

UNA BREVE DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ–MARKOV

PIETRO MAJER AND CARLO MANTEGAZZA

1. IL TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DI RIESZ–MARKOV

Vogliamo fornire una breve dimostrazione del seguente *teorema di rappresentazione di Riesz–Markov* nel caso di uno spazio metrico compatto (si veda, ad esempio, il libro di Rudin [4] per il caso più generale), basata sul teorema di estensione di Carathéodory e sul teorema di Fubini–Tonelli. Si applica chiaramente a sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$, per esempio.

Teorema 1.1 (Teorema di rappresentazione di Riesz–Markov). *Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia Φ un funzionale lineare positivo su $C(X)$, lo spazio vettoriale delle funzioni continue. Allora, esiste un’unica misura di Borel regolare μ su X tale che*

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu,$$

per ogni $f \in C(X)$, dove “regolare” significa che per ogni $E \in \mathcal{B}$, vale

$$\mu(E) = \inf\{\mu(G) \mid G \supseteq E, G \in \mathcal{B} \text{ e } G \text{ aperto}\} = \sup\{\mu(K) \mid K \subseteq E, K \in \mathcal{B} \text{ e } K \text{ compatto}\}. \quad (1.1)$$

Proof. Date due funzioni $u, v \in C(X)$ con $u \leq v$, definiamo

$$R_{u,v} = \{(x, t) \mid u(x) \leq t < v(x)\} \subseteq X \times \mathbb{R}$$

e sia $\mathcal{R}$ la famiglia di tutti questi insiemi.

Se Φ è un funzionale lineare positivo su $C(X)$, definiamo la funzione d’insieme $\rho : \mathcal{R} \rightarrow [0, +\infty)$ come

$$\rho(R_{u,v}) = \Phi(v - u).$$

È facile vedere che questa è una buona definizione, poiché se $R_{u_1,v_1} = R_{u_2,v_2}$ deve essere $v_1(x) - u_1(x) = v_2(x) - u_2(x)$ per ogni $x \in X$, quindi $v_1 - u_1 = v_2 - u_2$ e

$$\rho(R_{u_1,v_1}) = \Phi(v_1 - u_1) = \Phi(v_2 - u_2) = \rho(R_{u_2,v_2}).$$

Vogliamo vedere che ρ è una *pre-misura* σ -finita su $\mathcal{R}$, nel senso che:

- $\mathcal{R}$ è un *semi-anello*, cioè una famiglia che contiene l’insieme vuoto, chiusa per intersezione finita e tale che per ogni coppia di insiemi $A, B \in \mathcal{R}$, la differenza $A \setminus B$ può essere scritta come un’unione finita disgiunta di insiemi in $\mathcal{R}$.
- Per ogni famiglia numerabile di insiemi disgiunti $R_n \in \mathcal{R}$ tali che $\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n \in \mathcal{R}$, abbiamo

$$\rho\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(R_n),$$

cioè, ρ è σ -additiva.

- Esiste una famiglia numerabile di insiemi $R_n \in \mathcal{R}$ tali che $X \times \mathbb{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n$ e $\rho(R_n) < +\infty$, per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Il fatto che $\mathcal{R}$ sia chiuso rispetto alle intersezioni finite segue dalla formula (con un piccolo abuso di notazione) $R_{u_1,v_1} \cap R_{u_2,v_2} = R_{\max\{u_1,u_2\}, \min\{v_1,v_2\}}$, mentre, posto $M = \max\{|u_1|, |u_2|, |v_1|, |v_2|\}$, vale

$$R_{u_1,v_1} \setminus R_{u_2,v_2} = R_{u_1,v_1} \cap \mathcal{C}R_{u_2,v_2} = R_{u_1,v_1} \cap (R_{-M,u_2} \cup R_{v_2,M}) = (R_{u_1,v_1} \cap R_{-M,u_2}) \cup (R_{u_1,v_1} \cap R_{v_2,M}),$$

dove le unioni sono disgiunte, mostrando che $\mathcal{R}$ è un semi-anello.

Abbiamo chiaramente $\emptyset \in \mathcal{R}$ e $X \times \mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} R_{n,n+1}$, con $\rho(R_{n,n+1}) = \Phi(1)$, quindi dobbiamo solo

dimostrare la σ -additività di ρ .

Se $R_{u,v}$ è l'unione disgiunta di R_{u_n,v_n} per $n \in \mathbb{N}$, deve essere

$$v(x) - u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n(x) - u_n(x)),$$

per ogni $x \in X$ e, essendo questa una serie a termini positivi, le funzioni continue $f_k = \sum_{n=1}^k (v_n - u_n)$ convergono monotonamente a $f = v - u$ che è anch'essa continua. Quindi, per il teorema di Dini, questa convergenza è uniforme e, essendo Φ continuo (cosa facilmente verificabile), concludiamo

$$\rho(R_{u,v}) = \Phi(v - u) = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi\left(\sum_{n=1}^k (v_n - u_n)\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \Phi(v_n - u_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \rho(R_{u_n,v_n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho(R_{u_n,v_n}).$$

Allora, per il *teorema di estensione di Carathéodory* (si veda [2, Teorema 1.53] e anche [1], per esempio), ρ può essere estesa in modo unico a una misura positiva ν sulla σ -algebra $\mathcal{N}$ generata da $\mathcal{R}$. Definiamo la misura μ su X come

$$\mu(E) = \nu(E \times [0, 1]),$$

per ogni insieme $E \subseteq X$ appartenente alla σ -algebra

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq X \mid E \times [0, 1] \in \mathcal{N}\}.$$

Notiamo che $\mathcal{M}$ contiene ogni insieme chiuso $C \subseteq X$, infatti considerando la funzione continua $f(x) = 1 - \min\{d_C(x), 1\}$ e ponendo $R_n = R_{0,f^n} \in \mathcal{N}$, abbiamo che $C \times [0, 1] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} R_n$. Quindi, $\mathcal{M}$ contiene la σ -algebra di Borel $\mathcal{B}$ di X .

Ora vediamo che per ogni funzione $f \in C(X)$, abbiamo

$$\Phi(f) = \int_X f d\mu. \quad (1.2)$$

Infatti, è facile vedere che la misura ν su $X \times \mathbb{R}$ soddisfa

$$\nu(E \times I) = \mu(E) \cdot \mathcal{L}^1(I)$$

per ogni $E \in \mathcal{B}$ e I un intervallo di $\mathbb{R}$, dove $\mathcal{L}^1$ è la misura di Lebesgue, quindi $\nu = \mu \times \mathcal{L}^1$.

Per ogni funzione continua non negativa f in $C(X)$, abbiamo allora

$$\Phi(f) = \nu(R_{0,f}) = \int_{X \times \mathbb{R}} \chi_{[0,f(x)]}(t) d\nu = \int_{X \times \mathbb{R}} \chi_{[0,f(x)]}(t) d(\mu \times \mathcal{L}^1) = \int_X \mathcal{L}^1(0, f(x)) d\mu(x) = \int_X f d\mu,$$

per il teorema di Fubini-Tonelli. L'uguaglianza (1.2) segue quindi per una funzione generale $f \in C(X)$, scomponendola nelle sue parti positiva e negativa, per la linearità di Φ . Si noti che ne segue anche che la misura μ è la "proiezione" di ν sul primo fattore di $X \times \mathbb{R}$.

La regolarità di μ è in realtà il Teorema G, Sezione 52, Capitolo X nel libro di Halmos [1], forniamo uno schema dell'argomento. La famiglia $\mathcal{E}$ degli insiemi di Borel E per cui vale (1.1) è facilmente vista essere una σ -algebra. Allora, ogni insieme di zeri E di X può essere chiaramente approssimato dall'interno, inoltre, è intersezione di insiemi aperti in $\mathcal{B}$, infatti se $E = f^{-1}(0)$, abbiamo $E = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^{-1}(-1/n, 1/n)$, quindi $E \in \mathcal{E}$. Questo mostra che $\mathcal{E} = \mathcal{B}$.

Per quanto riguarda l'unicità di μ , per la proprietà di regolarità, è sufficiente dimostrarla solo sui sottoinsiemi compatti di X in $\mathcal{B}$: supponiamo che $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ per tutti i compatti $K \subseteq X$, ogni volta che μ_1 e μ_2 sono misure per cui vale il teorema. Quindi, fissando $K \in \mathcal{B}$ e $\varepsilon > 0$, esiste un insieme aperto $G \in \mathcal{B}$ tale che $G \supseteq K$ con $\mu_2(V) < \mu_2(K) + \varepsilon$, allora, per il lemma di Urysohn, abbiamo una funzione continua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tale che $f = 1$ su K e $f = 0$ su G^c , quindi

$$\mu_1(K) = \int_X \chi_K d\mu_1 \leq \int_X f d\mu_1 = \Phi(f) = \int_X f d\mu_2 \leq \int_X \chi_G d\mu_2 = \mu_2(G) < \mu_2(K) + \varepsilon.$$

Quindi, $\mu_1(K) \leq \mu_2(K)$ per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ e se scambiamo i ruoli di μ_1 e μ_2 , otteniamo la disuguaglianza opposta, quindi l'unicità di μ è dimostrata e abbiamo finito. $\square$

La linea sopra funziona analogamente se lo spazio metrico X è solo *localmente compatto* e il funzionale lineare positivo Φ è definito solo su $C_c(X)$. Quindi, abbiamo il teorema di rappresentazione di Riesz-Markov in $\mathbb{R}^n$.

Osservazione 1.2. Per ottenere la “versione classica” del teorema in uno spazio di Hausdorff localmente compatto generale (quella in [4], per esempio), c’è un “punto mancante” nella dimostrazione, dovuto al fatto che possibilmente non ogni insieme chiuso è l’insieme di zeri di una funzione continua (in uno spazio metrico abbiamo ottenuto questo mediante la funzione $f(x) = 1 - \min\{d_C(x), 1\}$), quindi la misura μ ottenuta con l’argomento sopra è definita solo sulla cosiddetta σ -algebra di Baire di X , che è una (possibilmente propria) sottofamiglia della σ -algebra di Borel (un esempio è dato dal cosiddetto spazio di Fort non numerabile [5, Esempio 24]). Tuttavia, nel caso di uno spazio di Hausdorff localmente compatto, con qualche sforzo, è comunque possibile estendere la misura μ a una misura di Borel regolare sull’intera σ -algebra di Borel (si veda [1, Theorem D, Section 54, Chapter X] and [3]) e ottenere la conclusione.

REFERENCES

1. P. R. Halmos, *Measure theory*, D. Van Nostrand Co., Inc., 1950.
2. A. Klenke, *Probability theory. A comprehensive course*, third ed., Universitext, Springer, 2020.
3. P. Majer and C. Mantegazza, *A quick proof of the Riesz–Markov–Kakutani representation theorem*, <https://cvgmt.sns.it/HomePages/cm>, 2025.
4. W. Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw–Hill, 1987.
5. L. A. Steen and J. A. Seebach Jr., *Counterexamples in topology*, Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1970.

(Pietro Majer) DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI PISA, ITALIA
Email address, P. Majer: pietro.majer@unipi.it

(Carlo Mantegazza) DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E APPLICAZIONI “RENATO CACCIOPOLI”, UNIVERSITÀ DI NAPOLI FEDERICO II & SCUOLA SUPERIORE MERIDIONALE, NAPOLI, ITALIA
Email address, C. Mantegazza: carlo.mantegazza@unina.it