La Congettura di Poincaré

Carlo Mantegazza*

9 maggio 2024

Era circa la metà di novembre 2002 quando un collega mi segnalò un nuovo lavoro pubblicato pochi giorni prima sul preprint server ArXiv (un database di articoli scientifici) riguardante il *flusso di Ricci*, ben sapendo del mio interesse al riguardo. Stavo infatti studiando per avvicinarmi a questo argomento, che tratta di deformazioni di spazi geometrici (superfici, per esempio, ma anche spazi di dimensione più alta che i matematici chiamano "varietà") guidate da equazioni differenziali, dunque posizionato a cavallo tra l'analisi e la geometria. Da vari anni la ricerca si era essenzialmente interrotta a causa dei difficili problemi incontrati, in particolare nel completare il cosiddetto "programma di Hamilton" dovuto a Richard Hamilton, che aveva introdotto tale flusso nel 1982. Questo programma (che si dice suggerito dal matematico cinese Shing–Tung Yau – Medaglia Fields 1982), per quanto Hamilton non l'avesse mai scritto o dichiarato esplicitamente, era un evidente "attacco" alla *congettura di Poincarè*, uno dei problemi aperti più famosi e importanti della matematica, nonché uno dei sette "Millennium Problems" selezionati dall'Istituto Clay nel 2000 (con un premio di un milione di dollari ognuno).

La congettura fu formulata nel 1904 da Henri Poincaré (1854 – 1912), *l'ultimo universalista*, nel quinto e ultimo "complemento" alla sua opera *Analysis Situs*. Lui stesso ne propose una dimostrazione che poi si accorse essere sbagliata; da quel momento, per più di un secolo, svariati matematici di altissimo livello fallirono nel tentativo di trovarne una prova. Malgrado ciò, tali sforzi produssero comunque un imponente corpus di importanti idee, tecniche e risultati nel settore che viene oggi chiamato "topologia geometrica" e che appunto si occupa delle proprietà delle varietà, con particolare attenzione alle dimensioni "basse", come vedremo.

L'articolo apparso su ArXiv era scritto da Grigory (detto Grisha) Perelman, un matematico russo del prestigioso Steklov Institute di Saint Petersburg, già ben noto per aver risolto vari importanti problemi aperti in geometria. Sebbene molto tecnico e stringato, di non immediata comprensibilità nemmeno per gli esperti del flusso di Ricci, sembrava contenere vari impressionanti passi avanti nel programma di Hamilton. In particolare, una frase di Perelman nell'introduzione del lavoro recitava "*... by our earlier (partly unpublished) work this is enough for topological conclusions*", ovviamente creando un grande fermento nella comunità matematica che sapeva benissimo cosa significava tale frase: la possibile dimostrazione non solo della congettura di Poincaré, ma di una congettura ancora più generale detta "di geometrizzazione" (che implicava quella di Poincarè) che fornisce una "descrizione" completa di *tutte* le varietà tridimensionali, formulata nel 1970 da William P. Thurston (1946 – 2012), Medaglia Fields 1982.

Non ero chiaramente l'unico ad avere interesse per la questione. Fu dunque chiesto a Vitali Kapovitch, suo amico e importante topologo in dimensione bassa, di contattare Perelman per chiarire il punto. La risposta è indicativa della sua particolare personalità:

*Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli Federico II & Scuola Superiore Meridionale, Napoli

```
    Date: Wed, 20 Nov 2002 11:46:49 +0300 (MSK)
    From: Grigory Perelman <perelman@euclid.pdmi.ras.ru>
Reply-To: Grigory Perelman <perelman@euclid.pdmi.ras.ru>
 Subject: Re: geometrization
      To: Vitali Kapovitch <vitali@math.ucsb.edu>

That's correct.
Grisha

On Tue, 19 Nov 2002, Vitali Kapovitch wrote:

> Hi Grisha,
> Sorry to bother you but a lot of people are asking me
> about your preprint "The entropy formula for the Ricci...".
> Do I understand it correctly that while you can not yet
> do all the steps in the Hamilton program you can do enough
> so that using some collapsing results you can prove
> geometrization?
>
> Vitali
```

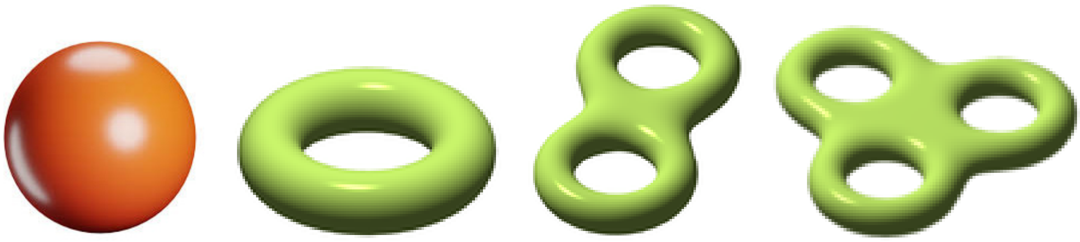
Lo scopo di questa nota è quello di illustrare in modo discorsivo la congettura di Poincaré e il cammino che ha portato alla sua dimostrazione, che consiste in una delle pagine più belle e profonde della storia della matematica.

Superfici e semplice connessione

Sebbene vari risultati che oggi chiamiamo "topologici" fossero stati trovati in precedenza, è con Poincarè che la *topologia* (da lui chiamata *analysis situs*) assunse una forma moderna. In particolare, per quanto riguarda lo studio delle superfici o degli spazi (meno visualizzabili) di dimensione più alta.

L'idea naturale che abbiamo di superficie è quella che in matematica si chiamerebbe "chiusa" (cioè, semplificando un poco, "limitata nello spazio", senza "punti mancanti" e senza bordi) e "orientabile". Eccone alcuni esempi:

La domanda naturale di Poincaré era quando una superficie fosse *omeomorfa* a un altra, nel senso di "deformabile" in quest'ultima (e chiaramente viceversa), come se fossero elastiche. Non è difficile vedere che la sfera e la palla da rugby, il bretzel e l'ultima superficie a destra nella seconda fila di figure sopra, siano omeomorfe, ma ciò vale anche per la prima superficie a sinistra di tale fila (la ciambella, detta *toro* dai matematici) e l'ultima della terza fila, detta anche "nodo trifoglio", in quanto si permette alle superfici anche di "compenetrarsi" durante la deformazione (si provi a immaginare come fare, "sciogliendo il nodo").
La risposta intuitiva (e corretta – è infatti un teorema detto "di classificazione delle superfici", una volta formalizzati precisamente tutti i concetti) a questa domanda è che due superfici chiuse e orientabili sono omeomorfe se e soltanto se hanno lo stesso numero di "buchi" (numero detto *genere* di una superficie).

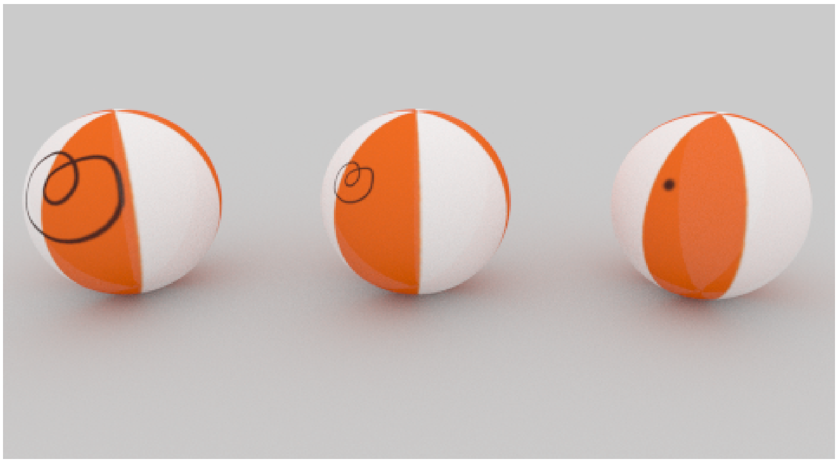


Superfici di genere 0, 1, 2 e 3.

Si tratta dunque di definire precisamente e formalmente cosa si intende per "buco" e, in prima battuta, come dire che la sfera è l'unica superficie "senza buchi". Per fare ciò Poincaré introduce il concetto fondamentale di *semplice connessione*.

Una superficie si dice **semplicemente connessa** *se ogni laccio (curva chiusa) su di essa si può deformare in modo continuo a un punto (è un laccio contraibile).*

Sottolineiamo che "deformare in modo continuo" un laccio significa intuitivamente "senza tagliarlo".
La sfera o qualunque sua deformazione gode di questa proprietà.



In presenza di un "buco", come nelle superfici di genere positivo nella figura sopra, un laccio che "agganci un buco" come un anello, non è chiaramente contraibile. Per esempio, una superficie omeomorfa a un toro non è semplicemente connessa. Infatti, un laccio come nella seguente figura, si può contrarre a un punto solo "tagliandolo".

Il teorema fondamentale di questa teoria è il seguente:

Una superficie chiusa semplicemente connessa è omeomorfa alla sfera.

In altre parole, la sfera è l'unica superficie chiusa e orientata che è semplicemente connessa.

La congettura di Poincaré

Poincaré si chiese allora se questo teorema fosse vero anche per gli spazi di dimensione più alta di due, in particolare quelli tridimensionali, cioè della dimensione immediatamente successiva a quella delle superfici.
Uno spazio tridimensionale generale è "localmente" come il nostro spazio ordinario, ma potrebbe avere "comportamenti strani" percorrendolo... ad esempio si potrebbe entrare dalla porta di una stanza e rientrare nella stessa stanza da un'altra porta, così come percorrendo una circonferenza o la superficie di un toro si torna al punto di partenza. Oppure potrebbe avere una struttura ancora più complicata. Esistono la 3–sfera, il 3–toro e altri vari esempi di spazi tridimensionali, analoghi agli esempi di superfici che abbiamo visto sopra. Per esempio, in analogia col caso delle superfici, la 3–sfera (unitaria) è l'insieme dei punti a distanza uno dall'origine nello spazio euclideo 4–dimensionale $\mathbb{R}^4$.
Con l'obiettivo di arrivare a un teorema di classificazione come per le superfici, una delle prime congetture (domande) di Poincarè fu quella che è poi passata alla storia della matematica come *congettura di Poincaré*, proposta nel 1904 sui "Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo":

Uno spazio tridimensionale chiuso e semplicemente connesso è omeomorfo alla 3–sfera.

Si possono inoltre formulare congetture analoghe in dimensione ancora più alta, che paradossalmente hanno avuto una risposta positiva precedente:

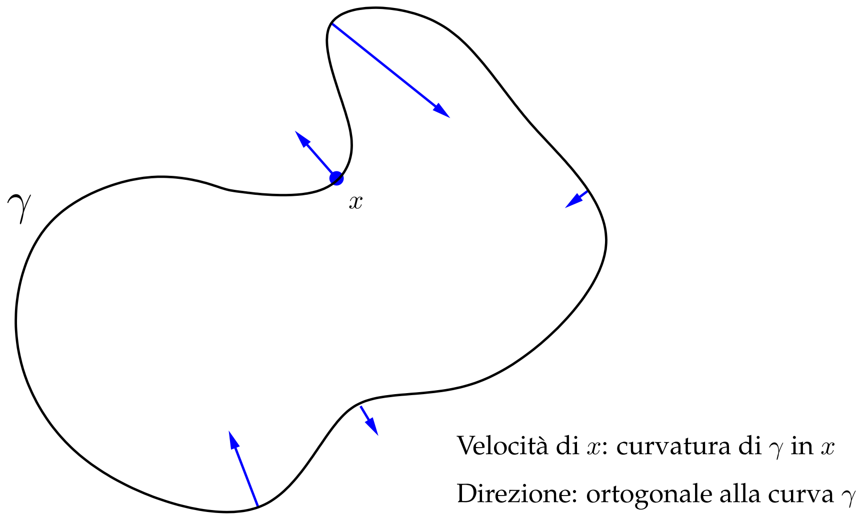
- in dimensione maggiore o uguale a 5 – Stephen Smale (Medaglia Fields 1966),
- in dimensione 4 – Michael Freedman (Medaglia Fields 1986).

Rimaneva dunque aperto proprio il caso originale tridimensionale, risolto infine da Grisha Perelman (Medaglia Fields 2006 – Rifiutata!).

I flussi geometrici

Una possibile linea dimostrativa della congettura è "trasformare" in qualche modo (deformazioni continue, *chirurgia – taglia & cuci*) un ipotetico controesempio alla congettura in uno spazio che si sappia poi riconoscere essere la sfera.

I tentativi in questo senso per via “topologica” sono falliti per circa un secolo. L’approccio “vincente”, sempre all’interno di questo quadro, si è rivelato deformare lo spazio in oggetto per mezzo di leggi di evoluzione date da equazioni differenziali alle derivate parziali.
Il vantaggio rispetto alle deformazioni di tipo topologico è che queste sono intrinsecamente “quantitatitive”, in quanto le tecniche dell’*analisi matematica* per studiare le equazioni differenziali portano naturalmente con sé delle stime sulle soluzioni.
In generale, tali evoluzioni di oggetti geometrici prendono il nome di *flussi geometrici*. Un esempio è dato dal moto di curve per curvatura nel piano, in cui in ogni istante ogni punto di una curva chiusa, liscia e senza autointersezioni si muove con velocità normale uguale alla curvatura nel punto, come illustrato nella seguente figura.



Un esempio notevole di implementazione numerica (interattiva) di questo flusso si puõ trovare al sito web http://a.carapetis.com/csf.

Si dimostra (*teorema di Gage–Hamilton–Grayson*) che durante questo flusso la curva rimane liscia e senza autointersezioni. Inoltre, dopo un tempo finito diventa convessa, poi sempre più circolare e infine “collassa” a un punto. Se “riscalassimo” la curva di un fattore, in modo da tenere l’area contenuta costante, convergerebbe a una circonferenza.
Questo è dunque un esempio di un “buon” flusso geometrico, che deforma ogni elemento di una famiglia di oggetti geometrici (le curve chiuse) in un elemento “rappresentante” che si conosce bene (una circonferenza).
Sebbene questo flusso di curve sia il più semplice flusso geometrico di questo genere, il teorema detto sopra è assolutamente non banale e la sua dimostrazione richiede argomenti e idee raffinate sia dall’analisi matematica che dalla geometria.

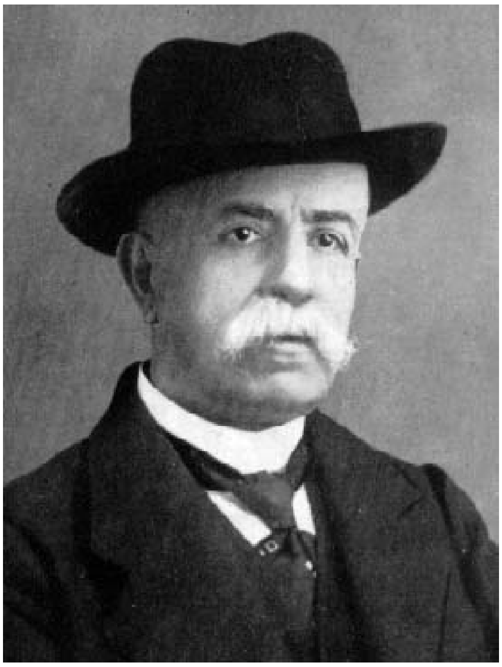
Il flusso di Ricci – Richard Hamilton

In un famoso articolo del 1982 (*Three–manifolds with positive Ricci curvature*, J. Differential Geom. 17, 1982), Richard Hamilton definisce e studia per la prima volta il *flusso di Ricci* di metriche riemanniane $g(t)$ su una varietà M, cioè il sistema di equazioni (alle derivate parziali)

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2\mathrm{Ric}_{g(t)}.$$

Una metrica riemanniana è l’oggetto matematico che determina le distanze tra i punti di una varietà, dunque ne definisce univocamente la struttura “ri-

gida", appunto "metrica" (per fare un esempio, per deformare una sfera in un ellissoide, ne va necessariamente modificata la metrica). Al membro sinistro dell'equazione si ha la velocità di variazione della metrica nel tempo, mentre nel termine destro appare il cosiddetto *tensore di Ricci* $\mathrm{Ric}_{g(t)}$, che è una sorta di curvatura della varietà, introdotto dall'importante geometra italiano Gregorio Ricci Curbastro all'inizio del '900 (*Direzioni e invarianti principali in una varietà qualunque*, Atti R. Ist. Veneto 63, 1903–1904).
Come nota storica, menzioniamo che l'analisi di una famiglia di flussi geometrici tra cui vi era anche il flusso di Ricci, venne precedentemente proposta (ma poi non sviluppata, se non di recente) da Jean–Pierre Bourguignon (*Ricci curvature and Einstein metrics*, Lecture Notes in Math. 838, 1981).



Il prof. Einstein a Padova

Padova, 27 ottobre, notte.

Nell'Aula Magna della nostra Università Alberto Einstein ha tenuto oggi l'annunziata conferenza. L'aula è affollatissima. Il prof. Ricci-Curbastro, della Facoltà fisico-matematica, presenta il prof. Einstein con elevate parole ricordando anche come tre secoli or sono, in questa stessa aula, Galileo Galilei abbia insegnato la allora nuova dottrina della meccanica.

Il prof. Einstein, che parla in italiano, esprime anzitutto il suo compiacimento nel parlare nella città dove insegna il prof. Ricci al quale si deve il calcolo infinitesimale assoluto, ch'è l'arma matematica necessaria ad esprimere la teoria della relatività generale. Poscia espone in riassunto, nell'ordine tenuto nelle conferenze di Bologna, i tratti essenziali di questa teoria. Il prof. Einstein fu molto applaudito.

Corriere della Sera, 28 ottobre 1921

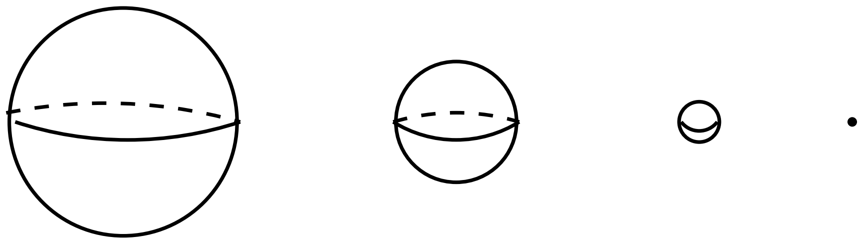
Gregorio Ricci–Curbastro, 1853 – 1925

Osserviamo che la "curvatura" di una varietà generale è un concetto un po' risposto che si esplica tecnicamente in vari modi, uno dei quali è il tensore di Ricci. Intuitivamente, per una superficie (e analogamente, con un po' di immaginazione, per spazi di dimensione più alta) la curvatura è positiva nelle zone dove si ha una "pancia", come per esempio attorno a ogni punto di una sfera (indipendentemente se tale "pancia" sia rivolta verso l'interno o l'esterno) e negativa nelle zone in cui la superficie assomiglia a una sella di cavallo. Il tensore di Ricci in un punto di una varietà tridimensionale è una media delle curvature di tutte le superfici interne alla varietà passanti per il punto e ciò implica, per esempio, che un "cilindro" (tridimensionale) abbia tensore di Ricci positivo.
Tornando al flusso di Ricci, assegnata un'arbitraria metrica iniziale $g_0 = g(0)$ su M, si tratta allora di studiare l'evoluzione nel tempo di una metrica $g(t)$ soluzione del problema differenziale descritto sopra, dunque la trasformazione della struttura geometrica di una varietà (essendo questa "codificata" nella sua metrica).
L'equazione del flusso di Ricci è della stessa famiglia della classica *equazione del calore* nei mezzi materiali (entrambe appartengono alla famiglia delle equazioni dette *paraboliche*) e analogamente all'equazione del calore che ha un effetto "regolarizzante" rendendo la distribuzione della temperatura sempre più costante, il flusso di Ricci tende (in un certo senso) a "diffondere" la curvatura "omogeneizzando" la sua distribuzione. È dunque ragionevole attendersi di ottenere una curva-

tura sempre più uniforme, quindi una "geometria" della varietà molto simmetrica, per esempio come quella di una sfera.

Rispetto alle tecniche di deformazione "flessibili" puramente topologico–geometriche, dunque "qualitative", poiché l'analisi delle equazioni differenziali si sviluppa tramite stime sulle soluzioni, si hanno informazioni "quantitative" sulla deformazione associata al flusso e sui possibili "limiti" delle varietà che evolvono, nell'ottica di ottenere conclusioni geometriche sulla varietà di partenza.

Il flusso deforma la metrica (e quindi la geometria locale) in maniera selettiva: contrae la varietà dove il tensore di Ricci (la curvatura) è positivo e la espande dove è negativo; inoltre, più la curvatura è grande (indipendentemente dal suo segno) e più la deformazione è veloce. Nel caso particolare di una sfera, che ha curvatura uniforme positiva in ogni suo punto, si ha che l'evoluzione è data da una sfera il cui raggio tende a zero in tempo finito.

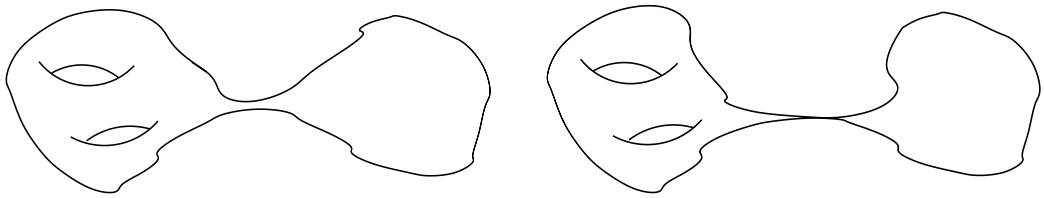


Il primo importante risultato di Hamilton (chiaramente promettente nell'ottica di dimostrare la congettura di Poincaré) è il seguente teorema, nell'articolo menzionato sopra:

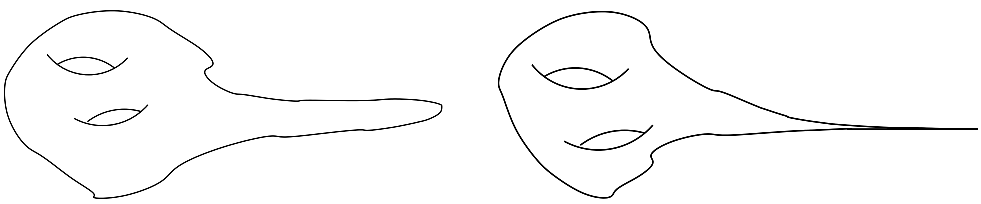
Se una varietà tridimensionale compatta e semplicemente connessa ha tensore di Ricci positivo, allora il flusso di Ricci la deforma in una 3–sfera.

Se la varietà iniziale è invece generica (in particolare, non ha necessariamente tensore di Ricci definito positivo) non si può escludere il formarsi di *singolarità* durante il flusso (che dunque si interrompe). Alcuni esempi non sono difficili da descrivere, almeno in modo qualitativo.

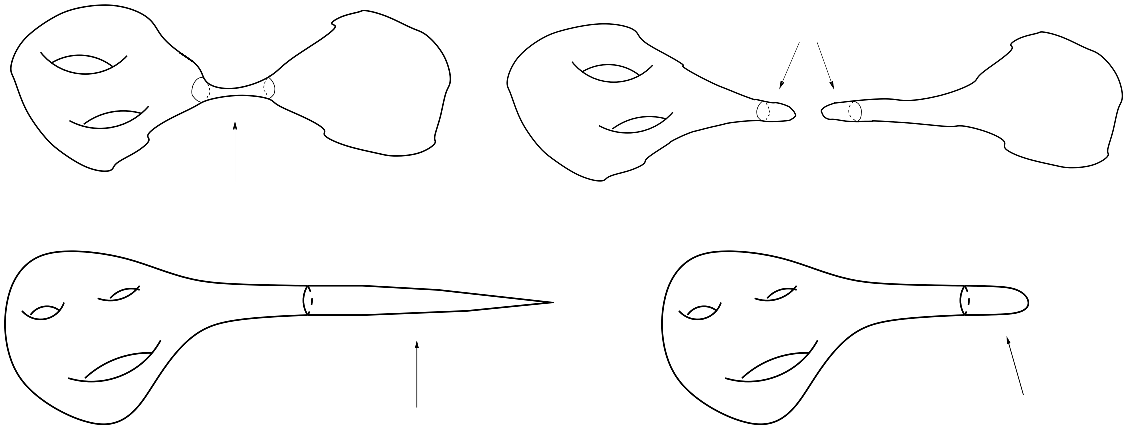
Collo che si stringe: Supponiamo che la varietà iniziale sia come nella figura che segue, cioè abbia un "collo" (una zona simile a un "cilindro" stretto) con curvatura positiva molto alta rispetto al resto della varietà. Il flusso svilupperà allora una singolarità, perché le regioni laterali con curvatura bassa si modificano lentamente, mentre la zona centrale del "collo" si restringe sempre più fino a "collassare" (idealmente la varietà "si strappa").



Cuspide: Se la varietà ha una zona somigliante a un sigaro molto lungo e sottile, che si chiude molto bruscamente nella sua parte finale (con un'alta curvatura positiva), può verificarsi che mentre il resto della varietà si deforma lentamente e resta regolare, la punta del sigaro "collassa" in tempo finito formando una singolarità "cuspidale".



L'idea introdotta da Hamilton per "gestire" le singolarità durante l'evoluzione è quella di fare delle "chirurgie" sulla varietà (riallacciandosi alle tecniche della topologia geometrica, ma con l'intento di applicarle in modo quantitativo) un momento prima della formazione delle singolarità, per "abbassarne" la curvatura nelle zone dove è molto grande, prevenendo dunque la formazione delle stesse. Per esempio, nei due casi del "collo" e della "cuspide" visti sopra, si procede come nelle figure che seguono:



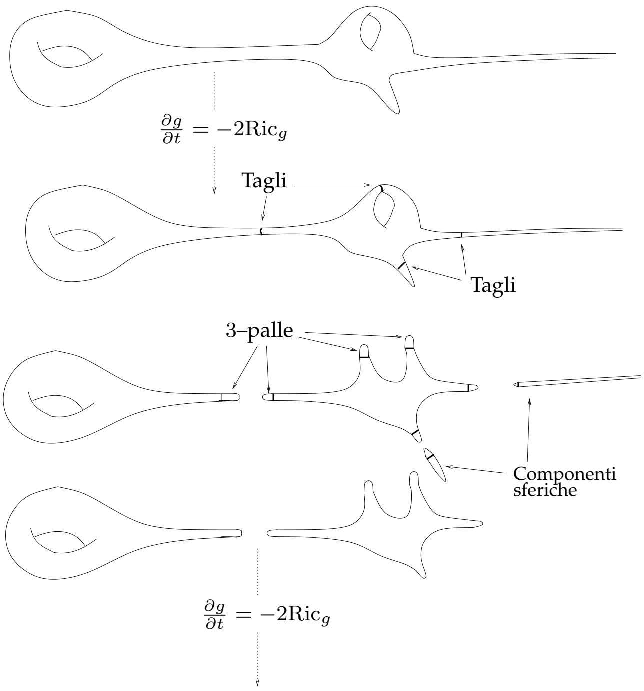
Si fa poi ripartire il flusso di Ricci sulle varietà "figlie" ottenute dalla "chirurgia".

Un programma per la congettura di Poincaré

Nel periodo 1986–93 Hamilton delinea, ma realizza solo parzialmente, un programma per dimostrare la congettura di Poincaré basato sul flusso di Ricci. Ne illustriamo qui alcuni punti, in una forma un po' semplificata rispetto a quella effettiva, ma ci auguriamo sufficiente per farsene un'idea.

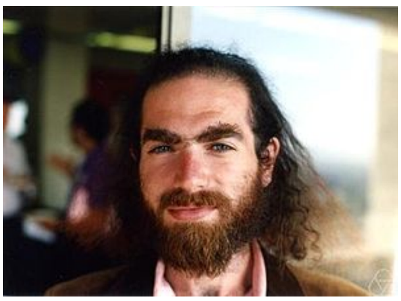
Supponiamo di avere una varietà tridimensionale compatta e semplicemente connessa.

- Deformiamo la varietà iniziale col flusso di Ricci.
- Mostriamo che se non si hanno singolarità la varietà iniziale è una 3–sfera.
- Se si verifica una singolarità, cerchiamo di ottenere il massimo di informazioni quantitative su cosa sta succedendo alla nostra varietà. Per fare ciò è necessario "classificare" tutte le possibili singolarità.
- Con le informazioni di cui al punto precedente facciamo una "chirurgia quantitativa" (tenendo sotto controllo le quantità geometriche rilevanti) ottenendo una o più nuove varietà.
- Facciamo "ripartire" il flusso di Ricci su queste varietà "figlie" e ricominciamo la procedura.
- Dimostriamo che dopo un numero finito di "passi" questa procedura termina e tutte le varietà finali sono 3–sfere.
- Ricostruendo all'indietro la varietà iniziale, tenendo conto delle "chirurgie" effettuate, concludiamo che anch'essa era una 3–sfera, dimostrando quindi la congettura.



Vi erano varie difficoltà nell'implementare effettivamente questa procedura, in particolare riguardo al terzo punto, ovvero la classificazione delle singolarità. Hamilton congetturò che le possibili situazioni di singolarità erano solo le due viste sopra: un "collo" che si stringe o la formazione di una cuspide, per cui aveva una procedura di chirurgia disponibile. Malgrado i suoi sforzi, non era però in grado di escludere una particolare (teoricamente possibile) singolarità "cattiva", non gestibile mediante alcuna chirurgia per poter far poi ripartire l'evoluzione.
Nonostante il programma fosse comunque molto promettente e i numerosi risultati parziali (che saranno poi estremamente utili a Perelman) fossero incoraggianti, di fronte a queste difficoltà il lavoro di Hamilton si arresta circa nel 1993.

La dimostrazione di Perelman



Tra il novembre del 2002 e il luglio del 2003, Grisha Perelman pubblica tre articoli sul preprint server pubblico ArXiv che apparentemente risolvevano le principali difficoltà del programma di Hamilton e contenevano dunque (tra l'altro) una dimostrazione della congettura di Poincaré per mezzo del flusso di Ricci. Dopo una intensa attività di verifica e "digestione" da parte della comunità matematica, la validità ne fu definitivamente riconosciuta nel 2006.
Il primo risultato di Perelman fu quello di esibire due nuove quantità geometriche monotone durante il flusso di Ricci: un funzionale di tipo *entropia* e la *lunghezza ridotta* (una specie di funzione distanza nello spazio–tempo). L'importanza di tali quantità è che per mezzo delle loro proprietà si esclude la singolarità "cattiva" di Hamilton; inoltre è ben noto che avere quantità monotone per soluzioni di equazioni differenziali implica stime quantitative più raffinate. Varie difficoltà di Hamilton erano così risolte e le molte conseguenze che aveva osservato divenivano immediatamente valide.
Malgrado Perelman non dimostri completamente la congettura di classificazione delle singolarità di Hamilton, modifica la procedura di chirurgia quantitativa in modo da renderla comunque effettiva con le informazioni ottenute. Sottolineiamo che questo punto è probabilmente il risultato tecnicamente più complesso del suo lavoro. Infine, dimostra che la procedura termina dopo

un numero finito di passi producendo soltanto un numero finito di 3–sfere e come consequenza ottiene una dimostrazione della congettura di Poincaré.

Dopo la pubblicazione online dei lavori di Perelman, Bruce Kleiner e John Lott riconoscono immediatamente il valore dei lavori di Perelman e cominciano a scrivere delle note esplicative, sviluppando i dettagli tecnici mancanti ed espandendo le parti meno chiare.
Nel Giugno 2006 l'Asian Journal of Mathematics pubblica (su carta) un lavoro di Zhu Xi–Ping della Zhongshan University in Cina e di Huai–Dong Cao della Lehigh University in Pennsylvania contenente una descrizione completa della dimostrazione di Perelman della congettura di Poincaré. Il lavoro viene successivamente rivisto varie volte a seguito di numerose polemiche.
Nel Luglio 2006 John Morgan della Columbia University e Gang Tian del Massachusetts Institute of Technology pubblicano in rete su ArXiv (ora un libro cartaceo) il lavoro "Ricci Flow and the Poincaré Conjecture" contenente una versione completa e dettagliata della dimostrazione di Perelman. Questo lavoro e la successiva assegnazione all'*International Congress of Mathematicians* a Madrid, nell'agosto dello stesso anno, della medaglia Fields a Perelman (che la rifiuterà), segnano l'accettazione formale e sostanziale da parte della comunità matematica della sua dimostrazione della congettura di Poincaré.
Ad oggi non sono stati trovati errori o falle nella dimostrazione di Perelman. Inoltre, una versione modificata e semplificata è stata presentata nel 2007 da Laurent Bessières, Gérard Besson, Michel Boileau, Sylvain Maillot e Joan Porti.
Nel 2010 il Clay Mathematics Institute ha conferito a Perelman il "Millennium Prize" di un milione di dollari per la dimostrazione della congettura di Poincaré. Anche questo riconoscimento è stato rifiutato da Perelman con la motivazione che sarebbe dovuto essere diviso tra lui e Hamilton (cosa contraria alle regole del premio, che è individuale).
Perelman si è dimesso dalla sua posizione allo Steklov Institute in Saint Petersburg e ha abbandonato la matematica.
I suoi tre fondamentali lavori non sono mai stati pubblicati su una rivista cartacea, ma rimangono a disposizione sul preprint server pubblico ArXiv – http://arxiv.org.


CityRoma venerdì 9 gennaio 2004 — I FATTI DELLA VITA

Un russo risolve la Congettura di Poincaré
Il mistero matematico durava da 100 anni

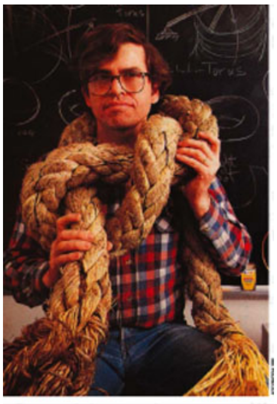
Lo studioso francese Jules-Henri Poincaré (1854-1912) e la rappresentazione grafica della sua Congettura, risalente al 1904. (FOTO AP)

SAN FRANCISCO (California, Usa) - Il mondo matematico è in fermento: il mistero della Congettura di Poincaré sullo studio degli spazi tridimensionali è stato forse risolto 100 anni dopo la sua prima formulazione. Manca ancora l'ufficialità, ma gli studi del russo Grigori "Grisha" Perelman stanno via via guadagnando credito da quando, nel novembre 2002, ne è iniziata la verifica da parte delle massime autorità matematiche.

Il caso non è semplice perché la congettura non è mai stata dimostrata neanche dal suo ideatore, lo studioso francese Jules-Henri Poincaré, il quale nel 1904 arrivò ad elaborare un metodo per applicare facilmente le regole di calcolo per le misurazioni bidimensionali (altezza-larghezza) a quelle tridimensionali (altezza-larghezza-profondità). Il metodo funziona ma resta astratto, non essendo dimostrato matematicamente, per cui solo la sua applicazione ai problemi più complessi della materia può dire se è esatto o meno. Più volte, in passato, soluzioni proposte da insigni studiosi sono tramontate alla prova dei fatti. La teoria di Perelman si rifà alle *correnti di Ricci* e alla geometria differenziale: "Sono studi molto complicati, con molte parti variabili. Ci vuole tempo ed è facile perdere il filo", ammette John Morgan, docente della Columbia University.
A complicare le cose c'è il carattere riservato dello studioso russo, che solo un anno fa è uscito dalla semi-reclusione nella quale si era rinchiuso da otto anni e ha esposto le sue scoperte ad alcuni college statunitensi. Perelman, matematico dell'Istituto Steklav dell'Accademia russa delle scienze, ha anche rifiutato finora il milione di dollari messo in palio dal *Clay Mathematics Institute* di Cambridge, Massachusetts, per la soluzione di ognuno dei sette più grandi misteri matematici. La condizione per il premio Fields, una sorta di Nobel matematico, è infatti che la soluzione sia pubblicata su un giornale scientifico, cosa finora evitata da Perelman.
La soluzione della Congettura di Poincarè sarebbe utile soprattutto nello studio dell'universo, ma non avrebbe applicazioni nella vita di tutti i giorni. (AP)

Come per l'*ultimo teorema di Fermat* dimostrato da Andrew Wiles nel 1994, la storia della congettura di Poincaré e della sua dimostrazione, anche a causa dei peculiari aspetti della personalità di Perelman (in particolare, il rifiuto dei premi – dichiarò pubblicamente che i premi non avevano senso in matematica, che la risoluzione di un problema era un premio sufficiente), ha avuto un momento di celebrità presso il grande pubblico. Un esempio ne è, a sinistra, una foto del foglio–giornale "CityRoma" del 9 gennaio 2004, distribuito nella metropolitana romana.

Abbiamo così completato la nostra illustrazione di questa dimostrazione *geometrico/analitica* della congettura di Poincaré. Concludiamo menzionando che con un'estensione di questa linea dimostrativa (che richiede un notevole ulteriore lavoro), si può arrivare a provare la cosiddetta "congettura di geometrizzazione" che descrive la struttura di *tutte* le varietà tridimensionali compatte, come detto nell'introduzione, formulata nel 1970 da William P. Thurston (1946 – 2012), premiato con la Medaglia Fields nel 1982 e della quale la congettura di Poincaré è un caso particolare.



Ogni varietà tridimensionale può essere "decomposta" in pezzi "geometrici" (cioè con proprietà ben determinate – ve ne sono solo otto tipi).

È dunque da attribuire a Perelman anche la dimostrazione di questa congettura di cui Thurston ottenne una dimostrazione parziale. In un certo senso, un po' paradossalmente, la congettura di Poincaré, che tanto aveva resistito alla topologia geometrica, è a posteriori la parte più "facile" della dimostrazione *à la Hamilton–Perelman* della completa "congettura di geometrizzazione".