

COMPLEMENTI DI MATEMATICA

Luigi Ambrosio

Carlo Mantegazza

Fulvio Ricci

SCUOLA NORMALE SUPERIORE, PIAZZA DEI CAVALIERI 7, 56126 PISA

Email address: `luigi.ambrosio@sns.it`

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E APPLICAZIONI “RENATO CACCIOPOLI”, UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI NAPOLI FEDERICO II, VIA CINTIA, MONTE S. ANGELO, I-80126 NAPOLI

Email address: `carlomaria.mantegazza@unina.it`

SCUOLA NORMALE SUPERIORE, PIAZZA DEI CAVALIERI 7, 56126 PISA

Email address: `fulvio.ricci@sns.it`

Indice

INTRODUZIONE	7
Capitolo 1. ELEMENTI DI TEORIA DEGLI INSIEMI	9
1.1. Connettivi logici e notazioni di base	9
1.2. Prodotto cartesiano di due insiemi	11
1.3. Relazioni	11
1.4. Relazioni di equivalenza	12
1.5. Relazioni d'ordine	13
1.6. Funzioni	15
1.7. L'insieme dei numeri naturali	17
1.8. Successioni definite per ricorrenza	21
1.9. Prodotti cartesiani multipli e assioma della scelta	22
1.10. Cardinalità di insiemi	24
1.11. Cardinalità di $\mathcal{P}(A)$	29
1.12. Insiemi finiti e infiniti	30
1.13. Il Lemma di Zorn	31
1.14. Il Teorema di Zermelo	33
1.15. Dimostrazione del Lemma di Zorn	34
1.16. Appendice: gli assiomi di Zermelo-Fraenkel	36
1.17. Esercizi	38
Capitolo 2. INSIEMI NUMERICI E OPERAZIONI	49
2.1. Operazioni su \mathbb{N}	49
2.2. Dai naturali agli interi relativi	51
2.3. Dagli interi ai razionali	53
2.4. Campi	54
2.5. Costruzione del campo \mathbb{R} dei numeri reali	55
2.6. Operazioni su \mathbb{R}	56
2.7. Campi ordinati	59
2.8. Campi ordinati completi	61
2.9. Esercizi	62
Capitolo 3. COMPLEMENTI SULLE SUCCESSIONI DI NUMERI REALI	69
3.1. Massimo e minimo limite	70
3.2. Confronti asintotici tra successioni	73
3.3. Ordini di infinito e di infinitesimo	75
3.4. Teorema di Stolz–Cesaro	77
3.5. Teoremi di Cesaro	79
3.6. Esercizi	81

Capitolo 4. SOMMATORIE SU INSIEMI INFINITI	85
4.1. Somme di termini non negativi	85
4.2. Limiti lungo insiemi ordinati filtranti	86
4.3. Sommatorie con termini di segno generico	87
4.4. Il caso $I = \mathbb{N}$: confronto con la nozione di “somma di una serie”	89
4.5. Convergenza incondizionata di serie	90
4.6. Scomposizione di sommatorie convergenti	93
4.7. Sommatorie a più indici	95
4.8. Prodotto di Cauchy di successioni	97
4.9. Esercizi	99
Capitolo 5. SPAZIO EUCLIDEO \mathbb{R}^n , SPAZI TOPOLOGICI E METRICI	105
5.1. Struttura euclidea di \mathbb{R}^n : prodotto scalare, modulo e distanza	105
5.2. Insiemi aperti e chiusi di \mathbb{R}^n , parte interna, chiusura, frontiera	108
5.3. Successioni a valori in \mathbb{R}^n	111
5.4. Caratterizzazione per successioni della chiusura e del derivato di un insieme	113
5.5. Punti limite di una successione	113
5.6. Spazi topologici	115
5.7. Funzioni continue tra spazi topologici	117
5.8. Spazi metrici	120
5.9. Il Teorema di Baire	129
5.10. Compattezza	130
5.11. Connessione, connessione per archi, convessità	136
5.12. Esercizi	140
Capitolo 6. SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI	159
6.1. Convergenza puntuale e uniforme	159
6.2. Continuità del limite uniforme	160
6.3. La convergenza uniforme come convergenza in uno spazio metrico	162
6.4. Derivabilità della funzione limite	163
6.5. Convergenza uniforme di serie di funzioni e spazi vettoriali normati	167
6.6. Serie di potenze	170
6.7. Derivabilità sull’asse reale	172
6.8. Serie di Taylor e funzioni analitiche	174
6.9. Complementi	177
6.10. Esercizi	184
Capitolo 7. CALCOLO DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI	197
7.1. Funzioni continue da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m	197
7.2. Derivate parziali e direzionali	198
7.3. Differenziale	200
7.4. Il teorema del differenziale totale	203
7.5. Curve regolari in \mathbb{R}^n	204
7.6. Curve regolari e grafici in \mathbb{R}^2	206
7.7. Grafici e insiemi di livello: il teorema della funzione implicita	206
7.8. Lunghezza di archi e parametro lunghezza d’arco	210
7.9. Funzioni differenziabili da \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m	212
7.10. Composizione di funzioni differenziabili	213

7.11. Derivate di ordine superiore	214
7.12. Campi vettoriali, integrali curvilinei, potenziali	217
7.13. Esercizi	223
Capitolo 8. EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE	233
8.1. Definizioni e primi esempi	233
8.2. Metodi risolutivi per alcuni tipi di equazioni del primo ordine	235
8.3. Problemi di Cauchy per equazioni del primo ordine	238
8.4. Contrazioni in spazi metrici	240
8.5. Esistenza e unicità locale di soluzioni di problemi di Cauchy	241
8.6. Lemma di Gronwall, teoremi del confronto e di esistenza globale	245
8.7. Sistemi di equazioni differenziali ed equazioni di ordine superiore	250
8.8. Sistemi differenziali lineari a coefficienti costanti e matrice esponenziale	253
8.9. Calcolo della matrice esponenziale	256
8.10. Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di ordine superiore	258
8.11. Esercizi	260
LIBRI UTILI O PER APPROFONDIRE	271

INTRODUZIONE

Questo testo comprende gli argomenti che vengono trattati nel “corso interno” di matematica della Scuola Normale, rivolto agli studenti del primo anno di Matematica, Fisica e Informatica e, almeno in parte, di Chimica.

Poiché il corso interno viene svolto durante l'intero anno accademico, parallelamente ai normali corsi universitari del primo anno (che i normalisti seguono all'Università di Pisa cui sono regolarmente iscritti), è risultata una scelta naturale quella di assegnare a esso il ruolo di approfondire, ampliare e inquadrare a un livello superiore nozioni che sono tradizionalmente parte dei programmi dei corsi universitari.

In alcuni casi questo approccio consente di dare spazio ad aspetti che nel curriculum universitario vengono tralasciati, programmaticamente o per limiti di tempo. Questo vale soprattutto per la prima parte del testo, che comprende la teoria degli insiemi, svolta qui in modo non eccessivamente formale ma rigoroso, la costruzione dell'insieme \mathbb{N} dei numeri naturali (a partire dagli assiomi di Zermelo–Fraenkel) e degli altri insiemi numerici, fino alla caratterizzazione di \mathbb{R} come unico campo ordinato completo. Ma lo stesso vale anche per la parte conclusiva, con la trattazione approfondita del problema dell'esistenza e unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy, nonché per i capitoli riguardanti successioni e serie numeriche. In questi ultimi si ha occasione di far risaltare in ambiente discreto aspetti già conosciuti, o che saranno incontrati in fase più avanzata, in ambiente continuo: da un lato la corrispondenza tra teoremi di Stolz–Cesàro e di de l'Hôpital, dall'altro la fragilità di una teoria della sommazione infinita senza condizioni di convergenza assoluta.

In altre parti del corso, principalmente quelle riguardanti metriche e topologie, convergenza di successioni di funzioni, calcolo differenziale in più variabili, vengono di fatto anticipati argomenti che rientrano nei programmi di corsi universitari di anni successivi. In questi casi, la scelta è funzionale a esigenze di tipo diverso. Nel primo caso, lo scopo è quello di sistematizzare, almeno nelle sue linee essenziali, una materia, la topologia generale, che nei corsi universitari rischia di essere frantumata, con inserimenti occasionali quando se ne riscontri la necessità. Nel secondo caso si vogliono dare strumenti per rispondere a domande che sorgono in modo naturale nello studio del calcolo differenziale (convergenza di serie di Taylor, approssimabilità di funzioni con funzioni più regolari, ecc.). Nell'ultimo caso invece si vuole fornire un inquadramento teorico al formalismo del calcolo in più variabili che si incontra molto presto nei corsi di Fisica, e al tempo stesso favorire l'avvio di una familiarizzazione con gli aspetti geometrico–analitici propri dell'ambito multidimensionale.

Come si vede, il materiale qui presentato è di natura prevalentemente teorica e presuppone, in modo graduale con l'avanzare nei capitoli, conoscenza e padronanza di nozioni e teoremi fondamentali dell'analisi in una variabile e dei metodi del calcolo differenziale e integrale. All'inizio di ogni capitolo sono indicate esplicitamente le nozioni che si suppongono già acquisite.

Il testo è corredato da un'ampia raccolta di esercizi, posti alla fine di ogni capitolo. La scelta degli esercizi è coerente con l'impostazione del testo, dunque in genere tesi alla riflessione teorica piuttosto che alla pratica di calcolo. In diversi casi essi propongono esplorazioni in ambiti teorici vicini ma non inclusi nel testo. Il livello di difficoltà è variabile; gli esercizi più difficili sono contrassegnati da uno o due asterischi. Molti di questi esercizi venivano stati spesso proposti senza soluzione in esercitazioni parallele al corso, da affrontare in modo individuale o collegiale, dando luogo talvolta ad ampliamenti dei risultati a cui gli esercizi fanno riferimento.

Testo ed esercizi rappresentano il risultato di una serie di rielaborazioni di appunti informali messi a disposizione degli studenti con continuità a partire dal 2009. In questi anni sono stati titolari del corso Fulvio Ricci (2009–2013 e 2016–2018), Luigi Ambrosio (2013–2016) e Franco Flandoli (2018–2020). Alle esercitazioni hanno collaborato, per periodi più o meno lunghi, Carlo Mantegazza, Andrea Mennucci, Tommaso Pacini, Lorenzo Mazzieri, Simone Di Marino, ai quali va un sentito ringraziamento per il loro contributo di verifica e di riflessione.