

# Perelman, il Flusso di Ricci e la Congettura di Poincaré

CARLO MANTEGAZZA

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI NAPOLI  
FEDERICO II

Happy Numbers – Camerino

*20 Aprile 2016*

## La Congettura di Poincaré

I Flussi Geometrici

Il Flusso di Ricci – Richard Hamilton

Il Programma per Dimostrare la Congettura di Poincaré

Le Difficoltà

Il Lavoro di Grisha Perelman

La Dimostrazione della Congettura di Poincaré

Altri Sviluppi

# Poincaré e la Topologia



Sebbene vari risultati che oggi chiamiamo “topologici” erano stati trovati in precedenza, è con Poincaré (1854–1912), *l'ultimo universalista*, che la topologia (*Analysis Situs*) assume una forma moderna.

In particolare, per quanto riguarda le proprietà delle superfici o degli spazi di dimensione più alta.

Poincaré introduce il concetto fondamentale di *semplice connessione*.

## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):

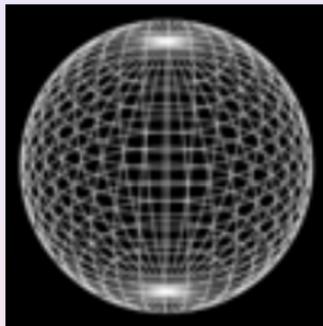
## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



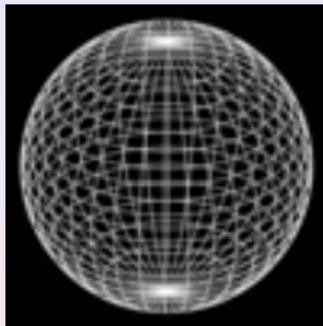
## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



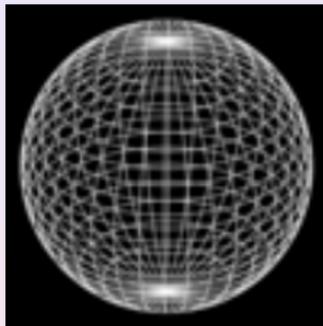
## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



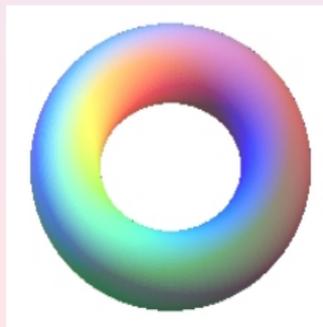
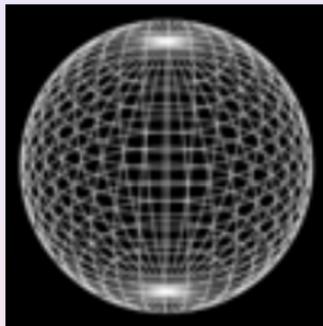
## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



# Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):

## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



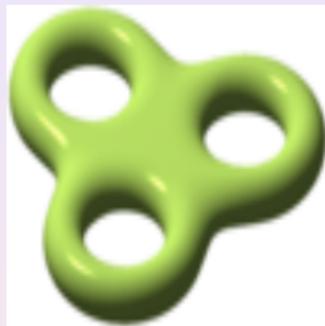
## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



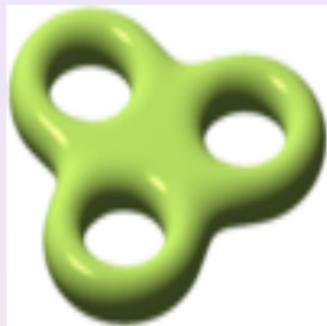
## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):



## Superfici – Esempi

Superfici *chiuse* (compatte, senza bordo, orientabili):

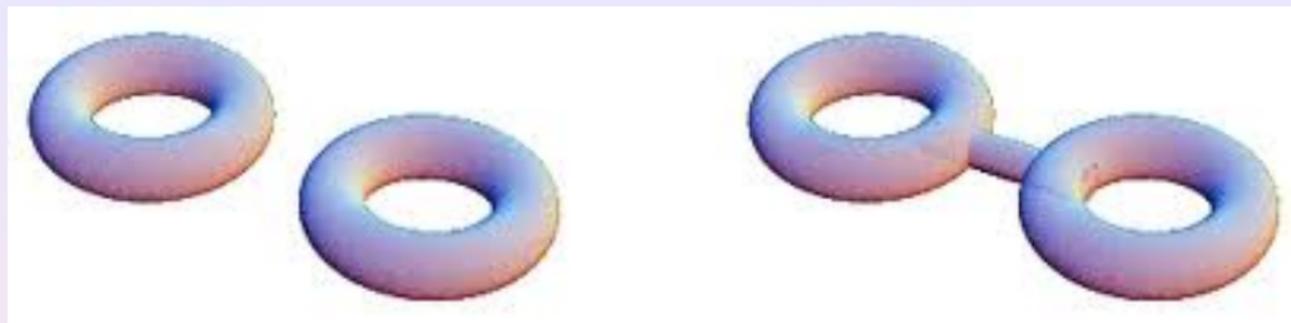


### Teorema

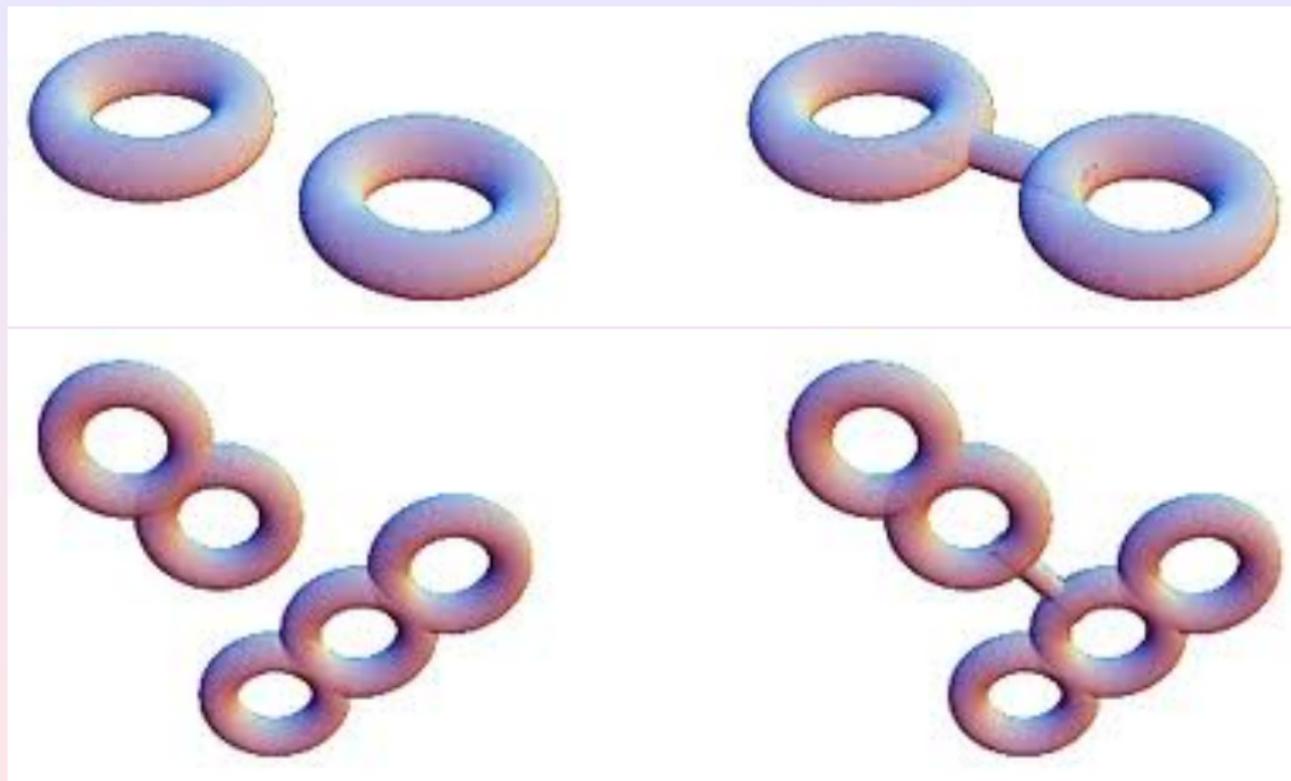
Ogni superficie chiusa è il bordo di un *bretzel*.

# Superfici – Esempi

# Superfici – Esempi



## Superfici – Esempi

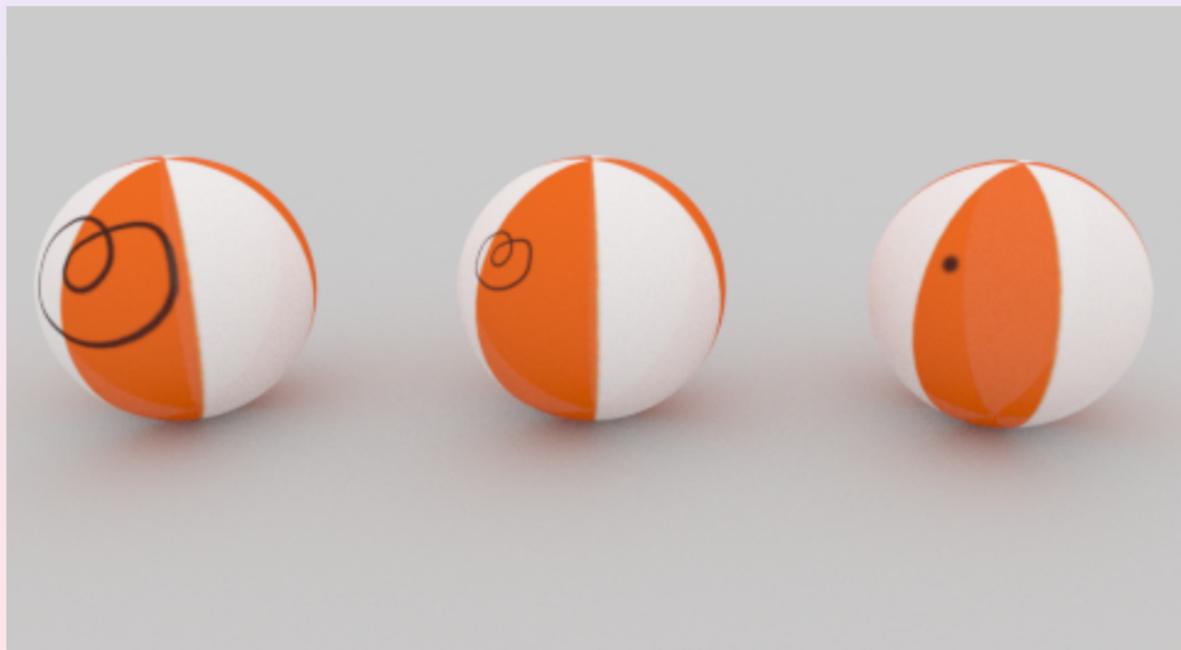


## Definizione (*Semplice Connessione*)

Una superficie si dice *semplicemente connessa* se ogni curva su di essa si può deformare in modo continuo ad un punto.

## Definizione (*Semplice Connessione*)

Una superficie si dice *semplicemente connessa* se ogni curva su di essa si può deformare in modo continuo ad un punto.



# Il Toro non è Semplicemente Connesso



# Il Toro non è Semplicemente Connesso



## Il Toro non è Semplicemente Connesso



### Teorema

Una superficie chiusa semplicemente connessa è omeomorfa alla sfera (omeomorfa = deformabile).

## Spazi Multidimensionali

Poincaré si pose il problema se questo teorema fosse vero anche in spazi di dimensione più alta di due, con particolare interesse verso la dimensione tre. Questi spazi sono chiamati varietà.

Uno spazio tridimensionale è “localmente” come il nostro spazio ordinario (topologicamente), ma potrebbe avere “comportamenti strani” nel percorrerlo... ad esempio si potrebbe uscire dalla porta di una stanza e ritrovarsi nella stessa stanza rientrati da un'altra sua porta, così come percorrendo una circonferenza o la superficie di un toro si torna al punto di partenza. Oppure avere una struttura ancora più complicata e incognita.

Esistono la *3-sfera*, il *3-toro* e altri esempi di varietà tridimensionali, analoghi alle superfici che abbiamo visto.

# La Congettura di Poincaré

Nell'ordine di idee di arrivare ad un teorema di classificazione come per le superfici, una delle prime congetture (domande) di Poincaré fu:

# La Congettura di Poincaré

Nell'ordine di idee di arrivare ad un teorema di classificazione come per le superfici, una delle prime congetture (domande) di Poincaré fu:

## Congettura di Poincaré

Ogni varietà tridimensionale chiusa e semplicemente connessa è omeomorfa (deformabile) alla 3-sfera.

Proposta nel 1904 sui "Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo".

# La Congettura di Poincaré

Si può inoltre generalizzare a dimensioni ancora più alte:

# La Congettura di Poincaré

Si può inoltre generalizzare a dimensioni ancora più alte:

- ▶  $n \geq 5$  Stephen Smale (Medaglia Fields 1966).

# La Congettura di Poincaré

Si può inoltre generalizzare a dimensioni ancora più alte:

- ▶  $n \geq 5$  Stephen Smale (Medaglia Fields 1966).
- ▶  $n = 4$  Michael Freedman (Medaglia Fields 1986).

# La Congettura di Poincaré

Si può inoltre generalizzare a dimensioni ancora più alte:

- ▶  $n \geq 5$  Stephen Smale (Medaglia Fields 1966).
- ▶  $n = 4$  Michael Freedman (Medaglia Fields 1986).
- ▶  $n = 3$  Grisha Perelman (Medaglia Fields 2006).

Rifiutata!!!

La Congettura di Poincaré

I Flussi Geometrici

Il Flusso di Ricci – Richard Hamilton

Il Programma per Dimostrare la Congettura di Poincaré

Le Difficoltà

Il Lavoro di Grisha Perelman

La Dimostrazione della Congettura di Poincaré

Altri Sviluppi

# I Flussi Geometrici

Una possibile linea dimostrativa della congettura è “trasformare” in qualche modo (deformazioni, *chirurgie – taglia & cucì*), mantenendone le proprietà topologiche, un ipotetico controesempio alla congettura in uno spazio che si sappia poi riconoscere essere la sfera.

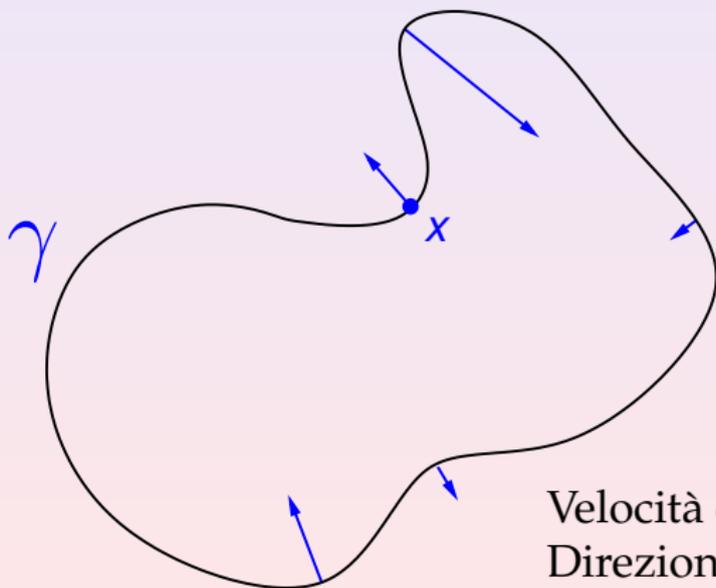
I tentativi in questo senso per via “topologica” sono falliti per circa un secolo.

L'approccio “vincente”, sempre all'interno di questo quadro, si è rivelato deformare lo spazio in oggetto per mezzo di leggi di evoluzione date da equazioni differenziali alle derivate parziali. Il vantaggio rispetto alle deformazioni di tipo topologico è che, essendo basate sull'*Analisi*, sono “quantitative”.

In generale, queste deformazioni prendono il nome di *flussi geometrici*

# Un Esempio: Il Moto di Curve per Curvatura nel Piano

Data  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$  una curva semplice chiusa, vogliamo che ad ogni istante ogni punto si muova con velocità normale uguale alla curvatura della curva nel punto



Velocità del punto  $x$ :  $k_\gamma(x)$   
Direzione perpendicolare a  $\gamma$

## Analiticamente...

Data  $\gamma = \gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva semplice chiusa, cerchiamo una funzione regolare  $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\theta, t) = k(\theta, t) \vec{N}(\theta, t) \\ \gamma(\cdot, 0) = \gamma_0 \end{array} \right.$$

- $\vec{N}(\theta, t)$  = versore normale “interno”
- $k(\theta, t)$  = curvatura della curva  $\gamma_t = \gamma(\cdot, t)$  nel punto  $\gamma(\theta, t)$ .

## Analiticamente...

Data  $\gamma = \gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva semplice chiusa, cerchiamo una funzione regolare  $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\theta, t) = k(\theta, t) \vec{N}(\theta, t) \\ \gamma(\cdot, 0) = \gamma_0 \end{cases}$$

- $\vec{N}(\theta, t)$  = versore normale “interno”
- $k(\theta, t)$  = curvatura della curva  $\gamma_t = \gamma(\cdot, t)$  nel punto  $\gamma(\theta, t)$ .

Sistema parabolico nonlineare di equazioni alle derivate parziali

## Analicamente...

Data  $\gamma = \gamma_0 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una curva semplice chiusa, cerchiamo una funzione regolare  $\gamma : \mathbb{S}^1 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  tale che

$$\begin{cases} \frac{\partial \gamma}{\partial t}(\theta, t) = k(\theta, t) \vec{N}(\theta, t) \\ \gamma(\cdot, 0) = \gamma_0 \end{cases}$$

- $\vec{N}(\theta, t)$  = versore normale “interno”
- $k(\theta, t)$  = curvatura della curva  $\gamma_t = \gamma(\cdot, t)$  nel punto  $\gamma(\theta, t)$ .

Sistema parabolico nonlineare di equazioni alle derivate parziali

## Il Teorema di Gage–Hamilton–Grayson

### Teorema

Una qualunque curva regolare, semplice e chiusa nel piano durante il flusso rimane regolare, semplice e chiusa. Dopo un tempo finito diventa convessa, poi sempre più circolare e “collassa” ad un punto. Riscaldando in modo da tenere l’area contenuta costante, converge ad una circonferenza.

## Il Teorema di Gage–Hamilton–Grayson

### Teorema

Una qualunque curva regolare, semplice e chiusa nel piano durante il flusso rimane regolare, semplice e chiusa. Dopo un tempo finito diventa convessa, poi sempre più circolare e “collassa” ad un punto. Riscaldando in modo da tenere l’area contenuta costante, converge ad una circonferenza.

Questo è un esempio di un “buon” flusso geometrico che trasforma ogni elemento di una famiglia di oggetti geometrici in un elemento “rappresentante” che si conosce bene, inoltre l’oggetto deformato ad ogni tempo sta sempre “all’interno” della famiglia (le proprietà definitorie della famiglia si mantengono).

## Il Teorema di Gage–Hamilton–Grayson

### Teorema

Una qualunque curva regolare, semplice e chiusa nel piano durante il flusso rimane regolare, semplice e chiusa. Dopo un tempo finito diventa convessa, poi sempre più circolare e “collassa” ad un punto. Riscaldando in modo da tenere l’area contenuta costante, converge ad una circonferenza.

Questo è un esempio di un “buon” flusso geometrico che trasforma ogni elemento di una famiglia di oggetti geometrici in un elemento “rappresentante” che si conosce bene, inoltre l’oggetto deformato ad ogni tempo sta sempre “all’interno” della famiglia (le proprietà definitorie della famiglia si mantengono).

Sebbene questo moto di curve sia il più semplice flusso geometrico di questo genere, questo teorema è assolutamente *non banale* e la sua dimostrazione richiede argomenti ed idee sia dall’analisi che dalla geometria.

La Congettura di Poincaré

I Flussi Geometrici

**Il Flusso di Ricci – Richard Hamilton**

Il Programma per Dimostrare la Congettura di Poincaré

Le Difficoltà

Il Lavoro di Grisha Perelman

La Dimostrazione della Congettura di Poincaré

Altri Sviluppi

# Richard Streit Hamilton – Columbia University, NY

(nel 1981 alla Cornell University di Ithaca, NY)



## Il Flusso di Ricci

Una proposta di analisi di una famiglia di flussi tra cui il flusso di Ricci viene suggerita da Jean–Pierre Bourguignon (“Ricci curvatures and Einstein metrics”, Lecture Notes in Math 838, 1981).

Nel 1982 Richard Hamilton definisce e studia il flusso di Ricci, cioè il sistema di equazioni (alle derivate parziali)

$$\frac{\partial g(t)}{\partial t} = -2Ric_{g(t)}$$

che descrive l’evoluzione della metrica di una varietà riemanniana.  $Ric_{g(t)}$  è il  *tensore di Ricci* .

“Three–manifolds with positive Ricci curvature”  
*Journal of Differential Geometry* **17**, 1982, pp. 255–306.

THREE-MANIFOLDS WITH  
POSITIVE RICCI CURVATURE

RICHARD S. HAMILTON

## INDEX

1. Introduction	255
2. Notations and conventions	257
3. The evolution equation	259
4. Solution for a short time	260
5. Evolution equations with an integrability condition	262
6. Weakly parabolic linear systems	265
7. Evolution of the curvature	273
8. Curvature in dimension three	276
9. Preserving positive Ricci curvature	279
10. Pinching the eigenvalues	283
11. The gradient of the scalar curvature	286
12. Interpolation inequalities for tensors	291
13. Higher derivatives of the curvature	294
14. Long time existence	296
15. Controlling $R_{\max}/R_{\min}$	299
16. Estimating the normalized equation	300
17. Exponential convergence	301

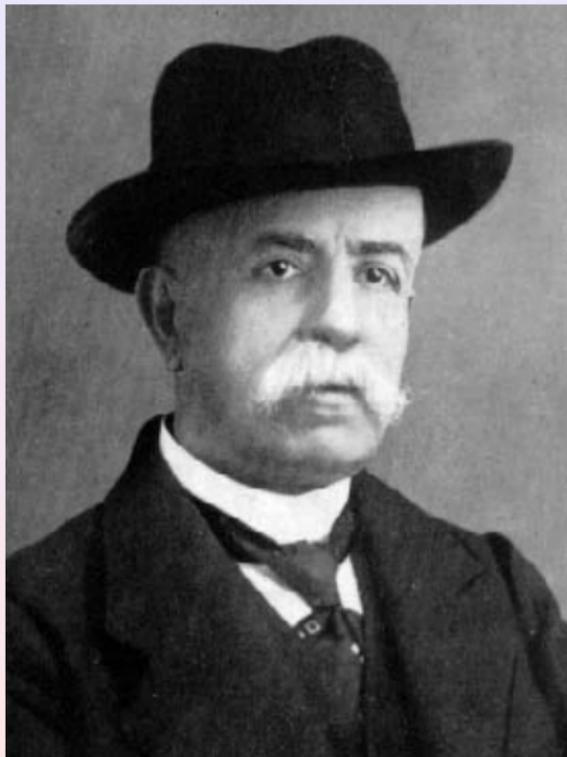
## 1. Introduction

Our goal in this paper is to prove the following result.

**1.1 Main Theorem.** *Let  $X$  be a compact 3-manifold which admits a Riemannian metric with strictly positive Ricci curvature. Then  $X$  also admits a metric of constant positive curvature.*

All manifolds of constant curvature have been completely classified by Wolf [6]. For positive curvature in dimension three there is a pleasant variety of examples, of which the best known are the lens spaces  $L_{p,q}$ . Wolf gives five

## Gregorio Ricci Curbastro (1853–1925), Lugo



## Proprietà di Base

Il flusso deforma la metrica (e quindi la geometria locale) in maniera selettiva: contrae nelle direzioni per cui il tensore di Ricci è positivo e espande in quelle dove è negativo.

## Proprietà di Base

Il flusso deforma la metrica (e quindi la geometria locale) in maniera selettiva: contrae nelle direzioni per cui il tensore di Ricci è positivo e espande in quelle dove è negativo.

L'equazione è nonlineare, della stessa famiglia dell'equazione del calore nei mezzi materiali.

## Proprietà di Base

Il flusso deforma la metrica (e quindi la geometria locale) in maniera selettiva: contrae nelle direzioni per cui il tensore di Ricci è positivo e espande in quelle dove è negativo.

L'equazione è nonlineare, della stessa famiglia dell'equazione del calore nei mezzi materiali.

La forma iniziale può essere vista come una distribuzione di curvatura,

## Proprietà di Base

Il flusso deforma la metrica (e quindi la geometria locale) in maniera selettiva: contrae nelle direzioni per cui il tensore di Ricci è positivo e espande in quelle dove è negativo.

L'equazione è nonlineare, della stessa famiglia dell'equazione del calore nei mezzi materiali.

La forma iniziale può essere vista come una distribuzione di curvatura, il flusso di Ricci muove e “diffonde” tale curvatura allo stesso modo dell'equazione del calore.

## Proprietà di Base

Il flusso deforma la metrica (e quindi la geometria locale) in maniera selettiva: contrae nelle direzioni per cui il tensore di Ricci è positivo e espande in quelle dove è negativo.

L'equazione è nonlineare, della stessa famiglia dell'equazione del calore nei mezzi materiali.

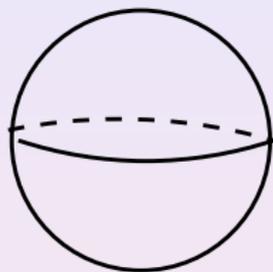
La forma iniziale può essere vista come una distribuzione di curvatura, il flusso di Ricci muove e “diffonde” tale curvatura allo stesso modo dell'equazione del calore.

È dunque ragionevole attendersi di ottenere asintoticamente una distribuzione uniforme, cioè una “geometria” molto simmetrica, per esempio come quella di una sfera.

# Esempi

# Esempi

Sfera:  $g(t) = (1 - 4t)g_0$ .



$t = 1/4$

## Esempi

Sfera:  $g(t) = (1 - 4t)g_0$ .



Superficie Iperbolica (curvatura costante negativa):

$g(t) = (1 + 4t)g_0$ .



# Il Teorema di Hamilton

## Il Teorema di Hamilton

### Teorema (Richard Hamilton, 1982)

*Se una varietà tridimensionale compatta e semplicemente connessa ha una metrica con tensore di Ricci positivo, allora il flusso di Ricci (normalizzato) la deforma in una 3-sfera.*

## Il Teorema di Hamilton

### Teorema (Richard Hamilton, 1982)

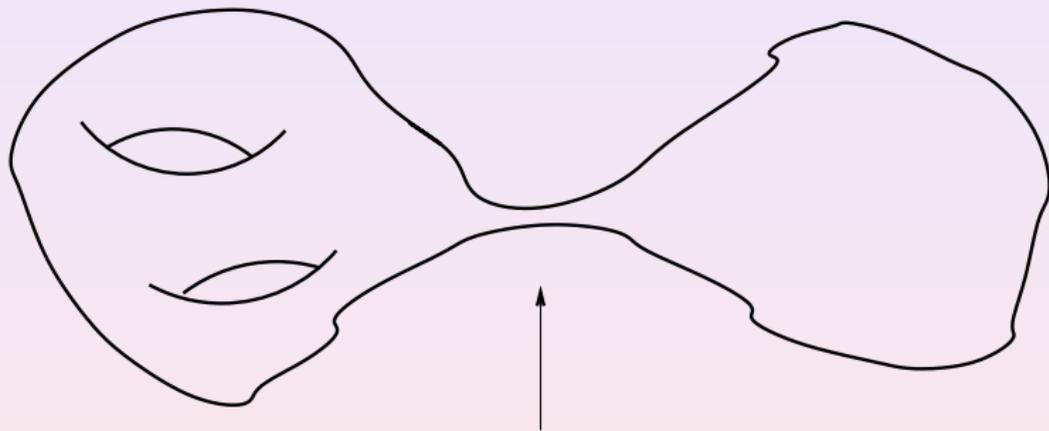
*Se una varietà tridimensionale compatta e semplicemente connessa ha una metrica con tensore di Ricci positivo, allora il flusso di Ricci (normalizzato) la deforma in una 3-sfera.*

### Corollario

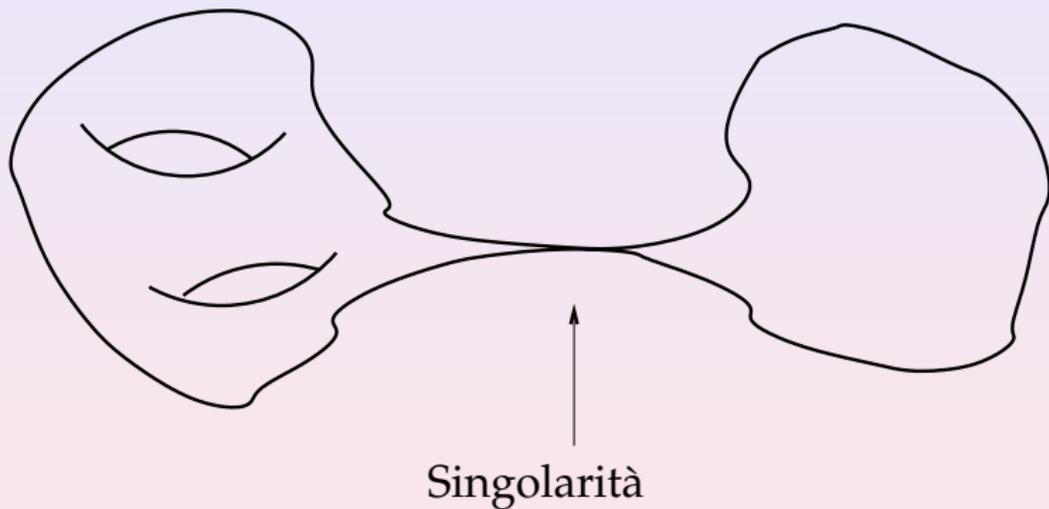
*Se su ogni varietà tridimensionale compatta e semplicemente connessa si può mettere una metrica con tensore di Ricci positivo, allora abbiamo una dimostrazione della congettura di Poincaré.*

# Esempi Negativi: “Collo” che si stringe

## Esempi Negativi: “Collo” che si stringe

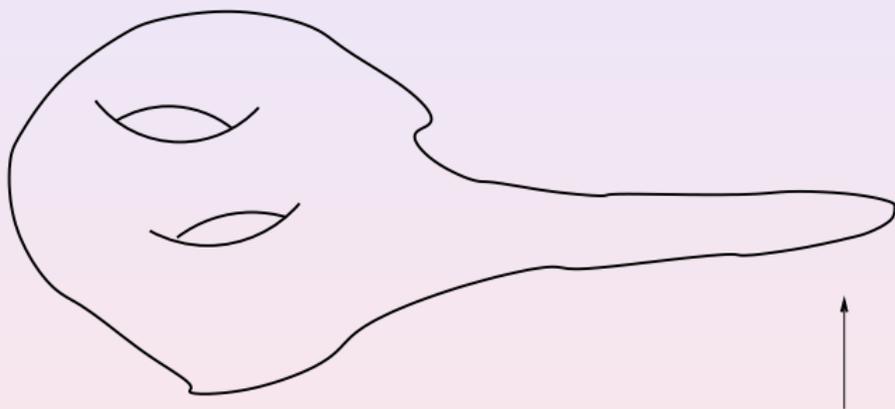


## Esempi Negativi: “Collo” che si stringe

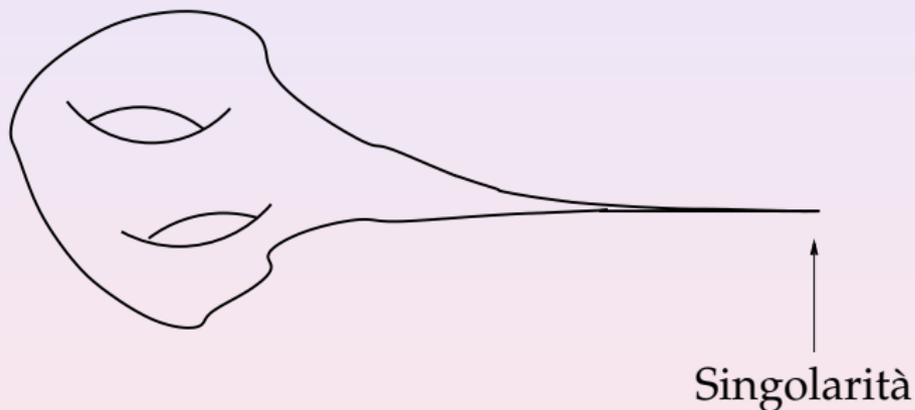


# Esempi Negativi: Formazione di una cuspidale

## Esempi Negativi: Formazione di una cuspid



# Esempi Negativi: Formazione di una cuspidale



La Congettura di Poincaré

I Flussi Geometrici

Il Flusso di Ricci – Richard Hamilton

**Il Programma per Dimostrare la Congettura di Poincaré**

Le Difficoltà

Il Lavoro di Grisha Perelman

La Dimostrazione della Congettura di Poincaré

Altri Sviluppi

## La Linea Dimostrativa – 1986/95

Supponiamo di avere una varietà tridimensionale semplicemente connessa, ipotetico controesempio alla congettura di Poincaré.

## La Linea Dimostrativa – 1986/95

Supponiamo di avere una varietà tridimensionale semplicemente connessa, ipotetico controesempio alla congettura di Poincaré.

- ▶ Deformiamo la metrica iniziale col flusso di Ricci.

## La Linea Dimostrativa – 1986/95

Supponiamo di avere una varietà tridimensionale semplicemente connessa, ipotetico controesempio alla congettura di Poincaré.

- ▶ Deformiamo la metrica iniziale col flusso di Ricci.
  
- ▶ Supponiamo che in tempo finito si formi una singolarità. Se tale singolarità è come una 3-sfera che “collassa”, allora un istante prima di collassare siamo riusciti a deformare la varietà iniziale in una sfera.

## La Linea Dimostrativa – 1986/95

Supponiamo di avere una varietà tridimensionale semplicemente connessa, ipotetico controesempio alla congettura di Poincaré.

- ▶ Deformiamo la metrica iniziale col flusso di Ricci.
- ▶ Supponiamo che in tempo finito si formi una singolarità. Se tale singolarità è come una 3-sfera che “collassa”, allora un istante prima di collassare siamo riusciti a deformare la varietà iniziale in una sfera.
- ▶ Se la singolarità non è come una 3-sfera che “collassa”, cerchiamo di ottenere il massimo di informazioni quantitative su cosa sta succedendo alla nostra varietà. Ciò è possibile se sappiamo “classificare” tutte le possibili singolarità.

## La Linea Dimostrativa – 1986/95

- ▶ Con le informazioni di cui al punto precedente facciamo una “chirurgia quantitativa” (tenendo sotto controllo le quantità geometriche rilevanti) ottenendo una o più nuove varietà.

## La Linea Dimostrativa – 1986/95

- ▶ Con le informazioni di cui al punto precedente facciamo una “chirurgia quantitativa” (tenendo sotto controllo le quantità geometriche rilevanti) ottenendo una o più nuove varietà.
- ▶ Facciamo “ripartire” il flusso di Ricci su queste varietà “figlie” e ricominciamo la procedura.

## La Linea Dimostrativa – 1986/95

- ▶ Con le informazioni di cui al punto precedente facciamo una “chirurgia quantitativa” (tenendo sotto controllo le quantità geometriche rilevanti) ottenendo una o più nuove varietà.
- ▶ Facciamo “ripartire” il flusso di Ricci su queste varietà “figlie” e ricominciamo la procedura.
- ▶ Dimostriamo che, assumendo l’ipotesi di semplice connessione della varietà iniziale, dopo un numero finito di “passi” (e in tempo finito) questa procedura termina e tutte le varietà finali sono 3–sfere che collassano.

## La Linea Dimostrativa – 1986/95

- ▶ Con le informazioni di cui al punto precedente facciamo una “chirurgia quantitativa” (tenendo sotto controllo le quantità geometriche rilevanti) ottenendo una o più nuove varietà.
- ▶ Facciamo “ripartire” il flusso di Ricci su queste varietà “figlie” e ricominciamo la procedura.
- ▶ Dimostriamo che, assumendo l’ipotesi di semplice connessione della varietà iniziale, dopo un numero finito di “passi” (e in tempo finito) questa procedura termina e tutte le varietà finali sono 3–sfere che collassano.
- ▶ Ricostruendo all’indietro la varietà iniziale, tenendo conto delle “chirurgie” effettuate, concludiamo che anch’essa era una 3–sfera, dimostrando quindi la congettura di Poincaré.

La Congettura di Poincaré

I Flussi Geometrici

Il Flusso di Ricci – Richard Hamilton

Il Programma per Dimostrare la Congettura di Poincaré

**Le Difficoltà**

Il Lavoro di Grisha Perelman

La Dimostrazione della Congettura di Poincaré

Altri Sviluppi

# La Classificazione delle Singolarità

## Congettura (R. Hamilton)

*Le situazioni di singolarità possibili sono solo le tre viste precedentemente: sfera che collassa, “collo” che si stringe, formazione di una cuspid.*

# La Classificazione delle Singolarità

## Congettura (R. Hamilton)

*Le situazioni di singolarità possibili sono solo le tre viste precedentemente: sfera che collassa, "collo" che si stringe, formazione di una cuspid.*

Sfera che collassa:

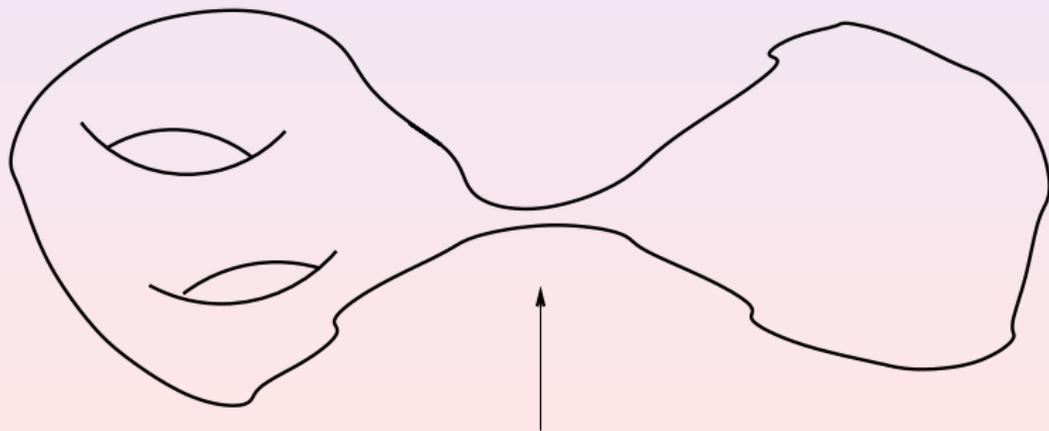


# La Classificazione delle Singolarità

## Congettura (R. Hamilton)

*Le situazioni di singolarità possibili sono solo le tre viste precedentemente: sfera che collassa, "collo" che si stringe, formazione di una cuspid.*

Collo che si stringe:

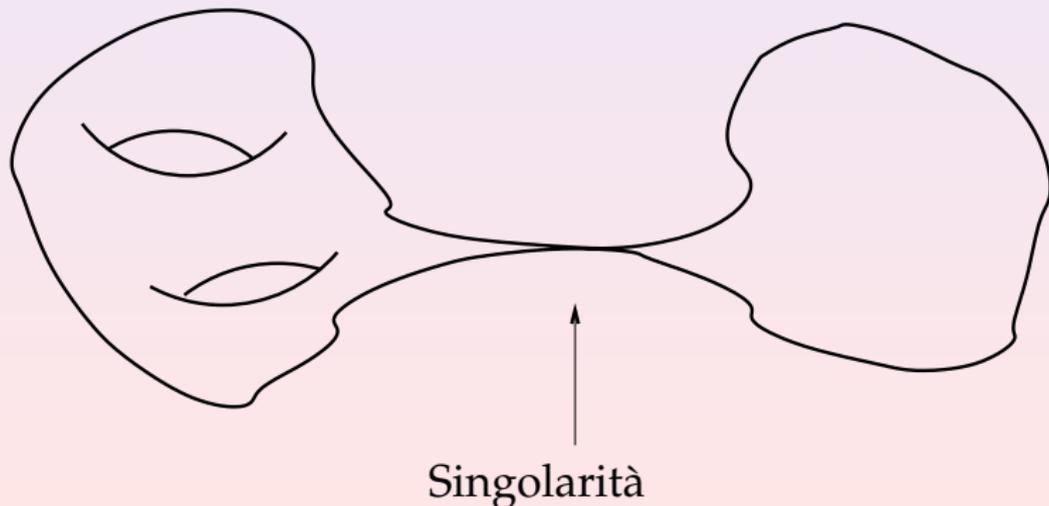


# La Classificazione delle Singolarità

## Congettura (R. Hamilton)

*Le situazioni di singolarità possibili sono solo le tre viste precedentemente: sfera che collassa, "collo" che si stringe, formazione di una cuspid.*

Collo che si stringe:

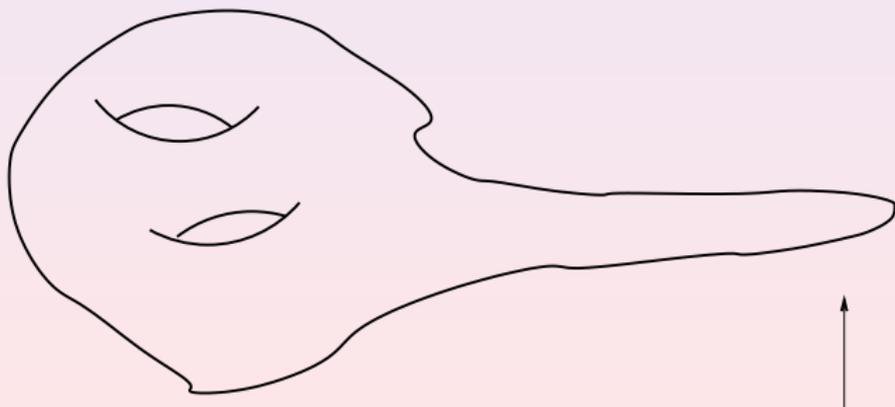


# La Classificazione delle Singolarità

## Congettura (R. Hamilton)

*Le situazioni di singolarità possibili sono solo le tre viste precedentemente: sfera che collassa, "collo" che si stringe, formazione di una cuspid.*

Formazione di una cuspid:

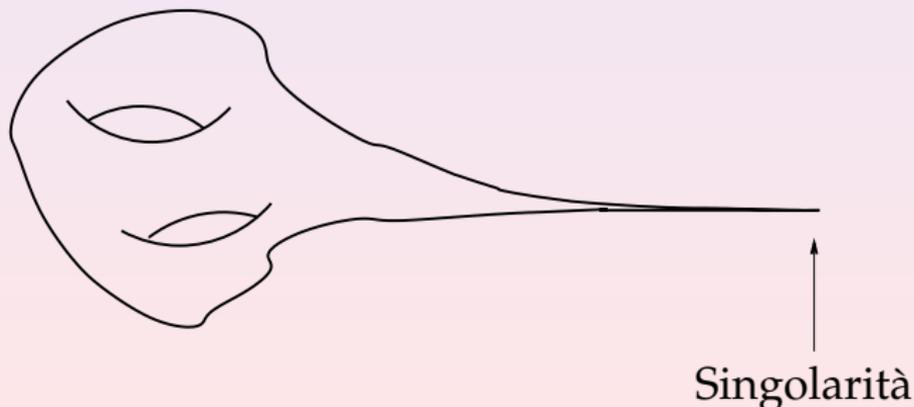


# La Classificazione delle Singolarità

## Congettura (R. Hamilton)

*Le situazioni di singolarità possibili sono solo le tre viste precedentemente: sfera che collassa, "collo" che si stringe, formazione di una cuspid.*

Formazione di una cuspid:

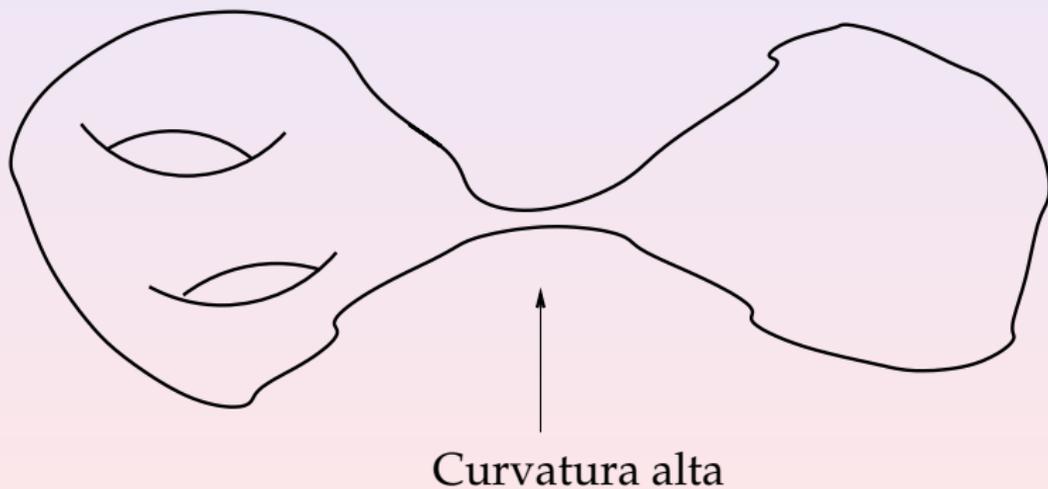


## La Procedura di Chirurgia

Ammettendo la validità della congettura di classificazione di Hamilton, come visto nella linea dimostrativa, nei casi di “collo” che si stringe e di formazione di una cuspidi, è necessario sviluppare una chirurgia “quantitativa” che deve inoltre permettere di dimostrare che in tempo finito e dopo un numero di “operazioni” finito produce un insieme “finale” di sole 3–sfere. Malgrado vari risultati positivi, la mancanza di una dimostrazione completa della suddetta congettura e delle stime quantitative ad essa associate, non permetteva ancora di avere una procedura effettiva.

# La Procedura di Chirurgia – Collo che si stringe

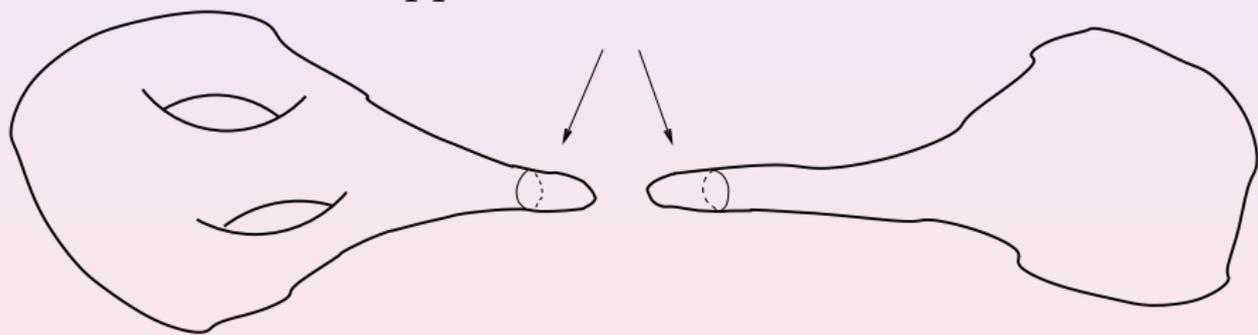
*Prima:*



# La Procedura di Chirurgia – Collo che si stringe

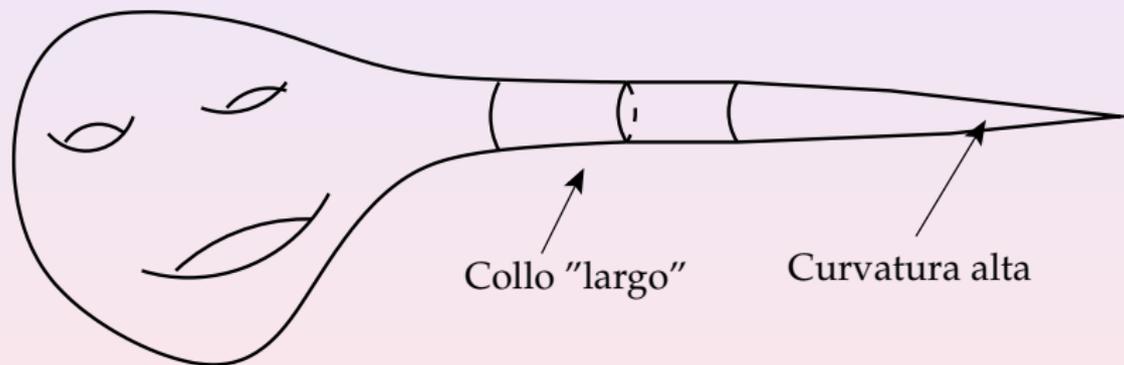
*Dopo:*

“Cappucci” con bassa curvatura



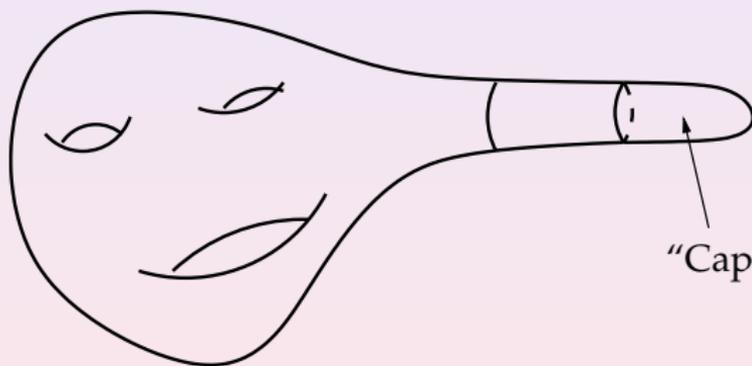
# La Procedura di Chirurgia – Cuspide

*Prima:*



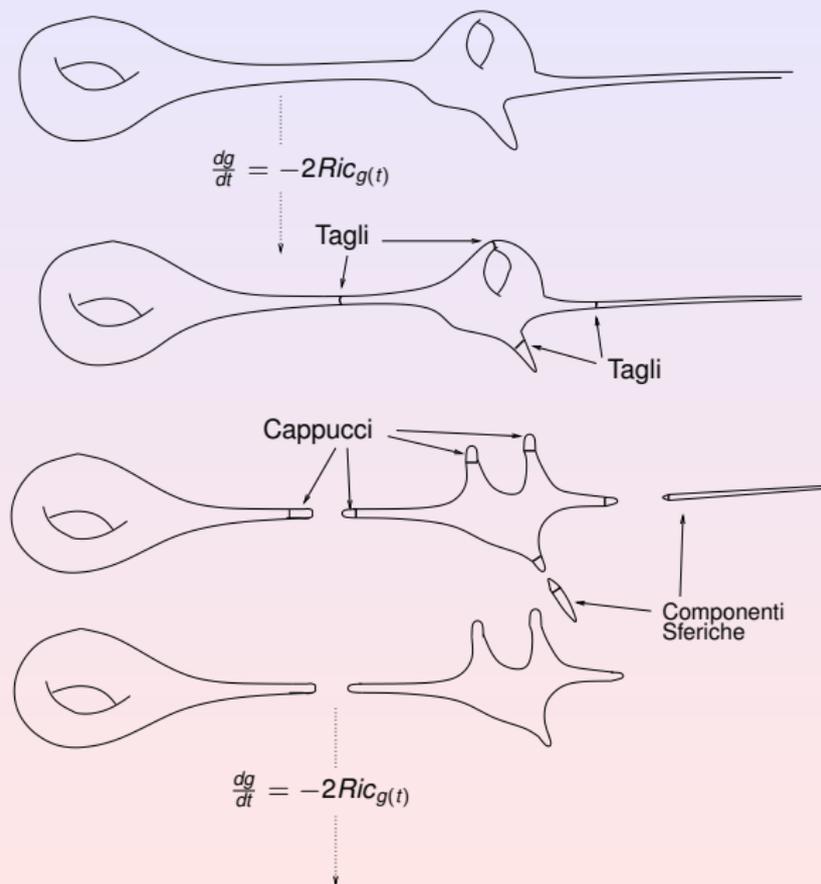
# La Procedura di Chirurgia – Cuspide

*Dopo:*



"Cappuccio" con bassa curvatura

## La Procedura di Chirurgia in Azione



La Congettura di Poincaré

I Flussi Geometrici

Il Flusso di Ricci – Richard Hamilton

Il Programma per Dimostrare la Congettura di Poincaré

Le Difficoltà

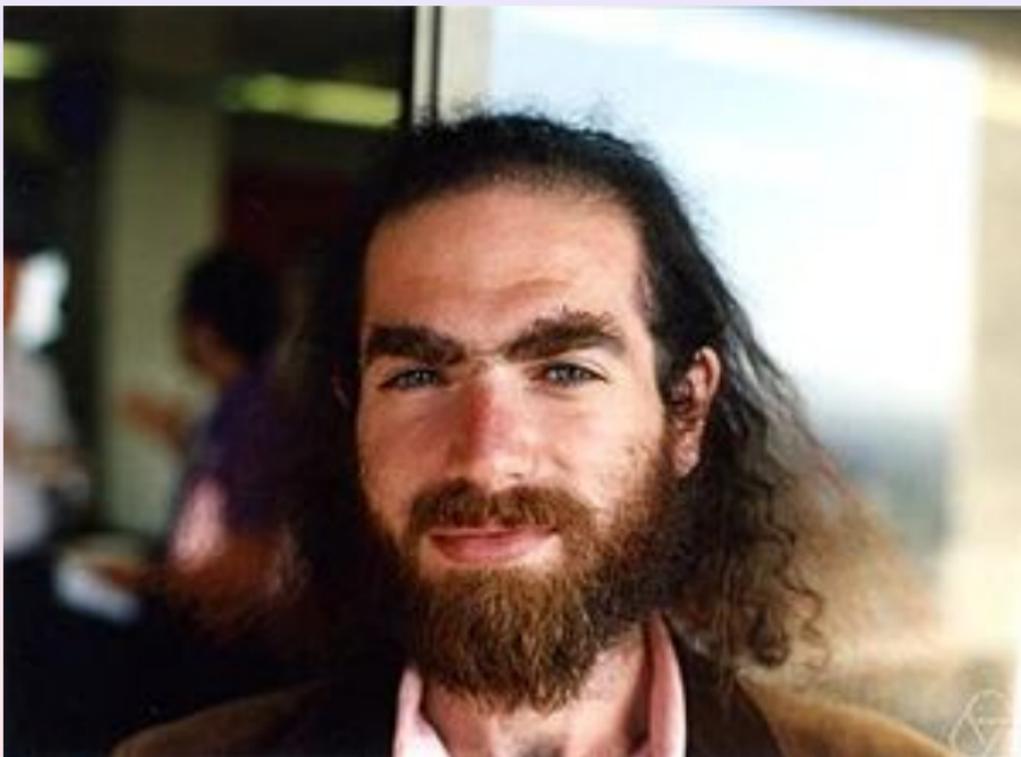
**Il Lavoro di Grisha Perelman**

La Dimostrazione della Congettura di Poincaré

Altri Sviluppi

# Grigori Yakovlevich Perelman

Steklov Institute, St. Petersburg



## I Preprint su ArXiv – 2002/2003

Nel Novembre 2002 Perelman pubblica sul preprint server ArXiv il primo di una serie di tre lavori (i due successivi saranno pubblicati nel Marzo e nel Luglio 2003).

## I Preprint su ArXiv – 2002/2003

Nel Novembre 2002 Perelman pubblica sul preprint server ArXiv il primo di una serie di tre lavori (i due successivi saranno pubblicati nel Marzo e nel Luglio 2003).

- ▶ *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.*

## I Preprint su ArXiv – 2002/2003

Nel Novembre 2002 Perelman pubblica sul preprint server ArXiv il primo di una serie di tre lavori (i due successivi saranno pubblicati nel Marzo e nel Luglio 2003).

- ▶ *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.*
- ▶ *Ricci flow with surgery on three–manifolds.*

## I Preprint su ArXiv – 2002/2003

Nel Novembre 2002 Perelman pubblica sul preprint server ArXiv il primo di una serie di tre lavori (i due successivi saranno pubblicati nel Marzo e nel Luglio 2003).

- ▶ *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications.*
- ▶ *Ricci flow with surgery on three–manifolds.*
- ▶ *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three–manifolds.*

arXiv:math/0211159v1 [math.DG] 11 Nov 2002

# The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications

Grisha Perelman\*

March 27, 2013

## Introduction

1. The Ricci flow equation, introduced by Richard Hamilton [H 1], is the evolution equation  $\frac{d}{dt}g_{ij}(t) = -2R_{ij}$  for a riemannian metric  $g_{ij}(t)$ . In his seminal paper, Hamilton proved that this equation has a unique solution for a short time for an arbitrary (smooth) metric on a closed manifold. The evolution equation for the metric tensor implies the evolution equation for the curvature tensor of the form  $Rm_t = \Delta Rm + Q$ , where  $Q$  is a certain quadratic expression of the curvatures. In particular, the scalar curvature  $R$  satisfies  $R_t = \Delta R + 2|\text{Ric}|^2$ , so by the maximum principle its minimum is non-decreasing along the flow. By developing a maximum principle for tensors, Hamilton [H 1, H 2] proved that Ricci flow preserves the positivity of the Ricci tensor in dimension three and of the curvature operator in all dimensions; moreover, the eigenvalues of the Ricci tensor in dimension three and of the curvature operator in dimension four are getting pinched pointwisely as the curvature is getting large. This observation allowed him to prove the convergence results: the evolving metrics (on a closed manifold) of positive Ricci curvature in dimension three, or positive curvature operator

---

\*St.Petersburg branch of Steklov Mathematical Institute, Fontanka 27, St.Petersburg 191011, Russia. Email: perelman@pdmi.ras.ru or perelman@math.sunysb.edu ; I was partially supported by personal savings accumulated during my visits to the Courant Institute in the Fall of 1992, to the SUNY at Stony Brook in the Spring of 1993, and to the UC at Berkeley as a Miller Fellow in 1993-95. I'd like to thank everyone who worked to make those opportunities available to me.

# Lo Scambio di Email tra Vitali Kapovitch e Perelman

Date: Wed, 20 Nov 2002 11:46:49 +0300 (MSK)  
From: Grigory Perelman <perelman@euclid.pdmi.ras.ru>  
Reply-To: Grigory Perelman <perelman@euclid.pdmi.ras.ru>  
Subject: Re: geometrization  
To: Vitali Kapovitch <vitali@math.ucsb.edu>

That's correct.  
Grisha

On Tue, 19 Nov 2002, Vitali Kapovitch wrote:

> Hi Grisha,  
> Sorry to bother you but a lot of people are asking me  
> about your preprint "The entropy formula for the Ricci...".  
> Do I understand it correctly that while you can not yet  
> do all the steps in the Hamilton program you can do enough  
> so that using some collapsing results you can prove  
> geometrization?  
>  
> Vitali

# I Risultati di Perelman

# I Risultati di Perelman

- ▶ Scopre due nuove quantità geometriche monotone durante il flusso di Ricci: il *funzionale*  $W$  (una forma di entropia) e la *lunghezza ridotta* (una specie di funzione distanza nello spazio-tempo).

## I Risultati di Perelman

- ▶ Scopre due nuove quantità geometriche monotone durante il flusso di Ricci: il *funzionale  $W$*  (una forma di entropia) e la *lunghezza ridotta* (una specie di funzione distanza nello spazio-tempo).
- ▶ Per mezzo di esse dimostra (non del tutto, ma una versione sufficiente per la procedura di chirurgia) la congettura di classificazione delle singolarità.

## I Risultati di Perelman

- ▶ Scopre due nuove quantità geometriche monotone durante il flusso di Ricci: il *funzionale  $W$*  (una forma di entropia) e la *lunghezza ridotta* (una specie di funzione distanza nello spazio-tempo).
- ▶ Per mezzo di esse dimostra (non del tutto, ma una versione sufficiente per la procedura di chirurgia) la congettura di classificazione delle singolarità.
- ▶ Trova nuove stime sulle quantità geometriche durante la formazione di una singolarità

## I Risultati di Perelman

- ▶ Scopre due nuove quantità geometriche monotone durante il flusso di Ricci: il *funzionale  $W$*  (una forma di entropia) e la *lunghezza ridotta* (una specie di funzione distanza nello spazio-tempo).
- ▶ Per mezzo di esse dimostra (non del tutto, ma una versione sufficiente per la procedura di chirurgia) la congettura di classificazione delle singolarità.
- ▶ Trova nuove stime sulle quantità geometriche durante la formazione di una singolarità
- ▶ Modifica tecnicamente la procedura di chirurgia in modo da renderla effettiva.

## I Risultati di Perelman

- ▶ Scopre due nuove quantità geometriche monotone durante il flusso di Ricci: il *funzionale  $W$*  (una forma di entropia) e la *lunghezza ridotta* (una specie di funzione distanza nello spazio-tempo).
- ▶ Per mezzo di esse dimostra (non del tutto, ma una versione sufficiente per la procedura di chirurgia) la congettura di classificazione delle singolarità.
- ▶ Trova nuove stime sulle quantità geometriche durante la formazione di una singolarità
- ▶ Modifica tecnicamente la procedura di chirurgia in modo da renderla effettiva.
- ▶ Dimostra infine che la procedura termina in tempo finito e dopo un numero finito di operazioni, producendo un insieme di 3–sfere.

La Congettura di Poincaré

I Flussi Geometrici

Il Flusso di Ricci – Richard Hamilton

Il Programma per Dimostrare la Congettura di Poincaré

Le Difficoltà

Il Lavoro di Grisha Perelman

**La Dimostrazione della Congettura di Poincaré**

Altri Sviluppi

Dopo la Pubblicazione in Rete (su ArXiv) dei lavori di Perelman...

## Dopo la Pubblicazione in Rete (su ArXiv) dei lavori di Perelman...

- ▶ Bruce Kleiner e John Lott riconoscono immediatamente il valore dei lavori di Perelman e cominciano a scrivere delle note esplicative, sviluppando i dettagli tecnici mancanti ed espandendo le parti meno chiare.

## Dopo la Pubblicazione in Rete (su ArXiv) dei lavori di Perelman...

- ▶ Bruce Kleiner e John Lott riconoscono immediatamente il valore dei lavori di Perelman e cominciano a scrivere delle note esplicative, sviluppando i dettagli tecnici mancanti ed espandendo le parti meno chiare.
- ▶ Nel Giugno 2006 l'Asian Journal of Mathematics pubblica (su carta) un lavoro di Zhu Xi-Ping della Zhongshan University in Cina e di Huai-Dong Cao della Lehigh University in Pennsylvania contenente una descrizione completa della dimostrazione di Perelman della congettura di Poincaré. Il lavoro viene successivamente rivisto varie volte a seguito di numerose polemiche.

## Dopo la Pubblicazione in Rete (su ArXiv) dei lavori di Perelman...

- ▶ Nel Luglio 2006 John Morgan della Columbia University e Gang Tian del Massachusetts Institute of Technology pubblicano in rete su ArXiv (ora un libro su carta) il lavoro “Ricci Flow and the Poincaré Conjecture” contenente una versione completa e dettagliata della dimostrazione di Perelman. Questo lavoro e la successiva assegnazione all’*International Congress of Mathematicians* in Madrid, nell’agosto dello stesso anno, della medaglia Fields (che rifiuterà) a Perelman, segnano l’accettazione formale e sostanziale da parte della comunità matematica della sua dimostrazione della congettura di Poincaré.

## Dopo la Pubblicazione in Rete (su ArXiv) dei lavori di Perelman...

- ▶ Ad oggi non sono stati trovati errori o falle nella dimostrazione. Inoltre, una versione modificata e semplificata in alcuni punti della dimostrazione di Perelman è stata presentata nel 2007 da L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot e J. Porti.

## Dopo la Pubblicazione in Rete (su ArXiv) dei lavori di Perelman...

- ▶ Ad oggi non sono stati trovati errori o falle nella dimostrazione. Inoltre, una versione modificata e semplificata in alcuni punti della dimostrazione di Perelman è stata presentata nel 2007 da L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot e J. Porti.
- ▶ Nel 2010 il Clay Mathematics Institute ha conferito a Perelman un “Millennium Prize” di un milione di dollari per la dimostrazione della congettura di Poincaré. Anche questo riconoscimento è stato rifiutato.

## Dopo la Pubblicazione in Rete (su ArXiv) dei lavori di Perelman...

- ▶ Ad oggi non sono stati trovati errori o falle nella dimostrazione. Inoltre, una versione modificata e semplificata in alcuni punti della dimostrazione di Perelman è stata presentata nel 2007 da L. Bessières, G. Besson, M. Boileau, S. Maillot e J. Porti.
- ▶ Nel 2010 il Clay Mathematics Institute ha conferito a Perelman un “Millennium Prize” di un milione di dollari per la dimostrazione della congettura di Poincaré. Anche questo riconoscimento è stato rifiutato.
- ▶ Perelman si è dimesso dalla sua posizione allo Steklov Institute in Saint Petersburg e ha dichiarato la sua intenzione di abbandonare la matematica.  
I suoi tre fondamentali lavori non sono mai stati pubblicati su una rivista cartacea, ma rimangono a disposizione sul preprint server <http://arxiv.org>.

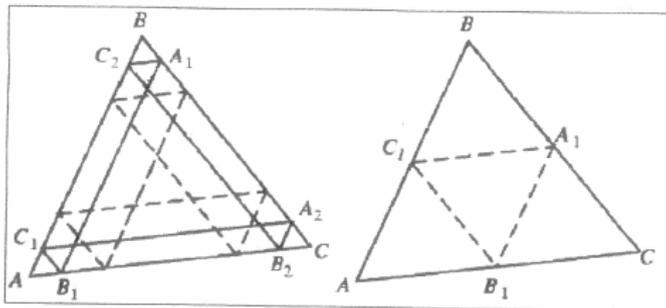
## Giornale della Metro di Roma – “CityRoma” 9/1/2004

CityRoma venerdì 9 gennaio 2004

I FATTI DELLA VITA

# Un russo risolve la Congettura di Poincaré

## Il mistero matematico durava da 100 anni



Lo studioso francese Jules-Henri Poincaré (1854-1912) e la rappresentazione grafica della sua Congettura, risalente al 1904.

(foto Ap)

**SAN FRANCISCO (California, Usa)** - Il mondo matematico è in fermento: il mistero della Congettura di Poincaré sullo studio degli spazi tridimensionali è stato forse risolto 100 anni dopo la sua prima formulazione. Manca ancora l'ufficialità, ma gli studi del russo Grigori "Grisha" Perelman stanno via via guadagnando credito da quando, nel novembre 2002, ne è iniziata la verifica da parte delle massime autorità matematiche.

Il caso non è semplice perché la congettura non è mai stata dimostrata neanche dal suo ideatore, lo studioso francese Jules-Henri Poincaré, il quale nel 1904 arrivò ad elaborare un metodo per applicare facilmente le regole di calcolo per le misurazioni bidimensionali (altezza-larghezza) a quelle tridimensionali tal-

tezza-larghezza-profondità). Il metodo funziona ma resta astratto, non essendo dimostrato matematicamente, per cui solo la sua applicazione ai problemi più complessi della materia può dire se è esatto o meno. Più volte, in passato, soluzioni proposte da insigni studiosi sono tramontate alla prova dei fatti. La teoria di

Perelman si rifà alle *correnti di Ricci* e alla geometria differenziale: "Sono studi molto complicati, con molte parti variabili. Ci vuole tempo ed è facile perdere il filo", ammette John Morgan, docente della Columbia University.

A complicare le cose c'è il carattere riservato dello studioso russo, che solo un anno fa è uscito dalla semi-reclusione nella quale si era rinchiuso da otto anni e ha esposto le sue scoperte ad alcuni college statunitensi. Perelman, matematico dell'Istituto Steklov dell'Accademia russa del-

le scienze, ha anche rifiutato finora il milione di dollari messo in palio dal *Clay Mathematics Institute* di Cambridge, Massachusetts, per la soluzione di ognuno dei sette più grandi misteri matematici. La condizione per il premio Fields, una sorta di Nobel matematico, è infatti che la soluzione sia pubblicata su un giornale scientifico, cosa finora evitata da Perelman.

La soluzione della Congettura di Poincaré sarebbe utile soprattutto nello studio dell'universo, ma non avrebbe applicazioni nella vita di tutti i giorni. (Ap)

La Congettura di Poincaré

I Flussi Geometrici

Il Flusso di Ricci – Richard Hamilton

Il Programma per Dimostrare la Congettura di Poincaré

Le Difficoltà

Il Lavoro di Grisha Perelman

La Dimostrazione della Congettura di Poincaré

**Altri Sviluppi**

## La Congettura di Thurston

Una congettura ancora più generale che descrive la struttura di *tutte* le varietà tridimensionali fu formulata da William P. Thurston (30 ottobre 1946 – 21 agosto 2012), premiato con la Medaglia Fields nel 1982.

## La Congettura di Thurston

Una congettura ancora più generale che descrive la struttura di *tutte* le varietà tridimensionali fu formulata da William P. Thurston (30 ottobre 1946 – 21 agosto 2012), premiato con la Medaglia Fields nel 1982.



# La Congettura di Thurston

## Congettura (W. Thurston, 1970)

*Ogni varietà tridimensionale può essere “tagliata” in pezzi “geometrici”.*

# La Congettura di Thurston

## Congettura (W. Thurston, 1970)

*Ogni varietà tridimensionale può essere “tagliata” in pezzi “geometrici”.*

- ▶ Solo 8 possibili “geometrie”: le tre a curvature costante e altre 5 “speciali” ma ben conosciute e analizzate.

# La Congettura di Thurston

## Congettura (W. Thurston, 1970)

*Ogni varietà tridimensionale può essere “tagliata” in pezzi “geometrici”.*

- ▶ Solo 8 possibili “geometrie”: le tre a curvature costante e altre 5 “speciali” ma ben conosciute e analizzate.
- ▶ W. Thurston ne ottenne una dimostrazione parziale.

## La Congettura di Thurston

Il flusso di Ricci permette di affrontare e anche questo problema con le stesse tecniche. È dunque da attribuire al lavoro di Perelman anche la dimostrazione di questa congettura, che viene completata nei dettagli e in alcune parti semplificata nei lavori:

## La Congettura di Thurston

Il flusso di Ricci permette di affrontare e anche questo problema con le stesse tecniche. È dunque da attribuire al lavoro di Perelman anche la dimostrazione di questa congettura, che viene completata nei dettagli e in alcune parti semplificata nei lavori:

- ▶ Laurent Bessières, Gérard Besson, Michel Boileau, Sylvain Maillot e Joan Porti, *Geometrisation of 3-Manifolds*, circa nel 2007.
- ▶ John Morgan e Gang Tian, *Completion of the Proof of the Geometrization Conjecture*, nel 2008.

## Il Teorema della Sfera (Differenziale)

(Heinz Hopf, 1926)

*Ogni varietà le cui curvatures sezionali stanno tutte nell'intervallo  $(1/4, 1]$  è diffeomorfa alla sfera.*

## Il Teorema della Sfera (Differenziale)

(Heinz Hopf, 1926)

*Ogni varietà le cui curvatures sezionali stanno tutte nell'intervallo  $(1/4, 1]$  è diffeomorfa alla sfera.*

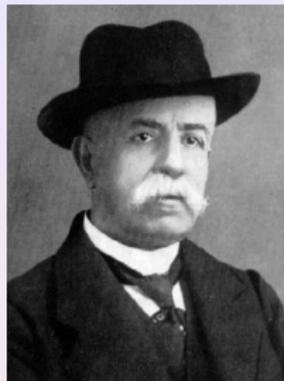
Dimostrato nel 2007 da Simon Brendle e Richard Schoen utilizzando il flusso di Ricci.

# I Protagonisti...

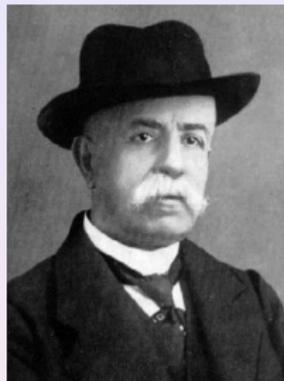
## I Protagonisti...



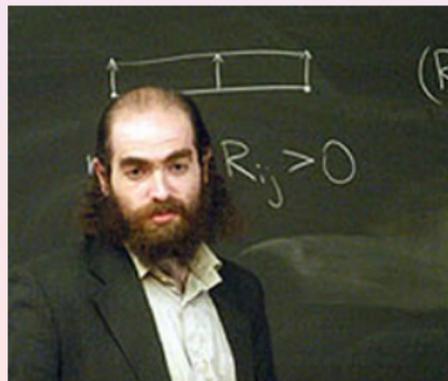
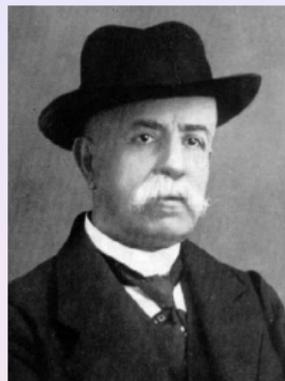
## I Protagonisti...



## I Protagonisti...



## I Protagonisti...



# Grazie...

... a Gérard Besson e Zindine Djadli (Institut Fourier – Université de Grenoble) per molte delle immagini e per il prezioso aiuto alla preparazione di questa presentazione.

# Grazie...

... a Gérard Besson e Zindine Djadli (Institut Fourier – Université de Grenoble) per molte delle immagini e per il prezioso aiuto alla preparazione di questa presentazione.

# Grazie dell'Attenzione