \{w \in W \mid w < u\}$ si dice *segmento iniziale* di W generato da u .

Un'altra forma equivalente all'assioma della scelta è il principio del buon ordinamento. Inizialmente congetturato da Cantor per i numeri reali, fu dimostrato per la prima volta da Zermelo a partire dall'assioma della scelta.

ASSIOMA 1.20 (Principio del buon ordinamento). *Ogni insieme può essere ben ordinato.*

TEOREMA 1.21. *Il principio del buon ordinamento e l'assioma della scelta sono equivalenti.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che valga il principio del buon ordinamento e consideriamo una famiglia di insiemi non vuoti $\{A_i\}_{i \in I}$. Esiste dunque una relazione di buon ordine sull'insieme $\bigcup_{i \in I} A_i$. Ogni A_i , essendo non vuoto, ammette un unico elemento minimo e la funzione $f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ che a ogni $i \in I$ associa il minimo di A_i dimostra la tesi.

Mostriamo il principio del buon ordinamento utilizzando il lemma di Zorn. Sia X un insieme e poniamo

$$\mathcal{P} = \{(A, \leq_A) \mid A \subseteq X, \leq_A \text{ è un buon ordinamento}\}.$$

Definiamo un ordine parziale $\leq$ su $\mathcal{P}$ nel modo seguente. Poniamo $(A, \leq_A) \leq (B, \leq_B)$ se $\leq_A$ è la restrizione di $\leq_B$ ad A e $A = B$ oppure A è un segmento iniziale di B generato da un suo elemento. Sia $\mathcal{C} = \{(A_i, \leq_i)\}_{i \in I}$ una catena in $\mathcal{P}$ e sia $U = \bigcup_{i \in I} A_i$. Per ogni $x, y \in U$ esistono $A_i, A_j \in \mathcal{C}$ tali che $x \in A_i$ e $y \in A_j$ ed essendo $\mathcal{C}$ una catena, senza perdita di generalità, possiamo supporre che $(A_i, \leq_i) \leq (A_j, \leq_j)$. Definiamo $x \leq_U y$ se $x \leq_j y$. Questa definizione è ben posta essendo $\mathcal{C}$ una catena. Mostriamo che $(U, \leq_U)$ è ben ordinato. Se $S \subseteq U$ è un sottoinsieme non vuoto, allora interseca A_k per qualche $k \in I$ e poiché A_k è ben ordinato $S \cap A_k$ ammette minimo m . Mostriamo che m è il minimo di S . Se $s \in A_k$, allora $m \leq_k s$ e quindi $m \leq_U s$. Se $s \notin A_k$, allora $s \in A_j$ per qualche j tale che $(A_k, \leq_k) < (A_j, \leq_j)$. Ma poiché A_k è un segmento iniziale di A_j si ha $m <_j s$ e quindi $m <_U s$. In ogni caso

$m \leq_U s$ e U è ben ordinato. Per costruzione, $(U, \leq_U)$ è un maggiorante della catena $\mathcal{C}$. Per il lemma di Zorn esiste dunque un elemento massimale $(M, \leq_M)$. Supponiamo per assurdo che $M \subset X$ e sia $x_0 \in X \setminus M$. Definiamo $(M', \leq_{M'})$ dove $M' = M \cup \{x_0\}$ e $\leq_{M'}$ è l'ordine $\leq_M$ esteso ponendo $m <_{M'} x_0$ per ogni $m \in M$. Chiaramente $(M', \leq_{M'}) \in \mathcal{P}$ è ben ordinato e $(M, \leq_M) < (M', \leq_{M'})$. Questo contraddice la massimalità di $(M, \leq_M)$, dunque $M = X$ e X è ben ordinato. $\square$

Enunciamo e dimostriamo ora due strumenti essenziali per il seguito: la dimostrazione per induzione transfinita e la definizione per induzione transfinita che generalizzano a insiemi ben ordinati qualunque le proprietà di dimostrazione e definizione per induzione sui numeri naturali.

TEOREMA 1.22. *Sia $(W, \leq)$ un insieme ben ordinato non vuoto e, per ogni $w \in W$, sia P_w una proposizione su w . Sia $\bar{w}$ il minimo di W . Supponiamo che:*

- $P_{\bar{w}}$ sia vera;
- per ogni $w \in W \setminus \{\bar{w}\}$, se P_v è vera per ogni $v < w$, allora P_w è vera.

Allora P_w è vera per ogni $w \in W$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che l'insieme

$$A = \{w \in W \mid P_w \text{ è falsa}\}$$

sia non vuoto. Poiché W è ben ordinato, A ha un elemento minimo w_0 . Poiché $P_{\bar{w}}$ è vera per ipotesi, si ha $w_0 \neq \bar{w}$. Inoltre, per la minimalità di w_0 , si ha $v \notin A$ per ogni $v < w_0$ e quindi P_v è vera per ogni $v < w_0$. Per la seconda ipotesi segue allora che P_{w_0} è vera, in contraddizione con il fatto che $w_0 \in A$. Dunque A è vuoto. $\square$

TEOREMA 1.23. *Siano $(W, \leq)$ un insieme ben ordinato, X un insieme e $\mathcal{F}$ l'insieme delle funzioni con dominio un segmento iniziale di W e a valori in X . Se $G : \mathcal{F} \rightarrow X$ è un'applicazione, allora esiste un'unica funzione $f : W \rightarrow X$ tale che*

$$f(u) = G(f|_{W(u)})$$

per ogni $u \in W$.

DIMOSTRAZIONE. Se $W = \emptyset$, la funzione vuota è l'unica funzione da W in X e soddisfa banalmente la tesi. Supponiamo dunque $W \neq \emptyset$. Per ogni $w \in W$, sia P_w la proposizione seguente: esiste un'unica mappa $g_w : W(w) \rightarrow X$ tale che, per ogni $u \in W(w)$, si ha

$$g_w(u) = G(g_w|_{W(u)}).$$

Verifichiamo le ipotesi del Teorema 1.22. Sia $\bar{w}$ il minimo di W . Poiché $W(\bar{w}) = \emptyset$, poniamo $g_{\bar{w}} = \emptyset$. Allora $g_{\bar{w}}$ soddisfa banalmente la proprietà richiesta ed è unica. Dunque $P_{\bar{w}}$ è vera.

Sia ora $w \in W$ con $w \neq \bar{w}$ e supponiamo che P_v valga per ogni $v < w$.

Supponiamo innanzitutto che w sia un elemento limite. Allora, per ogni $u < w$, esiste v tale che $u < v < w$; altrimenti u sarebbe il predecessore immediato di w . Quindi

$$W(w) = \bigcup_{v < w} W(v).$$

Per ogni $v < w$, sia dunque $g_v : W(v) \rightarrow X$ l'unica funzione che soddisfa la proprietà richiesta su $W(v)$. Se $v' < v < w$, allora la restrizione $g_v|_{W(v')}$ soddisfa la stessa proprietà su $W(v')$. Per l'unicità di $g_{v'}$, segue che

$$g_v|_{W(v')} = g_{v'}.$$

Pertanto le funzioni della famiglia $\{g_v\}_{v < w}$ sono compatibili.
Poniamo

$$g_w = \bigcup_{v < w} g_v.$$

Se $u \in W(w)$, scegliamo v tale che $u < v < w$. Allora, $g_w|_{W(v)} = g_v$, dunque

$$g_w(u) = g_v(u) = G(g_v|_{W(u)}) = G(g_w|_{W(u)}).$$

Quindi g_w soddisfa la proprietà richiesta. Se $\varphi : W(w) \rightarrow X$ è un'altra funzione che soddisfa la stessa proprietà, allora, per ogni $v < w$, la restrizione $\varphi|_{W(v)}$ soddisfa la proprietà su $W(v)$; per l'unicità di g_v si ha dunque $\varphi|_{W(v)} = g_v$. Poiché $W(w) = \bigcup_{v < w} W(v)$, segue che $\varphi = g_w$. Dunque P_w è vera nel caso limite.

Supponiamo ora che w sia un successore e sia w^- il suo predecessore immediato. In questo caso

$$W(w) = W(w^-) \cup \{w^-\}.$$

Poiché $w^- < w$, per ipotesi induttiva esiste l'unica funzione $g_{w^-} : W(w^-) \rightarrow X$ che soddisfa la proprietà richiesta. Definiamo allora $g_w : W(w) \rightarrow X$ ponendo

$$g_w|_{W(w^-)} = g_{w^-}$$

e

$$g_w(w^-) = G(g_{w^-}).$$

Se $u < w^-$, allora

$$g_w(u) = g_{w^-}(u) = G(g_{w^-}|_{W(u)}) = G(g_w|_{W(u)}).$$

Inoltre, per costruzione, per $u = w^-$, si ha

$$g_w(w^-) = G(g_w|_{W(w^-)}).$$

Dunque g_w soddisfa la proprietà richiesta su $W(w)$. Mostriamone l'unicità. Sia $\varphi : W(w) \rightarrow X$ un'altra funzione che soddisfa la proprietà richiesta. Allora $\varphi|_{W(w^-)}$ soddisfa la proprietà su $W(w^-)$; per l'unicità di g_{w^-} , si ha

$$\varphi|_{W(w^-)} = g_{w^-}.$$

Inoltre,

$$\varphi(w^-) = G(\varphi|_{W(w^-)}) = G(g_{w^-}) = g_w(w^-).$$

Pertanto $\varphi = g_w$ e quindi P_w è vera anche nel caso successore. Per il Teorema 1.22, P_w vale per ogni $w \in W$.

Supponiamo ora che W non abbia massimo. Poniamo

$$f = \bigcup_{w \in W} g_w.$$

Poiché W non ha massimo, per ogni $u \in W$ esiste $w \in W$ tale che $u < w$. Dunque

$$W = \bigcup_{w \in W} W(w),$$

quindi f è una funzione da W in X . Se $u \in W$, scegliamo $w \in W$ tale che $u < w$. Allora

$$f(u) = g_w(u) = G(g_w|_{W(u)}) = G(f|_{W(u)}).$$

Quindi f soddisfa la tesi.

Supponiamo invece che W abbia massimo m . In questo caso, essendo

$$W = W(m) \cup \{m\},$$

esiste una funzione $g_m : W(m) \rightarrow X$ soddisfacente la tesi su $W(m)$. Poniamo

$$f|_{W(m)} = g_m.$$

Mentre per $u = m$, poniamo

$$f(m) = G(g_m).$$

Se $u < m$, allora

$$f(u) = g_m(u) = G(g_m|_{W(u)}) = G(f|_{W(u)}).$$

Inoltre, per costruzione

$$f(m) = G(f|_{W(m)}).$$

Anche in questo caso f soddisfa la tesi.

Resta da mostrare l'unicità di f . Sia $\varphi : W \rightarrow X$ una funzione che soddisfa

$$\varphi(u) = G(\varphi|_{W(u)})$$

per ogni $u \in W$. Allora, per ogni $w \in W$, la restrizione $\varphi|_{W(w)}$ soddisfa la proprietà richiesta su $W(w)$; per l'unicità di g_w , si ha

$$\varphi|_{W(w)} = g_w.$$

Se W non ha massimo, per ogni $u \in W$ possiamo scegliere w tale che $u < w$ e otteniamo $\varphi(u) = g_w(u) = f(u)$. Dunque $\varphi = f$.

Se invece W ha massimo m , allora $\varphi|_{W(m)} = g_m$ e inoltre

$$\varphi(m) = G(\varphi|_{W(m)}) = G(f|_{W(m)}) = f(m).$$

Quindi anche in questo caso $\varphi = f$. La funzione cercata è dunque unica. $\square$

Trattiamo ora il concetto di ordinale. Sebbene sia stato introdotto per la prima volta da Cantor (inteso come tipo di ordine per gli insiemi ben ordinati) seguiremo l'approccio più moderno e rigoroso dovuto a John von Neumann. Successivamente, utilizzando l'assioma della scelta, definiremo formalmente la nozione di cardinalità per gli insiemi. Per una analisi più approfondita si veda [14, Cap. 6, 7] o [10, Cap. 19].

DEFINIZIONE 1.24. Un insieme α si dice *transitivo* se per ogni $x \in \alpha$ si ha $x \subseteq \alpha$. Un insieme transitivo è detto *ordinale* se è ben ordinato dalla relazione $\in$ di appartenenza (a cui associamo l'ordine largo per cui $x \leq y$ se $x \in y$ oppure $x = y$). Indicheremo nel seguito con $\mathcal{O}$ la classe degli ordinali.

Sebbene in ZF la nozione di classe non sia definita come oggetto della teoria (cioè non è un insieme), useremo tale termine in senso improprio. In particolare con $\alpha \in \mathcal{O}$ indichiamo che α soddisfa la proprietà di essere un ordinale.

Gli ordinali godono di proprietà strutturali molto forti facilmente dimostrabili dalla loro definizione. Ad esempio, è possibile mostrare che gli elementi degli ordinali sono ordinali a loro volta, oppure che nessun ordinale può appartenere a se stesso. Infatti, se α è un ordinale, poiché $\in$ è una relazione di buon ordine stretto su α , è irriflessiva, cioè $\beta \notin \beta$ per ogni $\beta \in \alpha$ e quindi se fosse $\alpha \in \alpha$ si avrebbe $\alpha \notin \alpha$ che è assurdo. Inoltre, per due ordinali α e β la condizione $\alpha \in \beta$ è equivalente al fatto che α sia un sottoinsieme proprio di β , ovvero la relazione di appartenenza coincide con quella di inclusione (stretta). In ultimo, gli ordinali

godono della proprietà di tricotomia e canonicità: per ogni coppia di ordinali α e β solo una tra le condizioni $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$ oppure $\beta \in \alpha$ è vera e se due ordinali α e β sono simili allora coincidono, cioè $\alpha = \beta$.

Un'altra proprietà importante permette di affermare (in senso improprio) che la stessa classe degli ordinali $\mathcal{O}$ è ben ordinata dalla relazione di appartenenza.

TEOREMA 1.25. *Ogni insieme non vuoto di ordinali è dotato di minimo.*

DIMOSTRAZIONE. Sia A un insieme non vuoto di ordinali e sia $\alpha \in A$. Se $\alpha \cap A = \emptyset$, allora per ogni $\beta \in A$ con $\beta \neq \alpha$ non può aversi $\beta \in \alpha$ (altrimenti $\beta \in \alpha \cap A$), dunque per tricotomia $\alpha \in \beta$. In questo caso α è il minimo di A . Se invece $\alpha \cap A \neq \emptyset$, allora l'insieme $\alpha \cap A$ è un sottoinsieme non vuoto dell'ordinale α . Poiché α è ben ordinato, $\alpha \cap A$ ammette un minimo μ . Mostriamo che μ è il minimo di A . Se $\gamma \in A$, per tricotomia abbiamo tre possibilità: se $\gamma \in \alpha$, allora $\gamma \in \alpha \cap A$ e quindi $\mu \leq \gamma$, se $\gamma = \alpha$ allora, essendo $\mu \in \alpha$ si ha $\mu \in \gamma$, infine, se $\alpha \in \gamma$ si ottiene $\mu \in \alpha \in \gamma$ e quindi per transitività si ha $\mu \in \gamma$. $\square$

Per il teorema appena mostrato, ogni insieme di ordinali è ben ordinato dalla relazione di appartenenza. In particolare, ogni insieme transitivo i cui elementi sono ordinali è esso stesso un ordinale.

Sia ora X un insieme di ordinali. Allora $\bigcup X$ è ancora un ordinale: infatti è un insieme transitivo di ordinali. Tale ordinale viene indicato con

$$\sup X = \bigcup X.$$

La notazione è giustificata dal fatto che $\bigcup X$ è il minimo ordinale maggiore o uguale a ogni elemento di X . Infatti, se $\xi \in X$, allora

$$\xi \subseteq \bigcup X$$

e quindi $\xi \leq \bigcup X$. Viceversa, se η è un ordinale tale che $\xi \leq \eta$ per ogni $\xi \in X$, allora

$$\bigcup X \subseteq \eta$$

e dunque $\bigcup X \leq \eta$.

TEOREMA 1.26. *Ogni insieme ben ordinato è simile a un unico ordinale.*

DIMOSTRAZIONE. L'unicità è una conseguenza immediata della canonicità degli ordinali. Sia $(W, \leq)$ un insieme ben ordinato. Per dimostrare l'esistenza, consideriamo il sottoinsieme $A \subseteq W$ costituito dagli elementi $w \in W$ tali che il segmento iniziale $W(w)$ è simile a un unico ordinale. Mostriamo che $A = W$.

Supponiamo per assurdo che $A \subset W$. Poiché W è ben ordinato, l'insieme $W \setminus A$ ammette minimo, che indichiamo con w_0 . Per la definizione di minimo, ogni elemento $v < w_0$ appartiene ad A . Dunque, per ogni $v < w_0$, il segmento iniziale $W(v)$ è simile a un unico ordinale, che indichiamo con α_v . Poniamo

$$\alpha = \{\alpha_v \mid v < w_0\}.$$

Mostriamo che α è transitivo. Sia $\beta \in \alpha$, dunque $\beta = \alpha_v$ per qualche $v < w_0$. Se $\gamma \in \beta$, allora γ è il segmento iniziale dell'ordinale β generato da γ . Fissata una similitudine tra $W(v)$ e β , tale segmento corrisponde a un segmento iniziale $W(u)$ con $u < v$. Poiché $u < v < w_0$, si ha $u \in A$ e quindi $W(u)$ è simile all'ordinale α_u . Per l'unicità dell'ordinale simile a $W(u)$,

segue che $\gamma = \alpha_u$. Dunque $\gamma \in \alpha$ e quindi α è transitivo. Poiché α è un insieme transitivo di ordinali, α è un ordinale. Inoltre, l'applicazione

$$f : W(w_0) \rightarrow \alpha, \quad f(v) = \alpha_v$$

è una similitudine. Infatti, se $u < v < w_0$, allora $W(u)$ è un segmento iniziale di $W(v)$ e quindi l'ordinale α_u è un elemento di α_v . Viceversa, se $\alpha_u \in \alpha_v$, non può essere $v \leq u$, altrimenti si avrebbe $\alpha_v \in \alpha_u$ oppure $\alpha_v = \alpha_u$, contro la tricotomia degli ordinali. Dunque $u < v$. Pertanto $W(w_0)$ è simile all'ordinale α e quindi $w_0 \in A$, in contraddizione con il fatto che w_0 appartiene a $W \setminus A$. Dunque $A = W$. Quindi, per ogni $w \in W$, esiste un unico ordinale α_w simile a $W(w)$. Poniamo

$$\beta = \{\alpha_w \mid w \in W\}.$$

Con lo stesso argomento usato sopra, β è un ordinale e l'applicazione

$$w \in W \mapsto \alpha_w \in \beta$$

è una similitudine tra W e β . Dunque W è simile a un ordinale. $\square$

Il seguente risultato, dimostrato da Cesare Burali-Forti nel 1897 e anche noto come “paradosso di Burali-Forti”, fu una delle prime antinomie della teoria degli insiemi a essere pubblicata.

TEOREMA 1.27 (Burali-Forti). *Non esiste l'insieme degli ordinali.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che $\mathcal{O}$ sia un insieme. Allora $\mathcal{O}$ è transitivo, poiché ogni elemento di un ordinale è ancora un ordinale. Inoltre, per il Teorema 1.25, ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathcal{O}$ ha minimo rispetto alla relazione di appartenenza. Dunque $\mathcal{O}$ sarebbe un ordinale. Essendo $\mathcal{O}$ l'insieme di tutti gli ordinali, si avrebbe allora $\mathcal{O} \in \mathcal{O}$, in contraddizione con il fatto che nessun ordinale appartiene a se stesso. $\square$

DEFINIZIONE 1.28. Sia α un ordinale. L'insieme $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$ è un ordinale ed è il più piccolo ordinale maggiore di α che si dice *successore* di α . Un ordinale diverso dall'insieme vuoto che non è il successore di nessun altro ordinale si dice *limite*.

Adottando la definizione di von Neumann, ogni numero naturale può essere identificato con l'insieme dei naturali che lo precedono ponendo $0 = \emptyset$ e $n = \{0, \dots, n-1\}$. In particolare, ogni numero naturale è un ordinale finito, ogni $n \neq 0$ è un ordinale successore, mentre l'ordinale unione di tutti i numeri naturali, denotato con ω_0 , costituisce il primo ordinale limite, nonché il più piccolo ordinale infinito numerabile.

Al fine di introdurre la nozione di cardinalità diamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 1.29. Un ordinale α si dice *iniziale* se non è equipotente a nessun $\beta \in \alpha$.

Chiaramente, ogni numero naturale è un ordinale iniziale finito. Inoltre, ω_0 è un ordinale iniziale numerabile.

Il seguente risultato, dimostrato da Friedrich Hartogs nel 1915, oltre a essere utile, come vedremo, per definire la nozione di cardinalità, fu inizialmente provato con lo scopo di mostrare, come già accennato, che la comparabilità tra cardinali (Teorema 1.15) implica l'assioma della scelta.

TEOREMA 1.30 (Lemma di Hartogs). *Per ogni insieme X esiste un minimo ordinale α tale che $\alpha \not\leq_c X$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{F}$ la famiglia degli insiemi ben ordinati $(W, \leq)$ tali che $W \subseteq X$. Per ogni insieme ben ordinato $(W, \leq) \in \mathcal{F}$ esiste un unico ordinale simile a esso. Per l'assioma di rimpiazzamento, sia α l'insieme di tali ordinali. Verifichiamo innanzitutto che α è un ordinale. Essendo, per definizione, un insieme di ordinali, è sufficiente mostrare che è transitivo. Siano dunque $\beta \in \alpha$ e $\gamma \in \beta$. Per definizione di α , l'ordinale β è simile a un insieme ben ordinato $(W, \leq) \in \mathcal{F}$ con $W \subseteq X$. Poiché $\gamma \in \beta$, l'ordinale γ è simile a un segmento iniziale di W . Tale segmento, dotato della restrizione dell'ordine $\leq$, è a sua volta un elemento di $\mathcal{F}$. Dunque $\gamma \in \alpha$ e α è un ordinale.

Mostriamo ora che $\alpha \not\leq_c X$. Supponiamo, per assurdo, che esista una funzione $f : \alpha \rightarrow X$ iniettiva. Allora l'immagine $f(\alpha) \subseteq X$ può essere ben ordinata tramite il buon ordine di α , ottenendo un buon ordinamento $\leq_f$ su $f(\alpha)$. Dunque $(f(\alpha), \leq_f)$ appartiene a $\mathcal{F}$ e l'unico ordinale simile a $(f(\alpha), \leq_f)$ è α stesso. Per definizione di α , si avrebbe allora $\alpha \in \alpha$, il che è assurdo.

Resta da verificare la minimalità. Per costruzione, ogni $\beta \in \alpha$ soddisfa $\beta \leq_c X$. Viceversa, se β è un ordinale tale che $\beta \leq_c X$, allora l'immagine di un'iniezione di β in X può essere ben ordinata tramite il buon ordine di β ; dunque β è simile a un sottoinsieme ben ordinato di X e quindi $\beta \in \alpha$. Pertanto gli ordinali iniettabili in X sono esattamente gli elementi di α . Poiché $\alpha \not\leq_c X$, segue che α è il minimo ordinale non iniettabile in X . $\square$

Applicando il lemma di Hartogs a ω_0 , definiamo ω_1 come il minimo ordinale α tale che $\alpha \not\leq_c \omega_0$.

TEOREMA 1.31. *L'ordinale ω_1 è il primo ordinale non numerabile. Inoltre, ω_1 coincide con l'insieme di tutti gli ordinali numerabili. In particolare, ω_1 è un ordinale iniziale non numerabile.*

DIMOSTRAZIONE. Per definizione, $\omega_1 \not\leq_c \omega_0$, dunque ω_1 non è numerabile. Se $\beta \in \omega_1$, allora, per la minimalità di ω_1 , si ha $\beta \leq_c \omega_0$ e quindi β è numerabile.

Viceversa, sia β un ordinale numerabile. Allora $\beta \leq_c \omega_0$. Se non fosse $\beta \in \omega_1$, per tricotomia degli ordinali si avrebbe $\beta = \omega_1$ oppure $\omega_1 \in \beta$. Nel primo caso ω_1 sarebbe numerabile, contro quanto appena mostrato. Nel secondo caso si avrebbe $\omega_1 \leq_c \beta \leq_c \omega_0$, ancora un assurdo. Dunque $\beta \in \omega_1$. Pertanto ω_1 è esattamente l'insieme degli ordinali numerabili.

Infine, se $\beta \in \omega_1$, allora β è numerabile, mentre ω_1 non lo è. Quindi ω_1 non è equipotente ad alcun $\beta \in \omega_1$, e dunque ω_1 è un ordinale iniziale non numerabile. $\square$

Grazie al lemma di Hartogs possiamo definire per induzione transfinita una gerarchia di ordinali iniziali infiniti. Gli ordinali iniziali ω_0 e ω_1 sono già stati definiti. Supponiamo di aver definito ω_β per ogni $\beta \in \alpha$. Se α è un ordinale successore, ovvero $\alpha = \beta + 1$, definiamo ω_α come il più piccolo ordinale iniziale tale che $\omega_\alpha \not\leq_c \omega_\beta$ (ne esiste almeno uno per il teorema di Hartogs). Se α è un ordinale limite poniamo $\omega_\alpha = \sup_{\beta \in \alpha} \omega_\beta$.

Verificare che ω_α è un ordinale iniziale, nel caso in cui α sia un ordinale successore, è immediato dalla definizione, mentre per gli ordinali limite è una conseguenza del fatto che l'unione di un insieme di ordinali iniziali è un ordinale iniziale. Si ha poi che la gerarchia degli ordinali infiniti ω_α è completa. Infatti, si veda ad esempio [14, Cap. 7], è possibile mostrare che ogni ordinale iniziale infinito coincide con ω_α per qualche ordinale α .

Assumendo l'assioma della scelta, il principio del buon ordinamento e il Teorema 1.26 permettono di formalizzare la nozione generale di cardinalità.

DEFINIZIONE 1.32. Sia X un insieme. Se X è finito, la *cardinalità* di X è l'unico numero naturale $n \in \mathbb{N}$ tale che $X \equiv n$ e in tal caso scriviamo $|X| = n$. Se invece X è infinito,

l'insieme di tutti gli ordinali a esso equipotenti è non vuoto e ammette un elemento minimo (Teorema 1.25). Tale ordinale è necessariamente iniziale, pertanto coincide con ω_α per un unico $\alpha \in \mathcal{O}$. Definiamo il *cardinale* di X come tale ordinale iniziale, scriviamo $|X| = \omega_\alpha$ e diciamo che X ha cardinalità $\aleph_\alpha$, identificando spesso un insieme con il suo cardinale o con la sua cardinalità.

In particolare, l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, corrispondendo, con l'ordine usuale, all'ordinale iniziale ω_0 , ha cardinalità $\aleph_0$. Indichiamo invece con $\mathfrak{c}$ la cardinalità di $\mathbb{R}$, detta *cardinalità del continuo*. Poiché per il teorema di Cantor (Teorema 1.3 oppure Teorema 1.5 e Proposizione 1.7) $\aleph_0 < \mathfrak{c}$, sappiamo che deve essere $\aleph_1 \leq \mathfrak{c}$. Tuttavia, come dimostrato dai lavori di Gödel [9] e Cohen [6, 7], non è possibile stabilire in ZFC se l'insieme dei reali abbia cardinalità $\aleph_1$ o maggiore.

ASSIOMA 1.33 (Ipotesi del Continuo). *Non esiste alcun sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ tale che*

$$\aleph_0 < |X| < \mathfrak{c}.$$

Equivalentemente, ogni sottoinsieme infinito di $\mathbb{R}$ è numerabile oppure ha cardinalità $\mathfrak{c}$, cioè $\mathfrak{c} = \aleph_1$.

1.3. L'operazione di Suslin

Concludiamo questo capitolo introduttivo presentando l'operazione di Suslin che generalizza le operazioni di unione e intersezione numerabili. Questo strumento, pur essendo di natura insiemistica e combinatoria, si rivelerà centrale nello studio degli insiemi analitici in spazi polacchi.

Se X è un insieme e $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi di X , indichiamo con $\mathcal{F}_\sigma$ la famiglia delle unioni numerabili di elementi di $\mathcal{F}$, con $\mathcal{F}_\delta$ la famiglia delle intersezioni numerabili e indichiamo rispettivamente con $\mathcal{F}_s$ e $\mathcal{F}_d$ le famiglie delle unioni e delle intersezioni finite. Infine, con $\neg\mathcal{F}$ indichiamo la famiglia dei complementari in X degli elementi di $\mathcal{F}$.

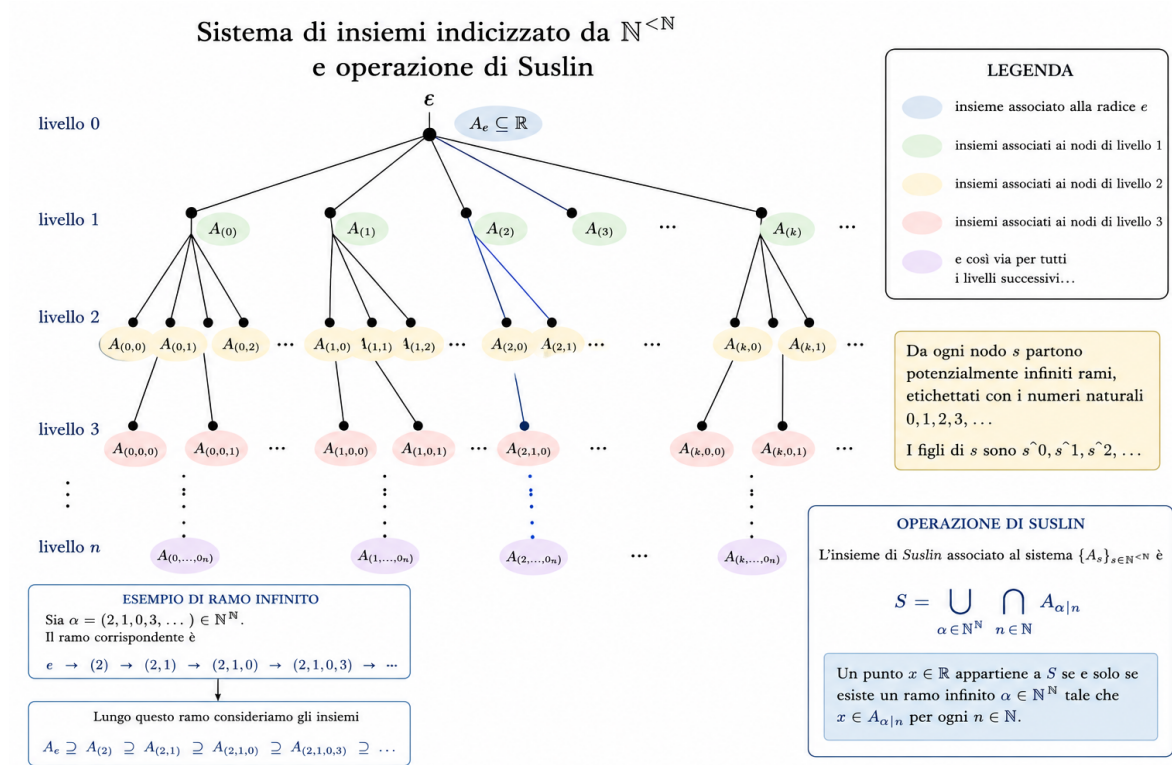
DEFINIZIONE 1.34. Se A è un insieme non vuoto, indichiamo con $A^{<\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni finite di elementi di A , inclusa la successione vuota e . Data una successione $s = (s_0, \dots, s_{n-1}) \in A^{<\mathbb{N}}$ denotiamo con $|s| = n$ la sua lunghezza e, per ogni intero $m \leq n$, poniamo $s|m = (s_0, \dots, s_{m-1})$. Diciamo che una successione t è un'estensione di s e scriviamo $s \preceq t$, se $s = t|m$ per qualche $m \leq |t|$, adottando la notazione $s \prec t$ nel caso in cui l'estensione sia propria (ovvero $s \neq t$). Due successioni si dicono *compatibili* se una è un'estensione dell'altra, altrimenti si dicono *incompatibili*. Date due successioni $s = (s_0, \dots, s_{n-1})$ e $t = (t_0, \dots, t_{m-1})$, la loro concatenazione è definita come $\widehat{s}t = (s_0, \dots, s_{n-1}, t_0, \dots, t_{m-1})$. In particolare, se $a \in A$, scriveremo per semplicità $\widehat{s}a$ al posto di $\widehat{s}(a)$. Infine, data una successione infinita $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$ e un intero $k \in \mathbb{N}$, poniamo $\alpha|k = (\alpha_0, \dots, \alpha_{k-1})$ e se $s \in A^{<\mathbb{N}}$ scriviamo $s \prec \alpha$ se $s = \alpha|k$ per qualche $k \in \mathbb{N}$.

DEFINIZIONE 1.35. Sia A un insieme non vuoto e sia X un insieme. Una famiglia $\{A_s \mid s \in A^{<\mathbb{N}}\}$ di sottoinsiemi di X si dice *sistema di insiemi*. Un sistema $\{A_s \mid s \in A^{<\mathbb{N}}\}$ si dice *regolare* se è monotono rispetto all'estensione delle successioni, ovvero se per ogni $s, t \in A^{<\mathbb{N}}$ tali che $s \preceq t$ si ha $A_t \subseteq A_s$.

DEFINIZIONE 1.36. Sia A un insieme non vuoto, X un insieme e sia $\{A_s \mid s \in A^{<\mathbb{N}}\}$ un sistema di insiemi di X . Definiamo l'*operazione di Suslin* $\mathcal{A}_A$ applicata al sistema come l'insieme

$$\mathcal{A}_A(\{A_s\}) = \bigcup_{\alpha \in A^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\alpha|n}.$$

Se $A = \mathbb{N}$, l'operazione si denota semplicemente con $\mathcal{A}$.



Se $\mathcal{F}$ è una famiglia di sottoinsiemi di X , definiamo la famiglia $\mathcal{A}_A(\mathcal{F})$ come l'insieme di tutti i risultati possibili dell'operazione $\mathcal{A}_A$ applicata a sistemi di insiemi di $\mathcal{F}$, ovvero

$$\mathcal{A}_A(\mathcal{F}) = \{\mathcal{A}_A(\{A_s\}) \mid A_s \in \mathcal{F} \text{ per ogni } s \in A^{<\mathbb{N}}\}.$$

Sebbene l'operazione di Suslin sia definita per schemi arbitrari, lavorare con sistemi regolari è spesso più conveniente. Inoltre, è facile dimostrare che

$$\mathcal{A}_A(\{A_s\}) = \mathcal{A}_A(\{B_s\}),$$

dove

$$B_s = \bigcap_{i \leq |s|} A_{s|_i}$$

è la regolarizzazione del sistema originale. Gli insiemi B_s sono ottenuti tramite intersezioni finite, pertanto, se l'operazione è applicata a una famiglia $\mathcal{F}$ chiusa per intersezioni finite (cioè $\mathcal{F} = \mathcal{F}_d$) allora $\mathcal{A}_A(\mathcal{F})$ coincide con la classe degli insiemi ottenibili applicando l'operazione di Suslin ai sistemi regolari di $\mathcal{F}$. Va inoltre osservato che, in generale, l'operazione di Suslin coinvolge unioni non numerabili di insiemi e che è strettamente connessa all'operazione di proiezione, come mostrato dal seguente risultato.

PROPOSIZIONE 1.37. Sia X un insieme e sia $\{A_s \mid s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ un sistema di sottoinsiemi di X . Per ogni $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ poniamo

$$\Sigma(s) = \{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid s \prec \alpha\}$$

e quando $s = (s_0, \dots, s_{k-1})$, scriveremo anche $\Sigma(s_0, \dots, s_{k-1})$ al posto di $\Sigma(s)$. In particolare, $\Sigma(n)$ denoterà $\Sigma((n))$. Sia

$$B = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{|s|=k} (A_s \times \Sigma(s)).$$

Allora $\mathcal{A}(\{A_s\}) = \pi_X(B)$, dove $\pi_X : X \times \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow X$ è la proiezione sulla prima coordinata.

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo preliminarmente che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, gli insiemi $\{\Sigma(s) \mid |s| = k\}$ sono una partizione dell'insieme $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Di conseguenza se $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, esiste un unico s di lunghezza k tale che $\alpha \in \Sigma(s)$ ed esso coincide con $\alpha|k$.

Proviamo innanzitutto che $\pi_X(B) \subseteq \mathcal{A}(\{A_s\})$. Se $x \in \pi_X(B)$ allora esiste una successione $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tale che $(x, \alpha) \in B$ che quindi appartiene all'unione $\bigcup_{|s|=k} (A_s \times \Sigma(s))$ per ogni k . Poiché l'unico $\Sigma(s)$ (con $|s| = k$) che contiene α è $\Sigma(\alpha|k)$ necessariamente si ha $x \in A_{\alpha|k}$. Essendo questo vero per ogni $k \in \mathbb{N}$, otteniamo che $x \in \bigcap_k A_{\alpha|k}$, dunque $x \in \mathcal{A}(\{A_s\})$.

Viceversa, sia $x \in \mathcal{A}(\{A_s\})$. Allora esiste una successione $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tale che $x \in A_{\alpha|k}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per ogni k , poiché banalmente $\alpha \in \Sigma(\alpha|k)$, si ha che $(x, \alpha) \in A_{\alpha|k} \times \Sigma(\alpha|k)$. Di conseguenza, (x, α) appartiene all'unione $\bigcup_{|s|=k} (A_s \times \Sigma(s))$ per ogni k , dunque a B . Poiché $(x, \alpha) \in B$, concludiamo che $x = \pi_X((x, \alpha)) \in \pi_X(B)$. $\square$

TEOREMA 1.38. Siano X un insieme e sia $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di X tale che $X \in \mathcal{F}$. Allora

$$\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F}), \quad \mathcal{F}_\sigma \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F}), \quad \mathcal{F}_\delta \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F}).$$

DIMOSTRAZIONE. Per la prima inclusione, sia $E \in \mathcal{F}$. Definiamo un sistema costante ponendo $A_s = E$ per ogni $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Se $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ allora si ha $\bigcap_n A_{\alpha|n} = E$. Di conseguenza, l'unione su tutti gli α restituisce l'insieme E .

Per la seconda inclusione, sia $E \in \mathcal{F}_\sigma$. Allora $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$, con $E_k \in \mathcal{F}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Definiamo A_s come segue. Poniamo $A_e = X$ mentre per ogni successione s non vuota, poniamo $A_s = E_{s_0}$. Sia ora $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Se $\alpha(0) = k$, allora per ogni $n \geq 1$ si ha $A_{\alpha|n} = E_k$. L'operazione di Suslin diventa quindi

$$\mathcal{A}(\{A_s\}) = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} E_{\alpha(0)} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k = E.$$

Infine, per la terza inclusione, sia $E \in \mathcal{F}_\delta$. Allora $E = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k$, con $E_k \in \mathcal{F}$. Per ogni $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, poniamo $A_s = E_{|s|}$. Per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, la successione degli insiemi $A_{\alpha|0}, A_{\alpha|1}, A_{\alpha|2}, \dots$ corrisponde alla successione $E_0, E_1, E_2, \dots$. Pertanto, per ogni α , l'intersezione

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\alpha|n}$$

coincide con $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} E_n = E$. Da ciò segue che anche l'unione su tutti i possibili α restituisce E . $\square$

Concludiamo il capitolo con un'importante proprietà di regolarità dell'operazione di Suslin: la sua idempotenza. Questa proprietà, insieme al Teorema 1.38, permette di mostrare che, per ogni famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di X tale che $X \in \mathcal{F}$, la famiglia $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ è chiusa per unioni e intersezioni numerabili.

TEOREMA 1.39. Sia X un insieme e $\mathcal{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di X . Allora

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F})) = \mathcal{A}(\mathcal{F}).$$

DIMOSTRAZIONE. L'inclusione $\mathcal{A}(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))$ segue dal fatto che $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Dimostriamo l'inclusione opposta. Sia $E \in \mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F}))$. Allora esiste un sistema $\{A_s \mid s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ di elementi di $\mathcal{A}(\mathcal{F})$ tale che

$$E = \bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} A_{\alpha|m}.$$

Poiché $A_s \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$, per ogni $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ esiste un sistema $\{B_{s,t} \mid t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ di elementi di $\mathcal{F}$ tale che

$$A_s = \bigcup_{\gamma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{s,\gamma|n}.$$

Dunque $x \in E$ se e solo se esistono $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e una successione $(\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ tali che, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, si abbia

$$x \in B_{\alpha|m, \gamma_m|n}.$$

Vogliamo ora codificare simultaneamente la successione α e la successione di successioni $(\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mediante una sola successione $\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Sia $u : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la bigezione definita da

$$u(m, n) = 2^m(2n + 1) - 1.$$

Indichiamo con

$$(\ell(k), r(k))$$

l'unica coppia di naturali tale che

$$u(\ell(k), r(k)) = k.$$

Definiamo ora una bigezione

$$v : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

nel modo seguente. Se $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e $(\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, poniamo

$$v(\alpha, (\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}}) = \beta,$$

dove, per ogni $k \in \mathbb{N}$,

$$\beta(k) = u(\alpha(k), \gamma_{\ell(k)}(r(k))).$$

La funzione v è bigettiva: infatti, da β si recuperano α e $(\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ponendo

$$\alpha(k) = \ell(\beta(k))$$

e

$$\gamma_m(n) = r(\beta(u(m, n))).$$

Definiamo adesso due applicazioni

$$\varphi, \psi : \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}.$$

Sia $s = (s_0, \dots, s_{q-1}) \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ e sia (m, n) l'unica coppia tale che $q = u(m, n)$. Poniamo

$$\varphi(s) = (\ell(s_0), \dots, \ell(s_{m-1}))$$

e

$$\psi(s) = (r(s_{u(m,0)}), \dots, r(s_{u(m,n-1)})).$$

Nel caso $m = 0$ oppure $n = 0$ le rispettive successioni sono da intendersi come successioni vuote. Le definizioni sono ben poste poiché $m \leq u(m, n)$ e, per ogni $i < n$, si ha $u(m, i) < u(m, n)$.

Mostriamo la proprietà fondamentale di φ e ψ . Siano $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $(\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ e sia

$$\beta = v(\alpha, (\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}}).$$

Fissati $m, n \in \mathbb{N}$, poniamo $q = u(m, n)$ e $s = \beta|q$. Allora

$$\varphi(s) = \alpha|m$$

e

$$\psi(s) = \gamma_m|n.$$

Infatti, per ogni $i < m$ si ha

$$\ell(s_i) = \ell(\beta(i)) = \ell(u(\alpha(i), \gamma_{\ell(i)}(r(i)))) = \alpha(i),$$

quindi $\varphi(s) = \alpha|m$. Inoltre, per ogni $i < n$,

$$r(s_{u(m,i)}) = r(\beta(u(m,i))) = r(u(\alpha(u(m,i)), \gamma_m(i))) = \gamma_m(i),$$

dunque $\psi(s) = \gamma_m|n$.

Definiamo ora un sistema $\{C_s \mid s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ di elementi di $\mathcal{F}$ ponendo

$$C_s = B_{\varphi(s), \psi(s)}.$$

Poiché ogni $B_{s,t}$ appartiene a $\mathcal{F}$, anche ogni C_s appartiene a $\mathcal{F}$.

Mostriamo che

$$E = \mathcal{A}(\{C_s\}).$$

Sia $x \in E$. Allora esistono $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e una successione $(\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ tali che, per ogni $m, n \in \mathbb{N}$,

$$x \in B_{\alpha|m, \gamma_m|n}.$$

Sia

$$\beta = v(\alpha, (\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}}).$$

Fissato $k \in \mathbb{N}$, siano $m, n \in \mathbb{N}$ tali che $k = u(m, n)$ e poniamo $s = \beta|k$. Per quanto appena dimostrato,

$$\varphi(s) = \alpha|m \quad \text{e} \quad \psi(s) = \gamma_m|n.$$

Quindi

$$x \in B_{\alpha|m, \gamma_m|n} = B_{\varphi(s), \psi(s)} = C_s = C_{\beta|k}.$$

Poiché questo vale per ogni $k \in \mathbb{N}$, segue che

$$x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_{\beta|k}.$$

Dunque $x \in \mathcal{A}(\{C_s\})$.

Viceversa, sia $x \in \mathcal{A}(\{C_s\})$. Allora esiste $\beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tale che

$$x \in C_{\beta|k}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Poiché v è una bigezione, esistono $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ e una successione $(\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{N}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$ tali che

$$\beta = v(\alpha, (\gamma_m)_{m \in \mathbb{N}}).$$

Fissati arbitrariamente $m, n \in \mathbb{N}$, poniamo $k = u(m, n)$ e $s = \beta|k$. Allora, per le proprietà di φ e ψ ,

$$\varphi(s) = \alpha|m \quad \text{e} \quad \psi(s) = \gamma_m|n.$$

Pertanto

$$x \in C_s = B_{\varphi(s), \psi(s)} = B_{\alpha|m, \gamma_m|n}.$$

Essendo questo vero per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, segue che $x \in E$.

Abbiamo dunque mostrato che $E = \mathcal{A}(\{C_s\})$ con $C_s \in \mathcal{F}$ per ogni $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Quindi $E \in \mathcal{A}(\mathcal{F})$ e pertanto

$$\mathcal{A}(\mathcal{A}(\mathcal{F})) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{F}).$$

La tesi segue. □

CAPITOLO 2

Richiami di topologia

In questo capitolo richiamiamo alcune nozioni fondamentali di topologia descrittiva, con particolare attenzione agli spazi polacchi.

Nella prima parte del capitolo introduciamo gli spazi polacchi e alcune loro proprietà, caratterizzandone i sottospazi. Successivamente, discuteremo il teorema di Cantor–Bendixson, un risultato fondamentale in topologia le cui conseguenze offrono una risposta parziale all’ipotesi del continuo.

Tratteremo poi un importante teorema di trasferimento per lo spazio di Baire. Infine, concluderemo il capitolo introducendo la nozione di grandezza topologica attraverso il teorema della categoria di Baire.

Per tutto questo capitolo faremo riferimento ai testi di Kechris [15] e Srivastava [21].

2.1. Spazi polacchi

DEFINIZIONE 2.1. Uno spazio topologico (X, τ) si dice *completamente metrizzabile* se esiste una metrica d su X tale che lo spazio metrico (X, d) è completo e d induce la topologia τ su X . Uno spazio topologico separabile e completamente metrizzabile si dice *polacco*.

Alcuni esempi di spazi polacchi si ottengono osservando come questa proprietà si conservi sotto alcune operazioni topologiche fondamentali. Nello specifico, il completamento di uno spazio metrico separabile è sempre uno spazio polacco, così come lo è ogni sottospazio chiuso di un polacco. Inoltre, il prodotto e la somma disgiunta di una successione di spazi polacchi producono a loro volta spazi polacchi; si vedano, ad esempio, Kechris [15, Sez. 3.A] e Srivastava [21, Cap. 2].

Di conseguenza, sono polacchi gli spazi $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ dotati delle topologie usuali, i prodotti finiti $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ e i loro prodotti numerabili $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ e $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Lo stesso vale per l’intervallo unitario $\mathbb{I} = [0, 1]$ e il cerchio unitario $\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{C} \mid |x| = 1\}$, da cui segue che il cubo n –dimensionale $\mathbb{I}^n$, il toro $\mathbb{T}^n$ e il toro infinito $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ sono polacchi così come lo è il cubo di Hilbert $\mathbb{H} = \mathbb{I}^{\mathbb{N}}$.

Inoltre, ogni insieme numerabile A dotato della topologia discreta è uno spazio polacco e di conseguenza lo è anche il prodotto numerabile $A^{\mathbb{N}}$. Particolare rilevanza assumono i casi in cui $A = 2 = \{0, 1\}$ e $A = \mathbb{N}$: nel primo caso lo spazio polacco $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$ si chiama *spazio di Cantor*, mentre lo spazio polacco $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, che giocherà un ruolo rilevante in tutta la tesi, si dice *spazio di Baire*.

OSSERVAZIONE 2.2. Lo spazio di Baire $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ è omeomorfo allo spazio degli irrazionali $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Infatti, consideriamo dapprima lo spazio $(0, 1) \setminus \mathbb{Q}$. Ogni numero irrazionale $x \in (0, 1)$ ammette uno sviluppo in frazione continua infinito e unico della forma

$$x = [0; a_0, a_1, a_2, \dots],$$

dove $a_n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Definiamo allora $\Phi : \mathcal{N} \rightarrow (0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ ponendo

$$\Phi(\alpha) = [0; \alpha(0) + 1, \alpha(1) + 1, \alpha(2) + 1, \dots].$$

Per l'unicità dello sviluppo in frazione continua, l'applicazione Φ è bigettiva. Inoltre, fissare i primi termini della successione α equivale a fissare i primi termini della frazione continua, cioè a restringere $\Phi(\alpha)$ a un intervallo fondamentale. Ne segue che Φ è continua. Lo stesso argomento mostra che anche Φ^{-1} è continua. Dunque

$$\mathcal{N} \cong (0, 1) \setminus \mathbb{Q}.$$

Infine, $(0, 1) \setminus \mathbb{Q}$ è omeomorfo a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: infatti, un isomorfismo d'ordine tra $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ e $\mathbb{Q}$ si estende a un omeomorfismo crescente da $(0, 1)$ su $\mathbb{R}$ che manda $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$ su $\mathbb{Q}$. Restringendo tale omeomorfismo agli irrazionali otteniamo

$$(0, 1) \setminus \mathbb{Q} \cong \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Pertanto

$$\mathcal{N} \cong \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Infine, anche gli spazi di Banach separabili sono polacchi. Tra questi rientrano, oltre agli spazi di dimensione finita $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$, gli spazi di successioni ℓ^p e c_0 , gli spazi L^p separabili con $1 \leq p < +\infty$ e lo spazio $C(K)$ delle funzioni continue su un compatto metrico K , munito della norma uniforme; per questi esempi si veda, ad esempio [5].

Il teorema seguente, dovuto ad Alexandrov, caratterizza i sottospazi completamente metrizzabili degli spazi metrizzabili; si vedano Kechris [15, Sez. 3.C] e Srivastava [21, Cap. 2], per una dimostrazione.

TEOREMA 2.3 (Alexandrov). *Siano (X, τ) uno spazio metrizzabile e $Y \subseteq X$ con (Y, τ_Y) completamente metrizzabile. Allora Y è di tipo G_δ in X . Viceversa, se (X, τ) è completamente metrizzabile e $Y \subseteq X$ è di tipo G_δ , allora (Y, τ_Y) è completamente metrizzabile.*

2.2. Il teorema di Cantor–Bendixson

In questa sezione dimostriamo il teorema di Cantor–Bendixson e mostriamo che gli spazi polacchi godono della proprietà dell'insieme perfetto. In particolare, proveremo il risultato chiave mediante una tecnica tipica della teoria descrittiva, usando la nozione di sistema introdotta nel primo capitolo. Iniziamo con alcuni semplici risultati preliminari; per questa parte facciamo riferimento a Kechris [15, Sez. 6.B] e Srivastava [21, Sez. 2.6].

TEOREMA 2.4 (Teorema dell'intersezione di Cantor). *Uno spazio metrico (X, d) è completo se e solo se per ogni successione non crescente $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di sottoinsiemi chiusi e non vuoti di X tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_n) = 0$, l'intersezione $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ consiste di un unico punto.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (X, d) uno spazio metrico completo e sia $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione decrescente di chiusi non vuoti con $\text{diam}(F_n) \rightarrow 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $x_n \in F_n$. Mostriamo che la successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy. Fissato $\varepsilon > 0$, sia $N \in \mathbb{N}$ tale che $\text{diam}(F_N) < \varepsilon$. Allora, per ogni $n, m \geq N$, essendo $F_n, F_m \subseteq F_N$ si ha $x_n, x_m \in F_N$ da cui $d(x_n, x_m) \leq \text{diam}(F_N) < \varepsilon$ e la successione è di Cauchy. Poiché lo spazio è completo, la successione converge a un punto $x \in X$. Sia $k \in \mathbb{N}$. Per ogni $n \geq k$, si ha $x_n \in F_n \subseteq F_k$ e poiché F_k è chiuso, contiene x e quindi $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Se poi y è un altro punto dell'intersezione, allora $x, y \in F_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque, $d(x, y) \leq \text{diam}(F_n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, da cui $d(x, y) = 0$ e quindi $x = y$.

Viceversa, supponiamo che valga la proprietà dell'intersezione. Sia $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in X . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$F_n = \overline{\{x_m \mid m \geq n\}}.$$

Allora, gli insiemi F_n sono chiusi, non vuoti e formano una successione non crescente. Inoltre, poiché la successione è di Cauchy, i loro diametri tendono a zero. Per ipotesi, l'intersezione $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ contiene un unico punto x . Poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $x \in F_n$ e banalmente $x_n \in F_n$, deduciamo che $d(x_n, x) \leq \text{diam}(F_n) \rightarrow 0$. Dunque $x_n \rightarrow x$. $\square$

LEMMA 2.5. *Siano X uno spazio topologico compatto, Y uno spazio di Hausdorff e $f : X \rightarrow Y$ una funzione continua. Se $F \subseteq X$ è un sottoinsieme chiuso (rispettivamente di tipo F_σ), allora la sua immagine $f(F)$ è un sottoinsieme chiuso (rispettivamente di tipo F_σ) in Y .*

DIMOSTRAZIONE. Se F è chiuso nel compatto X , allora F è compatto. Poiché f è continua, l'immagine $f(F)$ è compatta in Y . Essendo Y uno spazio di Hausdorff, ogni suo sottoinsieme compatto è chiuso, da cui la tesi. Nel caso in cui F sia di tipo F_σ , scriviamo

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n,$$

con F_n chiuso in X , per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per quanto appena dimostrato, ogni $f(F_n)$ è chiuso in Y . Poiché

$$f(F) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(F_n),$$

segue che $f(F)$ è di tipo F_σ . $\square$

DEFINIZIONE 2.6. Un punto x di uno spazio topologico si dice *di accumulazione* se ogni intorno aperto U di x contiene un $y \in X$ diverso da x , mentre si dice *isolato* se non è un punto d'accumulazione. Infine, uno spazio topologico si dice *perfetto* se non possiede punti isolati.

TEOREMA 2.7. *Ogni spazio polacco, perfetto e non vuoto X possiede un sottospazio omeomorfo allo spazio di Cantor $\mathcal{C}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia d una metrica completa compatibile con la topologia di X . Possiamo supporre, senza perdita di generalità, che $d \leq 1$. Costruiamo un sistema $\{U_s \mid s \in 2^{<\mathbb{N}}\}$ di sottoinsiemi aperti non vuoti di X tale che, per ogni $s \in 2^{<\mathbb{N}}$, si abbia:

- $\text{diam}(\overline{U_s}) \leq 2^{-|s|}$;
- $\overline{U_{s \frown 0}} \cup \overline{U_{s \frown 1}} \subseteq U_s$;
- $\overline{U_{s \frown 0}} \cap \overline{U_{s \frown 1}} = \emptyset$.

Poniamo $U_e = X$. Allora $\text{diam}(\overline{U_e}) = \text{diam}(X) \leq 1$. Supponiamo ora di aver definito U_s . Poiché U_s è un aperto non vuoto e X è perfetto, esistono due punti distinti $x, y \in U_s$. Essendo U_s aperto e X metrizzabile, possiamo scegliere due palle aperte non vuote $U_{s \frown 0}$ e $U_{s \frown 1}$, centrate rispettivamente in x e in y , tali che

$$\text{diam}(\overline{U_{s \frown i}}) \leq 2^{-(|s|+1)}$$

per $i = 0, 1$,

$$\overline{U_{s \frown i}} \subseteq U_s$$

per $i = 0, 1$ e

$$\overline{U_{s \frown 0}} \cap \overline{U_{s \frown 1}} = \emptyset.$$

Questo conclude la costruzione del sistema.

Per ogni $\alpha \in \mathcal{C}$, la successione $\{\overline{U_{\alpha|n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente, formata da chiusi non vuoti e ha

diametri che tendono a zero. Per il Teorema 2.4, l'intersezione

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U_{\alpha|n}}$$

contiene un solo punto, che denotiamo con $f(\alpha)$. Otteniamo così una funzione

$$f : \mathcal{C} \rightarrow X.$$

Mostriamo che f è iniettiva. Siano $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$ con $\alpha \neq \beta$ e sia n il minimo intero tale che $\alpha(n) \neq \beta(n)$. Allora $\alpha|n = \beta|n$, mentre $\alpha|(n+1) \neq \beta|(n+1)$. Per costruzione,

$$f(\alpha) \in \overline{U_{\alpha|(n+1)}} \quad \text{e} \quad f(\beta) \in \overline{U_{\beta|(n+1)}}.$$

Poiché le due chiusure sono disgiunte, segue che $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Dunque f è iniettiva.

Mostriamo ora che f è continua. Sia $\alpha \in \mathcal{C}$ e sia $\varepsilon > 0$. Ricordiamo che gli insiemi della forma

$$\Sigma(s) = \{\beta \in \mathcal{C} \mid s \prec \beta\}$$

sono aperti e costituiscono una base di $\mathcal{C}$. Scegliamo $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\text{diam}(\overline{U_{\alpha|n}}) < \varepsilon.$$

Allora, per ogni $\beta \in \Sigma(\alpha|n)$, si ha

$$f(\alpha), f(\beta) \in \overline{U_{\alpha|n}},$$

quindi

$$d(f(\alpha), f(\beta)) \leq \text{diam}(\overline{U_{\alpha|n}}) < \varepsilon.$$

Ne segue che f è continua in α . Poiché α è arbitrario, f è continua.

Infine, poiché $\mathcal{C}$ è compatto e X è uno spazio di Hausdorff, la funzione continua e iniettiva $f : \mathcal{C} \rightarrow X$ è un omeomorfismo con la sua immagine. Pertanto X contiene un sottospazio omeomorfo allo spazio di Cantor $\mathcal{C}$. $\square$

In particolare, se X è uno spazio polacco, perfetto e non vuoto, allora ha cardinalità del continuo, cioè $|X| = 2^{\aleph_0}$. Infatti, per il Teorema 2.7 appena mostrato X contiene un sottospazio omeomorfo a $\mathcal{C}$ e quindi $2^{\aleph_0} = |\mathcal{C}| \leq |X|$. D'altra parte, la separabilità e la metrizzabilità di X (in particolare l'essere uno spazio di Hausdorff) implicano che $|X| \leq 2^{\aleph_0}$ in quanto, detta $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerabile, la funzione che a ogni $x \in X$ associa l'insieme degli elementi della base a cui x appartiene è iniettiva.

DEFINIZIONE 2.8. Diciamo che uno spazio polacco gode della *proprietà dell'insieme perfetto* se è numerabile oppure contiene un sottoinsieme chiuso, perfetto e non vuoto.

Per quanto appena detto, dunque, gli spazi polacchi che godono della proprietà dell'insieme perfetto non possono costituire un controesempio all'ipotesi del continuo, dovendo avere necessariamente cardinalità numerabile o del continuo.

Il seguente teorema classico è trattato, ad esempio, in Kechris [15, Sez. 6.B] e Srivastava [21, Sez. 2.6].

TEOREMA 2.9 (Cantor–Bendixson). Sia (X, τ) uno spazio polacco. Allora esistono un chiuso e perfetto P e un aperto numerabile C tali che $X = P \cup C$ e $P \cap C = \emptyset$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerabile di X e poniamo

$$C = \bigcup \{U_n \mid U_n \text{ è numerabile}\}.$$

Allora C è aperto e numerabile. Poniamo $P = X \setminus C$. Poiché C è aperto, P è chiuso. Mostriamo che P non ha punti isolati. Supponiamo per assurdo che $x \in P$ sia isolato in P . Allora esiste un aperto U di X tale che

$$U \cap P = \{x\}.$$

Scegliamo un elemento della base U_n tale che

$$x \in U_n \subseteq U.$$

Allora,

$$U_n \setminus \{x\} \subseteq C.$$

Poiché C è numerabile, anche U_n è numerabile. Per definizione di C , segue che $U_n \subseteq C$. Ma $x \in U_n$, dunque $x \in C$, contro $x \in P$. Quindi P non ha punti isolati. $\square$

In particolare, gli spazi polacchi non numerabili contengono un sottospazio chiuso, perfetto e non vuoto. Quindi godono della proprietà dell'insieme perfetto e, per quanto precedentemente detto, hanno cardinalità $2^{\aleph_0}$. Lo stesso vale per i sottospazi non numerabili di tipo G_δ o F_σ di uno spazio polacco. Infatti, ogni sottospazio G_δ di uno spazio polacco è polacco per il Teorema 2.3; se non è numerabile, contiene quindi un sottospazio omeomorfo a $\mathbb{C}$ per il Teorema 2.7. Tale sottospazio è compatto, dunque chiuso nello spazio ambiente, essendo quest'ultimo uno spazio di Hausdorff. Se invece

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

è di tipo F_σ (con F_n chiuso per ogni $n \in \mathbb{N}$) ed è non numerabile, allora almeno uno degli F_n è non numerabile. Tale F_n è chiuso in uno spazio polacco, dunque è polacco e contiene un sottoinsieme chiuso, perfetto e non vuoto.

2.3. Teoremi di trasferimento

In questa sezione dimostriamo un importante teorema di trasferimento che permette di legare lo spazio di Baire $\mathcal{N}$ agli spazi polacchi e di utilizzare su questi ultimi le tecniche basate su successioni finite e sistemi indicizzati da $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ introdotti nel primo capitolo. Cominciamo con alcuni lemmi; per questa parte facciamo riferimento a Kechris [15, Sez. 7.E] e Srivastava [21, Sez. 2.6].

DEFINIZIONE 2.10. Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un sottoinsieme $R \subseteq X$ si dice *retrato* di X se esiste una funzione continua $\rho : X \rightarrow R$ tale che $\rho(x) = x$ per ogni $x \in R$.

LEMMA 2.11. Sia A un insieme numerabile dotato della topologia discreta. Allora ogni sottoinsieme chiuso e non vuoto $F \subseteq A^{\mathbb{N}}$ è un retratto di $A^{\mathbb{N}}$.

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $s \in A^{<\mathbb{N}}$, gli insiemi

$$\Sigma(s) = \{\alpha \in A^{\mathbb{N}} \mid s \prec \alpha\}$$

costituiscono, per definizione, una base della topologia prodotto di $A^{\mathbb{N}}$. Fissiamo ora, per ogni $s \in A^{<\mathbb{N}}$ tale che $F \cap \Sigma(s) \neq \emptyset$, un $x_s \in F \cap \Sigma(s)$ e definiamo una funzione $\rho : A^{\mathbb{N}} \rightarrow F$ come segue. Se $\alpha \in F$, poniamo $\rho(\alpha) = \alpha$ mentre se $\alpha \notin F$, essendo $A^{\mathbb{N}} \setminus F$ un aperto, esiste

un $k \in \mathbb{N}$ tale che $\Sigma(\alpha|k) \subseteq A^\mathbb{N} \setminus F$ definitivamente, cioè tale che $F \cap \Sigma(\alpha|j) = \emptyset$ per ogni $j \geq k$. Sia k_α il massimo numero naturale tale che $F \cap \Sigma(\alpha|k_\alpha) \neq \emptyset$ (tale massimo esiste poiché per $k = 0$ l'insieme $\Sigma(\alpha|0) = A^\mathbb{N}$ interseca F) e poniamo in questo caso $\rho(\alpha) = x_{\alpha|k_\alpha}$. Per definizione, $\rho(A^\mathbb{N}) \subseteq F$ e ρ è l'identità su F . Mostriamo che ρ è continua. Se $\alpha \notin F$, allora, per ogni $\gamma \in \Sigma(\alpha|k_\alpha + 1)$, si ha che $\Sigma(\gamma|k_\alpha + 1) = \Sigma(\alpha|k_\alpha + 1)$ non interseca F , mentre $\Sigma(\gamma|k_\alpha) = \Sigma(\alpha|k_\alpha)$ interseca F . Pertanto $k_\gamma = k_\alpha$ e di conseguenza $\rho(\gamma) = x_{\gamma|k_\gamma} = x_{\alpha|k_\alpha} = \rho(\alpha)$. Essendo ρ costante su un intorno di α , essa è continua in α . Assumiamo ora $\alpha \in F$, quindi $\rho(\alpha) = \alpha$. Fissiamo un suo intorno aperto $\Sigma(\alpha|k)$ e mostriamo che $\rho(\Sigma(\alpha|k)) \subseteq \Sigma(\alpha|k)$. Sia $\gamma \in \Sigma(\alpha|k)$. Se $\gamma \in F$, allora $\rho(\gamma) = \gamma \in \Sigma(\alpha|k)$. Se $\gamma \notin F$, poiché $\alpha \in F$ e $\alpha \in \Sigma(\gamma|k)$ (in quanto $\gamma|k = \alpha|k$), l'insieme $F \cap \Sigma(\gamma|k)$ non è vuoto. Per definizione del massimo si ha quindi $k_\gamma \geq k$. Pertanto

$$\rho(\gamma) = x_{\gamma|k_\gamma} \in \Sigma(\gamma|k_\gamma) \subseteq \Sigma(\gamma|k) = \Sigma(\alpha|k).$$

Dunque ρ è continua in ogni punto di $A^\mathbb{N}$, ha valori in F ed è l'identità su F . Pertanto F è un retratto di $A^\mathbb{N}$. $\square$

DEFINIZIONE 2.12. Sia A un insieme numerabile dotato della topologia discreta e sia (X, τ) uno spazio polacco. Fissata una metrica completa d compatibile con τ , un sistema $\{A_s \mid s \in A^{<\mathbb{N}}\}$ di sottoinsiemi di X si dice *sistema convergente* se soddisfa le seguenti proprietà:

- $\overline{A_{s \frown a}} \subseteq A_s$ per ogni $s \in A^{<\mathbb{N}}$ e $a \in A$;
- per ogni $\alpha \in A^\mathbb{N}$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(A_{\alpha|n}) = 0$;
- per ogni $s, t \in A^{<\mathbb{N}}$ incompatibili si ha $A_s \cap A_t = \emptyset$.

Allora, per ogni $\alpha \in A^\mathbb{N}$, l'intersezione

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\alpha|n} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_{\alpha|n}}$$

contiene al più un punto. Definiamo il *dominio di convergenza* del sistema ponendo

$$D = \left\{ \alpha \in A^\mathbb{N} \mid \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\alpha|n} \neq \emptyset \right\}.$$

La funzione $f : D \rightarrow X$ che associa a ogni $\alpha \in D$ l'unico punto dell'intersezione

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\alpha|n}$$

si dice *funzione associata* al sistema.

Nel caso in cui $A = 2$ il sistema viene detto *schema di Cantor*, mentre nel caso in cui $A = \mathbb{N}$ viene detto *schema di Lusin*.

LEMMA 2.13. Sia $\{A_s \mid s \in A^{<\mathbb{N}}\}$ un sistema convergente di sottoinsiemi di uno spazio polacco (X, τ) e sia $f : D \rightarrow X$ la funzione associata. Allora D è chiuso in $A^\mathbb{N}$ e f è iniettiva e continua. Inoltre, se

$$A_e = X \quad e \quad A_s = \bigcup_{a \in A} A_{s \frown a}$$

per ogni $s \in A^{<\mathbb{N}}$, allora f è suriettiva.

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo anzitutto che f è iniettiva. Siano $\alpha, \beta \in D$ con $\alpha \neq \beta$ e sia n il minimo intero tale che $\alpha(n) \neq \beta(n)$. Allora $\alpha|(n+1)$ e $\beta|(n+1)$ sono incompatibili. Poiché

$$f(\alpha) \in A_{\alpha|(n+1)} \quad \text{e} \quad f(\beta) \in A_{\beta|(n+1)},$$

la terza proprietà dei sistemi convergenti implica $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Mostriamo ora che f è continua. Sia $\alpha \in D$ e sia $\varepsilon > 0$. Per la seconda proprietà, esiste allora $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$\text{diam}(A_{\alpha|n}) < \varepsilon.$$

Se $\beta \in D \cap \Sigma(\alpha|n)$, allora

$$f(\alpha), f(\beta) \in A_{\alpha|n},$$

quindi

$$d(f(\alpha), f(\beta)) \leq \text{diam}(A_{\alpha|n}) < \varepsilon.$$

Dunque f è continua in α . Poiché α è arbitrario, f è continua.

Mostriamo che D è chiuso in $A^{\mathbb{N}}$. Sia $\alpha \in A^{\mathbb{N}} \setminus D$. Allora

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\alpha|n} = \emptyset.$$

Poiché $\overline{A_{\alpha|(n+1)}} \subseteq A_{\alpha|n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha anche

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_{\alpha|n}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\alpha|n} = \emptyset.$$

La successione $\{\overline{A_{\alpha|n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ è decrescente, formata da chiusi e con diametri tendenti a zero. Per il Teorema 2.4, almeno uno di tali chiusi deve essere vuoto. Esiste quindi $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\overline{A_{\alpha|k}} = \emptyset,$$

dunque $A_{\alpha|k} = \emptyset$. Se $\beta \in \Sigma(\alpha|k)$, allora $\beta|k = \alpha|k$, quindi

$$A_{\beta|k} = A_{\alpha|k} = \emptyset.$$

Ne segue che $\beta \notin D$. Dunque, $\Sigma(\alpha|k) \subseteq A^{\mathbb{N}} \setminus D$ e quindi $A^{\mathbb{N}} \setminus D$ è aperto. Pertanto D è chiuso in $A^{\mathbb{N}}$.

Infine, supponiamo che

$$A_e = X \quad \text{e} \quad A_s = \bigcup_{a \in A} A_{s \hat{a}}$$

per ogni $s \in A^{<\mathbb{N}}$. Sia $y \in X = A_e$. Per la condizione di unione, esiste $a_0 \in A$ tale che

$$y \in A_{(a_0)}.$$

Supponiamo di aver scelto $a_0, \dots, a_{n-1}$ in modo che, posto $s = (a_0, \dots, a_{n-1})$, si abbia $y \in A_s$. Poiché

$$A_s = \bigcup_{a \in A} A_{s \hat{a}},$$

esiste $a_n \in A$ tale che

$$y \in A_{s \hat{a}_n}.$$

Per induzione otteniamo $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$ tale che

$$y \in A_{\alpha|n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dunque

$$y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\alpha|n},$$

perciò $\alpha \in D$ e, per definizione della funzione associata, $f(\alpha) = y$. Quindi f è suriettiva. $\square$

TEOREMA 2.14. *Sia (X, τ) uno spazio polacco. Allora esistono un chiuso $D \subseteq \mathcal{N}$ e una funzione $f : D \rightarrow X$ bigettiva e continua. Inoltre, se $X \neq \emptyset$, esiste una funzione $g : \mathcal{N} \rightarrow X$ suriettiva e continua che prolunga f .*

DIMOSTRAZIONE. Se $X = \emptyset$, basta prendere $D = \emptyset$. Supponiamo quindi $X \neq \emptyset$ e fissiamo su X una metrica completa $d \leq 1$ compatibile con la topologia. Useremo il seguente fatto ausiliario: se $F \subseteq X$ è di tipo F_σ e $\varepsilon > 0$, allora esiste una famiglia numerabile $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di tipo F_σ , a due a due disgiunti, tale che

$$F = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{F_i}$$

e

$$\text{diam}(F_i) < \varepsilon$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$.

Dimostriamo il fatto ausiliario. Scriviamo

$$F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} C_k$$

con $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ successione non decrescente di chiusi, ponendo inoltre $C_0 = \emptyset$. Allora

$$F = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (C_{k+1} \setminus C_k).$$

Per ogni k , poiché X è separabile, possiamo ricoprire $C_{k+1} \setminus C_k$ con una successione di aperti $\{V_{k,j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ di diametro minore di ε . Poniamo

$$E_{k,j} = (C_{k+1} \setminus C_k) \cap V_{k,j} \setminus \bigcup_{\ell < j} V_{k,\ell}.$$

Gli insiemi $E_{k,j}$ sono di tipo F_σ , poiché in uno spazio metrizzabile gli aperti sono di tipo F_σ ; inoltre, sono a due a due disgiunti al variare di (k, j) , hanno diametro minore di ε e ricoprono F . Poiché $E_{k,j} \subseteq C_{k+1}$ e C_{k+1} è chiuso, si ha $\overline{E_{k,j}} \subseteq C_{k+1} \subseteq F$. Dunque anche l'unione delle chiusure degli $E_{k,j}$ coincide con F . Enumerando gli insiemi non vuoti $E_{k,j}$, otteniamo una famiglia finita o numerabile. Se tale famiglia è finita, la completiamo con insiemi vuoti; poniamo inoltre $\text{diam}(\emptyset) = 0$. Otteniamo così la famiglia richiesta.

Costruiamo ora, per induzione su $|s|$, uno schema di Lusin $\{F_s \mid s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ di sottoinsiemi di X tale che, per ogni $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$,

$$F_s = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_{s \frown i} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \overline{F_{s \frown i}}$$

e

$$\text{diam}(F_{s \frown i}) < 2^{-(|s|+1)}$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$. Poniamo $F_e = X$. Supponendo definito F_s , che è di tipo F_σ , applichiamo il fatto ausiliario a F_s con $\varepsilon = 2^{-(|s|+1)}$ e otteniamo gli insiemi $F_{s \frown i}$.

Per costruzione, il sistema così ottenuto soddisfa le proprietà di uno schema di Lusin: le chiusure dei successori sono contenute nel nodo precedente, i diametri tendono a zero lungo

ogni ramo e insiemi corrispondenti a successioni finite incompatibili sono disgiunti. Sia $D \subseteq \mathcal{N}$ il dominio di convergenza dello schema e sia $f : D \rightarrow X$ la funzione associata. Per il Lemma 2.13, l'insieme D è chiuso in $\mathcal{N}$ e la funzione f è continua e iniettiva. Inoltre, dalla proprietà

$$F_s = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F_{s \hat{\ } i}$$

segue, sempre per il Lemma 2.13, che f è suriettiva. Dunque $f : D \rightarrow X$ è bigettiva e continua.

Infine, poiché $X \neq \emptyset$, anche D è non vuoto. Essendo D un chiuso non vuoto di $\mathcal{N}$, per il Lemma 2.11 esiste una retrazione continua $\rho : \mathcal{N} \rightarrow D$. Definiamo

$$g = f \circ \rho : \mathcal{N} \rightarrow X.$$

La funzione g è continua. Inoltre, se $\alpha \in D$, allora $\rho(\alpha) = \alpha$, quindi

$$g(\alpha) = f(\rho(\alpha)) = f(\alpha).$$

Pertanto g prolunga f . Inoltre, g è suriettiva, poiché f lo è. □

2.4. Categoria

Concludiamo il capitolo trattando una nozione topologica di “grandezza”. Per questa sezione facciamo riferimento a Kechris [15, Sez. 8.B] e Srivastava [21, Sez. 2.5].

DEFINIZIONE 2.15. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ di uno spazio topologico (X, τ) si dice *mai denso* se $\overline{A} = \emptyset$.

Equivalentemente, un sottoinsieme A è mai denso se e solo se $X \setminus \overline{A}$ è denso, da cui un insieme è mai denso se e solo se lo è la sua chiusura.

DEFINIZIONE 2.16. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ di uno spazio topologico (X, τ) si dice *magro* (oppure *di prima categoria*) se è unione numerabile di insiemi mai densi, si dice *non magro* (oppure *di seconda categoria*) se non è magro e infine, si dice *comagro* se il suo complementare è magro.

Dunque un sottoinsieme è comagro se e solo se contiene l'intersezione di una famiglia numerabile di aperti densi. Ad esempio, l'insieme ternario di Cantor è mai denso in $[0, 1]$ e ogni compatto di $\mathcal{N}$ è mai denso in $\mathcal{N}$. Inoltre, un insieme numerabile è magro in ogni spazio metrizzabile senza punti isolati; in particolare, $\mathbb{Q}$ è magro in $\mathbb{R}$.

DEFINIZIONE 2.17. Uno spazio topologico (X, τ) si dice *spazio di Baire* se l'intersezione di ogni famiglia numerabile di aperti densi in X è densa in X .

Equivalentemente, uno spazio topologico (X, τ) è uno spazio di Baire se e solo se ogni aperto non vuoto di X è non magro, oppure se ogni comagro di X è denso.

TEOREMA 2.18. Sia (X, τ) uno spazio di Baire e sia $U \subseteq X$ aperto. Allora U , dotato della topologia relativa, è uno spazio di Baire.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di aperti densi in U . Poiché U è aperto in X , ogni V_n è aperto anche in X . Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$W_n = V_n \cup (X \setminus \overline{U}).$$

Allora W_n è aperto in X . Inoltre, W_n è denso in X : infatti, V_n è denso in U , quindi $\overline{V_n}$ contiene $\overline{U}$, mentre $X \setminus \overline{U}$ copre il complementare di $\overline{U}$.

Poiché X è uno spazio di Baire,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n = \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \right) \cup (X \setminus \overline{U})$$

è denso in X . Sia ora O un aperto non vuoto di U . Allora O è aperto in X e $O \subseteq U \subseteq \overline{U}$, quindi $O \cap (X \setminus \overline{U}) = \emptyset$. Poiché $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} W_n$ è denso in X , segue che

$$O \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n \neq \emptyset.$$

Dunque $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ è denso in U e quindi U è uno spazio di Baire. □

Il risultato più importante di questa sezione è il seguente teorema.

TEOREMA 2.19 (Teorema della categoria di Baire). *Ogni spazio completamente metrizzabile è uno spazio di Baire.*

DIMOSTRAZIONE. Sia (X, τ) completamente metrizzabile e sia d una metrica completa che induce la topologia τ . Sia $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di aperti densi di X e sia $U \subseteq X$ un aperto non vuoto. Mostriamo che

$$U \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \neq \emptyset.$$

Poiché $U \cap U_0 \neq \emptyset$, esiste una palla aperta B_0 di raggio minore di $1/2$ tale che

$$\overline{B_0} \subseteq U \cap U_0.$$

Supponiamo di aver costruito B_n . Poiché $B_n \cap U_{n+1} \neq \emptyset$, esiste una palla aperta B_{n+1} di raggio minore di $1/(n+3)$ tale che

$$\overline{B_{n+1}} \subseteq B_n \cap U_{n+1}.$$

Sia x_n il centro di B_n . La successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, poiché i diametri delle palle tendono a zero e le palle sono annidate. Per completezza, esiste $x \in X$ tale che $x_n \rightarrow x$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, la coda della successione $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è contenuta in B_n , quindi $x \in \overline{B_n}$. Pertanto

$$x \in \overline{B_0} \subseteq U \cap U_0$$

e, per ogni $n \geq 1$,

$$x \in \overline{B_n} \subseteq U_n.$$

Ne segue che

$$x \in U \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

Poiché U è un aperto non vuoto arbitrario, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ è denso in X . Dunque X è uno spazio di Baire. □

DEFINIZIONE 2.20. Sia X uno spazio topologico. Diciamo che un sottoinsieme $A \subseteq X$ gode della *proprietà di Baire* se esiste un aperto $U \subseteq X$ tale che la differenza simmetrica $A \Delta U$ sia un insieme magro in X .

Concludiamo la sezione con un risultato utile per il seguito.

PROPOSIZIONE 2.21. *Sia X uno spazio topologico. La famiglia di tutti i sottoinsiemi di X che godono della proprietà di Baire contiene gli aperti ed è chiusa rispetto alle operazioni di unione numerabile e di complementazione.*

DIMOSTRAZIONE. Il fatto che ogni insieme aperto goda della proprietà di Baire segue direttamente dalla definizione prendendo come aperto l'insieme stesso.

Mostriamo ora la chiusura rispetto alle unioni numerabili. Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi di X che godono della proprietà di Baire. Per ciascun $n \in \mathbb{N}$, esiste un aperto $U_n \subseteq X$ tale che $A_n \Delta U_n$ è magro. Poiché

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \Delta \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n \right) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \Delta U_n)$$

e poiché l'unione numerabile di una successione di insiemi magri è ancora un insieme magro, si ha che la differenza simmetrica tra l'unione totale degli insiemi e l'unione degli aperti (la quale è a sua volta un aperto) è un insieme magro. Di conseguenza, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ gode della proprietà di Baire. Mostriamo infine la chiusura rispetto alla complementazione. Sia A un sottoinsieme dotato della proprietà di Baire e sia U un aperto tale che $A \Delta U$ sia magro.

Consideriamo l'insieme aperto $(X \setminus U)^\circ$. Essendo $(X \setminus A) \Delta (X \setminus U) = A \Delta U$ si ha

$$(X \setminus A) \Delta (X \setminus U)^\circ \subseteq ((X \setminus A) \Delta (X \setminus U)) \cup ((X \setminus U) \setminus (X \setminus U)^\circ).$$

Dunque,

$$(X \setminus A) \Delta (X \setminus U)^\circ \subseteq (A \Delta U) \cup ((X \setminus U) \setminus (X \setminus U)^\circ).$$

Poiché il complementare $X \setminus U$ è un insieme chiuso, la differenza $(X \setminus U) \setminus (X \setminus U)^\circ$ è un insieme mai denso (dunque magro). Essendo l'unione di due insiemi magri ancora magra, la differenza simmetrica $(X \setminus A) \Delta (X \setminus U)^\circ$ risulta essere magra. Poiché $(X \setminus U)^\circ$ è un insieme aperto, concludiamo che il complementare $X \setminus A$ gode della proprietà di Baire. $\square$

CAPITOLO 3

Insiemi di Borel

In questo capitolo studiamo in dettaglio le proprietà degli insiemi e delle funzioni di Borel. Dopo aver introdotto le definizioni preliminari, dimostreremo l'equivalenza tra funzioni reali boreliane e funzioni di Baire attraverso il teorema di Lebesgue–Hausdorff.

Successivamente, nella seconda sezione, utilizzeremo una tecnica particolarmente utile in teoria descrittiva per “regolarizzare topologicamente” gli insiemi di Borel permettendoci di estendere a questi ultimi le proprietà viste per gli spazi polacchi nel capitolo precedente.

Nella terza sezione richiamiamo invece alcune nozioni di teoria astratta della misura che utilizzeremo nell'ultimo capitolo per mostrare importanti proprietà di regolarità degli analitici. Infine, nell'ultima sezione definiamo formalmente la gerarchia di Borel e ne dimostriamo alcune proprietà fondamentali.

3.1. Insiemi e funzioni misurabili

DEFINIZIONE 3.1. Una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di un insieme X si dice *algebra* su X se $\emptyset \in \mathcal{A}$ ed $\mathcal{A}$ è chiusa rispetto alla complementazione in X e alle unioni finite. Se $\mathcal{A}$ è chiusa anche rispetto alle unioni numerabili, essa prende il nome di σ -*algebra* e la coppia $(X, \mathcal{A})$ viene detta *spazio misurabile*. Infine, una funzione f tra due spazi misurabili $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ si dice *misurabile* se $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ per ogni $B \in \mathcal{B}$.

È facile verificare che l'intersezione arbitraria di una famiglia non vuota di σ -algebre è ancora una σ -algebra. Essendo poi l'insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$ una σ -algebra che contiene banalmente ogni famiglia di sottoinsiemi di X , risulta ben posta la seguente definizione.

DEFINIZIONE 3.2. Siano X un insieme e $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Si dice σ -*algebra generata* da $\mathcal{G}$ l'intersezione $\sigma(\mathcal{G})$ di tutte le σ -algebre su X contenenti $\mathcal{G}$, ovvero la più piccola (rispetto all'inclusione) σ -algebra su X contenente $\mathcal{G}$.

Il contesto naturale per applicare la teoria della misura alla topologia è fornito dalla σ -algebra che rende misurabili gli insiemi aperti.

DEFINIZIONE 3.3. Sia (X, τ) uno spazio topologico. La σ -algebra generata dalla topologia τ prende il nome di σ -*algebra di Borel* di X e viene denotata con $\mathcal{B}(X)$. Gli elementi di $\mathcal{B}(X)$ si dicono *insiemi di Borel* o *boreliani* di X . Infine, lo spazio misurabile $(X, \mathcal{B}(X))$ prende il nome di *spazio di Borel* associato allo spazio topologico (X, τ) e una funzione tra spazi topologici si dice *boreliana* se è misurabile rispetto alle σ -algebre di Borel.

Chiaramente ogni σ -algebra di Borel contiene non solo gli aperti e i chiusi ma anche tutti gli insiemi di tipo F_σ e G_δ . Inoltre, ogni funzione continua tra spazi topologici è banalmente boreliana rispetto alle corrispondenti σ -algebre di Borel.

Richiamiamo ora alcune utili caratterizzazioni della σ -algebra di Borel per uno spazio topologico metrizzabile (X, τ) , facilmente dimostrabili per minimalità, osservando che negli

spazi metrizzabili gli insiemi chiusi sono insiemi di tipo G_δ (la dimostrazione è immediata, usando la funzione distanza da un chiuso).

Ad esempio, è possibile mostrare che $\mathcal{B}(X)$ coincide con la più piccola famiglia di sottoinsiemi di X contenente gli aperti (oppure, in modo equivalente, i chiusi) e chiusa rispetto alle unioni numerabili e alle intersezioni numerabili, omettendo quindi la richiesta di chiusura per complementazione. Oppure, è possibile mostrare che $\mathcal{B}(X)$ è la più piccola famiglia di sottoinsiemi contenente tutti gli aperti di X (oppure i chiusi) che sia chiusa rispetto alle intersezioni numerabili e alle sole unioni numerabili di insiemi disgiunti.

In particolare, la dimostrazione di quest'ultimo risultato dovuto a Sierpinski (si veda, ad esempio, Srivastava [21, Cap. 3]), richiede una costruzione più sofisticata rispetto alle altre caratterizzazioni, non potendo in generale, in spazi metrizzabili, scrivere gli aperti come unione numerabile di chiusi disgiunti.

Un'altra proprietà fondamentale, che distingue le funzioni misurabili da quelle continue, è la stabilità rispetto ai limiti puntuali.

PROPOSIZIONE 3.4. *Siano $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile, Y uno spazio metrizzabile dotato della σ -algebra di Borel e sia $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni misurabili di X in Y . Se la successione converge puntualmente a una funzione $f : X \rightarrow Y$, allora anche f è misurabile.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché la σ -algebra di Borel $\mathcal{B}(Y)$ è generata dalla topologia di Y , per le proprietà della controimmagine è sufficiente verificare che l'insieme $f^{-1}(U)$ è misurabile per ogni aperto $U \subseteq Y$. Sia d una metrica su Y compatibile con la sua topologia e, per ogni intero $k \in \mathbb{N}$, definiamo gli insiemi

$$U_k = \left\{ y \in Y \mid d(y, Y \setminus U) > \frac{1}{k+1} \right\}$$

e

$$C_k = \left\{ y \in Y \mid d(y, Y \setminus U) \geq \frac{1}{k+1} \right\}.$$

Poiché l'insieme U è aperto, ogni suo punto ha distanza positiva dal complementare $Y \setminus U$ ed essendo ogni C_k chiuso segue facilmente che

$$U_k \subseteq \overline{U_k} \subseteq C_k \subseteq U_{k+1}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Da cui

$$U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \overline{U_k}.$$

Sia ora $x \in X$. Se $f(x) \in U$, allora esiste un intero k tale che il limite della successione $f_n(x)$ appartiene a U_k . Essendo U_k aperto, la successione $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ deve essere definitivamente contenuta in U_k , ovvero esiste un intero $m \in \mathbb{N}$ tale che $f_n(x) \in U_k$ per ogni $n \geq m$. Questo fatto implica a sua volta che il limite $f(x)$ deve appartenere alla chiusura $\overline{U_k}$, che è contenuta in U e quindi

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq m} f_n^{-1}(U_k).$$

Da cui la tesi. □

DEFINIZIONE 3.5. Si dicono *di Baire* le funzioni tra spazi topologici appartenenti al più piccolo insieme di funzioni contenente le funzioni continue e chiuso per limiti puntuali.

Osserviamo anzitutto che la classe delle funzioni reali di Baire è chiusa rispetto alle combinazioni lineari finite e al passaggio a massimi e minimi finiti. Infatti, tali operazioni si ottengono componendo funzioni di Baire con opportune funzioni continue reali di più variabili.

Dalla Proposizione 3.4 segue immediatamente che ogni funzione di Baire tra spazi metrizzabili è boreliana. Infatti, le funzioni continue sono boreliane e, per la proposizione appena citata, il limite puntuale di una successione di funzioni boreliane è ancora boreliano.

Il viceversa, in generale, è falso anche quando gli spazi considerati sono polacchi; si veda, ad esempio, Srivastava [21, Cap. 3]. Nel caso delle funzioni reali, tuttavia, vale il risultato opposto: ogni funzione boreliana a valori reali è una funzione di Baire. Per dimostrarlo useremo due risultati preliminari.

PROPOSIZIONE 3.6. *Sia X uno spazio metrizzabile. Allora ogni funzione boreliana $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è il limite puntuale di una successione di funzioni semplici boreliane.*

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni intero $-n2^n \leq i \leq n2^n - 1$ poniamo

$$A_{n,i} = f^{-1} \left(\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n} \right) \right).$$

Essendo f una funzione boreliana le controimmagini di intervalli sono insiemi misurabili, dunque ogni $A_{n,i}$ è un boreliano. Definiamo allora

$$f_n = \sum_{i=-n2^n}^{n2^n-1} \frac{i}{2^n} \chi_{A_{n,i}}.$$

Le funzioni f_n sono semplici e boreliane in quanto combinazioni lineari finite di funzioni caratteristiche di insiemi di Borel. Mostriamo che la successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente a f . Fissato un qualsiasi $x \in X$, poiché $f(x) \in \mathbb{R}$, per n sufficientemente grande si avrà $-n \leq f(x) < n$ definitivamente. Per tali n , esisterà un unico indice i_n per cui $x \in A_{n,i_n}$, da cui segue che

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n}.$$

Passando al limite per $n \rightarrow \infty$, si ottiene la convergenza puntuale. $\square$

LEMMA 3.7. *Sia X uno spazio metrizzabile e $B \subseteq X$ un insieme di Borel. Allora la sua funzione caratteristica $\chi_B : X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di Baire.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{B}_0$ la famiglia dei sottoinsiemi di X la cui funzione caratteristica è una funzione di Baire. Mostriamo innanzitutto che ogni aperto appartiene a $\mathcal{B}_0$. Se U è un aperto di X , essendo X metrizzabile, U è un insieme di tipo F_σ , cioè $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, dove gli F_n sono chiusi e, senza perdita di generalità, possiamo supporre che la successione sia non decrescente, ovvero $F_n \subseteq F_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché X è metrizzabile, per ogni $n \in \mathbb{N}$ i chiusi disgiunti F_n e $X \setminus U$ possono essere separati in modo continuo dalle funzioni $g_n : X \rightarrow [0, 1]$ definite come

$$g_n(x) = \frac{d(x, X \setminus U)}{d(x, F_n) + d(x, X \setminus U)}.$$

La successione di funzioni continue $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente alla funzione caratteristica χ_U che, essendo limite puntuale di funzioni continue, è una funzione di Baire.

Sia ora $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi in $\mathcal{B}_0$ a due a due disgiunti e poniamo $h_k =$

$\sum_{n=0}^k \chi_{B_n}$. Poiché le funzioni di Baire formano uno spazio vettoriale, ogni h_k è una funzione di Baire. La successione $\{h_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente alla funzione caratteristica dell'unione disgiunta $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$ che dunque appartiene alla classe di Baire.

Consideriamo infine un'intersezione numerabile di insiemi $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$, con $B_n \in \mathcal{B}_0$. Le funzioni

$$h_k = \min_{n \leq k} \chi_{B_n}$$

sono ottenute mediante minimi finiti di funzioni di Baire e quindi sono ancora funzioni di Baire e convergono puntualmente alla funzione caratteristica dell'intersezione, che perciò appartiene a $\mathcal{B}_0$. Dal fatto che $\mathcal{B}_0$ contiene gli aperti ed è chiusa per unioni disgiunte numerabili e intersezioni numerabili, deduciamo che $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}(X)$. $\square$

TEOREMA 3.8 (Lebesgue–Hausdorff). *Sia X uno spazio metrizzabile. Allora ogni funzione boreliana $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di Baire.*

DIMOSTRAZIONE. Per la Proposizione 3.6, ogni funzione boreliana $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è il limite puntuale di una successione $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di funzioni semplici boreliane. Ogni funzione semplice f_n può essere scritta come combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi di Borel, ovvero $f_n = \sum_{i=1}^{k_n} c_i \chi_{B_i}$ con $B_i \in \mathcal{B}(X)$ per ogni i .

Per il Lemma 3.7, la funzione caratteristica χ_{B_i} di un qualsiasi boreliano è una funzione di Baire. Poiché la classe delle funzioni di Baire forma uno spazio vettoriale, ogni combinazione lineare finita di tali funzioni è ancora una funzione di Baire e, di conseguenza, ogni funzione semplice f_n appartiene a tale classe.

Infine, poiché per definizione la classe delle funzioni di Baire è chiusa rispetto ai limiti puntuali di successioni, deduciamo che la funzione limite f è una funzione di Baire. $\square$

3.2. Topologie di Borel

Un metodo particolarmente efficace in teoria descrittiva consiste nell'arricchire la topologia dello spazio polacco di partenza mantenendo gli stessi insiemi di Borel, in modo tale da ridurre questioni di misurabilità a problemi topologici. In questa sezione utilizziamo tale metodo per mostrare alcuni interessanti risultati. Iniziamo con due lemmi preparatori riguardanti la costruzione di nuove topologie polacche. Chiamiamo *clopen* un insieme che è sia chiuso che aperto.

LEMMA 3.9. *Sia (X, τ) uno spazio polacco e sia F un chiuso. Allora la topologia τ_F generata dall'unione $\tau \cup \{F\}$ è una topologia polacca in cui F è un insieme clopen e si ha $\mathcal{B}(\tau_F) = \mathcal{B}(\tau)$.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché F è chiuso nella topologia polacca τ , il suo complementare $X \setminus F$ è un aperto e quindi entrambi sono insiemi di tipo G_δ in X . Per il Teorema 2.3 di Alexandrov, i sottospazi F e $X \setminus F$, dotati delle rispettive topologie indotte da τ , sono spazi polacchi e chiaramente F è un insieme clopen rispetto a τ_F . Inoltre, τ_F coincide con la somma topologica dei sottospazi F e $X \setminus F$ e poiché la somma topologica di una famiglia al più numerabile (in questo caso, finita) di spazi polacchi è ancora uno spazio polacco, la topologia τ_F rende X uno spazio polacco. Mostriamo che le due σ -algebre coincidono. L'inclusione $\mathcal{B}(\tau) \subseteq \mathcal{B}(\tau_F)$ è ovvia. Viceversa, ogni aperto $U \in \tau_F$ si può scrivere nella forma $(V_1 \cap F) \cup (V_2 \setminus F)$ per opportuni $V_1, V_2 \in \tau$ e quindi U appartiene a $\mathcal{B}(\tau)$. $\square$

LEMMA 3.10. *Sia (X, τ) uno spazio polacco e sia $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di topologie polacche su X tali che $\tau \subseteq \tau_n \subseteq \mathcal{B}(\tau)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora la topologia τ_∞ generata dall'unione $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n$ è polacca e $\mathcal{B}(\tau_\infty) = \mathcal{B}(\tau)$.*

DIMOSTRAZIONE. Definiamo l'applicazione $f : X \rightarrow X^{\mathbb{N}}$ ponendo

$$f(x) = (x, x, \dots),$$

dove $X^{\mathbb{N}}$ è dotato della topologia prodotto delle τ_n . Poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\tau_n \subseteq \tau_{\infty}$, le proiezioni coordinate di f (che coincidono con l'identità) sono continue, il che rende f continua. Al fine di mostrare che f è una immersione è sufficiente mostrare, essendo f iniettiva, che l'immagine tramite f di un qualunque aperto della prebase di τ_{∞} è un aperto in $f(X)$. Sia dunque $U \in \tau_n$ per qualche $n \in \mathbb{N}$. Allora

$$\pi_n^{-1}(U) \cap f(X) = \{(x, x, \dots) \in X^{\mathbb{N}} \mid x \in U\} = f(U).$$

Quindi, essendo ogni aperto di τ_{∞} una unione arbitraria di intersezioni finite di elementi di τ_n ed essendo f iniettiva si ha che f è aperta nella sua immagine e dunque un'immersione.

Per mostrare che (X, τ_{∞}) è polacco è sufficiente mostrare, essendo i sottospazi chiusi di spazi polacchi a loro volta polacchi, che $f(X)$ è chiuso nello spazio prodotto. Consideriamo un punto $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \setminus f(X)$. Esistono allora almeno due indici n, m tali che $x_n \neq x_m$. Essendo la topologia di base τ polacca, lo spazio X è in particolare uno spazio di Hausdorff, dunque esistono due aperti disgiunti $U, V \in \tau$ tali che $x_n \in U$ e $x_m \in V$. Poiché per ipotesi $\tau \subseteq \tau_n$ e $\tau \subseteq \tau_m$, si ha che $U \in \tau_n$ e $V \in \tau_m$. Di conseguenza, l'intersezione $\pi_n^{-1}(U) \cap \pi_m^{-1}(V)$ costituisce un intorno aperto della successione $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ nello spazio prodotto. Essendo U e V disgiunti, tale intorno ha intersezione vuota con l'immagine $f(X)$. Dunque, il complementare di $f(X)$ è un insieme aperto, il che prova che l'immagine è chiusa. Infine, per provare l'uguaglianza tra le σ -algebre generate è sufficiente mostrare che τ_{∞} è inclusa in $\mathcal{B}(\tau)$. Poiché ogni τ_n ha una base numerabile $\mathcal{B}_n$ è immediato verificare che la famiglia numerabile

$$\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n$$

è una prebase per τ_{∞} . Di conseguenza, la base di τ_{∞} formata dalle intersezioni finite di elementi di $\mathcal{P}$ è a sua volta numerabile. Dunque ogni aperto di τ_{∞} è unione numerabile di intersezioni finite di elementi di τ_n e dunque appartiene a $\mathcal{B}(\tau)$. $\square$

Utilizzando questi due lemmi possiamo dimostrare che ogni insieme di Borel può essere regolarizzato topologicamente. Nello specifico, si può sempre trovare una topologia più fine in cui il boreliano in questione risulta simultaneamente aperto e chiuso.

TEOREMA 3.11. *Sia (X, τ) uno spazio polacco e $B \subseteq X$ un insieme di Borel. Allora esiste una topologia polacca τ_B su X tale che $\tau \subseteq \tau_B$, $\mathcal{B}(\tau_B) = \mathcal{B}(\tau)$ e B è clopen in τ_B .*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{C}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi boreliani $E \subseteq X$ per i quali esiste una topologia polacca τ_E più fine di τ tale che $\mathcal{B}(\tau_E) = \mathcal{B}(\tau)$ e E sia clopen in τ_E . Per il Lemma 3.9, la famiglia $\mathcal{C}$ contiene tutti gli insiemi chiusi di X . Inoltre, $\mathcal{C}$ è chiusa rispetto al passaggio al complementare: infatti, se $E \in \mathcal{C}$, allora nella topologia τ_E anche $X \setminus E$ è clopen.

Mostriamo ora che $\mathcal{C}$ è chiusa rispetto alle unioni numerabili. Sia $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi appartenenti a $\mathcal{C}$ e poniamo

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia τ_n una topologia polacca più fine di τ tale che

$$\mathcal{B}(\tau_n) = \mathcal{B}(\tau)$$

e tale che E_n sia clopen in τ_n . Consideriamo la topologia τ_∞ generata dall'unione

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n.$$

Per il Lemma 3.10, la topologia τ_∞ è polacca e soddisfa

$$\mathcal{B}(\tau_\infty) = \mathcal{B}(\tau).$$

Poiché E_n è aperto in τ_n e $\tau_n \subseteq \tau_\infty$, ogni E_n è aperto anche in τ_∞ . Di conseguenza,

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

è aperto in τ_∞ e quindi $X \setminus E$ è chiuso nello spazio polacco (X, τ_∞) .

Applicando il Lemma 3.9 allo spazio polacco (X, τ_∞) e al chiuso $X \setminus E$, otteniamo una topologia polacca τ_E su X , più fine di τ_∞ , tale che $X \setminus E$ sia clopen in τ_E e

$$\mathcal{B}(\tau_E) = \mathcal{B}(\tau_\infty) = \mathcal{B}(\tau).$$

Ne segue che anche E è clopen in τ_E . Inoltre, poiché $\tau \subseteq \tau_\infty \subseteq \tau_E$, la topologia τ_E è più fine di τ . Dunque $E \in \mathcal{C}$.

Abbiamo quindi mostrato che $\mathcal{C}$ contiene i chiusi, è chiusa rispetto alla complementazione ed è chiusa rispetto alle unioni numerabili. Pertanto $\mathcal{C}$ contiene la σ -algebra generata dai chiusi di X , cioè contiene tutti i boreliani di X . In particolare, dato $B \in \mathcal{B}(X)$, si ha $B \in \mathcal{C}$ e quindi esiste una topologia polacca τ_B più fine di τ tale che

$$\mathcal{B}(\tau_B) = \mathcal{B}(\tau)$$

e B sia clopen in τ_B . □

Una conseguenza fondamentale di questo cambio di topologia è la possibilità di estendere la proprietà dell'insieme perfetto a tutti gli insiemi di Borel, mostrando che gli insiemi di Borel non costituiscono un controesempio all'ipotesi del continuo.

TEOREMA 3.12 (Teorema dell'insieme perfetto per i boreliani). *Sia (X, τ) uno spazio polacco e $B \subseteq X$ un insieme di Borel non numerabile. Allora B contiene un sottospazio omeomorfo allo spazio di Cantor $\mathcal{C}$. In particolare, ogni boreliano non numerabile ha la cardinalità del continuo.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Teorema 3.11, esiste una topologia polacca τ_B su X , più fine della topologia τ , tale che B risulta essere clopen e in particolare chiuso. Essendo un sottospazio chiuso dello spazio polacco (X, τ_B) , l'insieme B è a sua volta uno spazio polacco se dotato della topologia indotta da τ_B . Dal Teorema 2.9 di Cantor–Bendixson sappiamo che ogni spazio polacco non numerabile contiene un sottospazio perfetto e non vuoto e tale sottospazio perfetto contiene, Teorema 2.7, una copia dello spazio di Cantor. Dunque, esiste un sottoinsieme $K \subseteq B$ omeomorfo allo spazio di Cantor $\mathcal{C}$ rispetto alla topologia τ_B . Dunque, è sufficiente mostrare che K è omeomorfo a $\mathcal{C}$ anche rispetto alla topologia τ . Essendo omeomorfo a $\mathcal{C}$, l'insieme K è compatto rispetto alla topologia τ_B . Consideriamo la funzione identità $\text{id} : (K, \tau_B|_K) \rightarrow (K, \tau|_K)$. Poiché la topologia τ è meno fine di τ_B , tale funzione è banalmente continua. Inoltre, lo spazio $(K, \tau|_K)$ è uno spazio di Hausdorff, essendo sottospazio di uno spazio metrizzabile. Poiché una funzione bigettiva e continua da uno spazio compatto a uno spazio di Hausdorff è un omeomorfismo questo implica che le topologie indotte da τ e τ_B su K coincidono. Dunque, K è un sottospazio omeomorfo allo spazio di Cantor $\mathcal{C}$ anche nella topologia originale τ . Poiché lo spazio di Cantor ha cardinalità $2^{\aleph_0}$, si

ha $|B| \geq 2^{\aleph_0}$. D'altra parte, essendo X separabile e metrizzabile, si ha $|X| \leq 2^{\aleph_0}$, quindi $|B| \leq 2^{\aleph_0}$. Concludiamo dunque che $|B| = 2^{\aleph_0}$. $\square$

3.3. Misure

Oltre alla classificazione degli insiemi negli spazi polacchi, uno degli obiettivi centrali della teoria descrittiva classica è stabilire se le classi di insiemi considerate godano di buone proprietà di regolarità. Tra queste, la misurabilità secondo Lebesgue riveste un ruolo fondamentale.

In questa sezione richiamiamo soltanto le nozioni di teoria della misura che saranno necessarie nel seguito. Per una trattazione completa della costruzione della misura di Lebesgue tramite il metodo di Carathéodory e più in generale della teoria astratta della misura, rimandiamo a [1].

DEFINIZIONE 3.13. Sia $(X, \mathcal{A})$ uno spazio misurabile. Una funzione $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, +\infty]$ si dice *misura* se $\mu(\emptyset) = 0$ e se, per ogni successione $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{A}$ a due a due disgiunti, si ha

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(E_n).$$

In tal caso, la terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ si dice *spazio di misura*.

DEFINIZIONE 3.14. Uno spazio di misura $(X, \mathcal{A}, \mu)$ si dice *finito* se $\mu(X) < +\infty$. Si dice invece *σ -finito* se esiste una successione $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{A}$ tale che

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \quad \text{e} \quad \mu(X_n) < +\infty$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

DEFINIZIONE 3.15. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura. Un sottoinsieme $N \subseteq X$ si dice *μ -trascurabile* se esiste un insieme $E \in \mathcal{A}$ tale che $N \subseteq E$ e $\mu(E) = 0$. Lo spazio di misura si dice *completo* se ogni insieme μ -trascurabile appartiene a $\mathcal{A}$.

Ricordiamo che ogni misura è monotona e σ -subadditiva. Inoltre, le misure godono delle usuali proprietà di continuità dal basso e dall'alto: se $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione non decrescente di insiemi misurabili, allora

$$\mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n),$$

mentre, se $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione non crescente di insiemi misurabili ed esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(B_m) < +\infty$, allora

$$\mu \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n).$$

Richiamiamo ora il risultato classico sull'esistenza della misura di Lebesgue.

TEOREMA 3.16 (Misura di Lebesgue). *Esiste una misura completa e σ -finita λ su $\mathbb{R}$, definita su una σ -algebra $\mathcal{M}_L$ contenente i boreliani $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, che estende la lunghezza degli intervalli.*

DEFINIZIONE 3.17. La misura λ prende il nome di *misura di Lebesgue* su $\mathbb{R}$. Gli elementi di $\mathcal{M}_L$ si dicono *insiemi misurabili secondo Lebesgue*.

In particolare, ogni sottoinsieme boreliano di $\mathbb{R}$ è misurabile secondo Lebesgue.

3.4. La gerarchia di Borel

In questa sezione introduciamo la gerarchia degli insiemi di Borel. Nelle sezioni precedenti abbiamo definito la famiglia dei boreliani come la più piccola σ -algebra contenente gli aperti. Tuttavia, per comprendere a fondo la struttura di tali insiemi, è utile classificarli in base alla loro complessità topologica.

Sia (X, τ) uno spazio metrizzabile. Definiamo per induzione transfinita (Teorema 1.23) sugli ordinali numerabili $1 \leq \alpha < \omega_1$ le seguenti famiglie di insiemi. Per $\alpha = 1$ poniamo:

$$\begin{aligned}\Sigma_1^0(X) &= \{U \subseteq X \mid U \text{ è aperto}\}, \\ \Pi_1^0(X) &= \{F \subseteq X \mid F \text{ è chiuso}\}.\end{aligned}$$

Per ogni ordinale $1 < \alpha < \omega_1$, definiamo le classi *additive* e *moltiplicative* di livello α come le chiusure rispetto alle unioni e intersezioni numerabili dei livelli precedenti:

$$\begin{aligned}\Sigma_\alpha^0(X) &= \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid A_n \in \Pi_{\beta_n}^0(X) \text{ con } \beta_n < \alpha \right\} = \left(\bigcup_{\beta < \alpha} \Pi_\beta^0(X) \right)_\sigma, \\ \Pi_\alpha^0(X) &= \left\{ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid A_n \in \Sigma_{\beta_n}^0(X) \text{ con } \beta_n < \alpha \right\} = \left(\bigcup_{\beta < \alpha} \Sigma_\beta^0(X) \right)_\delta.\end{aligned}$$

Infine, per ogni $\alpha \geq 1$, definiamo la classe *ambigua* di livello α come l'intersezione delle classi additive e moltiplicative:

$$\Delta_\alpha^0(X) = \Sigma_\alpha^0(X) \cap \Pi_\alpha^0(X).$$

I livelli più bassi di questa gerarchia coincidono con classi topologiche ben note: $\Delta_1^0(X)$ è la famiglia degli insiemi clopen, $\Sigma_2^0(X)$ è la classe degli insiemi di tipo F_σ , mentre $\Pi_2^0(X)$ coincide con la classe degli insiemi di tipo G_δ . Inoltre, in generale, se un insieme appartiene a una classe additiva o moltiplicativa di livello α , il suo complementare appartiene alla classe duale dello stesso livello.

Si verifica facilmente che le classi additive sono chiuse per unioni numerabili, mentre quelle moltiplicative lo sono per intersezioni numerabili; di conseguenza, le classi ambigue sono delle algebre. Mostriamo ora nel dettaglio alcune proprietà della gerarchia.

PROPOSIZIONE 3.18. *Sia (X, τ) uno spazio metrizzabile.*

(i) *Per ogni ordinale $1 \leq \alpha < \omega_1$, vale l'inclusione*

$$\Sigma_\alpha^0(X) \cup \Pi_\alpha^0(X) \subseteq \Delta_{\alpha+1}^0(X).$$

(ii) *Per ogni $1 < \alpha < \omega_1$, si ha*

$$\Sigma_\alpha^0(X) = (\Delta_\alpha^0(X))_\sigma \quad e \quad \Pi_\alpha^0(X) = (\Delta_\alpha^0(X))_\delta.$$

Se X è uno spazio metrico separabile e zero-dimensionale, l'uguaglianza vale anche per $\alpha = 1$.

(iii) *La σ -algebra di Borel $\mathcal{B}(X)$ di X coincide con l'unione di tutte le classi della gerarchia, ovvero*

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha^0(X) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Pi_\alpha^0(X).$$

(iv) Se Y è uno spazio metrizzabile e $f : X \rightarrow Y$ è una funzione continua, allora, per ogni $1 \leq \alpha < \omega_1$, se $A \in \Sigma_\alpha^0(Y)$, rispettivamente $A \in \Pi_\alpha^0(Y)$, si ha $f^{-1}(A) \in \Sigma_\alpha^0(X)$, rispettivamente $f^{-1}(A) \in \Pi_\alpha^0(X)$.

DIMOSTRAZIONE. (i) Se $\alpha = 1$ l'asserto è vero in quanto in ogni spazio metrizzabile gli aperti sono insiemi di tipo F_σ , mentre i chiusi sono insiemi di tipo G_δ . Sia ora $1 < \alpha < \omega_1$ e sia $A \in \Sigma_\alpha^0(X)$. Scrivendo A come unione numerabile di insiemi appartenenti a classi moltiplicative di livello $< \alpha$, otteniamo immediatamente $A \in \Sigma_{\alpha+1}^0(X)$. Inoltre, essendo $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ e poiché $A_n \in \Sigma_\alpha^0(X)$ con $\alpha < \alpha + 1$, si ha

$$A \in \Pi_{\alpha+1}^0(X).$$

Dunque $A \in \Delta_{\alpha+1}^0(X)$. Il caso $A \in \Pi_\alpha^0(X)$ è analogo.

(ii) Sia $1 < \alpha < \omega_1$. Se $\beta < \alpha$ e quindi $\beta + 1 \leq \alpha$, per la proprietà (i) si ha

$$\Pi_\beta^0(X) \subseteq \Delta_{\beta+1}^0(X) \subseteq \Delta_\alpha^0(X),$$

quindi,

$$\bigcup_{\beta < \alpha} \Pi_\beta^0(X) \subseteq \Delta_\alpha^0(X),$$

da cui, passando alle unioni numerabili, $\Sigma_\alpha^0(X) \subseteq (\Delta_\alpha^0(X))_\sigma$. Infine, poiché $\Delta_\alpha^0(X) \subseteq \Sigma_\alpha^0(X)$ e $\Sigma_\alpha^0(X)$ è chiusa per unioni numerabili si ottiene $(\Delta_\alpha^0(X))_\sigma \subseteq \Sigma_\alpha^0(X)$. Anche in questo caso, la dimostrazione per la classe moltiplicativa è analoga.

Nel caso in cui lo spazio X sia anche separabile (dunque abbia una base numerabile) e zero-dimensionale (ovvero possieda una base di clopen), è possibile estrarre da $\Delta_1^0(X)$ una base numerabile di clopen. Da ciò segue che $(\Delta_1^0(X))_\sigma = \Sigma_1^0(X)$, con il caso duale che si ottiene per complementazione.

(iii) Per induzione transfinita si verifica che le classi additive e moltiplicative sono sempre contenute nella σ -algebra di Borel $\mathcal{B}(X)$. Infatti, gli aperti e i chiusi sono boreliani e le operazioni di unione e intersezione numerabile preservano l'appartenenza a $\mathcal{B}(X)$.

Dimostriamo l'inclusione opposta. Poniamo

$$\mathcal{F} = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha^0(X).$$

Mostriamo che $\mathcal{F}$ è una σ -algebra contenente gli aperti di X .

Chiaramente $\mathcal{F}$ contiene gli aperti, poiché $\Sigma_1^0(X) \subseteq \mathcal{F}$. Sia ora $B \in \mathcal{F}$. Allora esiste un ordinale numerabile $\alpha < \omega_1$ tale che $B \in \Sigma_\alpha^0(X)$. Di conseguenza,

$$X \setminus B \in \Pi_\alpha^0(X).$$

Per il punto (i), si ha

$$\Pi_\alpha^0(X) \subseteq \Delta_{\alpha+1}^0(X) \subseteq \Sigma_{\alpha+1}^0(X).$$

Quindi $X \setminus B \in \mathcal{F}$ e dunque $\mathcal{F}$ è chiusa rispetto alla complementazione.

Sia infine $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di elementi di $\mathcal{F}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un ordinale numerabile $\alpha_n < \omega_1$ tale che

$$B_n \in \Sigma_{\alpha_n}^0(X).$$

Poniamo

$$\gamma = \sup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n + 1.$$

Essendo γ il successore di un estremo superiore numerabile di ordinali numerabili, si ha $\gamma < \omega_1$. Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$, vale $\alpha_n < \gamma$ e quindi si ha

$$\Sigma_{\alpha_n}^0(X) \subseteq \Sigma_\gamma^0(X).$$

Dunque $B_n \in \Sigma_\gamma^0(X)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché $\Sigma_\gamma^0(X)$ è chiusa rispetto alle unioni numerabili, segue che

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n \in \Sigma_\gamma^0(X) \subseteq \mathcal{F}.$$

Abbiamo quindi mostrato che $\mathcal{F}$ è una σ -algebra contenente gli aperti. Per minimalità della σ -algebra di Borel, si ottiene $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{F}$. Pertanto,

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Sigma_\alpha^0(X).$$

L'uguaglianza

$$\mathcal{B}(X) = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Pi_\alpha^0(X)$$

si dimostra analogamente, oppure segue dal fatto che ogni $\Sigma_\alpha^0(X)$ è contenuta in $\Pi_{\alpha+1}^0(X)$.

(iv) Se $\alpha = 1$ l'asserto segue direttamente dalla continuità di f , mentre il caso generale segue immediatamente per induzione transfinita, ricordando che l'operazione di controimmagine commuta con quelle di unione e intersezione numerabile. $\square$

In spazi metrizzabili qualsiasi l'inclusione della proprietà (i) può non essere stretta e di conseguenza la gerarchia può non produrre nuovi insiemi. Una condizione sufficiente affinché ciò non accada è che lo spazio sia polacco e non numerabile (per una dimostrazione, si veda [21, Sez. 3.6]).

TEOREMA 3.19. *Sia X uno spazio polacco non numerabile e sia $1 \leq \alpha < \omega_1$. Allora*

$$\Sigma_\alpha^0(X) \neq \Pi_\alpha^0(X).$$

Di conseguenza, vale l'inclusione stretta $\Sigma_\alpha^0(X) \subset \Sigma_{\alpha+1}^0(X)$.

CAPITOLO 4

Insiemi analitici

In questo capitolo introduciamo gli insiemi analitici e coanalitici negli spazi polacchi. Dopo averne dato alcune caratterizzazioni equivalenti, mostreremo che essi estendono propriamente la classe dei boreliani.

Successivamente collegheremo gli insiemi analitici all'operazione di Suslin introdotta nel primo capitolo. Questo permetterà di ottenere importanti proprietà di stabilità e di regolarità.

Infine, dimostreremo il teorema di separazione di Lusin, il teorema di Suslin e il teorema di Lusin sulle immagini boreliane iniettive. Questi risultati permettono di chiarire in modo preciso il problema emerso dall'affermazione errata di Lebesgue: la proiezione, o più in generale l'immagine continua, di un insieme di Borel può non essere boreliana. Il teorema di Lusin mostra invece che la borelianità viene preservata quando la funzione considerata è boreliana e iniettiva.

4.1. Insiemi analitici, coanalitici e proiettivi

Siano X e Y due spazi polacchi. Per comodità di notazione, se $B \subseteq X \times Y$, denotiamo la proiezione $\pi_X(B)$ mediante il quantificatore esistenziale proiettivo $\exists_Y B$, ovvero

$$\exists_Y B = \{x \in X \mid (x, y) \in B \text{ per qualche } y \in Y\}.$$

In modo simmetrico, definiamo la *coproiezione* di B come il sottoinsieme di X

$$\forall_Y B = \{x \in X \mid (x, y) \in B \text{ per ogni } y \in Y\},$$

per il quale vale l'identità

$$\forall_Y B = X \setminus \exists_Y ((X \times Y) \setminus B).$$

Ricordiamo inoltre che $\mathcal{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ denota lo spazio di Baire.

DEFINIZIONE 4.1. Sia X uno spazio polacco. Un sottoinsieme $A \subseteq X$ si dice *analitico* se esistono uno spazio polacco Y e un insieme di Borel $B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ tali che

$$A = \exists_Y B = \{x \in X \mid (x, y) \in B \text{ per qualche } y \in Y\}.$$

Denotiamo la classe degli insiemi analitici di X con $\Sigma_1^1(X)$.

Un sottoinsieme $C \subseteq X$ si dice *coanalitico* se il suo complementare $X \setminus C$ è analitico. Denotiamo la classe degli insiemi coanalitici di X con $\Pi_1^1(X)$.

Infine poniamo

$$\Delta_1^1(X) = \Sigma_1^1(X) \cap \Pi_1^1(X).$$

DEFINIZIONE 4.2. Sia X uno spazio polacco. Il primo livello della gerarchia proiettiva è costituito dalle classi appena definite $\Sigma_1^1(X)$ e $\Pi_1^1(X)$.

Supponiamo ora definite, per un certo $n \geq 1$, le classi $\Sigma_n^1(Z)$ e $\Pi_n^1(Z)$ per ogni spazio polacco Z . Per uno spazio polacco X poniamo

$$\Sigma_{n+1}^1(X) = \{ \exists_{\mathcal{N}} E \mid E \in \Pi_n^1(X \times \mathcal{N}) \}.$$

Definiamo poi

$$\Pi_{n+1}^1(X) = \{ X \setminus A \mid A \in \Sigma_{n+1}^1(X) \}.$$

Infine, per ogni $n \geq 1$, poniamo

$$\Delta_n^1(X) = \Sigma_n^1(X) \cap \Pi_n^1(X).$$

Gli insiemi appartenenti a una delle classi $\Sigma_n^1(X)$ o $\Pi_n^1(X)$, con $n \geq 1$, si dicono *insiemi proiettivi*.

In altri termini, la gerarchia proiettiva si ottiene a partire dai boreliani applicando un numero finito di volte le operazioni di proiezione e complementazione. Il primo livello è costituito dagli insiemi analitici e coanalitici. Il secondo livello nasce proiettando insiemi coanalitici, poi prendendo i complementari e così via. In questa tesi non svilupperemo la gerarchia oltre il primo livello, poiché il nostro interesse principale sarà rivolto agli insiemi analitici e coanalitici.

Sia ora X uno spazio polacco e sia B un insieme di Borel di X . Posto $C = B \times X$, l'insieme C appartiene a $\mathcal{B}(X \times X)$ e, con le notazioni introdotte, si ha

$$B = \exists_X C = \forall_X C.$$

Di conseguenza, ogni insieme di Borel è analitico e coanalitico, cioè

$$\mathcal{B}(X) \subseteq \Delta_1^1(X).$$

Il viceversa, cioè il fatto che ogni insieme appartenente alla classe ambigua $\Delta_1^1(X)$ sia boreliano, sarà dimostrato successivamente nel Teorema 4.13.

PROPOSIZIONE 4.3. *Sia X uno spazio polacco e sia $A \subseteq X$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) A è analitico.
- (ii) $A = \emptyset$, oppure esiste un'applicazione continua $f : \mathcal{N} \rightarrow X$ tale che $f(\mathcal{N}) = A$.
- (iii) Esiste un sottoinsieme chiuso $C \subseteq X \times \mathcal{N}$ tale che $A = \exists_{\mathcal{N}} C$.

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo anzitutto che (i) implica (ii). Se $A = \emptyset$, non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo dunque $A \neq \emptyset$. Poiché A è analitico, esistono uno spazio polacco Y e un boreliano $B \subseteq X \times Y$ tali che

$$A = \exists_Y B.$$

Per il Teorema 3.11, esiste una topologia polacca τ_B su $X \times Y$, più fine della topologia prodotto originaria, tale che B sia clopen in τ_B e tale che la σ -algebra di Borel rimanga invariata. In particolare, B , dotato della topologia indotta da τ_B , è uno spazio polacco.

Per il Teorema 2.14, esiste allora un'applicazione continua e suriettiva

$$g : \mathcal{N} \rightarrow B$$

rispetto alla topologia τ_B . Poiché τ_B è più fine della topologia prodotto originaria, l'identità

$$(B, \tau_B|_B) \rightarrow B \subseteq X \times Y$$

è continua. Pertanto la funzione

$$f = \pi_X \circ g : \mathcal{N} \rightarrow X$$

è continua e soddisfa

$$f(\mathcal{N}) = A.$$

Quindi vale (ii).

Mostriamo ora che (ii) implica (iii). Se $A = \emptyset$, basta prendere $C = \emptyset$. Supponiamo dunque che esista una funzione continua $f : \mathcal{N} \rightarrow X$ tale che $f(\mathcal{N}) = A$. Consideriamo

$$C = \{(x, \alpha) \in X \times \mathcal{N} \mid x = f(\alpha)\}.$$

Poiché f è continua e X è uno spazio di Hausdorff, l'insieme C è chiuso in $X \times \mathcal{N}$. Inoltre,

$$\exists_{\mathcal{N}} C = f(\mathcal{N}) = A.$$

Infine, (iii) implica (i), poiché ogni chiuso $C \subseteq X \times \mathcal{N}$ è boreliano e quindi la sua proiezione $\exists_{\mathcal{N}} C$ è analitica per definizione. $\square$

COROLLARIO 4.4. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora A è analitico se e solo se esiste un boreliano $B \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che*

$$A = \pi_1(B).$$

DIMOSTRAZIONE. Se esiste un boreliano $B \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che $A = \pi_1(B)$, allora A è analitico per definizione. Viceversa, supponiamo che A sia analitico. Per la Proposizione 4.3, esiste un chiuso $C \subseteq \mathbb{R} \times \mathcal{N}$ tale che

$$A = \exists_{\mathcal{N}} C.$$

Sia $P = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'insieme degli irrazionali. Poiché lo spazio di Baire $\mathcal{N}$ è omeomorfo a P (Osservazione 2.2), sia $h : \mathcal{N} \rightarrow P$ un omeomorfismo. Poniamo

$$B = \{(x, h(\alpha)) \in \mathbb{R} \times P \mid (x, \alpha) \in C\}.$$

Allora B è chiuso in $\mathbb{R} \times P$. Poiché P è un sottoinsieme boreliano di $\mathbb{R}$, l'insieme B è boreliano in $\mathbb{R}^2$. Inoltre

$$\pi_1(B) = A.$$

La tesi segue. $\square$

PROPOSIZIONE 4.5. *Siano X e Y spazi polacchi. Allora,*

- La famiglia $\Sigma_1^1(X)$ è chiusa rispetto alle unioni numerabili, alle intersezioni numerabili e alle controimmagini tramite funzioni boreliane. Di conseguenza, anche $\Pi_1^1(X)$ gode delle stesse proprietà.
- La famiglia $\Sigma_1^1(X)$ è chiusa rispetto all'operazione di proiezione $\exists_Y$, mentre $\Pi_1^1(X)$ è chiusa rispetto all'operazione di ciproiezione $\forall_Y$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo anzitutto la chiusura rispetto alle controimmagini boreliane. Siano Z uno spazio polacco, $A \subseteq X$ un insieme analitico e $f : Z \rightarrow X$ una funzione boreliana. Poiché A è analitico, esistono uno spazio polacco W e un boreliano $B \subseteq X \times W$ tali che

$$A = \exists_W B.$$

Consideriamo

$$C = \{(z, w) \in Z \times W \mid (f(z), w) \in B\}.$$

Poiché la funzione $(z, w) \mapsto (f(z), w)$ è boreliana, l'insieme C è boreliano in $Z \times W$. Inoltre,

$$f^{-1}(A) = \exists_W C.$$

Dunque $f^{-1}(A)$ è analitico.

Mostriamo ora la chiusura rispetto alle unioni numerabili. Sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di insiemi analitici di X . Per la Proposizione 4.3, per ogni $n \in \mathbb{N}$ possiamo scegliere un boreliano $B_n \subseteq X \times \mathcal{N}$ tale che

$$A_n = \exists_{\mathcal{N}} B_n.$$

Per $\alpha \in \mathcal{N}$, poniamo $\alpha^*(m) = \alpha(m+1)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$ e definiamo

$$C = \{(x, \alpha) \in X \times \mathcal{N} \mid (x, \alpha^*) \in B_{\alpha(0)}\}.$$

L'insieme C è boreliano, poiché si può scrivere come

$$C = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{(x, \alpha) \in X \times \mathcal{N} \mid \alpha(0) = k \text{ e } (x, \alpha^*) \in B_k\}.$$

Per costruzione,

$$\exists_{\mathcal{N}} C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Dunque l'unione numerabile di insiemi analitici è analitica.

Per quanto riguarda le intersezioni numerabili, fissiamo un omeomorfismo $\mathcal{N} \simeq \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$ e indichiamo con $p_i : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ le proiezioni coordinate corrispondenti. Definiamo

$$D = \{(x, \alpha) \in X \times \mathcal{N} \mid (x, p_i(\alpha)) \in B_i \text{ per ogni } i \in \mathbb{N}\}.$$

L'insieme D è boreliano, essendo intersezione numerabile di insiemi boreliani. Inoltre,

$$\exists_{\mathcal{N}} D = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i.$$

Quindi anche le intersezioni numerabili di insiemi analitici sono analitiche.

Le corrispondenti proprietà per gli insiemi coanalitici seguono passando ai complementari. Infine, sia $A \subseteq X \times Y$ un insieme analitico. Allora esistono uno spazio polacco W e un boreliano $B \subseteq X \times Y \times W$ tali che

$$A = \exists_W B.$$

Di conseguenza,

$$\exists_Y A = \exists_{Y \times W} B,$$

quindi $\exists_Y A$ è analitico. La chiusura dei coanalitici rispetto alla coproiezione segue dall'identità

$$\forall_Y A = X \setminus \exists_Y ((X \times Y) \setminus A).$$

□

Mostriamo ora che la classe degli insiemi analitici estende propriamente quella dei boreliani, cioè che esistono insiemi analitici che non sono di Borel. Useremo un argomento diagonale basato sull'esistenza di un insieme universale per la classe $\Sigma_1^1(X)$.

TEOREMA 4.6. *Per ogni spazio polacco X , esiste un insieme analitico $U \subseteq \mathcal{N} \times X$ che è universale per la classe $\Sigma_1^1(X)$, ovvero tale che un sottoinsieme $A \subseteq X$ è analitico se e solo se esiste un $\alpha \in \mathcal{N}$ per cui $A = U_\alpha$, dove*

$$U_\alpha = \{x \in X \mid (\alpha, x) \in U\}.$$

Per una dimostrazione, basata sull'esistenza di un chiuso universale in $\mathcal{N} \times (X \times \mathcal{N})$, si veda Srivastava [21, Sez. 4.1].

Nel caso in cui X sia polacco e non numerabile, useremo anche la forma equivalente dell'universalità in $X \times X$: esiste un insieme analitico $U \subseteq X \times X$ universale per $\Sigma_1^1(X)$.

TEOREMA 4.7. *Ogni spazio polacco non numerabile contiene un sottoinsieme analitico che non è boreliano.*

DIMOSTRAZIONE. Per il risultato di universalità per gli insiemi analitici negli spazi polacchi non numerabili, esiste un insieme analitico $U \subseteq X \times X$ universale per la classe $\Sigma_1^1(X)$; si veda Srivastava [21, Sez. 4.1].

Consideriamo l'insieme diagonale

$$A = \{x \in X \mid (x, x) \in U\}.$$

Poiché la classe $\Sigma_1^1(X)$ è chiusa rispetto alle controimmagini mediante funzioni continue e l'applicazione $x \mapsto (x, x)$ è continua, l'insieme A è analitico.

Supponiamo, per assurdo, che A sia boreliano. Allora $X \setminus A$ è analitico. Per l'universalità di U , esiste $x_0 \in X$ tale che

$$X \setminus A = U_{x_0} = \{y \in X \mid (x_0, y) \in U\}.$$

Pertanto

$$x_0 \in A \iff (x_0, x_0) \in U \iff x_0 \in U_{x_0} \iff x_0 \in X \setminus A,$$

assurdo. Dunque A è analitico ma non boreliano. $\square$

Questo risultato mostra precisamente il fenomeno che era sfuggito a Lebesgue: la proiezione di un insieme di Borel può uscire dalla σ -algebra di Borel. Gli insiemi analitici nascono quindi come la classe naturale in cui collocare tali proiezioni.

Gli insiemi analitici e coanalitici costituiscono dunque il primo livello della gerarchia proiettiva. Ricordiamo soltanto che, mentre questi primi livelli godono in ZFC delle proprietà di regolarità che studieremo nel seguito, per i livelli proiettivi superiori, tali proprietà non sono dimostrabili in ZFC nella stessa generalità e richiedono, in generale, ulteriori ipotesi assiomatiche (si veda Srivastava [21, Cap. 5]).

4.2. L'operazione di Suslin e gli insiemi analitici

Mostriamo ora un risultato che permette di collegare l'operazione di Suslin $\mathcal{A}$ introdotta nel primo capitolo con la classe degli insiemi analitici.

TEOREMA 4.8. *Siano X uno spazio polacco, d una metrica completa compatibile con la sua topologia e $A \subseteq X$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) A è un insieme analitico.
- (ii) Esiste un sistema regolare $\{F_s \mid s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ di sottoinsiemi chiusi di X tale che, per ogni successione $\alpha \in \mathcal{N}$, si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_{\alpha|n}) = 0$ e $A = \mathcal{A}(\{F_s\})$.
- (iii) Esiste un sistema $\{F_s \mid s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ di sottoinsiemi chiusi di X tale che $A = \mathcal{A}(\{F_s\})$.

DIMOSTRAZIONE. L'implicazione (ii) $\implies$ (iii) è ovvia, in quanto ogni sistema regolare con diametro tendente a zero è, in particolare, un sistema di sottoinsiemi chiusi.

Sia $\{F_s \mid s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ un sistema di insiemi chiusi in X tale che $A = \mathcal{A}(\{F_s\})$. Per definizione dell'operazione di Suslin, si ha

$$x \in A \iff \exists \alpha \in \mathcal{N} \forall n \in \mathbb{N} (x \in F_{\alpha|n}).$$

Sia $C \subseteq X \times \mathcal{N}$ definito ponendo

$$C = \{(x, \alpha) \in X \times \mathcal{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} (x \in F_{\alpha|n})\}.$$

Ovvero

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{|s|=n} (F_s \times \Sigma(s)).$$

Poiché per ogni $n \in \mathbb{N}$ fissato l'unione è di una famiglia localmente finita e gli insiemi $\Sigma(s)$ sono clopen, l'unione è un insieme chiuso. Di conseguenza, C , essendo intersezione numerabile di chiusi, è un sottoinsieme chiuso di $X \times \mathcal{N}$. Infine, per la Proposizione 4.3, poiché l'insieme A coincide con la proiezione di C sulla prima coordinata (Proposizione 1.37) ($A = \exists_{\mathcal{N}} C$), concludiamo che A è un insieme analitico.

Resta da mostrare che (i) implica (ii). Il caso $A = \emptyset$ è banale, prendendo $F_s = \emptyset$ per ogni $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Supponiamo dunque $A \neq \emptyset$ un insieme analitico. Per la Proposizione 4.3, esiste un'applicazione continua $f : \mathcal{N} \rightarrow X$ la cui immagine è $f(\mathcal{N}) = A$. Per ogni successione finita $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, definiamo l'insieme chiuso F_s come

$$F_s = \overline{f(\Sigma(s))}.$$

Il sistema $\{F_s \mid s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ è regolare. Inoltre, fissato $\alpha \in \mathcal{N}$, la continuità di f nel punto α implica che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$f(\Sigma(\alpha|n)) \subseteq B_d(f(\alpha), \varepsilon)$$

per ogni $n \geq n_0$. Di conseguenza

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(F_{\alpha|n}) = 0.$$

Se $x \in A$, per la suriettività di f esiste $\alpha \in \mathcal{N}$ tale che $x = f(\alpha)$ e quindi $x \in F_{\alpha|n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ da cui $A \subseteq \mathcal{A}(\{F_s\})$.

Viceversa, sia $x \in \mathcal{A}(\{F_s\})$. Per definizione, esiste $\alpha \in \mathcal{N}$ tale che $x \in F_{\alpha|n} = \overline{f(\Sigma(\alpha|n))}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per ogni naturale n sia $x_n \in f(\Sigma(\alpha|n))$ tale che $d(x, x_n) < 2^{-n}$. Dunque, per ogni n , esiste una successione $\alpha_n \in \Sigma(\alpha|n)$ tale che $x_n = f(\alpha_n)$ e per costruzione la successione $\{f(\alpha_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a x in X . Poiché $\alpha_n \in \Sigma(\alpha|n)$, la successione $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a α e poiché f è continua, $f(\alpha_n)$ converge a $f(\alpha) = x$ e quindi $x \in f(\mathcal{N}) = A$. $\square$

TEOREMA 4.9. *Sia X uno spazio polacco. Allora la classe $\Sigma_1^1(X)$ è chiusa rispetto all'operazione di Suslin $\mathcal{A}$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio polacco e sia $\mathcal{F}$ la famiglia dei sottoinsiemi chiusi di X . Per il Teorema 4.8, un sottoinsieme di X è analitico se e solo se esso si può ottenere applicando l'operazione di Suslin a un sistema di insiemi chiusi e quindi $\Sigma_1^1(X) = \mathcal{A}(\mathcal{F})$. Il risultato segue allora dall'idempotenza dell'operazione di Suslin, Teorema 1.39. $\square$

4.3. I teoremi di separazione e il teorema di Suslin

I teoremi di separazione, insieme ai loro risultati duali, i teoremi di riduzione, costituiscono alcuni tra i risultati più profondi e importanti della teoria degli insiemi analitici e coanalitici con conseguenze rilevanti anche per gli insiemi di Borel.

Il risultato più rilevante di questa sezione è il teorema di separazione, dovuto originariamente a Lusin. Per poterlo dimostrare premettiamo un lemma combinatorio e una definizione.

DEFINIZIONE 4.10. Due insiemi A e B si dicono *separati* da un terzo insieme C se

$$A \subseteq C \quad \text{e} \quad B \cap C = \emptyset.$$

LEMMA 4.11. Siano $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ e $F = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} F_m$ due sottoinsiemi di uno spazio polacco X . Se E non può essere separato da F mediante alcun insieme di Borel, allora esistono due indici $n, m \in \mathbb{N}$ tali che E_n non può essere separato da F_m mediante un insieme di Borel.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che per ogni coppia di indici $n, m \in \mathbb{N}$ esista un insieme di Borel $C_{nm} \in \mathcal{B}(X)$ che separi E_n da F_m , ovvero che

$$E_n \subseteq C_{nm} \quad \text{e} \quad F_m \cap C_{nm} = \emptyset.$$

Allora l'insieme

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_{nm}$$

è di Borel e separa E da F . Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$E_n \subseteq \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_{nm} \subseteq C,$$

quindi $E \subseteq C$. Inoltre, se $x \in F_m \cap C$, allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \in C_{nm}$, contro il fatto che $F_m \cap C_{nm} = \emptyset$. Dunque $F \cap C = \emptyset$, assurdo. $\square$

TEOREMA 4.12 (Teorema di separazione di Lusin). Siano A e B due sottoinsiemi analitici disgiunti di uno spazio polacco X . Allora esiste un insieme di Borel $C \in \mathcal{B}(X)$ che separa A e B .

DIMOSTRAZIONE. Se $A = \emptyset$ oppure $B = \emptyset$, la tesi è immediata. Supponiamo dunque A e B non vuoti e supponiamo, per assurdo, che non esista alcun insieme di Borel $C \in \mathcal{B}(X)$ che separi A da B .

Poiché A e B sono analitici, per la Proposizione 4.3 esistono due applicazioni continue $f : \mathcal{N} \rightarrow X$ e $g : \mathcal{N} \rightarrow X$ tali che $f(\mathcal{N}) = A$ e $g(\mathcal{N}) = B$. Costruiremo, per induzione, due successioni $\alpha, \beta \in \mathcal{N}$ tali che per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $f(\Sigma(\alpha|n))$ non possa essere separato da $g(\Sigma(\beta|n))$.

Assumiamo di aver mostrato l'esistenza di tali successioni α e β . Allora, poiché per ipotesi A e B sono disgiunti, si ha $f(\alpha) \neq g(\beta)$. Essendo X metrizzabile (e quindi uno spazio di Hausdorff), esistono due intorni $U, V \subseteq X$ aperti, disgiunti e contenenti rispettivamente $f(\alpha)$ e $g(\beta)$. Poiché f e g sono continue, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$f(\Sigma(\alpha|n_0)) \subseteq U \quad \text{e} \quad g(\Sigma(\beta|n_0)) \subseteq V.$$

In particolare, gli insiemi $f(\Sigma(\alpha|n_0))$ e $g(\Sigma(\beta|n_0))$ sono separati dall'aperto U , che è un insieme boreliano. Questo contraddice la proprietà richiesta.

Definiamo ora α e β soddisfacenti la proprietà richiesta per induzione. Poiché

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(\Sigma(n)) \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} g(\Sigma(m)),$$

dal Lemma 4.11 devono esistere $\alpha(0), \beta(0) \in \mathbb{N}$ tali che l'immagine $f(\Sigma(\alpha(0)))$ non sia separata da $g(\Sigma(\beta(0)))$ mediante alcun insieme di Borel.

Supponiamo ora di aver definito $(\alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(k))$ e $(\beta(0), \beta(1), \dots, \beta(k))$ soddisfacenti la condizione sulla non separabilità delle immagini. Poiché

$$f(\Sigma(\alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(k))) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} f(\Sigma(\alpha(0), \alpha(1), \dots, \alpha(k), n))$$

e similmente

$$g(\Sigma(\beta(0), \beta(1), \dots, \beta(k))) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} g(\Sigma(\beta(0), \beta(1), \dots, \beta(k), m)),$$

applicando ancora il Lemma 4.11 a queste ultime due unioni otteniamo l'esistenza di $\alpha(k+1), \beta(k+1) \in \mathbb{N}$ che soddisfano la condizione richiesta determinando quindi per induzione le due successioni cercate. $\square$

TEOREMA 4.13 (Teorema di Suslin). *Un sottoinsieme A di uno spazio polacco X è un insieme di Borel se e solo se è analitico e coanalitico. Equivalentemente, la classe ambigua del primo livello proiettivo coincide con la σ -algebra di Borel:*

$$\Delta_1^1(X) = \mathcal{B}(X).$$

DIMOSTRAZIONE. Come già osservato all'inizio del capitolo, ogni boreliano è analitico e coanalitico. Dunque

$$\mathcal{B}(X) \subseteq \Delta_1^1(X).$$

Viceversa, sia $A \in \Delta_1^1(X)$. Allora A è analitico e anche $X \setminus A$ è analitico. Inoltre, A e $X \setminus A$ sono disgiunti. Per il Teorema 4.12, esiste un boreliano $C \in \mathcal{B}(X)$ tale che

$$A \subseteq C \quad \text{e} \quad C \cap (X \setminus A) = \emptyset.$$

La seconda condizione implica $C \subseteq A$ e quindi $C = A$. Dunque A è boreliano. Ne consegue che

$$\Delta_1^1(X) \subseteq \mathcal{B}(X).$$

Pertanto $\Delta_1^1(X) = \mathcal{B}(X)$. $\square$

Concludiamo ora la sezione con un risultato utile per il seguito.

PROPOSIZIONE 4.14. *Sia X uno spazio polacco e sia $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi analitici di X a due a due disgiunti. Allora esiste una successione $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di insiemi di Borel in $\mathcal{B}(X)$ a due a due disgiunti tali che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, si abbia*

$$A_n \subseteq B_n.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$E_n = \bigcup_{m \neq n} A_m.$$

Poiché $\Sigma_1^1(X)$ è chiusa rispetto alle unioni numerabili, E_n è analitico. Inoltre A_n ed E_n sono disgiunti. Per il Teorema 4.12, esiste un boreliano $C_n \in \mathcal{B}(X)$ tale che

$$A_n \subseteq C_n \quad \text{e} \quad C_n \cap E_n = \emptyset.$$

Definiamo

$$B_n = C_n \setminus \bigcup_{m < n} C_m = C_n \cap \bigcap_{m < n} (X \setminus C_m).$$

Allora ogni B_n è boreliano e gli insiemi B_n sono a due a due disgiunti. Inoltre, se $x \in A_n$ e $m < n$, allora $x \in A_n \subseteq E_m$; poiché $C_m \cap E_m = \emptyset$, si ha $x \notin C_m$. Dunque $x \in B_n$. Quindi $A_n \subseteq B_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Osserviamo infine che, se X è uno spazio polacco non numerabile, la chiusura rispetto all'operazione di Suslin non si estende alla classe degli insiemi coanalitici. Infatti, ogni insieme analitico si ottiene applicando l'operazione di Suslin a un sistema di chiusi e i chiusi sono in particolare coanalitici. Se la classe $\Pi_1^1(X)$ fosse chiusa rispetto all'operazione di Suslin, allora si avrebbe

$$\Sigma_1^1(X) \subseteq \Pi_1^1(X).$$

Ma allora ogni analitico sarebbe anche coanalitico, quindi sarebbe boreliano per il Teorema 4.13, contro il Teorema 4.7.

4.4. Funzioni boreliane iniettive e il teorema di Lusin

Con la teoria esposta nelle sezioni precedenti abbiamo dunque osservato che l'operazione di proiezione o, più in generale, l'immagine di un insieme di Borel mediante una funzione continua, non conserva necessariamente la borelianità, come osservato nell'introduzione a proposito dell'errore di Lebesgue. Viene dunque naturale chiedersi quali ipotesi sulla funzione consentano di preservare tale proprietà.

TEOREMA 4.15. *Siano X e Y due spazi polacchi, sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme analitico e sia $f : A \rightarrow Y$ un'applicazione. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i) *f è boreliana, cioè $f^{-1}(U)$ è boreliano in A per ogni aperto $U \subseteq Y$.*
- (ii) *Il grafico di f è un sottoinsieme di Borel di $A \times Y$.*
- (iii) *Il grafico di f , visto come sottoinsieme di $X \times Y$, è analitico.*

DIMOSTRAZIONE. Le implicazioni (i) $\implies$ (ii) e (ii) $\implies$ (iii) sono standard. Mostriamo l'implicazione (iii) $\implies$ (i). Supponiamo che il grafico

$$\text{graph}(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in A, y = f(x)\}$$

sia analitico in $X \times Y$. Sia $U \subseteq Y$ un aperto. Allora

$$f^{-1}(U) = \exists_Y (\text{graph}(f) \cap (X \times U))$$

è analitico. Analogamente,

$$f^{-1}(Y \setminus U) = \exists_Y (\text{graph}(f) \cap (X \times (Y \setminus U)))$$

è analitico, poiché $Y \setminus U$ è boreliano. I due insiemi $f^{-1}(U)$ e $f^{-1}(Y \setminus U)$ sono disgiunti. Per il Teorema 4.12, esiste un boreliano $B \subseteq X$ tale che

$$f^{-1}(U) \subseteq B \quad \text{e} \quad B \cap f^{-1}(Y \setminus U) = \emptyset.$$

Poiché

$$A = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(Y \setminus U),$$

segue che

$$f^{-1}(U) = B \cap A.$$

Dunque $f^{-1}(U)$ è boreliano in A . Quindi f è boreliana. $\square$

COROLLARIO 4.16. *Siano X e Y spazi polacchi, sia $A \subseteq X$ un insieme di Borel e sia $f : A \rightarrow Y$ una funzione boreliana. Allora $f(A)$ è un sottoinsieme analitico di Y . In particolare, la conclusione vale se f è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché A è boreliano, in particolare A è analitico. Per il Teorema 4.15, il grafico $\text{graph}(f)$ è un sottoinsieme di Borel di $A \times Y$. Poiché A è boreliano in X , l'insieme $A \times Y$ è boreliano in $X \times Y$, quindi $\text{graph}(f)$ è boreliano anche come sottoinsieme di $X \times Y$. Inoltre

$$f(A) = \pi_Y(\text{graph}(f)).$$

Essendo proiezione di un boreliano di $X \times Y$, l'insieme $f(A)$ è analitico. $\square$

OSSERVAZIONE 4.17. Esistono un insieme di Borel $E \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $f(E)$ non sia un insieme di Borel. Infatti, per il Teorema 4.7, esiste un insieme analitico non boreliano $A \subseteq \mathbb{R}$ e per il Corollario 4.4, esiste un boreliano $C \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che

$$\pi_1(C) = A.$$

Sia $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ un omeomorfismo. Allora

$$C' = (h \times h)(C)$$

è un boreliano di $(0, 1)^2$, dunque anche di $[0, 1]^2$, e

$$\pi_1(C') = h(A).$$

Poiché h è un omeomorfismo, l'insieme $h(A)$ non è boreliano.

Sia ora

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$$

una curva di Peano, cioè una funzione continua e suriettiva. Poniamo

$$E = \gamma^{-1}(C').$$

Allora E è un boreliano di $[0, 1]$, quindi di $\mathbb{R}$. Inoltre, definiamo

$$p = \pi_1 \circ \gamma : [0, 1] \rightarrow [0, 1].$$

Estendiamo p a una funzione continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} p(0) & \text{se } x \leq 0, \\ p(x) & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ p(1) & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$$

Poiché γ è suriettiva, si ha

$$\gamma(E) = C'.$$

Pertanto

$$f(E) = p(E) = \pi_1(\gamma(E)) = \pi_1(C') = h(A).$$

Ma $h(A)$ non è boreliano. Quindi $f(E)$ non è un insieme di Borel.

Il Corollario 4.16 dice che l'immagine di un boreliano mediante una funzione boreliana (continua) è sempre analitica, ma questa osservazione mostra che, anche nel caso di funzioni continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tale immagine non è necessariamente boreliana. Il seguente teorema di Lusin afferma invece che la borelianità viene preservata sotto l'ipotesi aggiuntiva di iniettività.

TEOREMA 4.18 (Teorema di Lusin). *Siano X e Y due spazi polacchi, $A \subseteq X$ un sottoinsieme di Borel di X e $f : A \rightarrow Y$ un'applicazione boreliana iniettiva. Allora l'immagine $f(A)$ è un insieme di Borel in Y . In particolare, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è boreliana (per esempio, continua) e iniettiva, per ogni insieme boreliano $A \subseteq \mathbb{R}$, l'immagine $f(A) \subseteq \mathbb{R}$ è di Borel.*

DIMOSTRAZIONE. Poiché A è boreliano, $A \times Y$ è boreliano in $X \times Y$. Dal Teorema 4.15 segue che $\text{graph}(f)$ è boreliano in $A \times Y$ e quindi anche in $X \times Y$. Inoltre, la restrizione

$$\pi_Y|_{\text{graph}(f)} : \text{graph}(f) \rightarrow Y$$

è continua, iniettiva e ha immagine $f(A)$. Pertanto basta dimostrare il risultato nel caso in cui f sia continua.

Supponiamo dunque che $f : A \rightarrow Y$ sia continua. Poiché A è boreliano, per il Teorema 3.11 possiamo dotare A di una topologia polacca più fine della topologia relativa e con la stessa σ -algebra di Borel. Applicando il Teorema 2.14 a tale spazio polacco, otteniamo un chiuso $F \subseteq \mathcal{N}$ e una funzione continua e bigettiva $h : F \rightarrow A$. Poiché la nuova topologia su A è più fine di quella relativa originaria, la funzione h è continua anche come funzione a valori nel sottospazio originario $A \subseteq X$.

Se il risultato è noto per funzioni continue iniettive definite su chiusi di $\mathcal{N}$, allora

$$(f \circ h)(F) = f(A).$$

Possiamo dunque assumere che $X = \mathcal{N}$ e che il dominio $A \subseteq \mathcal{N}$ sia chiuso. Fissiamo una metrica d compatibile con la topologia di Y .

Supponiamo di aver costruito un sistema di Lusin di insiemi di Borel $B_s \in \mathcal{B}(Y)$, dove $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, ovvero una famiglia di insiemi tale che, per ogni coppia $s, t \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, siano soddisfatte le seguenti proprietà:

- $f(\Sigma(s) \cap A) \subseteq B_s \subseteq \overline{f(\Sigma(s) \cap A)}$.
- Se $s \preceq t$, allora $B_t \subseteq B_s$.
- Se $s \neq t$ e $|s| = |t|$, allora $B_s \cap B_t = \emptyset$.

Allora l'insieme

$$D = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{|s|=n} B_s$$

è di Borel. Mostriamo che $f(A) = D$.

Sia $\alpha \in A$. Per la prima proprietà dello schema si ha $f(\alpha) \in B_{\alpha|n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi $f(\alpha) \in D$.

Per l'altra inclusione, sia $y \in D$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, scegliamo $s_n \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ tale che $|s_n| = n$ e $y \in B_{s_n}$. Dalla disgiunzione degli insiemi associati a successioni finite distinte della stessa lunghezza e dalla proprietà di inclusione lungo i prolungamenti segue che

$$s_n \preceq s_{n+1}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Esiste dunque una successione $\alpha \in \mathcal{N}$ tale che $s_n = \alpha|n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. In particolare,

$$y \in B_{\alpha|n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché

$$B_{\alpha|n} \subseteq \overline{f(\Sigma(\alpha|n) \cap A)},$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\alpha_n \in \Sigma(\alpha|n) \cap A$ tale che

$$d(y, f(\alpha_n)) < 2^{-n}.$$

La successione $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a α e, poiché A è chiuso, si ha $\alpha \in A$. Infine, dalla continuità di f segue che $f(\alpha_n)$ converge a $f(\alpha)$. D'altra parte, per costruzione, $f(\alpha_n)$ converge a y . Quindi

$$f(\alpha) = y.$$

Pertanto $y \in f(A)$, dunque $D \subseteq f(A)$. Abbiamo così dimostrato che $f(A) = D$, quindi sarà sufficiente costruire il sistema di Lusin.

Definiamo il sistema per induzione sulla lunghezza di s . Per la successione vuota poniamo

$$B_\emptyset = \overline{f(A)}.$$

Supponiamo ora di aver definito B_s per una successione finita $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, l'insieme $\Sigma(\widehat{s}n) \cap A$ è chiuso in $\mathcal{N}$. Poiché f è continua, gli insiemi

$$f(\Sigma(\widehat{s}n) \cap A)$$

sono analitici in Y . Inoltre, poiché f è iniettiva, la famiglia

$$\{f(\Sigma(\widehat{s}n) \cap A) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

è costituita da insiemi a due a due disgiunti. Per la Proposizione 4.14, esiste una successione $\{B_{\widehat{s}n}^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ di boreliani di Y a due a due disgiunti tale che

$$f(\Sigma(\widehat{s}n) \cap A) \subseteq B_{\widehat{s}n}^*$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Definiamo allora

$$B_{\widehat{s}n} = B_s \cap B_{\widehat{s}n}^* \cap \overline{f(\Sigma(\widehat{s}n) \cap A)}.$$

Ogni $B_{\widehat{s}n}$ è boreliano. Inoltre, per costruzione,

$$f(\Sigma(\widehat{s}n) \cap A) \subseteq B_{\widehat{s}n} \subseteq \overline{f(\Sigma(\widehat{s}n) \cap A)}.$$

La definizione implica anche $B_{\widehat{s}n} \subseteq B_s$, mentre la disgiunzione degli insiemi $B_{\widehat{s}n}^*$ garantisce che gli insiemi $B_{\widehat{s}n}$ siano a due a due disgiunti al livello successivo. Procedendo per induzione, otteniamo quindi un sistema di Lusin con le proprietà richieste. Per quanto mostrato sopra, ne consegue che $f(A)$ è boreliano. $\square$

L'Osservazione 4.17 e il teorema di Lusin mostrano quindi il ruolo esatto dell'iniettività. Senza tale ipotesi, l'immagine continua di un boreliano può non essere boreliana; sotto l'ipotesi di iniettività, invece, si ha la conservazione della borelianità. Abbiamo dunque una forma precisa della correzione dell'affermazione di Lebesgue.

4.5. Proprietà di regolarità

Concludiamo il capitolo presentando le proprietà di regolarità degli insiemi analitici. Come abbiamo visto nei capitoli precedenti, siamo stati in grado di provare per la σ -algebra dei boreliani alcune importanti proprietà di regolarità, quali la misurabilità secondo Lebesgue, la proprietà dell'insieme perfetto e la proprietà di Baire. In questa sezione estendiamo tali risultati alla classe degli insiemi analitici.

Cominciamo mostrando che gli analitici godono della proprietà di Baire e sono misurabili rispetto a ogni misura completa e σ -finita definita su una σ -algebra contenente i boreliani. A tale scopo introduciamo la nozione strutturale di completezza secondo Marczewski.

DEFINIZIONE 4.19. Una σ -algebra $\mathcal{B}$ su un insieme X si dice *completa secondo Marczewski* se per ogni $A \subseteq X$ esiste un $\widehat{A} \in \mathcal{B}$ contenente A tale che, per ogni $B \in \mathcal{B}$ contenente A , ogni sottoinsieme di $\widehat{A} \setminus B$ appartiene a $\mathcal{B}$. Tale insieme $\widehat{A}$ si dice *ricoprimento $\mathcal{B}$ -minimale* di A .

LEMMA 4.20. Ogni spazio di misura completo e σ -finito è completo secondo Marczewski.

DIMOSTRAZIONE. Sia $(X, \mathcal{B}, \mu)$ uno spazio di misura completo e σ -finito e sia μ^* la misura esterna generata da μ . Sia innanzitutto $A \subseteq X$ tale che $\mu^*(A) < +\infty$. Per definizione di estremo inferiore della misura esterna, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un insieme $A_n \in \mathcal{B}$ tale che $A \subseteq A_n$ e

$$\mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{n+1}.$$

Definiamo

$$\hat{A} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n.$$

Poiché $\mathcal{B}$ è una σ -algebra, si ha $\hat{A} \in \mathcal{B}$ e $A \subseteq \hat{A}$. Per monotonia della misura esterna e della misura, si ha

$$\mu^*(A) \leq \mu(\hat{A}) \leq \mu(A_n)$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Passando al limite per $n \rightarrow \infty$, otteniamo

$$\mu(\hat{A}) = \mu^*(A).$$

Sia ora $B \in \mathcal{B}$ un insieme contenente A . Allora $A \subseteq \hat{A} \cap B$, quindi

$$\mu^*(A) \leq \mu(\hat{A} \cap B).$$

Poiché $\hat{A}$ ha misura finita, possiamo scrivere

$$\mu(\hat{A}) = \mu(\hat{A} \cap B) + \mu(\hat{A} \setminus B).$$

Dalla disuguaglianza precedente e dall'uguaglianza $\mu(\hat{A}) = \mu^*(A)$ segue che

$$\mu(\hat{A} \setminus B) = 0.$$

Essendo lo spazio di misura completo, ogni sottoinsieme di $\hat{A} \setminus B$ appartiene a $\mathcal{B}$. Dunque $\hat{A}$ è un ricoprimento $\mathcal{B}$ -minimale di A .

Nel caso generale, poiché lo spazio è σ -finito, possiamo scrivere

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n,$$

con $X_n \in \mathcal{B}$, gli X_n a due a due disgiunti e $\mu(X_n) < +\infty$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, poniamo

$$A_n = A \cap X_n.$$

Per quanto appena dimostrato, esiste un ricoprimento $\mathcal{B}$ -minimale $\hat{A}_n \in \mathcal{B}$ di A_n , che possiamo assumere contenuto in X_n . Poniamo

$$\hat{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \hat{A}_n.$$

Allora $\hat{A} \in \mathcal{B}$ e $A \subseteq \hat{A}$. Mostriamo che $\hat{A}$ è un ricoprimento $\mathcal{B}$ -minimale di A . Sia $B \in \mathcal{B}$ tale che $A \subseteq B$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $A_n \subseteq B \cap X_n$. Poiché $\hat{A}_n$ è un ricoprimento $\mathcal{B}$ -minimale di A_n , ogni sottoinsieme di

$$\hat{A}_n \setminus (B \cap X_n)$$

appartiene a $\mathcal{B}$. Inoltre $\hat{A}_n \subseteq X_n$, quindi

$$\hat{A}_n \setminus (B \cap X_n) = \hat{A}_n \setminus B.$$

Ora, se $E \subseteq \hat{A} \setminus B$, allora

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E \cap (\hat{A}_n \setminus B)).$$

Ogni insieme $E \cap (\hat{A}_n \setminus B)$ appartiene a $\mathcal{B}$, quindi $E \in \mathcal{B}$. Dunque $\hat{A}$ è un ricoprimento $\mathcal{B}$ -minimale di A . $\square$

Per la Proposizione 2.21 è ben posta la seguente definizione.

DEFINIZIONE 4.21. La famiglia dei sottoinsiemi di uno spazio topologico soddisfacenti la proprietà di Baire costituisce una σ -algebra, che prende il nome di σ -algebra di Baire.

LEMMA 4.22. La σ -algebra di Baire di uno spazio polacco è completa secondo Marczewski.

DIMOSTRAZIONE. Sia X uno spazio polacco e sia $A \subseteq X$. Fissiamo una base numerabile $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ per la topologia di X e poniamo

$$G = \bigcup \{U_n \mid A \cap U_n \text{ è magro}\}.$$

Per costruzione, G è aperto e $A \cap G$ è magro, essendo unione numerabile di insiemi magri. Sia M un insieme magro di tipo F_σ tale che

$$A \cap G \subseteq M.$$

Poniamo

$$\hat{A} = (X \setminus G) \cup M.$$

Allora $\hat{A}$ ha la proprietà di Baire e contiene A . Infatti, se $x \in A$, allora o $x \in G$ e quindi $x \in A \cap G \subseteq M$, oppure $x \in X \setminus G$.

Mostriamo che $\hat{A}$ è un ricoprimento minimale di A nella σ -algebra degli insiemi con la proprietà di Baire. Sia dunque B un insieme con la proprietà di Baire tale che $A \subseteq B$. Basta mostrare che $\hat{A} \setminus B$ è magro, poiché ogni sottoinsieme di un insieme magro ha la proprietà di Baire.

Supponiamo per assurdo che

$$(X \setminus G) \setminus B$$

non sia magro. Poiché ha la proprietà di Baire, esiste un aperto non vuoto $U \subseteq X$ tale che $(X \setminus G) \setminus B$ sia comagro in U . Poiché $(X \setminus G) \setminus B$ è disgiunto da G , l'aperto $U \cap G$ deve essere vuoto; altrimenti sarebbe un aperto non vuoto e magro, contro il teorema della categoria di Baire. Dunque $U \subseteq X \setminus G$.

Inoltre, essendo $(X \setminus G) \setminus B$ comagro in U , l'insieme $B \cap U$ è magro. Poiché $A \subseteq B$, anche $A \cap U$ è magro. Scegliendo un elemento di base U_n non vuoto con $U_n \subseteq U$, otteniamo che $A \cap U_n$ è magro, quindi $U_n \subseteq G$ per definizione di G . Questo contraddice $U \subseteq X \setminus G$.

Dunque $(X \setminus G) \setminus B$ è magro. Poiché M è magro, anche

$$\hat{A} \setminus B \subseteq ((X \setminus G) \setminus B) \cup M$$

è magro. Ne segue che ogni sottoinsieme di $\hat{A} \setminus B$ ha la proprietà di Baire. Quindi $\hat{A}$ è un ricoprimento minimale di A e la σ -algebra di Baire è completa secondo Marczewski. $\square$

L'importanza fondamentale della nozione di completezza secondo Marczewski è espressa dal seguente teorema.

TEOREMA 4.23 (Marczewski). Se $(X, \mathcal{B})$ è uno spazio misurabile completo secondo Marczewski, allora la σ -algebra $\mathcal{B}$ è chiusa rispetto all'operazione di Suslin.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{B_s \mid s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ un sistema di insiemi di $\mathcal{B}$ e poniamo

$$B = \mathcal{A}(\{B_s\}).$$

Dobbiamo mostrare che $B \in \mathcal{B}$. Sostituendo, se necessario, il sistema dato con il sistema regolare

$$\tilde{B}_s = \bigcap_{t \preceq s} B_t,$$

possiamo supporre senza perdita di generalità che il sistema $\{B_s \mid s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ sia regolare. Per ogni $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ poniamo

$$B^s = \bigcup_{s \prec \alpha} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{\alpha|n}.$$

Per la regolarità del sistema si ha $B^s \subseteq B_s$. Inoltre

$$B^\emptyset = B$$

e, per ogni $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$,

$$B^s = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^{s \hat{\ } n}.$$

Per ogni $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$, sia $\hat{B}^s$ un ricoprimento $\mathcal{B}$ -minimale di B^s . Poiché $B^s \subseteq B_s$ e $B_s \in \mathcal{B}$, rimpiazzando $\hat{B}^s$ con

$$\hat{B}^s \cap B_s$$

possiamo supporre che

$$\hat{B}^s \subseteq B_s$$

per ogni $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$. Inoltre, rimpiazzando $\hat{B}^s$ con

$$\bigcap_{t \preceq s} \hat{B}^t,$$

possiamo supporre che il sistema $\{\hat{B}^s \mid s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}\}$ sia regolare. Queste sostituzioni preservano la proprietà di essere un ricoprimento $\mathcal{B}$ -minimale di B^s , poiché si passa a insiemi di $\mathcal{B}$ che contengono ancora B^s e sono contenuti nel ricoprimento minimale precedente.

Per ogni $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ poniamo

$$C_s = \hat{B}^s \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \hat{B}^{s \hat{\ } n}.$$

Poiché

$$B^s = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B^{s \hat{\ } n} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \hat{B}^{s \hat{\ } n},$$

l'insieme $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \hat{B}^{s \hat{\ } n}$ appartiene a $\mathcal{B}$ e contiene B^s . Dalla $\mathcal{B}$ -minimalità di $\hat{B}^s$ segue allora che ogni sottoinsieme di C_s appartiene a $\mathcal{B}$.

Poniamo

$$C = \bigcup_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} C_s.$$

Poiché $\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ è numerabile e ogni sottoinsieme di ciascun C_s appartiene a $\mathcal{B}$, ogni sottoinsieme di C appartiene a $\mathcal{B}$. Infatti, se $D \subseteq C$, allora

$$D = \bigcup_{s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}} (D \cap C_s)$$

e ogni insieme $D \cap C_s$ appartiene a $\mathcal{B}$.
Mostriamo ora che

$$\widehat{B}^\emptyset \setminus C \subseteq B.$$

Sia $x \in \widehat{B}^\emptyset \setminus C$. Poiché $x \notin C$, si ha in particolare $x \notin C_\emptyset$. Essendo $x \in \widehat{B}^\emptyset$, dalla definizione di $C_\emptyset$ segue che esiste $\alpha(0) \in \mathbb{N}$ tale che

$$x \in \widehat{B}^{(\alpha(0))}.$$

Supponiamo ora di aver definito

$$s = (\alpha(0), \dots, \alpha(k-1))$$

in modo che $x \in \widehat{B}^s$. Poiché $x \notin C_s$, dalla definizione di C_s segue che esiste $\alpha(k) \in \mathbb{N}$ tale che

$$x \in \widehat{B}^{s \widehat{\alpha}(k)}.$$

Procedendo per induzione, otteniamo una successione $\alpha \in \mathcal{N}$ tale che

$$x \in \widehat{B}^{\alpha|n}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché abbiamo normalizzato i ricoprimenti in modo che $\widehat{B}^{\alpha|n} \subseteq B_{\alpha|n}$, segue che

$$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{\alpha|n} \subseteq B.$$

Abbiamo quindi provato che $\widehat{B}^\emptyset \setminus C \subseteq B$. Di conseguenza,

$$\widehat{B}^\emptyset \setminus B \subseteq C.$$

Poiché ogni sottoinsieme di C appartiene a $\mathcal{B}$, si ha $\widehat{B}^\emptyset \setminus B \in \mathcal{B}$. Infine,

$$B = \widehat{B}^\emptyset \setminus (\widehat{B}^\emptyset \setminus B),$$

dunque $B \in \mathcal{B}$. □

COROLLARIO 4.24. *Sia X uno spazio polacco. Ogni insieme analitico di X ha la proprietà di Baire. Inoltre, se μ è una misura completa e σ -finita definita su una σ -algebra contenente $\mathcal{B}(X)$, allora ogni insieme analitico di X è μ -misurabile. In particolare, ogni insieme analitico di $\mathbb{R}$ è misurabile secondo Lebesgue.*

DIMOSTRAZIONE. La σ -algebra dei boreliani è contenuta sia nella σ -algebra degli insiemi con la proprietà di Baire sia, nel caso misurabile, nella σ -algebra considerata. Per i Lemmi 4.20 e 4.22, tali σ -algebre sono complete secondo Marczewski. Per il Teorema 4.23, esse sono chiuse rispetto all'operazione di Suslin. Poiché ogni insieme analitico si ottiene applicando l'operazione di Suslin a un sistema di chiusi, la tesi segue. □

Concludiamo infine menzionando che anche la proprietà dell'insieme perfetto si estende dagli insiemi di Borel alla classe degli insiemi analitici.

TEOREMA 4.25 (Teorema dell'insieme perfetto per gli insiemi analitici). *Sia X uno spazio polacco e sia $A \subseteq X$ un insieme analitico non numerabile. Allora A contiene un sottoinsieme omeomorfo allo spazio di Cantor C . In particolare, ogni insieme analitico non numerabile ha cardinalità uguale al continuo.*

Per una dimostrazione si veda Srivastava [21, Sez. 4.3].

Dal punto di vista storico, questo risultato spiega anche perché la ricerca di controesempi all'ipotesi del continuo all'interno delle classi descrittive più naturali fosse destinata a fallire. Infatti, tanto i boreliani quanto gli analitici godono della proprietà dell'insieme perfetto: ogni insieme non numerabile appartenente a queste classi contiene una copia dello spazio di Cantor e ha quindi cardinalità uguale al continuo.

CAPITOLO 5

Insiemi della retta reale e conclusioni

Concludiamo la tesi raccogliendo, nel caso particolare dei sottoinsiemi della retta reale, i risultati principali dimostrati nei capitoli precedenti. L'obiettivo è mettere in evidenza il quadro complessivo emerso dalla teoria classica: partendo dagli insiemi di Borel introdotti da Borel [4] e dallo studio delle funzioni reali avviato da Baire [2] e Lebesgue [16], si arriva alla classe degli insiemi analitici definiti da Suslin [20] nel contesto della scuola di Lusin.

In tutto il capitolo consideriamo sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, dotato della topologia usuale.

1. La retta reale non è numerabile.

L'intervallo $[0, 1]$ non è numerabile e quindi anche $\mathbb{R}$ non è numerabile. Inoltre, l'insieme dei reali ha la stessa cardinalità dell'insieme delle parti di $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{R} \equiv \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

In particolare,

$$|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}.$$

Questi risultati sono stati richiamati nel Teorema 1.3 e nella Proposizione 1.7.

2. Gli insiemi di Borel sono ottenuti dagli aperti mediante operazioni numerabili.

La σ -algebra di Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ è la più piccola σ -algebra che contiene gli aperti di $\mathbb{R}$. Dunque ogni insieme boreliano è costruito a partire dagli aperti mediante complementi, unioni numerabili e intersezioni numerabili. Questa è la formalizzazione della classe introdotta da Borel [4].

Nel Capitolo 3 abbiamo inoltre descritto la gerarchia di Borel, che classifica i boreliani secondo la complessità delle operazioni necessarie per costruirli. Nel caso di $\mathbb{R}$, che è uno spazio polacco non numerabile, tale gerarchia non collassa:

$$\Sigma_\alpha^0(\mathbb{R}) \neq \Pi_\alpha^0(\mathbb{R})$$

per ogni $1 \leq \alpha < \omega_1$, come mostrato nel Teorema 3.19.

3. Ogni boreliano non numerabile contiene una copia del Cantor.

Se $B \subseteq \mathbb{R}$ è un boreliano non numerabile, allora B contiene un sottospazio omeomorfo allo spazio di Cantor $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$. In particolare, ogni boreliano non numerabile ha cardinalità del continuo:

$$|B| = 2^{\aleph_0}.$$

Questo è il teorema dell'insieme perfetto per i boreliani, dimostrato nel Teorema 3.12, a partire dal Teorema 2.9 e dal Teorema 2.7.

Quindi un boreliano di $\mathbb{R}$ non può avere una cardinalità intermedia tra quella di $\mathbb{N}$ e quella di $\mathbb{R}$.

4. La proiezione di un boreliano può non essere boreliana.

L'errore individuato da Suslin nel lavoro di Lebesgue consisteva nell'assumere che la proiezione di un insieme di Borel fosse sempre di Borel. In generale ciò è falso: per il Corollario 4.4 e il Teorema 4.7, esiste un boreliano $C \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che

$$\pi_1(C)$$

non è boreliano. Questa osservazione, dovuta a Suslin [20], porta naturalmente alla classe degli insiemi analitici.

5. Gli insiemi analitici sono le proiezioni dei boreliani.

Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ si dice analitico se esistono uno spazio polacco Y e un boreliano $B \subseteq \mathbb{R} \times Y$ tali che

$$A = \exists_Y B.$$

Essendo A un sottoinsieme della retta reale, come visto nel Corollario 4.4, questa definizione è equivalente a richiedere l'esistenza di un boreliano $C \subseteq \mathbb{R}^2$ tale che

$$A = \pi_1(C).$$

Equivalentemente, come dimostrato nella Proposizione 4.3 e nel Teorema 4.8, un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ è analitico se e solo se soddisfa le seguenti caratterizzazioni equivalenti:

- è immagine continua dello spazio di Baire $\mathcal{N}$;
- è proiezione di un chiuso di $\mathbb{R} \times \mathcal{N}$;
- è ottenibile mediante l'operazione di Suslin applicata a un sistema di chiusi di $\mathbb{R}$, cioè è un insieme di Suslin di $\mathbb{R}$.

6. Gli analitici estendono propriamente i boreliani.

La classe degli insiemi analitici estende propriamente quella degli insiemi di Borel. In altre parole, esiste un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che A è analitico ma non è boreliano (Teorema 4.7).

Quindi, abbiamo l'inclusione propria

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \Sigma_1^1(\mathbb{R}).$$

7. Gli analitici sono stabili rispetto a costruzioni naturali.

La classe $\Sigma_1^1(\mathbb{R})$ degli insiemi analitici è chiusa rispetto a molte operazioni fondamentali: unioni numerabili, intersezioni numerabili, proiezioni e controimmagini tramite funzioni boreliane. Queste proprietà sono state raccolte nella Proposizione 4.5. Inoltre, dalla caratterizzazione degli analitici come immagini continue dello spazio di Baire segue anche la stabilità rispetto alle immagini continue.

Inoltre, la classe degli analitici è chiusa rispetto all'operazione di Suslin:

$$\mathcal{A}(\Sigma_1^1(\mathbb{R})) = \Sigma_1^1(\mathbb{R}).$$

Questo è stato dimostrato nel Teorema 4.9, usando l'idempotenza dell'operazione di Suslin, Teorema 1.39.

8. Gli insiemi analitici sono misurabili secondo Lebesgue.

Uno dei risultati fondamentali della teoria classica è che ogni insieme analitico $A \subseteq \mathbb{R}$ è misurabile secondo Lebesgue. Dunque, anche se un analitico può non essere boreliano, esso appartiene comunque alla σ -algebra di Lebesgue.

Nella tesi questo risultato segue dalla completezza secondo Marczewski: gli spazi di misura completi e σ -finiti sono completi secondo Marczewski e ogni σ -algebra completa secondo Marczewski è chiusa rispetto all'operazione di Suslin. Poiché gli insiemi analitici sono ottenuti applicando l'operazione di Suslin a sistemi di chiusi, segue che essi sono misurabili secondo Lebesgue. Si vedano il Lemma 4.20 e il Teorema 4.23.

9. Gli insiemi analitici hanno la proprietà di Baire.

Ogni insieme analitico $A \subseteq \mathbb{R}$ gode della proprietà di Baire. Dunque esiste un aperto $U \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$A \Delta U$$

sia magro.

Anche questo risultato segue dalla completezza secondo Marczewski: la σ -algebra degli insiemi con la proprietà di Baire è completa secondo Marczewski e quindi è chiusa rispetto all'operazione di Suslin. Si vedano il Lemma 4.22 e il Teorema 4.23.

10. Ogni analitico non numerabile contiene una copia del Cantor.

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ è analitico e non numerabile, allora A contiene un sottoinsieme omeomorfo allo spazio di Cantor $\mathcal{C}$. Di conseguenza, ogni analitico non numerabile ha cardinalità del continuo:

$$|A| = 2^{\aleph_0}.$$

Questo è il teorema dell'insieme perfetto per gli insiemi analitici (Teorema 4.25).

Quindi anche gli analitici, come i boreliani, non forniscono controesempi all'ipotesi del continuo: un insieme analitico di reali è numerabile oppure ha cardinalità del continuo. Dal punto di vista storico, questo fatto spiega perché la ricerca di insiemi definibili di cardinalità intermedia tra $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$ fosse destinata a fallire all'interno delle classi descrittive più naturali. A posteriori, dopo i risultati di Gödel e Cohen sull'indipendenza dell'ipotesi del continuo dagli assiomi usuali della teoria degli insiemi (si veda [14]), sappiamo che questo fenomeno si inserisce in un quadro più ampio: eventuali insiemi di cardinalità intermedia, nei modelli in cui esistono, non possono essere prodotti dalle costruzioni "regolari" considerate in questa tesi.

11. Due analitici disgiunti si possono separare con un boreliano.

Il teorema di separazione di Lusin afferma che, se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sono analitici e disgiunti, allora esiste un boreliano $C \subseteq \mathbb{R}$ tale che

$$A \subseteq C \quad \text{e} \quad B \cap C = \emptyset.$$

Questo risultato, dovuto a Lusin, è stato dimostrato nel Teorema 4.12.

In altre parole, anche quando due insiemi analitici non sono essi stessi boreliani, se sono disgiunti possono comunque essere separati da un insieme di Borel.

12. Teorema di Suslin: i boreliani sono esattamente gli analitici con complementare analitico.

Il teorema di Suslin fornisce una caratterizzazione fondamentale degli insiemi di Borel. Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}$ si ha:

$$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \Longleftrightarrow \quad A \in \Sigma_1^1(\mathbb{R}) \text{ e } \mathbb{R} \setminus A \in \Sigma_1^1(\mathbb{R}).$$

Equivalentemente,

$$\Delta_1^1(\mathbb{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Questo risultato, dimostrato nel Teorema 4.13, mostra che l'unica ragione per cui un analitico può non essere boreliano è che il suo complementare non è analitico.

13. Immagini boreliane di boreliani: analiticità e teorema di Lusin.

In generale, l'immagine di un boreliano mediante una funzione boreliana (o anche continua) non è necessariamente boreliana. Tuttavia essa è sempre analitica: se $A \subseteq \mathbb{R}$ è boreliano e

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

è boreliana, allora

$$f(A) \in \Sigma_1^1(\mathbb{R}).$$

Questo è il contenuto del Corollario 4.16.

La perdita di borelianità può avvenire anche nel caso di funzioni continue reali: per l'Osservazione 4.17, esistono un boreliano $E \subseteq \mathbb{R}$ e una funzione continua $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tali che

$$g(E) \notin \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Il teorema di Lusin mostra invece che l'iniettività elimina questa possibile perdita di borelianità. Precisamente, se $A \subseteq \mathbb{R}$ è boreliano e

$$f : A \rightarrow \mathbb{R}$$

è boreliana e iniettiva, allora

$$f(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

In particolare, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è continua e iniettiva, allora l'immagine di ogni boreliano $A \subseteq \mathbb{R}$ mediante f è ancora un boreliano. Questo è il contenuto del Teorema 4.18.

Nel quadro storico della tesi, questi risultati chiariscono quale parte dell'intuizione di Lebesgue può essere salvata: le immagini boreliane di boreliani possono uscire dalla classe dei boreliani, ma restano analitiche; sotto l'ipotesi aggiuntiva di iniettività, la borelianità viene preservata.

14. Le principali classi descrittive hanno cardinalità diverse.

Poniamo

$$\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|.$$

Poiché $\mathbb{R}$ ha una base numerabile, la famiglia degli aperti di $\mathbb{R}$ ha cardinalità $\mathfrak{c}$. Lo stesso vale per la famiglia dei chiusi. Anche la classe dei boreliani ha cardinalità $\mathfrak{c}$, poiché i boreliani sono generati dagli aperti mediante operazioni numerabili e tali costruzioni possono essere codificate mediante successioni di numeri naturali.

Come ricordato nella Definizione 4.2, gli insiemi proiettivi sono ottenuti a partire dai boreliani mediante un numero finito di alternanze di proiezione e complementazione. Anche le classi degli insiemi analitici, coanalitici e proiettivi hanno cardinalità $\mathfrak{c}$:

$$|\Sigma_1^1(\mathbb{R})| = |\Pi_1^1(\mathbb{R})| = |\{\text{insiemi proiettivi di } \mathbb{R}\}| = \mathfrak{c}.$$

Infatti, gli insiemi analitici sono codificabili da chiusi di $\mathbb{R} \times \mathcal{N}$, mentre le classi proiettive si ottengono mediante un numero finito di operazioni di proiezione e complementazione. Poiché i livelli proiettivi sono numerabili, la classe complessiva degli insiemi proiettivi ha ancora cardinalità $\mathfrak{c}$.

Il quadro cambia radicalmente per la σ -algebra di Lebesgue. Poiché ogni sottoinsieme di un insieme nullo è misurabile secondo Lebesgue e l'insieme di Cantor ha cardinalità $\mathfrak{c}$ e misura nulla, si ha

$$|\mathcal{M}_L| = 2^{\mathfrak{c}}.$$

Dunque la classe degli insiemi misurabili secondo Lebesgue ha la stessa cardinalità di $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ed è molto più grande della classe degli insiemi proiettivi.

classe di insiemi	cardinalità
aperti di $\mathbb{R}$	$\mathfrak{c}$
chiusi di $\mathbb{R}$	$\mathfrak{c}$
boreliani di $\mathbb{R}$	$\mathfrak{c}$
analitici di $\mathbb{R}$	$\mathfrak{c}$
coanalitici di $\mathbb{R}$	$\mathfrak{c}$
proiettivi di $\mathbb{R}$	$\mathfrak{c}$
misurabili secondo Lebesgue	$2^{\mathfrak{c}}$
$\mathcal{P}(\mathbb{R})$	$2^{\mathfrak{c}}$

Riassumendo, per i sottoinsiemi della retta reale abbiamo la seguente catena concettuale:

$$\text{chiusi e aperti} \rightsquigarrow \text{boreliani} \rightsquigarrow \text{analitici} \rightsquigarrow \text{proiettivi}.$$

I primi tre livelli, cioè chiusi e aperti, boreliani e analitici, conservano forti proprietà di regolarità. In particolare, tutti gli insiemi analitici di $\mathbb{R}$ sono misurabili secondo Lebesgue, hanno la proprietà di Baire e soddisfano la proprietà dell'insieme perfetto.

La teoria nata dai lavori di Borel, Baire, Lebesgue, Lusin e Suslin mostra quindi che costruzioni insiemistiche non banali, come la proiezione e l'operazione di Suslin, producono ancora insiemi molto regolari. Allo stesso tempo, essa individua con precisione il limite della classe dei boreliani: le proiezioni dei boreliani non sono necessariamente boreliane, ma appartengono alla più ampia classe degli insiemi analitici.

In questa prospettiva, il teorema di Suslin e il teorema di Lusin risolvono il problema emerso dall'errore di Lebesgue. Il primo mostra che i boreliani sono esattamente gli insiemi simultaneamente analitici e coanalitici; il secondo mostra che le immagini boreliane iniettive preservano la borelianità.

Dal punto di vista dell'ipotesi del continuo, i risultati sulla proprietà dell'insieme perfetto mostrano che le classi descrittive più naturali studiate in questa tesi non possono fornire insiemi di cardinalità intermedia tra $\aleph_0$ e $2^{\aleph_0}$. Infatti, ogni boreliano o analitico non numerabile contiene una copia dello spazio di Cantor e ha quindi cardinalità del continuo.

Osserviamo infine che la maggior parte dei risultati appena riassunti non è peculiare della retta reale. Gli stessi risultati descrittivi valgono in ogni spazio polacco e quindi anche in $\mathbb{R}^n$ per ogni $n \geq 1$.

Bibliografia

1. Luigi Ambrosio, Giuseppe Da Prato, and Andrea Mennucci, *Introduction to measure theory and integration*, Appunti. Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. 10, Edizioni della Normale, 2011.
2. René-Louis Baire, *Sur les fonctions de variables réelles*, Annali di Matematica Pura ed Applicata **3** (1899), 1–123.
3. Andreas Blass, *Existence of bases implies the axiom of choice*, Axiomatic set theory (Boulder, Colo., 1983), Contemporary Mathematics, vol. 31, American Mathematical Society, 1984, pp. 31–33.
4. Émile Borel, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier–Villars, Paris, 1898.
5. Haim Brezis, *Analisi funzionale. Teoria e applicazioni*, Liguori, 1986.
6. Paul Joseph Cohen, *The independence of the continuum hypothesis, I*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **50** (1963), 1143–1148.
7. ———, *The independence of the continuum hypothesis, II*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **51** (1964), 105–110.
8. Radu Diaconescu, *Axiom of choice and complementation*, Proceedings of the American Mathematical Society **51** (1975), 176–178.
9. Kurt Gödel, *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum–hypothesis*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **24** (1938), 556–557.
10. Paul Richard Halmos, *Naïve set theory*, D. Van Nostrand Co., 1960.
11. ———, *Naïve set theory*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, New York, 1974, Reprint of the 1960 edition.
12. ———, *Teoria elementare degli insiemi*, Feltrinelli, 1981.
13. Friedrich Hartogs, *Über das Problem der Wohlordnung*, Mathematische Annalen **76** (1915), 438–443.
14. Karel Hrbacek and Thomas Jech, *Introduction to set theory*, 3rd ed., Marcel Dekker, New York, 1999.
15. Alexander Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer–Verlag, New York, 1995.
16. Henri Lebesgue, *Sur les fonctions représentables analytiquement*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **6** (1905), 139–216.
17. Peter Gustav Lejeune Dirichlet, *Über die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus und Cosinusreihen*, Repertorium der Physik **1** (1837), 152–174.
18. Jan Mycielski, *An anecdote about Alfred Tarski*, Notices of the American Mathematical Society **53** (2006), 224.
19. Bernhard Riemann, *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, Abhandlungen der Königlich Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **13** (1867), 87–132, (Habilitationsschrift, 1854).
20. Mikhail Souslin, *Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences **164** (1917), 88–91.
21. Shashi Mohan Srivastava, *A course on Borel sets*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 180, Springer–Verlag, New York, 1998.
22. Alfred Tarski, *Sur les ensembles finis*, Fundamenta Mathematicae **6** (1924), 45–95.