COMPLEMENTI DI MATEMATICA

Luigi Ambrosio

Carlo Mantegazza

Fulvio Ricci

Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri 7, 56126 Pisa
Email address: luigi.ambrosio@sns.it

Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli", Università degli Studi di Napoli Federico II, Via Cintia, Monte S. Angelo, I-80126 Napoli
Email address: carlomaria.mantegazza@unina.it

Scuola Normale Superiore, Piazza dei Cavalieri 7, 56126 Pisa
Email address: fulvio.ricci@sns.it

Indice

INTRODUZIONE

Questo testo comprende gli argomenti che vengono trattati nel "corso interno" di matematica della Scuola Normale, rivolto agli studenti del primo anno di Matematica, Fisica e Informatica e, almeno in parte, di Chimica.
Poiché il corso interno viene svolto durante l'intero anno accademico, parallelamente ai normali corsi universitari del primo anno (che i normalisti seguono all'Università di Pisa cui sono regolarmente iscritti), è risultata una scelta naturale quella di assegnare a esso il ruolo di approfondire, ampliare e inquadrare a un livello superiore nozioni che sono tradizionalmente parte dei programmi dei corsi universitari.

In alcuni casi questo approccio consente di dare spazio ad aspetti che nel curriculum universitario vengono tralasciati, programmaticamente o per limiti di tempo. Questo vale soprattutto per la prima parte del testo, che comprende la teoria degli insiemi, svolta qui in modo non eccessivamente formale ma rigoroso, la costruzione dell'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali (a partire dagli assiomi di Zermelo–Fraenkel) e degli altri insiemi numerici, fino alla caratterizzazione di $\mathbb{R}$ come unico campo ordinato completo. Ma lo stesso vale anche per la parte conclusiva, con la trattazione approfondita del problema dell'esistenza e unicità delle soluzioni dei problemi di Cauchy, nonché per i capitoli riguardanti successioni e serie numeriche. In questi ultimi si ha occasione di far risaltare in ambiente discreto aspetti già conosciuti, o che saranno incontrati in fase più avanzata, in ambiente continuo: da un lato la corrispondenza tra teoremi di Stolz–Cesàro e di de l'Hôpital, dall'altro la fragilità di una teoria della sommazione infinita senza condizioni di convergenza assoluta.

In altre parti del corso, principalmente quelle riguardanti metriche e topologie, convergenza di successioni di funzioni, calcolo differenziale in più variabili, vengono di fatto anticipati argomenti che rientrano nei programmi di corsi universitari di anni successivi. In questi casi, la scelta è funzionale a esigenze di tipo diverso. Nel primo caso, lo scopo è quello di sistematizzare, almeno nelle sue linee essenziali, una materia, la topologia generale, che nei corsi universitari rischia di essere frantumata, con inserimenti occasionali quando se ne riscontri la necessità. Nel secondo caso si vogliono dare strumenti per rispondere a domande che sorgono in modo naturale nello studio del calcolo differenziale (convergenza di serie di Taylor, approssimabilità di funzioni con funzioni più regolari, ecc.). Nell'ultimo caso invece si vuole fornire un inquadramento teorico al formalismo del calcolo in più variabili che si incontra molto presto nei corsi di Fisica, e al tempo stesso favorire l'avvio di una familiarizzazione con gli aspetti geometrico–analitici propri dell'ambito multidimensionale.

Come si vede, il materiale qui presentato è di natura prevalentemente teorica e presuppone, in modo graduale con l'avanzare nei capitoli, conoscenza e padronanza di nozioni e teoremi fondamentali dell'analisi in una variabile e dei metodi del calcolo differenziale e integrale. All'inizio di ogni capitolo sono indicate esplicitamente le nozioni che si suppongono già acquisite.

Il testo è corredato da un'ampia raccolta di esercizi, posti alla fine di ogni capitolo. La scelta degli esercizi è coerente con l'impostazione del testo, dunque in genere tesi alla riflessione teorica piuttosto che alla pratica di calcolo. In diversi casi essi propongono esplorazioni in ambiti teorici vicini ma non inclusi nel testo. Il livello di difficoltà è variabile; gli esercizi più difficili sono contrassegnati da uno o due asterischi. Molti di questi esercizi venivano sono stati spesso proposti senza soluzione in esercitazioni parallele al corso, da affrontare in modo individuale o collegiale, dando luogo talvolta ad ampliamenti dei risultati a cui gli esercizi fanno riferimento.

Testo ed esercizi rappresentano il risultato di una serie di rielaborazioni di appunti informali messi a disposizione degli studenti con continuità a partire dal 2009. In questi anni sono stati titolari del corso Fulvio Ricci (2009–2013 e 2016–2018), Luigi Ambrosio (2013–2016) e Franco Flandoli (2018–2020). Alle esercitazioni hanno collaborato, per periodi più o meno lunghi, Carlo Mantegazza, Andrea Mennucci, Tommaso Pacini, Lorenzo Mazzieri, Simone Di Marino, ai quali va un sentito ringraziamento per il loro contributo di verifica e di riflessione.