

**Appunti di  
Calcolo delle Variazioni**

*Francesca Angrisani*

*Giacomo Ascione*

*Chiara Leone*

*Carlo Mantegazza*

## Appunti di Calcolo delle Variazioni

Francesca Angrisani

Giacomo Ascione

Chiara Leone

Carlo Mantegazza

(Francesca Angrisani) DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E APPLICAZIONI "RENATO CACCIOPOLI", UNIVERSITÀ DI NAPOLI FEDERICO II, VIA CINTIA, MONTE S. ANGELO  
*E-mail address, F. Angrisani:* fra.angrisani@studenti.unina.it

(Giacomo Ascione) DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E APPLICAZIONI "RENATO CACCIOPOLI", UNIVERSITÀ DI NAPOLI FEDERICO II, VIA CINTIA, MONTE S. ANGELO  
*E-mail address, G. Ascione:* ascione.giacomo@hotmail.it

(Chiara Leone) DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E APPLICAZIONI "RENATO CACCIOPOLI", UNIVERSITÀ DI NAPOLI FEDERICO II, VIA CINTIA, MONTE S. ANGELO  
*E-mail address, C. Leone:* chiara.leone@unina.it

(Carlo Mantegazza) DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E APPLICAZIONI "RENATO CACCIOPOLI", UNIVERSITÀ DI NAPOLI FEDERICO II, VIA CINTIA, MONTE S. ANGELO  
*E-mail address, C. Mantegazza:* c.mantegazza@sns.it

DRAFT

## Indice

Introduzione	vii
Capitolo 1. Introduzione al calcolo delle variazioni	1
1.1. La brachistocrona	3
1.2. Il problema di Fermat	4
1.3. Il problema della corda sospesa, la catenaria e la superficie di rotazione di area minima	7
1.4. Un funzionale privo di minimo	9
1.5. Il problema di Newton	10
1.6. Equazioni variazionali	11
1.7. Il moto di un punto materiale in un campo conservativo	13
1.8. Il problema di Didone e i problemi isoperimetrici	13
1.9. L'integrale di Dirichlet	14
1.10. Il problema di Plateau	15
Capitolo 2. Il problema standard del calcolo delle variazioni e la prima equazione di Eulero–Lagrange	16
2.1. Un esempio	17
2.2. Il lemma fondamentale del calcolo delle variazioni	18
2.3. Il lemma di Du Bois–Reymond	19
2.4. Gli spazi $C^1$ e $C^1_S$	21
2.5. Minimi forti e deboli	22
2.6. La prima equazione di Eulero–Lagrange	23
2.7. Esempi	26
2.8. Casi particolari della prima equazione di Eulero–Lagrange	28
2.9. Il ruolo della convessità	29
2.10. Il differenziale di Gateaux e di Fréchet – La variazione prima di un funzionale	33
Capitolo 3. Minimi $C^1$ a tratti	37
3.1. La prima condizione di Erdmann–Weierstrass	40
3.2. Il doppio pozzo	42
3.3. Minimizzazione a estremi liberi	43
Capitolo 4. La seconda equazione di Eulero–Lagrange	48
4.1. La seconda equazione di Eulero–Lagrange	48
4.2. Il moto di una particella carica in un campo elettromagnetico	52
4.3. La superficie di rotazione di area minima	53
4.4. La seconda condizione di Erdmann–Weierstrass	56
Capitolo 5. Minimi e convessità	61
5.1. Non esistenza di minimi in caso di non stretta convessità	61

5.2. Un funzionale con infiniti minimi	63
5.3. Funzionali convessi	63
5.4. Parziale convessità	66
Capitolo 6. Problemi vincolati	70
6.1. Vincoli isoperimetrici	71
6.2. Il problema della corda sospesa	75
6.3. Vincoli olonomi	78
6.4. Geodetiche su un'ipersuperficie di $\mathbb{R}^n$	87
Capitolo 7. Disuguaglianze di Poincaré–Wirtinger	90
7.1. La disuguaglianza di Wirtinger	90
7.2. La disuguaglianza di Wirtinger ottimale	92
7.3. Alcune conseguenze	96
7.4. Il problema isoperimetrico nel piano	98
Capitolo 8. Condizioni del second'ordine	101
8.1. La variazione seconda di un funzionale	101
8.2. Le condizioni di Legendre	106
8.3. Le condizioni di Jacobi	110
8.4. Le condizioni di Legendre e Jacobi nel caso vettoriale	119
8.5. Esempi e applicazioni	120
Capitolo 9. Condizioni per minimi forti	128
9.1. La funzione eccesso e le condizioni di Weierstrass	128
9.2. I campi di Weierstrass e l'integrale invariante di Hilbert	131
9.3. Le condizioni forti di Weierstrass	133
9.4. Campi di estremali	134
9.5. La teoria nel caso vettoriale	139
9.6. Esempi	139
9.7. La brachistocrona	144
9.8. La superficie di rotazione di area minima – II	148
Capitolo 10. La formulazione hamiltoniana	158
10.1. La funzione hamiltoniana	158
10.2. La formulazione hamiltoniana delle equazioni di Eulero–Lagrange	159
10.3. La meccanica hamiltoniana	162
10.4. Esempi	163
Capitolo 11. Minimi Lipschitz	166
11.1. Funzioni lipschitziane e assolutamente continue	167
11.2. Funzioni di Caratheodory	168
11.3. La prima equazione di Eulero–Lagrange per minimi deboli Lipschitz	169
11.4. Regolarità $C^1$ dei minimi Lipschitz	171
Capitolo 12. Minimi assolutamente continui	175
12.1. La prima equazione di Eulero–Lagrange per minimi deboli assolutamente continui	175
12.2. La seconda equazione di Eulero–Lagrange per minimi forti assolutamente continui	182
12.3. Regolarità dei minimi assolutamente continui	186

12.4. Il fenomeno di Lavrentiev	193
Capitolo 13. Minimi in spazi di Sobolev	197
13.1. Le equazioni di Eulero–Lagrange e la regolarità dei minimi deboli in $W^{1,p}$	198
13.2. Esistenza dei minimi in $W^{1,p}$	202
13.3. Esempi	208
13.4. Applicazione al problema standard del calcolo delle variazioni	211
13.5. Il problema della corda sospesa – II	213
13.6. Il problema di Newton	221
Capitolo 14. Il teorema di Tonelli	224
14.1. Il teorema di esistenza di Tonelli	227
Capitolo 15. Cenni sui problemi multidimensionali	232
15.1. Le equazioni di Eulero–Lagrange nel caso multidimensionale	233
15.2. Esempi	238
15.3. Regolarità dei minimi per l'integrale di Dirichlet	240
Bibliografia	247
Indice analitico	249

## Introduzione

Queste note sono una versione espansa degli appunti presi da Giacomo Ascione delle lezioni del corso di calcolo delle variazioni tenute da Carlo Mantegazza al Dipartimento di Matematica e Applicazioni “Renato Caccioppoli” dell’Università Federico II di Napoli. Molto del materiale presentato viene dal corso di Gianni Dal Maso alla SISSA, in particolare dalle note di Maria Giovanna Mora e dal libro di Bernard Dacorogna [10].

L’esposizione del soggetto, che è quasi esclusivamente relativo ai problemi unidimensionali, segue in un qualche senso lo sviluppo “storico” del calcolo delle variazioni, dai metodi classici ai metodi diretti di Leonida Tonelli, con un accenno finale ai problemi multidimensionali, esaminando il caso più semplice dell’integrale di Dirichlet.

Lo scopo iniziale di queste note era principalmente di essere utili per gli studenti, abbiamo cercato di mantenere tale spirito anche se abbiamo aggiunto vari argomenti, osservazioni e approfondimenti non necessariamente presentati nel corso. Ciò significa che alcune discussioni o dimostrazioni potranno sembrare piuttosto informali, mentre altri punti potrebbero risultare pedanti per un lettore esperto. Inoltre, con l’eccezione di alcuni risultati tecnicamente complessi, abbiamo cercato di rendere il testo il più possibile autocontenuto.

Oltre al succitato libro di Bernard Dacorogna, altri possibili riferimenti per il materiale presentato sono il libro di Giuseppe Buttazzo, Mariano Giaquinta e Stefan Hildebrandt [6] e quelli più generali di Mariano Giaquinta e Stefan Hildebrandt [15] e di Lamberto Cesari [8]. I risultati di analisi matematica che utilizzeremo, si possono trovare nei libri di Walter Rudin [25, 26, 27], di Haim Brezis [5] e di Richard Wheeden e Antoni Zygmund [29].

Essendo questo testo alla sua prima stesura, è pressoché inevitabile che contenga errori di vario genere. Nel caso ne troviate (la loro segnalazione è ovviamente gradita, così come ogni commento, critica o suggerimento), scrivete per favore a [carlo.mantegazza@unina.it](mailto:carlo.mantegazza@unina.it).

Siamo in debito con Gioconda Moscariello per averci reso disponibile il materiale relativo alle sue lezioni dello stesso corso che teneva in passato, con Giovanni Covi per aver contribuito alla stesura degli appunti, con gli studenti e in particolare con Pasquale Ambrosio e Andrea Argenziano, per aver letto con cura e commentato le versioni preliminari di queste note e segnalato molti errori, con Raffaele Carlone, Emanuele Haus e Lorenzo Tentarelli per numerosi suggerimenti su varie parti del testo e infine con Nicola Fusco sempre disponibile e curioso di discutere di questioni anche elementari ma non necessariamente facili, con cui abbiamo avuto un confronto continuo nel procedere del lavoro. La vostra collaborazione è stata fondamentale, grazie.

*Francesca Angrisani  
Giacomo Ascione  
Chiara Leone  
Carlo Mantegazza*

## Introduzione al calcolo delle variazioni

Un importante settore della matematica pura e applicata consiste nella ricerca dei valori massimi o minimi di grandezze dipendenti da variabili di tipo numerico o da enti matematici più complessi che non possono essere individuati da un numero finito di parametri, ad esempio grandezze dipendenti da funzioni di una o più variabili reali.

Se per i casi più semplici, che riguardano la minimizzazione (o massimizzazione) di grandezze dipendenti da un numero finito di variabili reali, si possono utilizzare i metodi di base del *calcolo differenziale*, per il secondo tipo di problemi è stato necessario sviluppare metodologie adeguate che vanno sotto il nome di *calcolo delle variazioni*. Sottolineiamo che già immediatamente dopo l'invenzione del calcolo differenziale da parte di Newton e Leibniz, il metodo della ricerca di massimi e minimi di funzioni su  $\mathbb{R}^n$  (via derivate e teorema di Fermat) venne generalizzato (almeno in modo intuitivo/informale) a problemi che coinvolgevano la minimizzazione di quantità dipendenti da curve o funzioni. Il *calcolo delle variazioni* connette dunque l'analisi classica e l'analisi moderna, nascendo dalla necessità di studiare problemi in spazi infinito-dimensionali.

Vediamo un esempio elementarmente risolubile, quello delle *geodetiche libere* in  $\mathbb{R}^n$ . Dati due punti  $P, Q \in \mathbb{R}^n$ , consideriamo la classe di funzioni  $\mathcal{A} = \{\gamma \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n) : \gamma(a) = P, \gamma(b) = Q\}$  e definiamo il funzionale lunghezza  $\mathcal{L} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \quad (1.1)$$

Minimizzare  $\mathcal{L}$  su  $\mathcal{A}$  significa cercare la curva  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^n$  di lunghezza minima che "connette" i punti  $P$  e  $Q$ . Sappiamo dalla geometria euclidea elementare che questo minimo è assunto dal segmento tra i due punti; mostriamo ora questo fatto cercando un minimo del funzionale  $\mathcal{L}$ . Abbiamo, per ogni curva  $\gamma \in \mathcal{A}$ ,

$$|Q - P| = |\gamma(b) - \gamma(a)| = \left| \int_a^b \gamma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt,$$

se dunque troviamo una curva  $\gamma \in \mathcal{A}$  tale che valga l'uguaglianza, abbiamo trovato il nostro minimo.

Sia, per ogni  $t \in [a, b]$ ,

$$\tilde{\gamma}(t) = P + \frac{t-a}{b-a}(Q - P),$$

ovviamente  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{A}$  e si ha  $\mathcal{L}(\tilde{\gamma}) = |Q - P|$ , da cui la curva  $\tilde{\gamma}$  è un minimo di  $\mathcal{L}$  in  $\mathcal{A}$  e descrive effettivamente il segmento congiungente i punti  $P$  e  $Q$ .

Osserviamo che in questo caso non abbiamo un unico minimo, ma *infiniti*. Consideriamo infatti una qualunque funzione  $\alpha : [a, b] \rightarrow [a, b]$  con  $\alpha \in C^1$  e  $\alpha(a) = a$  e  $\alpha(b) = b$ ; se  $\alpha'(t) \geq 0$ , allora si vede facilmente che la curva

$$\hat{\gamma}(t) = P + \frac{\alpha(t) - a}{b - a}(Q - P)$$



ha la stessa lunghezza di  $\tilde{\gamma}$ , dunque anch'essa realizza il minimo di  $\mathcal{L}$  su  $\mathcal{A}$ . Si noti comunque che il sostegno di tutte queste curve è sempre il segmento congiungente i punti  $P$  e  $Q$ , varia solo la *velocità* con cui tale segmento viene percorso. Si può infatti dimostrare che, per quanto il minimo non sia unico, tale segmento è l'unico possibile sostegno di tutte queste curve minimizzanti.

Più in generale, il *problema delle geodetiche (non libere)* concerne la ricerca e lo studio delle curve di minima lunghezza su una ipersuperficie di  $\mathbb{R}^n$  che congiungono due suoi punti: ce ne occuperemo nelle Sezioni 6.4 e 8.5.3.

Facciamo un altro esempio, collegato al precedente, di minimizzazione "elementare" di un funzionale. Consideriamo l'insieme  $\mathcal{A} = \{u \in C^1([x_1, x_2]) : u(x_1) = y_1, u(x_2) = y_2\}$  con  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$  valori assegnati e il funzionale  $\mathcal{F} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$  definito da

$$\mathcal{F}(u) = \int_{x_1}^{x_2} |u'(x)|^{2m} dx,$$

con  $m \geq 1/2$  e cerchiamo il minimo di questo funzionale (si noti che se  $m = 1/2$  abbiamo il problema precedente, quando  $n = 1$ ).

Abbiamo che

$$y_2 - y_1 = u(x_2) - u(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} u'(x) dx,$$

dunque

$$|y_2 - y_1| \leq \int_{x_1}^{x_2} |u'(x)| dx.$$

Usiamo ora la disuguaglianza di Hölder per ottenere

$$|y_2 - y_1| \leq \int_{x_1}^{x_2} |u'(x)| dx \leq \left( \int_{x_1}^{x_2} |u'(x)|^{2m} dx \right)^{\frac{1}{2m}} |x_2 - x_1|^{\frac{2m-1}{2m}}$$

e eleviamo tutto alla  $2m$  ottenendo

$$|y_2 - y_1|^{2m} \leq \left( \int_{x_1}^{x_2} |u'(x)|^{2m} dx \right) |x_2 - x_1|^{2m-1},$$

da cui concludiamo la stima a priori dal basso

$$\mathcal{F}(u) = \int_{x_1}^{x_2} |u'(x)|^{2m} dx \geq \frac{|y_2 - y_1|^{2m}}{|x_2 - x_1|^{2m-1}},$$

per ogni funzione  $u \in \mathcal{A}$ .

Se dunque riusciamo a trovare una funzione in  $\mathcal{A}$  che verifichi questa uguaglianza, tale funzione sarà un minimo del funzionale. Consideriamo allora

$$\tilde{u}(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1,$$

che ovviamente appartiene a  $\mathcal{A}$ . Abbiamo inoltre che

$$\tilde{u}'(x) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

da cui

$$\mathcal{F}(\tilde{u}) = \int_{x_1}^{x_2} \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right|^{2m} dx = \frac{|y_2 - y_1|^{2m}}{|x_2 - x_1|^{2m}} |x_2 - x_1| = \frac{|y_2 - y_1|^{2m}}{|x_2 - x_1|^{2m-1}},$$

quindi  $\tilde{u}$  realizza il minimo per il funzionale  $\mathcal{F}$  in  $\mathcal{A}$ .

I problemi di questo tipo, ossia di minimizzazione di funzionali con dati al bordo fissati, prendono il nome di *problemi lagrangiani* o *problemi con vincoli al bordo*.

### 1.1. La brachistocrona

“Ex ungue leonem.”

“Dall’unghia si riconosce il leone.”

Dopo i precedenti esempi elementari vale la pena di aprire una piccola parentesi storica. Forse il più famoso problema del calcolo delle variazioni è quello della curva *brachistocrona* (curva “del tempo più corto”) proposto nel 1696 da Johann Bernoulli e risolto dallo stesso Bernoulli e da vari altri tra cui Newton (si veda [30] per alcune note storiche – la frase che apre la sezione fu pronunciata da Bernoulli leggendo la soluzione anonima data da Newton).

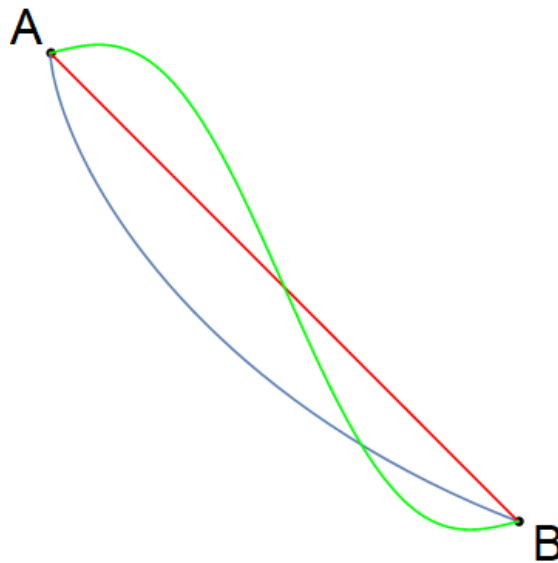


FIGURA 1.1 La brachistocrona (cicloide), simile a un tratto di parabola.

Consideriamo due punti  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$  nel piano, con  $x_1 < x_2$  e  $y_1 > y_2$  (ossia  $A$  è più in alto di  $B$ ). Supponiamo di far muovere un punto materiale soggetto alla sola forza di gravità da  $A$  a  $B$ , vincolandolo ad una traiettoria data dal profilo di una curva. Vogliamo allora trovare quale sia la curva che collega  $A$  a  $B$  che minimizza il tempo di percorrenza del punto materiale, partendo da fermo. Questa curva è detta *brachistocrona*.

Consideriamo dunque una curva da  $A$  a  $B$  su cui si muove un punto materiale  $P(t) = (x(t), y(t))$  di massa  $m$ . L’energia cinetica del punto in movimento lungo la curva è data da

$$K = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

mentre l’energia potenziale gravitazionale  $\Pi$ , supposto  $\Pi(y_1) = 0$ , è

$$\Pi = mg(y - y_1),$$

dove  $g$  indica l’accelerazione di gravità. Abbiamo dunque che l’energia totale è

$$E = K + \Pi = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mg(y - y_1)$$

e, per la legge di *conservazione dell’energia* (supponiamo non ci siano forze dissipative), deve essere costantemente uguale a zero durante il moto (essendo nulla al tempo iniziale – ricordiamo

che il punto parte da fermo). Si noti che questo implica che  $y(t) \leq y_1$  per ogni tempo  $t$ . Dunque, supposto  $\dot{x}(t) \neq 0$ , per ogni  $t > 0$ , si ha l'equazione

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 \left[ 1 + \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)^2 \right] + mg(y - y_1) = 0$$

e se assumiamo che la curva di discesa sia descritta da una funzione  $\varphi$  nell'insieme  $\mathcal{A}$  delle funzioni in  $C^1(x_1, x_2) \cap C^0([x_1, x_2])$  tali che  $\varphi(x_1) = y_1$ ,  $\varphi(x_2) = y_2$  e  $\varphi(x) \leq y_1$  per ogni  $x \in [x_1, x_2]$  (poiché vogliamo ammettere anche che la pendenza nel punto iniziale possa essere verticale) cioè  $y(t) = \varphi(x(t))$ , si ha  $\dot{y}(t)/\dot{x}(t) = \varphi'(x(t))$  e possiamo scrivere

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 [1 + (\varphi'(x))^2] + mg(\varphi(x) - y_1) = 0,$$

da cui

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2g(y_1 - \varphi(x))}{1 + (\varphi'(x))^2}}.$$

Per l'ipotesi  $\dot{x}(t) \neq 0$ , per ogni  $t > 0$ , abbiamo che  $x(t)$  è invertibile con inversa  $t(x) \in C^1$  e

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1 + (\varphi'(x))^2}{y_1 - \varphi(x)}}.$$

Concludiamo allora che il tempo di percorrenza è dato da

$$\mathcal{T}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{\frac{1 + (\varphi'(x))^2}{y_1 - \varphi(x)}} dx.$$

Il problema della *brachistocrona* si riduce dunque a un problema di ricerca del minimo del funzionale  $\mathcal{T} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Come vedremo, la funzione che realizza il minimo, quando esiste, deve soddisfare un'equazione differenziale, detta *equazione di Eulero-Lagrange*. Ricordiamo in effetti come ci si comporta di fronte ai problemi di minimo  $\min_{x \in X} F(x)$  per le funzioni ordinarie di una o più variabili: il problema di minimo viene tradotto in termini di una condizione del tipo  $F'(x) = 0$  o  $dF_x = 0$ . Con un'adeguata nozione di derivata è possibile dare significato, in contesto infinito-dimensionale, a un'analogia condizione, che si esprime con un'equazione differenziale che prende appunto il nome di equazione di Eulero-Lagrange. Nel caso della *brachistocrona* tale equazione ha una soluzione esplicita il cui grafico è una curva trascendente denominata *cicloide* (che è la curva che si osserva descrivere da un punto fissato su una ruota di bicicletta durante il moto), simile a un tratto di parabola nella Figura 1.1 sopra, il cui tempo di percorrenza da parte di un punto materiale è (molto) minore che, ad esempio, quello relativo a un profilo rettilineo. Menzioniamo che già Galileo aveva osservato che il segmento tra i punti  $A$  e  $B$  non forniva la curva di tempo di discesa minimo e che già un arco di cerchio era un profilo migliore. Nella Sezione 9.7 analizzeremo in dettaglio questo problema.

**OSSERVAZIONE 1.1.1.** Ricordiamo che un'altra proprietà particolare della cicloide è di essere la curva *tautocrona*, ovvero le oscillazioni di un punto materiale soggetto alla sola gravità su di un arco di cicloide sono esattamente *isocrone* e non solo approssimativamente isocrone come invece sarebbe per un arco di circonferenza (pendolo semplice).

## 1.2. Il problema di Fermat

Un altro dei problemi storici del calcolo delle variazioni è legato al seguente *principio di Fermat* (1662).

*La luce percorre il tragitto di minimo tempo per andare da un punto  $A$  a un punto  $B$  dello spazio.*

Tenendo presente che la velocità della luce dipende puntualmente dalle caratteristiche del mezzo dove si propaga, il *problema di Fermat* consiste nel descrivere la traiettoria della luce per andare da un punto  $A$  a un punto  $B$  conoscendone la velocità in ogni punto. Supponiamo che  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$  con  $x_1 < x_2$  e immaginiamo di voler descrivere una traiettoria come grafico di una funzione di classe  $C^1$  a tratti (ossia una funzione  $C^0$  e derivabile con derivata continua eccetto al più un numero finito di punti in cui esistono finiti i limiti destro e sinistro della derivata – lo spazio di tali funzioni si indica sovente con  $C_S^1$ ), in quanto vogliamo discutere anche il caso in cui abbiamo due mezzi materiali con velocità di propagazione diverse a contatto tra loro, quindi una superficie di discontinuità della funzione che puntualmente indica la velocità della luce. Le funzioni  $C^1$  a tratti il cui grafico connette i due punti  $A$  e  $B$  sono date dall'insieme  $\mathcal{A} = \{y \in C_S^1([x_1, x_2]) : y(x_1) = y_1 \text{ e } y(x_2) = y_2\}$ . Ragionando in modo simile al problema della brachistocrona, si ottiene che il funzionale che siamo interessati a minimizzare è dato da

$$\mathcal{T}(y) = \int_{x_1}^{x_2} g(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx, \quad (1.2)$$

dove  $g(x, y)$  è il reciproco della velocità della luce nel punto di coordinate  $(x, y)$ .

**OSSERVAZIONE 1.2.1.** Si noti che il funzionale che appare nel problema della brachistocrona si può ottenere da quest'ultimo con una scelta appropriata della funzione  $g$ . Questa osservazione fu la base del metodo sviluppato da Johann Bernoulli per risolvere tale problema, cioè riportarlo allo studio della traiettoria di un raggio di luce in un mezzo materiale (si veda [17, Chapter 3]).

Come dicevamo, un caso particolarmente interessante è dovuto al passaggio della luce da un mezzo di propagazione a un altro (o più di uno) contiguo (per esempio aria-acqua o aria-vetro-aria). Supponiamo infatti che esista un  $\bar{x} \in [x_1, x_2]$  tale che per  $x \in [x_1, \bar{x})$  la luce abbia velocità  $v_\alpha$ , mentre per  $x \in (\bar{x}, x_2]$  la velocità sia  $v_\beta$ . Poniamo  $\alpha = 1/v_\alpha$  e  $\beta = 1/v_\beta$ , detti *indici di rifrazione* dei due mezzi.

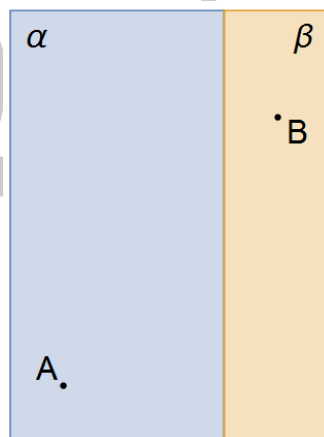


FIGURA 1.2

La funzione  $g$  è allora in questo caso

$$g(x, y) = g(x) = \begin{cases} \alpha & \text{se } x \in [x_1, \bar{x}) \\ \beta & \text{se } x \in (\bar{x}, x_2] \end{cases}$$

e il funzionale può essere scritto come

$$\mathcal{T}(y) = \alpha \int_{x_1}^{\bar{x}} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx + \beta \int_{\bar{x}}^{x_2} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

(si noti che il valore della funzione  $g$  per  $x = \bar{x}$  è chiaramente non rilevante).

Per trovare il minimo di questo funzionale, consideriamo un punto di coordinate  $(\bar{x}, \bar{y})$  e minimizziamo separatamente i due integrali. Questi integrali sono i funzionali lunghezza che abbiamo considerato precedentemente, dunque sappiamo che i minimi al variare di  $\bar{y} = y(\bar{x})$  sono realizzati da segmenti.

A questo punto abbiamo che la funzione  $y$  che realizza il minimo deve soddisfare

$$\mathcal{T}(y) = \alpha \sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + (y_1 - \bar{y})^2} + \beta \sqrt{(x_2 - \bar{x})^2 + (y_2 - \bar{y})^2}$$

e l'unico parametro determinante è allora il valore di  $\bar{y}$ , al variare del quale dobbiamo quindi minimizzare la quantità

$$\mathcal{T}(\bar{y}) = \alpha \sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + (y_1 - \bar{y})^2} + \beta \sqrt{(x_2 - \bar{x})^2 + (y_2 - \bar{y})^2},$$

cioè trovare il valore  $\bar{y}_0$  tale che  $\mathcal{T}'(\bar{y}_0) = 0$  (si vede facilmente che il minimo esiste ed è unico). Indicati con  $\theta_A$  e  $\theta_B$  gli angoli di incidenza e rifrazione (si veda la seguente Figura 1.3) rispettivamente, abbiamo

$$\mathcal{T}'(\bar{y}) = \frac{\alpha(\bar{y} - y_1)}{\sqrt{(x_1 - \bar{x})^2 + (y_1 - \bar{y})^2}} - \frac{\beta(y_2 - \bar{y})}{\sqrt{(x_2 - \bar{x})^2 + (y_2 - \bar{y})^2}} = \alpha \sin \theta_A - \beta \sin \theta_B,$$

che si annulla quando gli angoli verificano

$$\frac{\sin \theta_A}{\sin \theta_B} = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (1.3)$$

Otteniamo quindi che un minimo  $y$  di  $\mathcal{T}$  in  $\mathcal{A}$  è dato dalla funzione

$$y(x) = \begin{cases} \frac{(\bar{y}_0 - y_1)}{\bar{x} - x_1} (x - x_1) + y_1 & \text{se } x \in [x_1, \bar{x}] \\ \frac{(y_2 - \bar{y}_0)}{x_2 - \bar{x}} (x - \bar{x}) + \bar{y}_0 & \text{se } x \in (\bar{x}, x_2] \end{cases}$$

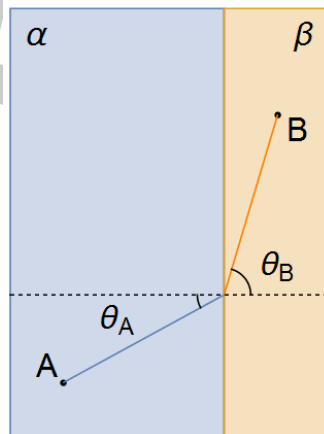


FIGURA 1.3

Menzioniamo che la formula (1.3) è la traduzione della cosiddetta *legge di Snell* (si veda [34]).

Osserviamo come questo problema suggerisca che le funzioni  $C^1$  potrebbero talvolta non essere sufficienti per trattare situazioni anche relativamente semplici. In vari problemi come il precedente occorre allargare la classe delle funzioni ammissibili (in questo caso con le funzioni  $C^1$  a tratti) su cui minimizzare.

Altri problemi variazionali simili ai precedenti sono i problemi detti *di scavo* o *di attraversamento*. Immaginiamo di voler scavare una galleria in una montagna: a seconda della densità delle rocce della montagna, scavare potrebbe avere un costo variabile. Il problema consiste quindi nello scavare la galleria minimizzando il costo complessivo dell'operazione. Anche problemi del genere danno origine a funzionali simili a quelli del problema della brachistocrona e di Fermat.

### 1.3. Il problema della corda sospesa, la catenaria e la superficie di rotazione di area minima

Vogliamo descrivere la forma che assume una corda omogenea, non elastica, di lunghezza  $L$ , sospesa ai suoi estremi (si veda [31] per alcune note storiche sul problema). Per risolvere questo problema, dobbiamo allora cercare il profilo assunto dalla corda che minimizzi l'energia potenziale gravitazionale.

Supponiamo che il profilo della corda, con estremi nei punti  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ , sia descritto da una funzione in  $\mathcal{A} = \{y \in C^1([-1, 1]) : y(-1) = y(1) = 0\}$ . Detto  $s$  il parametro di lunghezza d'arco della curva descritta dalla corda, abbiamo che il funzionale energia potenziale (a meno di costante) si può esprimere come

$$\mathcal{E}(y) = \int_0^L y(s) ds.$$

Esplicitando l'ascissa curvilinea, possiamo riscrivere il funzionale come

$$\mathcal{E}(y) = \int_{-1}^1 y(t) \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt.$$

Dobbiamo allora minimizzare tale funzionale nel sottoinsieme di  $\mathcal{A}$  delle funzioni che rispettano il *vincolo* di lunghezza della corda, cioè tali che

$$\mathcal{L}(y) = \int_0^L ds = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + (y'(t))^2} dt = L$$

(si noti che deve essere  $L \geq 2$  perché ci siano curve che soddisfano questo vincolo e dunque il problema abbia senso).

Il minimo di questo funzionale è una curva detta *catenaria*, appunto in quanto rappresentante la configurazione di equilibrio di un cavo pesante flessibile e inestensibile (catena) vincolato agli estremi e soggetto alla sola forza di gravità. Sottolineiamo che per quanto appaia simile a una parabola (come creduto da Galileo), tale curva è invece descritta da una funzione trascendente, il coseno iperbolico.

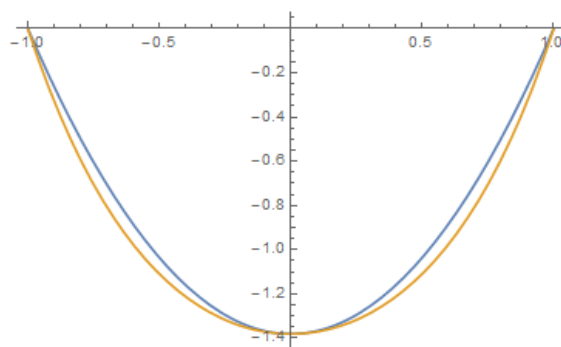


FIGURA 1.4 Una catenaria (più bassa) a confronto con una parabola (più alta).

È questo un esempio di *problema vincolato* con un vincolo di tipo integrale, mentre tutti i vincoli che abbiamo precedentemente considerato, ossia i valori delle funzioni agli estremi dell'intervallo di definizione, erano di tipo puntuale. Analizzeremo in dettaglio questo problema nella Sezione 6.2.

Curiosamente, la catenaria interviene (o meglio la superficie che si ottiene facendola ruotare in  $\mathbb{R}^3$  attorno all'asse delle ascisse) anche in un altro problema classico, della superficie di rotazione di area minima, studiato da Eulero nel 1744. Consideriamo due circonferenze di raggio  $R_1$  e  $R_2$  su due distinti piani ortogonali all'asse delle  $x$ , passante per i due centri, in  $\mathbb{R}^3$ . Il problema consiste nel trovare tra tutte le superfici di rotazione regolari attorno all'asse delle ascisse aventi per bordo le due circonferenze, quella di area minima. Supponiamo che il centro della prima circonferenza abbia coordinate  $(0, 0, 0)$  e il centro della seconda abbia coordinate  $(d, 0, 0)$ , con  $d > 0$ . Se una superficie è generata dalla rotazione di una curva del piano esprimibile come grafico di una funzione nonnegativa  $y : [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$ , la sua area è data dalla formula

$$\mathcal{A}(y) = 2\pi \int_0^d y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Il problema consiste dunque nella ricerca del minimo del funzionale  $\mathcal{A}$  tra le funzioni dell'insieme  $\{y \in C^1([0, d]) : y(0) = R_1, y(d) = R_2 \text{ e } y > 0\}$ . Si noti che il funzionale è (a meno di una costante) lo stesso del precedente problema della corda sospesa (ed entrambi sono casi speciali del funzionale (1.2) che appare nel problema di Fermat, considerando una funzione  $g$  appropriata), ma in questo caso non vi è un vincolo di lunghezza sul grafico di  $y$ .

Si può provare che l'equazione differenziale (di Eulero–Lagrange) che un minimo deve soddisfare ha come soluzioni esplicite le funzioni  $y(x) = (1/c_1) \cosh(c_1x + c_2)$  ( $\cosh \alpha$  è il coseno iperbolico di  $\alpha$  definito da  $\cosh \alpha = (e^\alpha + e^{-\alpha})/2$ ), poi le costanti  $c_1$  e  $c_2$  vanno scelte in modo che valgano le condizioni agli estremi. La superficie di rotazione di area minima, quando esiste, è allora una *catenoide*, che è la superficie ottenuta ruotando una *catenaria* (si veda [32] per altre informazioni).

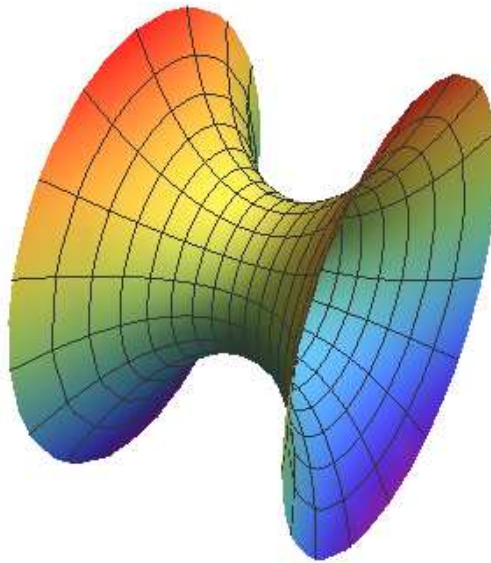


FIGURA 1.5 Una catenoide.

Analizzando la famiglia delle soluzioni si può mostrare che per alcuni valori di  $R_1$ ,  $R_2$  e  $d$  non esiste alcuna coppia di costanti  $c_1$ ,  $c_2$  in modo che le condizioni ai bordi siano soddisfatte, ciò corrisponde alla non-esistenza del minimo. Una delle problematiche principali del calcolo delle variazioni è infatti quella di stabilire sotto quali condizioni i minimi dei funzionali esistano. Vedremo più avanti come i cosiddetti *metodi diretti* del calcolo delle variazioni, basati sull'idea (topologica) del *teorema di Weierstrass* di combinare la continuità con la compattezza, permetteranno sotto opportune ipotesi di mostrare l'esistenza dei minimi.

Discuteremo in dettaglio il problema della superficie di rotazione di area minima nelle Sezioni 4.3 e 9.8.

#### 1.4. Un funzionale privo di minimo

Consideriamo il funzionale

$$\mathcal{F}(y) = \int_{-1}^1 e^{-[y'(t)]^2} dt$$

definito su  $\mathcal{A} = \{y \in C^1([-1, 1]) : y(-1) = y(1) = 0\}$ . Dato che  $e^{-t^2} > 0$  allora per ogni  $y \in \mathcal{A}$  si ha  $\mathcal{F}(y) > 0$ . Mostriamo che  $\inf_{y \in \mathcal{A}} \mathcal{F}(y) = 0$ : definiamo la successione di funzioni

$$y_n(t) = -nt^2 + n = -n(t^2 - 1);$$

si ha che  $y_n \in C^1([-1, 1])$  e  $y_n(-1) = y_n(1) = 0$ . Poiché  $y'_n(t) = -2nt$ , abbiamo

$$\mathcal{F}(y_n) = \int_{-1}^1 e^{-4n^2 t^2} dt.$$



La successione di funzioni  $f_n(t) = e^{-4n^2 t^2}$  è equilimitata

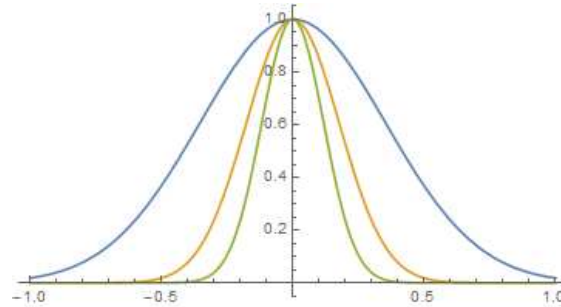


FIGURA 1.6 I primi termini della successione  $f_n$ .

e converge puntualmente alla funzione

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \neq 0 \\ 1 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

nell'intervallo  $[-1, 1]$ ; possiamo allora applicare il teorema di convergenza dominata e ottenere che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 e^{-4n^2 t^2} dt = \int_{-1}^1 f(t) dt = 0.$$

Dunque zero è l'estremo inferiore del funzionale  $\mathcal{F}$  su  $\mathcal{A}$ , che per quanto detto sopra non può essere realizzato da nessuna funzione in  $\mathcal{A}$ ; di conseguenza il problema non ammette minimo.

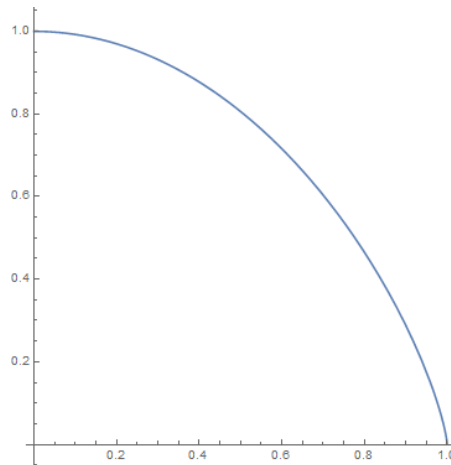
### 1.5. Il problema di Newton

Il *problema di Newton* consiste nel costruire il proiettile/solido che subisca la minima resistenza dell'aria durante il suo moto. Storicamente è il primo problema del calcolo delle variazioni (prima del problema della brachistocrona), studiato nel 1685 e pubblicato nel 1687 da Newton nei suoi "Principia Mathematica" (si veda [35]).

Per semplificare il problema, supponiamo che il proiettile abbia simmetria rotazionale. Consideriamo allora l'insieme

$$\mathcal{A} = \{ \varphi \in C^1([0, 1]) : 0 \leq \varphi(x) \leq 1 \text{ per ogni } x \in [0, 1], \varphi(0) = 1, \varphi(1) = 0 \text{ e } \varphi \text{ concava} \},$$

le funzioni  $\varphi \in \mathcal{A}$  saranno le semi-sezioni verticali dei nostri proiettili sul piano  $xz$ .

FIGURA 1.7 Una funzione di  $\mathcal{A}$ .

I proiettili sono ottenuti per rotazione di questi profili intorno all'asse verticale  $z$ .

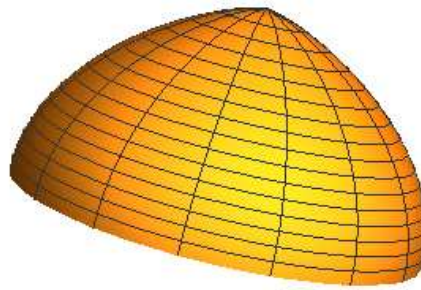


FIGURA 1.8 Un proiettile.

Scelto un profilo  $\varphi$ , la resistenza dell'aria può essere espressa (a meno di costanti) mediante il funzionale

$$\mathcal{R}(\varphi) = \int_0^1 \frac{x}{1 + (\varphi'(x))^2} dx,$$

che quindi va minimizzato sull'insieme di funzioni  $\mathcal{A}$ .

Oltre o in alternativa, si possono richiedere altri vincoli, ad esempio, il quantitativo di materiale disponibile, cioè il volume sotto la superficie di rotazione che si ottiene. Menzioniamo che nel caso generale in cui il solido non gode di particolari simmetrie, il problema della ricerca del minimo rimane tuttora aperto (per approfondire, si veda [7]). Discuteremo in dettaglio questo problema nella Sezione 13.6.

### 1.6. Equazioni variazionali

La relazione tra minimi di funzionali e le equazioni differenziali di Eulero–Lagrange che tali minimi devono soddisfare, come menzionato discutendo il problema della brachistocrona, può

essere utilizzata per provare l'esistenza di soluzioni di queste ultime. Infatti, capovolgendo il punto di vista, se siamo in grado di ricondurre un'equazione differenziale all'equazione di Eulero–Lagrange di un funzionale, provare l'esistenza di un minimo di quest'ultimo mostra l'esistenza di una soluzione dell'equazione. Chiamiamo allora *equazioni variazionali* le equazioni differenziali che sono equazioni di Eulero–Lagrange di qualche funzionale.

Se consideriamo il problema di Cauchy, con  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  regolare e limitata in  $C^1(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{cases} y'' = f(y) & \text{per ogni } x \in [0, 1] \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \beta \end{cases}$$

il *teorema di esistenza e unicità* (globale) per le equazioni differenziali ordinarie ci garantisce l'esistenza di una soluzione. Se però cambiamo i dati ai bordi dell'intervallo, ponendo

$$\begin{cases} y'' = f(y) & \text{per ogni } x \in [0, 1] \\ y(0) = \alpha \\ y(1) = \beta \end{cases}$$

tale teorema non è più applicabile. Infatti per problemi del genere, detti *problemi con condizioni agli estremi*, non esiste un analogo teorema di esistenza.

Un metodo intuitivo per affrontare il problema, consiste nel risolvere il sistema

$$\begin{cases} y'' = f(y) & \text{per ogni } x \in [0, 1] \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = \gamma \end{cases}$$

e cercare tra tutte le soluzioni di questo problema di Cauchy, al variare di  $\gamma$ , una che assuma il valore  $\beta$  per  $x = 1$  (*metodo di shooting*).

Vediamo invece un'altra strategia. Sia  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una primitiva di  $f$  e consideriamo il funzionale  $\mathcal{F}$  sulle funzioni  $y \in C^1([0, 1])$  con  $y(0) = \alpha$  e  $y(1) = \beta$ , definito da

$$\mathcal{F}(y) = \int_0^1 \left[ \frac{[y'(x)]^2}{2} + F(y(x)) \right] dx.$$

Supponendo che tale funzionale ammetta un minimo  $y$  di classe  $C^2$ , vedremo nel prossimo capitolo che tale minimo deve soddisfare l'equazione di Eulero–Lagrange data da

$$\frac{d}{dx} y'(x) = F'(y(x)),$$

cioè  $y''(x) = f(y(x))$ , per ogni  $x \in [0, 1]$ , che è proprio l'equazione del problema ai bordi che stiamo considerando. Inoltre i valori al bordo della soluzione trovata  $y$  sono quelli cercati, per la definizione dell'insieme di funzioni dove stiamo minimizzando  $\mathcal{F}$ . Se dunque abbiamo un teorema di esistenza di minimi per tale funzionale, abbiamo una soluzione del problema ai bordi.

Questo approccio è detto *metodo variazionale* e dunque “trasforma” la ricerca di una soluzione di un'equazione differenziale (variazionale) nella ricerca del minimo di un funzionale.

**OSSERVAZIONE 1.6.1.** Sfortunatamente non tutte le equazioni differenziali sono variazionali e stabilire se un'equazione lo è o meno può essere comunque molto difficile. Le equazioni differenziali ordinarie del second'ordine lo sono sempre (si veda [3, Capitolo 1, Sezione 7/e]), mentre

i sistemi di equazioni differenziali ordinarie solo sotto determinate condizioni [13]. La caratterizzazione diventa poi molto complicata nel caso generale di ordine più alto o di equazioni alle derivate parziali (si veda [18], per esempio).

### 1.7. Il moto di un punto materiale in un campo conservativo

Un caso estremamente importante (anche storicamente) per la fisica di (un sistema di) equazioni variazionali è dato dall'equazione del moto  $t \mapsto x(t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  di un punto materiale di massa (inerziale)  $m$  in un campo di forze conservativo  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , cioè tale che  $E = -\nabla V$ , dove  $V$  è detto *potenziale* del campo (esempi sono il campo gravitazionale  $G$  e quello elettrostatico  $E$ ). Se la forza  $F$  che il campo esercita è data da  $F = qE$  dove  $q$  è una quantità scalare associata al punto materiale (per esempio la massa *gravitazionale* nel caso del campo gravitazionale e la carica elettrica nel caso del campo elettrostatico), si ha che allora l'equazione del moto si scrive  $m\ddot{x}(t) = F(x(t)) = qE(x(t))$ , cioè  $\ddot{x}(t) = qE(x(t))/m$  (si noti che nel caso del campo gravitazionale  $G$  si ha semplicemente  $\ddot{x}(t) = G(x(t))$ , per l'equivalenza Einsteiniana tra massa gravitazionale e inerziale) che quindi rientra nel quadro della sezione precedente (si noti che tutti gli argomenti di tale sezione si estendono al caso vettoriale), in altre parole è variazionale. Di conseguenza, i minimi (fissando gli estremi, cioè i punti di partenza/arrivo della traiettoria  $t \mapsto x(t)$ ) del funzionale  $S$ , detto *funzionale d'azione*, dato da

$$S(x) = \int_a^b \mathcal{L}(t, x, \dot{x}) dt = \int_a^b \left[ \frac{1}{2} m |\dot{x}(t)|^2 - qV(x(t)) \right] dt,$$

dove la funzione

$$\mathcal{L}(t, x, \xi) = \frac{1}{2} m |\xi|^2 - qV(x)$$

si dice *lagrangiana* del sistema, soddisfano le equazioni del moto, coincidendo quest'ultime con le equazioni di Eulero–Lagrange di  $S$ . Si noti che denotando con  $K$  l'energia cinetica, data da

$$K = \frac{1}{2} m |\dot{x}(t)|^2$$

e con

$$\Pi = qV(x),$$

l'energia potenziale del punto materiale, si ha  $\mathcal{L} = K - \Pi$ .

Tutta questa discussione porta alla formulazione del seguente *principio di minima azione*: “sulla traiettoria del moto l'azione è minima” (Maupertuis, 1746).

### 1.8. Il problema di Didone e i problemi isoperimetrici

Tra i problemi geometrici del calcolo delle variazioni spicca il classico problema isoperimetrico narrato nell'Eneide di Virgilio. In particolar modo parliamo del Libro I in cui viene detto, relativamente alla fondazione di Cartagine da parte di Didone:

“*Devenere locos ubi nunc ingentia cernes  
moenia surgentemque novae Karthaginis arcem,  
mercaturae solum, facti de nomine Byrsam,  
taurino quantum possent circumdare tergo.*”

“Raggiunsero i luoghi, dove ora vedrai le enormi mura e la sorgente fortezza della nuova Cartagine, e comprarono tanto suolo, nominato Birsam, quanto ne potessero circondare con una pelle di toro.”

Il problema di Didone consiste dunque nel trovare la maggiore area che si possa cingere con una (corda di) pelle di toro, ossia, a parità di perimetro, quale figura abbia la maggiore area possibile.

Tradotto in termini analitici, data una curva chiusa  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  con intervallo di parametrizzazione  $[0, 1]$  consideriamo il funzionale lunghezza,

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)| dt$$

e il funzionale Area, scritto mediante le formule di Gauss–Green come

$$\mathcal{A}(\gamma) = \int_0^1 x'(t)y(t) dt;$$

definito allora l'insieme  $\Gamma = \{\gamma \in C^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2) : \mathcal{L}(\gamma) = L\}$ , ossia l'insieme di tutte le curve  $C^1$  chiuse nel piano di lunghezza  $L$ , vogliamo massimizzare il funzionale  $\mathcal{A}$  sull'insieme  $\Gamma$ .

Si può dimostrare in modo non troppo complicato che la soluzione di questo problema è data da una circonferenza (lo vedremo nella Sezione 7.4). Inoltre, chiaramente la stessa questione può essere formulata anche in dimensione  $n$ , ma il livello di difficoltà è molto maggiore. Menzioniamo qui che la soluzione è stata data da Ennio De Giorgi nel 1958, dimostrando che le palle  $n$ -dimensionali massimizzano la misura di Lebesgue tra tutti gli insiemi aventi lo stesso perimetro (l'area superficiale  $(n-1)$ -dimensionale del bordo di un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$ ).

Osserviamo che in realtà il problema di Didone è leggermente più complicato, infatti dobbiamo immaginare che il territorio che diventerà prima Birsia (ossia “striscia”) e poi Cartagine affacciava sul mare. Immaginando di descrivere la costa con una curva  $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , allora il problema di Didone chiede di massimizzare l'area (di terra) contenuta in una curva  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  di lunghezza fissata  $L$  (la corda di pelle di toro) e con i suoi due estremi  $\gamma(0)$  e  $\gamma(1)$  appartenenti alla curva  $\sigma$  (sulla costa). Discuteremo il problema nella Sezione 7.4.1.

In generale, con il nome di *problemi isoperimetrici* o *problemi con vincoli isoperimetrici* si intende un'ampia gamma di problemi di minimizzazione vincolata, in cui tra i vincoli si richiede che un certo funzionale (integrale) abbia un valore fissato per le funzioni nell'insieme su cui si minimizza. Si noti che il problema della corda sospesa che abbiamo considerato nella Sezione 1.3 appartiene a questa classe. Un altro problema simile è il *problema di Chaplygin*: consiste nel determinare la traiettoria chiusa che un aereo che vola a velocità costante rispetto al vento (quella che si chiama *airspeed*), soggetto a un vento a velocità, direzione e verso costante, deve percorrere in un tempo fissato per racchiudere l'area maggiore.

### 1.9. L'integrale di Dirichlet

Consideriamo ora un esempio di problema multidimensionale, in cui vogliamo minimizzare un funzionale su un insieme di funzioni  $u$  definite su un dominio  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ . Vedremo che le equazioni di Eulero–Lagrange per questi funzionali saranno equazioni alle derivate parziali. Il funzionale più classico è l'integrale di Dirichlet.

Consideriamo un aperto limitato  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  e una funzione  $u_0 \in C^1(\bar{\Omega})$ , lo spazio delle restrizioni delle funzioni di  $C^1(\mathbb{R}^n)$  a  $\bar{\Omega}$ . Definiamo l'insieme di funzioni  $\mathcal{A} = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = u_0\}$  e su di esso il funzionale

$$\mathcal{J}(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx,$$

detto *integrale di Dirichlet*, che ha uno stretto legame con l'equazione di Laplace

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega$$

le cui soluzioni (che si mostrano in realtà appartenere a  $C^\infty(\Omega)$ ) sono dette *funzioni armoniche*. Vedremo infatti che l'equazione di Eulero–Lagrange dell'integrale di Dirichlet è proprio l'equazione di Laplace.

**TEOREMA 1.9.1.** *Se  $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$  è minimo dell'integrale di Dirichlet  $\mathcal{J}$  su  $\mathcal{A}$ , allora  $u$  è una funzione armonica in  $\Omega$ .*

Analogamente, le soluzioni dell'equazione di Poisson

$$\Delta u = f \text{ in } \Omega,$$

che compare in vari contesti fisici, si possono ottenere come minimi del funzionale

$$\mathcal{F}(u) = \int_{\Omega} \left( \frac{|\nabla u|^2}{2} + fu \right) dx.$$

### 1.10. Il problema di Plateau

Vediamo un altro esempio di problema multidimensionale. Consideriamo  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  un aperto limitato il cui bordo  $\partial\Omega$  è dato da una curva di classe  $C^1$  e una funzione  $u_0 \in C^1(\partial\Omega)$ . Definito l'insieme  $\mathcal{S} = \{u \in C^1(\bar{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = u_0\}$ , il grafico di una funzione  $u \in \mathcal{S}$  è una superficie regolare con bordo la curva grafico della funzione  $u_0$  e la cui area è data da

$$\mathcal{A}(u) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx.$$

Il problema di minimo per il funzionale  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{S}$  viene detto problema dell'*area minima* (in forma cartesiana) o *problema di Plateau* (si veda [36] per alcune note storiche e referenze, [10, Chapter 5] e [16] per approfondire). Esso corrisponde al problema geometrico di trovare la superficie-grafico di area minima tra tutte quelle che hanno come bordo la curva grafico della funzione  $u_0$ .

Più in generale, ci si può porre il problema di trovare la superficie di area minima tra tutte quelle che hanno una certa curva fissata come bordo (o in una sottoclasse di queste), senza richiedere che siano grafico di una funzione (si veda [22]). Si noti che il problema della superficie di rotazione di area minima bordata da due circonferenze, discusso nella Sezione 1.3, si inserisce esattamente in questo contesto (restringendosi alle superfici con simmetria rotazionale) se si considerano anche superfici non connesse (in tal caso si vede facilmente che i due “dischi” con bordo le due circonferenze realizzano il minimo dell'area tra quest'ultime, quindi anche la somma delle loro aree va confrontata con quella delle superfici connesse).

In dimensione più alta, sia in forma cartesiana che generale (detta talvolta “parametrica”) il problema di Plateau diventa la ricerca dell'ipersuperficie di  $\mathbb{R}^n$  di area minima tra tutte quelle che hanno come bordo una fissata sottovarietà  $(n - 2)$ -dimensionale (si veda [36]).

## Bibliografia

1. L. Ambrosio and C. Mantegazza, *Curvature and distance function from a manifold*, J. Geom. Anal. **8** (1998), no. 5, 723–748, Dedicated to the memory of Fred Almgren.
2. J. M. Ball and V. J. Mizel, *One-dimensional variational problems whose minimizers do not satisfy the Euler–Lagrange equation*, Arch. Rational Mech. Anal. **90** (1985), no. 4, 325–388.
3. O. Bolza, *Lectures on the calculus of variations*, 2nd ed. Chelsea Publishing Co., New York, 1961.
4. W. M. Boothby, *An introduction to differential manifolds and Riemannian geometry*, Academic Press, London, 1975.
5. H. Brezis, *Analisi funzionale. Teoria e applicazioni*, Serie di Matematica e Fisica, Liguori Editore, Napoli, 1986.
6. G. Buttazzo, M. Giaquinta, and S. Hildebrandt, *One-dimensional variational problems*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, vol. 15, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998, An introduction.
7. G. Buttazzo and B. Kawohl, *On Newton's problem of minimal resistance*, Math. Intelligencer **15** (1993), no. 4, 7–12.
8. L. Cesari, *Optimization – theory and applications*, Applications of Mathematics (New York), vol. 17, Springer–Verlag, New York, 1983, Problems with ordinary differential equations.
9. B. Dacorogna, *Direct methods in the calculus of variations*, second ed., Applied Mathematical Sciences, vol. 78, Springer, New York, 2008.
10. ———, *Introduction to the calculus of variations*, third ed., Imperial College Press, London, 2015.
11. M. P. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
12. ———, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.
13. J. Douglas, *Solution of the inverse problem of the calculus of variations*, Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 71–128.
14. S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, Springer–Verlag, 1990.
15. M. Giaquinta and S. Hildebrandt, *Calculus of variations. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 310, Springer–Verlag, Berlin, 1996, The Lagrangian formalism.
16. E. Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Monographs in Math., vol. 80, Birkhäuser, Boston, 1984.
17. S. Hildebrandt and A. Tromba, *The parsimonious universe*, Copernicus, New York, 1996, Shape and form in the natural world.
18. D. Krupka, *on the local structure of the Euler–Lagrange mapping of the calculus of variations*, Proceedings of the Conference on Differential Geometry and its Applications (Nové Město na Moravě, 1980), Univ. Karlova, Prague, 1982, pp. 181–188.
19. M. Lavrentiev, *Sur quelques problèmes du calcul des variations*, Ann. Mat. Pura Appl. **4** (1926), 107–124.
20. B. Manià, *Sopra un esempio di Lavrentieff*, Boll. Un. Mat. Ital. **13** (1934), 146–153.
21. F. Morgan, *Geometric measure theory – A beginner's guide*, Academic Press, Boston, 1988.
22. R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, second ed., Dover Publications, Inc., New York, 1986.
23. L. C. Piccinini, G. Stampacchia, and G. Vidossich, *Equazioni differenziali ordinarie in  $\mathbf{R}^n$  (problemi e metodi)*, Serie di Matematica e Fisica, Liguori Editore, Napoli, 1979.
24. R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton University Press, 1970.
25. W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw–Hill, New York, 1966.
26. ———, *Functional analysis*, McGraw–Hill Series in Higher Mathematics, McGraw–Hill, New York, 1973.
27. ———, *Principles of mathematical analysis*, third ed., McGraw–Hill, New York, 1976.
28. L. Tonelli, *Sur un méthode directe du calcul des variations*, Rend. Circ. Mat. Palermo **39** (1915), 233–264.
29. R. L. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and integral*, Marcel Dekker Inc., New York, 1977.
30. Wikipedia, *Brachistochrone curve*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone\\_curve](http://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve), 2017.
31. ———, *Catenary*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Catenary>, 2017.
32. ———, *Catenoid*, <http://en.wikipedia.org/wiki/Catenoid>, 2017.
33. ———, *Doppio pendolo*, [http://it.wikipedia.org/wiki/Doppio\\_pendolo](http://it.wikipedia.org/wiki/Doppio_pendolo), 2017.
34. ———, *Legge di Snell*, [http://it.wikipedia.org/wiki/Legge\\_di\\_Snell](http://it.wikipedia.org/wiki/Legge_di_Snell), 2017.
35. ———, *Newton minimal resistance problem*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Newton\\_minimal\\_resistance\\_problem](http://en.wikipedia.org/wiki/Newton_minimal_resistance_problem), 2017.

36. ———, *Plateau's problem*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Plateau's\\_problem](http://en.wikipedia.org/wiki/Plateau's_problem), 2017.
37. ———, *Equazioni di Maxwell*, [http://it.wikipedia.org/wiki/Equazioni\\_di\\_Maxwell](http://it.wikipedia.org/wiki/Equazioni_di_Maxwell), 2018.
38. ———, *Invariance of domain*, [http://en.wikipedia.org/wiki/Invariance\\_of\\_domain](http://en.wikipedia.org/wiki/Invariance_of_domain), 2018.
39. ———, *Teorema di Noether*, [http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema\\_di\\_Noether](http://it.wikipedia.org/wiki/Teorema_di_Noether), 2018.

DRAFT