CAPITOLO 9

Varietà a curvatura costante e LCF

Le varietà riemanniane complete a curvatura costante K, chiamate anche *space forms*, si possono caratterizzare in modo molto preciso dal punto di vista topologico/differenziale. A meno di riscalare la metrica per un fattore positivo, si può assumere che K valga 0, 1 oppure -1. Fatta questa assunzione, tutte le space forms sono quozienti riemanniani di $\mathbb{R}^n$ (se $K = 0$), $\mathbb{S}^n$ (se $K = 1$) oppure $\mathbb{H}^n$ ($K = -1$), con la loro metrica canonica, tramite l'azione libera e propriamente discontinua di un opportuno gruppo di isometrie. Questo risultato è un'immediata conseguenza del Teorema 9.1.1 che segue.
Nella seconda sezione discuteremo poi le varietà localmente conformalmente flat, o LCF, cioè tali che localmente, con un cambio conforme della metrica, diventano flat. Vedremo come tali varietà sono caratterizzate dall'avere tensore di Weyl (di Cotton in dimensione 3) nullo.

9.1. Varietà a curvatura costante

TEOREMA 9.1.1. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa con curvatura sezionale costante uguale a $k \in \{0, 1, -1\}$. Allora il rivestimento universale riemanniano di M è*

- *$\mathbb{R}^n$ con la metrica canonica, se $k = 0$,*
- *$\mathbb{S}^n$ con la metrica canonica, se $k = 1$,*
- *$\mathbb{H}^n$ con la metrica canonica, se $k = -1$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo M semplicemente connessa, se dimostriamo che (M, g) è isometrica allo spazio corrispondente, la tesi segue.
• Caso $k = 0$.
Sia $p \in M$ e consideriamo la varietà riemanniana flat (T_pM, g_p) che è isometrica a $\mathbb{R}^n$, con la metrica canonica. Per il Corollario 8.3.2 al teorema di Cartan–Hadamard, la mappa $\exp_p : T_pM \to M$ è un diffeomorfismo, se mostriamo che è un'isometria locale abbiamo la tesi, per il Lemma 8.0.1.
Sia $v \in T_pM$ e sia $\gamma : [0, 1] \to M$ la geodetica uscente da p con velocità iniziale v e come al solito, identifichiamo nel modo canonico gli spazi tangenti $T_{tv}T_pM$ con T_pM, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dato $u \in T_pM$ e detto U il campo vettoriale lungo γ ottenuto trasportando parallelamente u, definiamo un campo Y lungo γ ponendo $Y(t) = tU(t)$. Allora Y è un campo di Jacobi, che in questo caso si riduce a $Y'' = 0$, essendo il tensore di Riemann identicamente nullo, inoltre $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = U(0) = u$, quindi, per il Corollario 6.4.11, abbiamo

$$(d\exp_p)_v(u) = U(1)\,.$$

Analogamente, per un altro vettore $w \in T_pM$ con estensione parallela W lungo γ, abbiamo

$$(d\exp_p)_v(w) = W(1)\,.$$

Verifichiamo dunque che $(d\exp_p)_v$ è un'isometria lineare tra $T_vT_pM \simeq T_pM$ e $T_{\exp_p(v)}M$,

$$\begin{aligned} g_{\exp_p(v)}\big((d\exp_p)_v(u), (d\exp_p)_v(w)\big) &= g_{\gamma(1)}\big(U(1), W(1)\big) \\ &= g_{\gamma(0)}\big(U(0), W(0)\big) \\ &= g_p(u, w)\,, \end{aligned}$$

dove, nella penultima uguaglianza, abbiamo usato il fatto che U e W sono ottenuti per trasporto parallelo.
• Caso $k = -1$.
Siano $p \in M$ e $q \in \mathbb{H}^n$. Sia $\overline{g}$ la metrica canonica su $\mathbb{H}^n$ e sia $L : (T_q\mathbb{H}^n, \overline{g}_q) \to (T_pM, g_p)$

una qualunque isometria lineare. Osserviamo che per il Corollario 8.3.2 al teorema di Cartan–Hadamard, la mappa $\exp_q : T_q\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ è un diffeomorfismo. Definiamo allora $\varphi : \mathbb{H}^n \to M$ in modo che il seguente diagramma commuti,

$$\begin{tikzcd} T_q\mathbb{H}^n \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\exp_q"'] & T_pM \arrow[d, "\exp_p"] \\ \mathbb{H}^n \arrow[r, "\varphi"'] & M \end{tikzcd}$$

cioè $\varphi = \exp_p \circ L \circ \exp_q^{-1}$.
Vogliamo dimostrare che φ è un'isometria locale, per poi concludere con il Lemma 8.0.1.
L'equazione per i campi di Jacobi su M è $Y'' = Y$. Data una geodetica $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ su M e un vettore $u \in T_pM$, il campo di Jacobi lungo γ che verifica $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = u$ è pertanto dato da

$$Y(t) = \sinh(t)\, U(t)\,,$$

dove $U(t)$ è l'estensione parallela di u lungo γ. Quindi, per il Corollario 6.4.11, si ha

$$(d\exp_p)_v(u) = \sinh(1)\, U(1)\,.$$

Di conseguenza, dati $u, w \in T_pM$,

$$\begin{aligned} g_{\exp_p(v)}\big((d\exp_p)_v(u), (d\exp_p)_v(w)\big) &= g_{\gamma(1)}\big(\sinh(1)\, U(1),\, \sinh(1)\, W(1)\big) \\ &= g_{\gamma(0)}\big(\sinh(1)\, U(0),\, \sinh(1)\, W(0)\big) \\ &= \sinh^2(1)\ g_p(u, w)\,. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Un calcolo analogo vale per lo spazio iperbolico $\mathbb{H}^n$, che ha a sua volta curvatura sezionale costante uguale a -1. Si ottiene quindi che, per ogni $\overline{v}, \widetilde{u}, \widetilde{w} \in T_q\mathbb{H}^n$,

$$\overline{g}_{\exp_q(\overline{v})}\big((d\exp_q)_{\overline{v}}(\widetilde{u}), (d\exp_q)_{\overline{v}}(\widetilde{w})\big) = \sinh^2(1)\ \overline{g}_q(\widetilde{u}, \widetilde{w})\,,$$

da cui anche

$$\overline{g}_{\exp_q(\overline{v})}(\overline{u}, \overline{w}) = \sinh^2(1)\ g_q\big([(d\exp_q)_{\overline{v}}]^{-1}(\overline{u}),\ [(d\exp_q)_{\overline{v}}]^{-1}(\overline{w})\big), \tag{9.2}$$

per ogni $\overline{v} \in T_q\mathbb{H}^n$ e $\overline{u}, \overline{w} \in T_{\exp_q(\overline{v})}\mathbb{H}^n$.
Possiamo allora verificare che φ è un'isometria locale, ossia che per ogni $\overline{r} = \exp_q(\overline{v})$ (ricordando che $\exp_q : T_q\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ è un diffeomorfismo),

$$d\varphi_{\overline{r}} = d\varphi_{\exp_q(\overline{v})} = (d\exp_p)_v \circ dL_{\overline{v}} \circ [(d\exp_q)_{\overline{v}}]^{-1} : T_{\overline{r}}\mathbb{H}^n \to T_rM$$

è un'isometria lineare, dove $v = L(\overline{v})$ e $r = \exp_p(v) = \varphi(\overline{r})$. Si ha infatti, per ogni $\overline{v} \in T_q\mathbb{H}^n$ e $\overline{u}, \overline{w} \in T_{\overline{r}}\mathbb{H}^n$,

$$\begin{aligned} & g_r\big(d\varphi_{\overline{r}}(\overline{u}), d\varphi_{\overline{r}}(\overline{w})\big) \\ &= g_{\exp_p(v)}\big(d\varphi_{\overline{r}}(\overline{u}), d\varphi_{\overline{r}}(\overline{w})\big) \\ &= g_{\exp_p(v)}\big((d\exp_p)_v \circ dL_{\overline{v}} \circ [(d\exp_q)_{\overline{v}}]^{-1}(\overline{u}),\ (d\exp_p)_v \circ dL_{\overline{v}} \circ [(d\exp_q)_{\overline{v}}]^{-1}(\overline{w})\big) \\ &= \sinh^2(1)\ g_p\big(dL_{\overline{v}} \circ [(d\exp_q)_{\overline{v}}]^{-1}(\overline{u}),\ dL_{\overline{v}} \circ [(d\exp_q)_{\overline{v}}]^{-1}(\overline{w})\big) \\ &= \sinh^2(1)\ g_q\big([(d\exp_q)_{\overline{v}}]^{-1}(\overline{u}),\ [(d\exp_q)_{\overline{v}}]^{-1}(\overline{w})\big) \\ &= \overline{g}_{\exp_q(\overline{v})}(\overline{u}, \overline{w}) \\ &= \overline{g}_{\overline{r}}(\overline{u}, \overline{w})\,, \end{aligned}$$

per le equazioni (9.1) e (9.2).
• Caso $k = 1$.
Procediamo come nel caso $k = -1$. La principale differenza sta nel fatto che $\exp_q : T_q\mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ non è un diffeomorfismo, mentre lo è la restrizione

$$\exp_q|_{B_\pi(O_q)} : B_\pi(O_q) \to \mathbb{S}^n \setminus \{-q\}\,.$$

Definiamo allora la mappa φ come quella che rende commutativo il seguente diagramma,

$$\begin{tikzcd}
B_\pi(O_q) \arrow[r, "L|_{B_\pi(O_q)}"] \arrow[d, "\exp_q"'] & T_pM \arrow[d, "\exp_p"] \\
\mathbb{S}^n \setminus \{-q\} \arrow[r, "\varphi"'] & M,
\end{tikzcd}$$

dove $L : (T_q\mathbb{S}^n, \overline{g}_q) \to (T_pM, g_p)$ è una qualsiasi isometria lineare. La verifica che φ sia un'isometria locale è allora analoga al caso $k = -1$. Cambiano solo l'equazione per i campi di Jacobi, che in questo caso è $Y'' = -Y$ e le corrispondenti soluzioni, date da $Y(t) = \sin(t)\, U(t)$.
Vorremmo ora estendere φ a un'isometria su tutto $\mathbb{S}^n$, per fare ciò, scegliamo un qualsiasi punto $q' \in \mathbb{S}^n \setminus \{q, -q\}$, poniamo $p' = \varphi(q')$ e definiamo la mappa φ' come quella che fa commutare il seguente diagramma,

$$\begin{tikzcd}
B_\pi(O_{q'}) \arrow[r, "d\varphi_{q'}|_{B_\pi(O_{q'})}"] \arrow[d, "\exp_{q'}"'] & T_{p'}M \arrow[d, "\exp_{p'}"] \\
\mathbb{S}^n \setminus \{-q'\} \arrow[r, "\varphi'"'] & M
\end{tikzcd}$$

Essendo φ' costruita in modo analogo a φ, a sua volta risulta essere un'isometria locale. Facciamo infine vedere che φ e φ' coincidono dove sono entrambe definite e quindi si incollano dando luogo a un'isometria $\psi : \mathbb{S}^n \to M$. È semplice verificare che il punto q' viene mandato in p' tramite φ'. Inoltre, dove le mappe sono definite, si ha

$$d\varphi'_{q'} = (d\exp_{p'})_{O_{p'}} \circ d\varphi_{q'} \circ (d\exp_{q'})^{-1}_{O_{q'}} = \mathrm{Id}_{T_{p'}M} \circ d\varphi_{q'} \circ \mathrm{Id}_{T_{q'}\mathbb{S}^n} = d\varphi_{q'}\,.$$

Applicando il Lemma 8.0.2, si ottiene allora che φ e φ' coincidono sull'intersezione dei loro domini. $\square$

OSSERVAZIONE 9.1.2. La completezza di (M, g) è fondamentale in questo teorema, la metrica warped *non* completa $g = e^{2t}dt^2 + e^{2t}g^{\mathbb{S}^2}_{\mathrm{can}}$ sulla varietà semplicemente connessa $\mathbb{R}\times\mathbb{S}^2 \approx \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ è flat (Osservazione 8.3.7).

Analizzando la dimostrazione, possiamo vedere che la conclusione può essere facilmente "localizzata", come espresso dalla seguente proposizione. L'unica accortezza è notare, nel caso $k = 1$, che per il teorema di Bonnet–Myers 8.1.1, si ha $\mathrm{inj}(p) \leqslant \pi$, per ogni punto della varietà.

PROPOSIZIONE 9.1.3. *Sia (M, g) una varietà riemanniana e $p \in M$ tale che in un suo intorno U si abbia curvatura sezionale costante uguale a $k \in \{0, 1, -1\}$. Allora ogni palla geodetica $B_r(p) \subseteq U$, centrata in p, con $r \leqslant \mathrm{inj}(p)$, è isometrica alla palla di stesso raggio centrata in un qualunque punto di*

- *$\mathbb{R}^n$ con la metrica canonica, se $k = 0$,*
- *$\mathbb{S}^n$ con la metrica canonica, se $k = 1$,*
- *$\mathbb{H}^n$ con la metrica canonica, se $k = -1$.*

Se n è pari, l'unico quoziente non banale di $\mathbb{S}^n$ (cioè oltre alla sfera stessa), è lo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^n$. Se n è dispari, la classificazione degli spazi a curvatura costante 1 è completa, ottenuta da J. A. Wolf [247]. I quozienti riemanniani di $\mathbb{R}^n$ (cioè gli spazi flat) sono stati classificati nel 1911–12 da L. Bieberbach [34, 35] (si vedano [247] e [93, Sezioni 2.22–2.25], per il caso $n = 2$). Lo studio degli spazi a curvatura costante uguale a -1 (cioè quozienti di $\mathbb{H}^n$, detti *spazi iperbolici*) è un campo molto attivo della matematica (detto *geometria iperbolica*). Se $n = 2$, tra le superfici compatte e orientate, tutte e sole quelle di genere maggiore o uguale a due ammettono una metrica con curvatura (scalare) costante -1 (non la sfera, né il toro che invece l'ammettono di curvatura rispettivamente positiva e nulla). Ricordiamo che per il teorema di uniformizzazione 7.5.8, ogni superficie compatta ammette una metrica di curvatura costante. Se $n = 3$, esiste una "caratterizzazione" ma non una vera e propria classificazione, malgrado la dimostrazione della *congettura di geometrizzazione di Thurston* [202, 216] che "descrive" la struttura delle 3–varietà (ora un teorema grazie al lavoro di Richard Hamilton e Grisha Perelman sul flusso di Ricci [238] – si veda [28]).

Concludiamo questa sezione, dando delle caratterizzazioni equivalenti degli spazi flat, cioè con tensore di Riemann identicamente nullo.

PROPOSIZIONE 9.1.4. *Per una varietà riemanniana (M, g), le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) *M è flat.*
(2) *Per ogni punto $p \in M$, esiste un intorno U di p isometrico a un aperto di $\mathbb{R}^n$.*
(3) *Per ogni punto $p \in M$, esiste una carta coordinata attorno a p nella quale la metrica si scrive come $g_{ij} = \delta_{ij}$.*
(4) *Per ogni punto $p \in M$, esiste una carta coordinata attorno a p nella quale i campi $\frac{\partial}{\partial x^i}$ formano una base ortonormale in ogni punto.*
(5) *Per ogni punto $p \in M$, esiste una carta coordinata attorno a p nella quale i simboli di Christoffel Γ_{ij}^k sono identicamente nulli.*
(6) *Per ogni punto $p \in M$, esistono in un intorno U di p dei campi vettoriali $E_1, \dots, E_n$ ortonormali in ogni punto, tali che si abbia $\nabla_{E_i} E_j = 0$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ (cioè sono campi paralleli in U).*
(7) *Per ogni punto $p \in M$, esiste una carta coordinata attorno a p nella quale la metrica ha coefficienti g_{ij} costanti.*
(8) *Per ogni punto $p \in M$, esiste un intorno U di p tale che il trasporto parallelo lungo tutte le curve chiuse in U uscenti da p sia l'identità di T_pM (il gruppo di olonomia locale in p è banale).*
(9) *Per ogni punto $p \in M$, esiste un intorno U di p tale che il trasporto parallelo all'interno di U non dipenda dalla scelta del cammino.*
(10) *Per ogni punto $p \in M$, esiste un intorno U di p tale che ogni vettore $v \in T_pM$ si può estendere a un campo parallelo in U.*

DIMOSTRAZIONE. L'equivalenza tra le condizioni (2), (3) e (4) è ovvia. Tutte queste implicano la condizione (1) perché $\mathbb{R}^n$ ha curvatura nulla e quest'ultima implica ciascuna di esse per il Teorema 9.1.1, quindi le prime quattro condizioni sono equivalenti.
La condizione (2) implica la (5) perché i simboli di Christoffel di $\mathbb{R}^n$ sono tutti nulli e la condizione (5) implica la (1) per come si ottiene in coordinate il tensore di Riemann dai simboli di Christoffel.
La condizione (5) implica la (6), infatti segue che i campi coordinati $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sono paralleli in un intorno U di $p \in M$, se dunque "produciamo" una base ortonormale $e_i = \lambda_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p$ di T_pM con l'algoritmo di Gram–Schmidt, per dei numeri reali λ_i^j, si ha che i campi $E_i = \lambda_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ sono paralleli e sono una base ortonormale dello spazio tangente in ogni punto di U. La condizione (6) implica la (4), se infatti $\nabla_{E_i} E_j = 0$ allora $[E_i, E_j] = 0$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$, dunque esiste una carta coordinata attorno a p per cui si ha $\frac{\partial}{\partial x^i} = E_i$, per la Proposizione 1.7.1.
La condizione (3) implica ovviamente la (7), mentre la condizione (7) implica la (5) grazie alla formula che lega i simboli di Christoffel della connessione di Levi–Civita ai coefficienti della metrica.
La condizione (2) implica la (8), perché su $\mathbb{R}^n$ il trasporto parallelo è l'identità.
La condizione (8) implica la (9), in quanto il trasporto parallelo da p a q lungo una curva in U, composto con il trasporto parallelo da q a p lungo un'altra curva in U, deve essere l'identità.
La condizione (9) implica la (10), infatti, non dipendendo il trasporto parallelo dal cammino, possiamo trasportare parallelamente v in tutti i punti di U lungo un cammino arbitrario ottenendo un campo V. Tale campo è allora parallelo, per le proprietà della derivata covariante lungo le curve nella Proposizione 3.5.5.
Verifichiamo infine che la condizione (10) implica la (6). Fissata una qualsiasi base ortonormale di T_pM, estendiamo parallelamente gli elementi di tale base in U, ottenendo dei campi vettoriali paralleli $E_1, \dots, E_n$ che soddisfano la condizione (6), in quanto sono ortonormali in ogni punto per la compatibilità della connessione di Levi–Civita con la metrica. $\square$

9.2. Varietà localmente conformalmente flat

Ricordiamo brevemente alcuni fatti visti in capitoli precedenti. Data una varietà riemanniana (M, g) e una funzione positiva $u : M \to (0, +\infty)$ di classe C^∞, l'operazione di "passare" da g alla nuova metrica riemanniana $\widetilde{g} = ug$ conforme a $\widetilde{g}$ si dice *cambio conforme della metrica* di M. Per comodità nei conti che seguono, si preferisce usualmente indicare una metrica $\widetilde{g}$ conforme a g come $\widetilde{g} = e^{2\varphi} g$, per una funzione $\varphi \in C^\infty(M)$.

DEFINIZIONE 9.2.1. Una varietà riemanniana (M, g) si dice *localmente conformalmente flat* (*LCF*) se per ogni $p \in M$ esiste un intorno di p e un cambio conforme della metrica tale che la varietà risultante sia flat in tale intorno.
Equivalentemente, per ogni punto $p \in M$ esiste una carta coordinata (U, ψ) attorno a p e una funzione $\varphi \in C^\infty(U)$, tale che

$$e^{2\varphi(q)} g_{ij}(q) = \delta_{ij}$$

per ogni punto $q \in U$.

Ovviamente tutti gli spazi flat, ma anche le sfere e gli spazi iperbolici, sono LCF, per i calcoli della Sezione 2.3, dunque anche ogni varietà a curvatura costante, per la sezione precedente.
Abbiamo calcolato nell'Esempio 5.8.1 come cambiano le quantità geometriche con il cambio conforme $\widetilde{g} = e^{2\varphi} g$ della metrica g di una varietà, notando che $\widetilde{g}^{ij} = e^{-2\varphi} g^{ij}$. Si ha

$$\widetilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \delta_j^k \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \delta_i^k \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} - g^{kl} \frac{\partial\varphi}{\partial x^l} g_{ij}$$

$$\widetilde{\mathrm{Riem}} = e^{2\varphi}(\mathrm{Riem} - A \owedge g) \qquad \text{con} \qquad A = \nabla^2\varphi - d\varphi \otimes d\varphi + |\nabla\varphi|^2 g/2 \tag{9.3}$$

$$\widetilde{R}_{ik} = R_{ik} - (n-2)\nabla_{ik}\varphi + (n-2)\nabla_i\varphi\nabla_k\varphi - \big(\Delta\varphi + (n-2)|\nabla\varphi|^2\big) g_{ik} \tag{9.4}$$

$$\widetilde{\mathrm{R}} = e^{-2\varphi}\big(\mathrm{R} - 2(n-1)\Delta\varphi - (n-2)(n-1)|\nabla\varphi|^2\big)\,. \tag{9.5}$$

Infine, il tensore di Weyl è conformalmente invariante,

$$\widetilde{\mathrm{Weyl}} = e^{2\varphi}\mathrm{Weyl} \qquad \text{e} \qquad \widetilde{W}_{ijk}^l = W_{ijk}^l\,.$$

ESERCIZIO 9.2.2. Se esiste una base ortonormale $\{e_i\}$ di T_pM tale che $\{e_i \wedge e_j\}$ sia una base di autovettori dell'*operatore di Weyl* $\mathscr{W}_p : \Lambda^2 T_pM \to \Lambda^2 T_pM$, definito a partire dal tensore di Weyl analogamente a come $\mathscr{R}_p$ è ottenuto dal tensore di Riemann (Definizione 5.3.11), diciamo che $\mathscr{W}_p$ è *puro*. Diciamo che (M, g) ha *operatore di Weyl puro*, se $\mathscr{W}_p$ è puro per ogni $p \in M$. Si mostri che questa proprietà è invariante per cambio conforme della metrica.

Ricordiamo la definizione del tensore di Schouten di una varietà riemanniana (M, g),

$$\mathrm{S} = \frac{1}{n-2}\Big(\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{R}g}{2(n-1)}\Big)\,,$$

la formula che lo coinvolge nella decomposizione del tensore di Riemann

$$\mathrm{Riem} = \mathrm{S} \owedge g + \mathrm{Weyl}$$

e la definizione del tensore di Cotton

$$\mathrm{C}_{ijk} = \nabla_i \mathrm{S}_{jk} - \nabla_j \mathrm{S}_{ik} = \frac{1}{n-2}\Big(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_i \mathrm{R} g_{jk} - \nabla_j \mathrm{R} g_{ik})\Big)\,.$$

PROPOSIZIONE 9.2.3. *Se (M, g) è una varietà riemanniana di dimensione $n \geqslant 3$ e $\widetilde{g} = e^{2\varphi} g$, allora il tensore di Schouten soddisfa*

$$\widetilde{\mathrm{S}} = \mathrm{S} - A\,,$$

dove il tensore A è definito nella formula (9.3), dunque, in coordinate,

$$\widetilde{\mathrm{S}}_{ij} = \mathrm{S}_{ij} - \nabla_{ij}^2\varphi + \nabla_i\varphi\nabla_j\varphi - |\nabla\varphi|^2 g_{ij}/2\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$e^{-2\varphi}\widetilde{\mathrm{Riem}} = \mathrm{Riem} - A \owedge g = \mathrm{S} \owedge g + \mathrm{Weyl} - A \owedge g\,,$$

dunque

$$e^{-2\varphi}\widetilde{\mathrm{S}} \owedge \widetilde{g} = e^{-2\varphi}\big(\widetilde{\mathrm{Riem}} - \widetilde{\mathrm{Weyl}}\big) = \mathrm{S} \owedge g - A \owedge g = (\mathrm{S} - A) \owedge g\,,$$

da cui

$$\widetilde{\mathrm{S}} \owedge g = (\mathrm{S} - A) \owedge g\,,$$

cioè

$$\Psi_g(\widetilde{\mathrm{S}} - \mathrm{S} + A) = 0\,,$$

dove Ψ_g è la mappa lineare data da $h \mapsto \Psi_g(h) = h \owedge g$, che sappiamo dall'Esercizio 5.6.10 essere iniettiva per $n \geqslant 3$, dunque la tesi segue. $\square$

PROPOSIZIONE 9.2.4. *Se (M,g) è una varietà riemanniana di dimensione $n=3$ e $\widetilde{g}=e^{2\varphi}g$, allora*

$$\widetilde{\mathrm{C}}_{ijk}=\mathrm{C}_{ijk}$$

dunque, in dimensione 3, il tensore di Cotton è conformalmente invariante.

DIMOSTRAZIONE. Calcoliamo

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathrm{C}}_{ijk} =&\,\widetilde{\nabla}_i\widetilde{R}_{jk}-\widetilde{\nabla}_j\widetilde{R}_{ik}-\frac{1}{4}(\widetilde{g}_{jk}\widetilde{\nabla}_i\widetilde{\mathrm{R}}-\widetilde{g}_{ik}\widetilde{\nabla}_j\widetilde{\mathrm{R}})\\
=&\,\nabla_i\widetilde{R}_{jk}-\widetilde{R}_{mk}(\delta_i^m\partial_j\varphi+\delta_j^m\partial_i\varphi-g^{mp}g_{ij}\nabla_p\varphi)\\
&-\widetilde{R}_{jm}(\delta_i^m\nabla_k\varphi+\delta_k^m\nabla_i\varphi-g^{mp}g_{ik}\nabla_p\varphi)\\
&-\nabla_j\widetilde{R}_{ik}+\widetilde{R}_{mk}(\delta_j^m\nabla_i\varphi+\delta_i^m\nabla_j\varphi-g^{mp}g_{ij}\nabla_p\varphi)\\
&+\widetilde{R}_{im}(\delta_j^m\nabla_k\varphi+\delta_k^m\nabla_j\varphi-g^{mp}g_{jk}\nabla_p\varphi)-\frac{1}{4}e^{2\varphi}(g_{jk}\nabla_i\widetilde{\mathrm{R}}-g_{ik}\nabla_j\widetilde{\mathrm{R}})\\
=&\,\nabla_i\widetilde{R}_{jk}-\nabla_k\varphi\widetilde{R}_{ij}-\nabla_i\varphi\widetilde{R}_{jk}+g^{mp}g_{ik}\widetilde{R}_{jm}\nabla_p\varphi\\
&-\nabla_j\widetilde{R}_{ik}+\nabla_k\varphi\widetilde{R}_{ij}+\nabla_j\varphi\widetilde{R}_{ik}-g^{mp}g_{jk}\widetilde{R}_{im}\nabla_p\varphi\\
&+\frac{1}{2}\nabla_i\varphi\big(\mathrm{R}-4\Delta\varphi-2|\nabla\varphi|^2\big)g_{jk}-\frac{1}{4}g_{jk}\nabla_i\mathrm{R}+\frac{1}{2}\nabla_i\big(2\Delta\varphi+|\nabla\varphi|^2\big)g_{jk}\\
&-\frac{1}{2}\nabla_j\varphi\big(\mathrm{R}-4\Delta\varphi-2|\nabla\varphi|^2\big)g_{ik}+\frac{1}{4}g_{ik}\nabla_j\mathrm{R}-\frac{1}{2}\nabla_j\big(2\Delta\varphi+|\nabla\varphi|^2\big)g_{ik}\\
=&\,\mathrm{C}_{ijk}+\nabla_i\big(-\nabla^2_{jk}\varphi+\nabla_j\varphi\nabla_k\varphi-(\Delta\varphi+|\nabla\varphi|^2)g_{jk}\big)\\
&-\nabla_i\varphi\big(R_{jk}-\nabla^2_{jk}\varphi+\nabla_j\varphi\nabla_k\varphi-(\Delta\varphi+|\nabla\varphi|^2)g_{jk}\big)\\
&+g^{mp}g_{ik}\nabla_p\varphi\big(R_{jm}-\nabla^2_{jm}\varphi\big)-g_{ik}\nabla_j\varphi\Delta\varphi\\
&-\nabla_j\big(-\nabla^2_{ik}\varphi+\nabla_i\varphi\nabla_k\varphi-(\Delta\varphi+|\nabla\varphi|^2)g_{ik}\big)\\
&+\nabla_j\varphi\big(R_{ik}-\nabla^2_{ik}\varphi+\nabla_i\varphi\nabla_k\varphi-(\Delta\varphi+|\nabla\varphi|^2)g_{ik}\big)\\
&-g^{mp}g_{jk}\nabla_p\varphi\big(R_{im}-\nabla^2_{im}\varphi\big)+g_{jk}\nabla_i\varphi\Delta\varphi\\
&+\frac{1}{2}\nabla_i\varphi\big(\mathrm{R}-4\Delta\varphi-2|\nabla\varphi|^2\big)g_{jk}+\frac{1}{2}\nabla_i\big(2\Delta\varphi+|\nabla\varphi|^2\big)g_{jk}\\
&-\frac{1}{2}\nabla_j\varphi\big(\mathrm{R}-4\Delta\varphi-2|\nabla\varphi|^2\big)g_{ik}-\frac{1}{2}\nabla_j\big(2\Delta\varphi+|\nabla\varphi|^2\big)g_{ik}\,.
\end{aligned}$$

Si tratta dunque di stabilire che la quantità

$$\begin{aligned}
&-\nabla_i\big(\nabla^2_{jk}\varphi-\nabla_j\varphi\nabla_k\varphi+(\Delta\varphi+|\nabla\varphi|^2)g_{jk}\big)\\
&-\nabla_i\varphi\big(R_{jk}-\nabla^2_{jk}\varphi+\nabla_j\varphi\nabla_k\varphi-(\Delta\varphi+|\nabla\varphi|^2)g_{jk}\big)\\
&+g^{mp}g_{ik}\nabla_p\varphi\big(R_{jm}-\nabla^2_{jm}\varphi\big)-g_{ik}\nabla_j\varphi\Delta\varphi\\
&+\nabla_j\big(\nabla^2_{ik}\varphi-\nabla_i\varphi\nabla_k\varphi+(\Delta\varphi+|\nabla\varphi|^2)g_{ik}\big)\\
&+\nabla_j\varphi\big(R_{ik}-\nabla^2_{ik}\varphi+\nabla_i\varphi\nabla_k\varphi-(\Delta\varphi+|\nabla\varphi|^2)g_{ik}\big)\\
&-g^{mp}g_{jk}\nabla_p\varphi\big(R_{im}-\nabla^2_{im}\varphi\big)+g_{jk}\nabla_i\varphi\Delta\varphi\\
&+\frac{1}{2}\nabla_i\varphi\big(\mathrm{R}-4\Delta\varphi-2|\nabla\varphi|^2\big)g_{jk}+\frac{1}{2}\nabla_i\big(2\Delta\varphi+|\nabla\varphi|^2\big)g_{jk}\\
&-\frac{1}{2}\nabla_j\varphi\big(\mathrm{R}-4\Delta\varphi-2|\nabla\varphi|^2\big)g_{ik}-\frac{1}{2}\nabla_j\big(2\Delta\varphi+|\nabla\varphi|^2\big)g_{ik}\\
=&-\nabla^3_{ijk}\varphi-\nabla_i|\nabla\varphi|^2g_{jk}/2-\nabla_i\varphi R_{jk}+g^{mp}g_{ik}\nabla_p\varphi\big(R_{jm}-\nabla^2_{jm}\varphi\big)\\
&+\nabla^3_{jik}\varphi+\nabla_j|\nabla\varphi|^2g_{ik}/2+\nabla_j\varphi R_{ik}-g^{mp}g_{jk}\nabla_p\varphi\big(R_{im}-\nabla^2_{im}\varphi\big)\\
&+\frac{\mathrm{R}}{2}\nabla_i\varphi g_{jk}-\frac{\mathrm{R}}{2}\nabla_j\varphi g_{ik}
\end{aligned}$$

è nulla. Si ha

$$\begin{aligned}
&-\nabla^3_{ijk}\varphi-\nabla_i|\nabla\varphi|^2g_{jk}/2-\nabla_i\varphi R_{jk}+g^{mp}g_{ik}\nabla_p\varphi\big(R_{jm}-\nabla^2_{jm}\varphi\big)\\
&+\nabla^3_{jik}\varphi+\nabla_j|\nabla\varphi|^2g_{ik}/2+\nabla_j\varphi R_{ik}-g^{mp}g_{jk}\nabla_p\varphi\big(R_{im}-\nabla^2_{im}\varphi\big)\\
&+\frac{\mathrm{R}}{2}\nabla_i\varphi g_{jk}-\frac{\mathrm{R}}{2}\nabla_j\varphi g_{ik}\\
=\,&\nabla^3_{jik}\varphi-\nabla^3_{ijk}\varphi\\
&-\nabla_i\varphi R_{jk}+g^{mp}g_{ik}\nabla_p\varphi R_{jm}+\frac{\mathrm{R}}{2}\nabla_i\varphi g_{jk}\\
&+\nabla_j\varphi R_{ik}-g^{mp}g_{jk}\nabla_p\varphi R_{im}-\frac{\mathrm{R}}{2}\nabla_j\varphi g_{ik}\\
=\,&(-R_{ijkm}+g_{ik}R_{jm}-g_{jk}R_{im}+R_{ik}g_{jm}-R_{jk}g_{im}+\mathrm{R}g_{jk}g_{im}/2-\mathrm{R}g_{ik}g_{jm}/2)g^{mp}\nabla_p\varphi\\
=\,&(-\mathrm{Riem}+\mathrm{Ric}\owedge g-\mathrm{R}g\owedge g/4)_{ijkm}g^{mp}\nabla_p\varphi\\
=\,&0\,,
\end{aligned}$$

per la formula (5.21) di decomposizione del tensore di Riemann in dimensione 3. La tesi dunque segue. □

ESERCIZIO 9.2.5. Usando la formula della Proposizione 5.7.18, si mostri che se (M,g) è una varietà riemanniana di dimensione $n\geqslant 4$ e $\widetilde{g}=e^{2\varphi}g$, allora

$$\widetilde{\mathrm{C}}_{ijk}=\mathrm{C}_{ijk}+g^{lp}W_{lkij}\nabla_p\varphi\,.$$

ESERCIZIO 9.2.6. Si mostri che se (M,g) è una varietà riemanniana di dimensione $n=4$, il tensore di Bach definito dall'equazione (5.26), è conformalmente invariante.
Usando la formula (5.27), se (M,g) è una varietà riemanniana di dimensione $n\geqslant 4$, si calcoli come si trasforma il tensore di Bach per il cambio conforme della metrica $\widetilde{g}=e^{2\varphi}g$.

Discutiamo ora quando una varietà riemanniana (M,g) è localmente conformalmente flat, cominciando dal seguente risultato per le superfici, già menzionato in precedenza.

PROPOSIZIONE 9.2.7. *Ogni varietà riemanniana 2–dimensionale è localmente conformalmente flat.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che se una superficie ha $\mathrm{R}=0$, allora $\mathrm{Riem}=0$ la superficie è localmente isometrica a $\mathbb{R}^2$. È dunque sufficiente dimostrare che localmente esiste un cambio conforme $\widetilde{g}=e^{2\varphi}g$ della metrica g sulla superficie M tale che $\widetilde{\mathrm{R}}=0$.
Dalle formule viste sopra si ha $\widetilde{\mathrm{R}}=e^{-2\varphi}(\mathrm{R}-2\Delta\varphi)$, quindi si tratta di trovare una soluzione della PDE $\Delta\varphi=\mathrm{R}/2$ in un aperto $U\subseteq M$. Ciò si può fare, per esempio risolvendo il problema

$$\begin{cases}\Delta\varphi=\mathrm{R}/2 & \text{in } U\\ \varphi=0 & \text{su } \partial U\end{cases}$$

di cui esiste una (unica) soluzione, se U è limitato e ha bordo C^∞. Infatti, scegliendo U con chiusura compatta contenuta in una singola carta coordinata, il problema diventa in coordinate

$$\begin{cases}g^{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i\partial x^j}=g^{ij}\Gamma^k_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x^k}+\mathrm{R}/2 & \text{in } V\\ \varphi=0 & \text{su } \partial V\end{cases}$$

dove V è un aperto limitato con bordo C^∞ di $\mathbb{R}^2$. È ben noto che questo problema ha una soluzione (per l'uniforme ellitticità dell'operatore differenziale $g^{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}$) unica e C^∞, si veda [98]. □

Vediamo invece che se $n\geqslant 3$, la nullità dei tensori di Cotton e Weyl è condizione necessaria e sufficiente affinché una varietà riemanniana di dimensione n sia localmente conformalmente flat.

TEOREMA 9.2.8 (Weyl–Schouten). *Una varietà riemanniana (M,g) di dimensione $n\geqslant 3$ è localmente conformalmente flat se e solo se*

$$\begin{cases}\mathrm{C}=0 & \textit{se } n=3\\ \mathrm{Weyl}=0 & \textit{se } n\geqslant 4\end{cases}$$

Nella dimostrazione utilizzeremo il seguente risultato che è una versione riemanniana della Proposizione 1.7.12, legata al teorema di Frobenius.

PROPOSIZIONE 9.2.9. *Sia $U \subseteq TM^*$ aperto, $\widetilde{U} = \pi(U)$ dove $\pi : TM^* \to M$ è la proiezione sulla base del fibrato TM^* e $U_q = U \cap T_qM^*$, per ogni $q \in \widetilde{U}$. Sia $c : U \to T^0_2M$ tale che $c(U_q) \subseteq T^0_2M_q$ per ogni $q \in \widetilde{U}$, allora per ogni $p \in \widetilde{U}$ e $\omega_p \in U_p$ esiste unica una 1–forma ω in un intorno W di p tale che*

$$\begin{cases} \omega(p) = \omega_p \\ \nabla\omega = c(\omega) \qquad \text{in } W \end{cases} \tag{9.6}$$

se e solo se nella banalizzazione del fibrato TM^* attorno a ogni punto di U data da una carta locale, ponendo

$$c = c(x, y) = c(x, y^1, \dots, y^n) \qquad \text{con} \qquad c(\omega)(x) = c(x, \omega_1(x), \dots, \omega_n(x)),$$

vale la condizione di integrabilità

$$\widetilde{\nabla}_j c_{im} - \widetilde{\nabla}_i c_{jm} + c_{jk}\frac{\partial c_{im}}{\partial y^k} - c_{ik}\frac{\partial c_{jm}}{\partial y^k} = -R_{ijml}g^{kl}y^l, \tag{9.7}$$

per ogni $i, j, m \in \{1, \dots, n\}$, dove abbiamo posto

$$\widetilde{\nabla}_j c_{im} = \frac{\partial c_{im}}{\partial x^j} + \Gamma^l_{jk}y^l\frac{\partial c_{im}}{\partial y^k} - c_{ik}\Gamma^k_{jm} - c_{km}\Gamma^k_{ji}$$

(si veda l'Osservazione 9.2.10).
L'unicità di ω è nel senso che se $\widetilde{\omega}$ è un'altra soluzione del Problema (1.6) in un intorno $\widetilde{W}$ di p, allora ω e $\widetilde{\omega}$ coincidono sulla componente connessa di $W \cap \widetilde{W}$ che contiene p.

DIMOSTRAZIONE. Scegliendo una carta coordinata (V, x) attorno a un punto $p \in \widetilde{U}$ tale che $x(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$, risolvere localmente il Problema (9.6) è equivalente a risolvere il sistema di PDE del prim'ordine

$$\frac{\partial\omega_j}{\partial x^i}(x) = \nabla_i\omega_j(x) + \Gamma^l_{ij}(x)\omega_l(x) = c_{ij}(x, \omega(x)) + \Gamma^l_{ij}(x)\omega_l(x) = X^j_i(x, \omega(x))$$

per una funzione $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ definita in un intorno di 0 in $\mathbb{R}^n$ con $\omega_i(0) = (\omega_p)_i$, dove $X^j_i : V \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono funzioni date da

$$X^j_i(x, y) = c_{ij}(x, y) + \Gamma^l_{ij}(x)y^l,$$

definite in un intorno di $\big(0, \dots, 0, (\omega_p)_1, \dots, (\omega_p)_n\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
Per la Proposizione 1.7.12, abbiamo allora una soluzione (unica) di

$$\begin{cases} \omega_i(0) = (\omega_p)_i \\ \dfrac{\partial\omega_j}{\partial x^i}(x) = X^j_i(x, \omega(x)) = c_{ij}(x, \omega(x)) + \Gamma^l_{ij}(x)\omega_l(x) \end{cases}$$

se e solo se localmente in un intorno di $\big(0, \dots, 0, (\omega_p)_1, \dots, (\omega_p)_n\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ vale

$$\frac{\partial X^m_i}{\partial x^j} + \frac{\partial X^m_i}{\partial y^k}X^k_j = \frac{\partial X^m_j}{\partial x^i} + \frac{\partial X^m_j}{\partial y^k}X^k_i,$$

per ogni $i, j, m \in \{1, \dots, n\}$. Essendo

$$\frac{\partial X^m_i}{\partial x^j} = \frac{\partial c_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial\Gamma^l_{im}}{\partial x^j}y^l \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial X^m_i}{\partial y^k} = \frac{\partial c_{im}}{\partial y^k} + \Gamma^k_{im},$$

si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial X_i^m}{\partial x^j} + \frac{\partial X_i^m}{\partial y^k} X_j^k - \frac{\partial X_j^m}{\partial x^i} - \frac{\partial X_j^m}{\partial y^k} X_i^k & \\
= \Big(\frac{\partial c_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Gamma_{im}^l}{\partial x^j} y^l\Big) &+ (c_{jk} + \Gamma_{jk}^l y^l)\Big(\frac{\partial c_{im}}{\partial y^k} + \Gamma_{im}^k\Big) \\
&- \Big(\frac{\partial c_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma_{jm}^l}{\partial x^i} y^l\Big) - (c_{ik} + \Gamma_{ik}^l y^l)\Big(\frac{\partial c_{jm}}{\partial y^k} + \Gamma_{jm}^k\Big) \\
= \frac{\partial c_{im}}{\partial x^j} &- c_{ik}\Gamma_{jm}^k + (c_{jk} + \Gamma_{jk}^l y^l)\frac{\partial c_{im}}{\partial y^k} + \frac{\partial \Gamma_{im}^l}{\partial x^j} y^l + \Gamma_{im}^k \Gamma_{jk}^l y^l \\
&- \frac{\partial c_{jm}}{\partial x^i} + c_{jk}\Gamma_{im}^k - (c_{ik} + \Gamma_{ik}^l y^l)\frac{\partial c_{jm}}{\partial y^k} - \frac{\partial \Gamma_{jm}^l}{\partial x^i} y^l - \Gamma_{jm}^k \Gamma_{ik}^l y^l \\
= \frac{\partial c_{im}}{\partial x^j} &- c_{ik}\Gamma_{jm}^k - c_{km}\Gamma_{ji}^k + (c_{jk} + \Gamma_{jk}^l y^l)\frac{\partial c_{im}}{\partial y^k} \\
&- \frac{\partial c_{jm}}{\partial x^i} + c_{jk}\Gamma_{im}^k + c_{km}\Gamma_{ji}^k - (c_{ik} + \Gamma_{ik}^l y^l)\frac{\partial c_{jm}}{\partial y^k} + R_{ijm}^l y^l \\
= \widetilde{\nabla}_j c_{im} &- \widetilde{\nabla}_i c_{jm} + R_{ijm}^l y^l + c_{jk}\frac{\partial c_{im}}{\partial y^k} - c_{ik}\frac{\partial c_{jm}}{\partial y^k}\,,
\end{aligned}
$$

da cui la condizione di integrabilità nell'enunciato della proposizione. □

OSSERVAZIONE 9.2.10. L'operatore $\widetilde{\nabla}$ nell'enunciato della proposizione, è dato dalla derivata covariante considerando la variabile y come una 1–forma parallela (dunque $\nabla_j y^k = 0$), infatti, con tale assunzione si ha

$$
\begin{aligned}
\nabla_j c_{im} &= \frac{\partial c_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial c_{im}}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial x^j} - c_{ik}\Gamma_{jm}^k - c_{km}\Gamma_{ji}^k \\
&= \frac{\partial c_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial c_{im}}{\partial y^k}\Gamma_{jk}^l y^l - c_{ik}\Gamma_{jm}^k - c_{km}\Gamma_{ji}^k \\
&= \widetilde{\nabla}_j c_{im}\,.
\end{aligned}
$$

Si noti che se abbiamo una soluzione locale ω del Problema (9.6), ponendo $y^l = \omega_l$ si ha

$$
\widetilde{\nabla}_j c_{im} = \frac{\partial c_{im}}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^l \omega_l \frac{\partial c_{im}}{\partial y^k} - c_{ik}\Gamma_{jm}^k - c_{km}\Gamma_{ji}^k
$$

ed essendo $\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} = \nabla_j \omega_i + \Gamma_{ij}^l \omega_l = c_{ij} + \Gamma_{ij}^l \omega_l$, segue

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_j c_{im} - \widetilde{\nabla}_i c_{jm} + c_{jk}\frac{\partial c_{im}}{\partial y^k} - c_{ik}\frac{\partial c_{jm}}{\partial y^k} & \\
= \frac{\partial c_{im}}{\partial x^j} &- c_{ik}\Gamma_{jm}^k - c_{km}\Gamma_{ji}^k + (c_{jk} + \Gamma_{jk}^l \omega_l)\frac{\partial c_{im}}{\partial y^k} \\
&- \frac{\partial c_{jm}}{\partial x^i} + c_{jk}\Gamma_{im}^k + c_{km}\Gamma_{ji}^k - (c_{ik} + \Gamma_{ik}^l \omega_l)\frac{\partial c_{jm}}{\partial y^k} \\
= \frac{\partial c_{im}}{\partial x^j} &+ \frac{\partial c_{im}}{\partial y^k}\frac{\partial \omega_k}{\partial x^j} - c_{ik}\Gamma_{jm}^k - c_{km}\Gamma_{ji}^k \\
&- \frac{\partial c_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial c_{jm}}{\partial y^k}\frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} + c_{jk}\Gamma_{im}^k + c_{km}\Gamma_{ji}^k \\
= \nabla_j c_{im} &- \nabla_i c_{jm}\,,
\end{aligned}
$$

dove ∇c denota la derivata covariante della 2–forma $x \mapsto c(x, \omega(x))$.
Dunque la condizione di integrabilità (9.7), si scrive

$$
\nabla_j c_{im} - \nabla_i c_{jm} = -R_{ijml} g^{kl} \omega_l
$$

e coincide con quella che si ottiene considerando che $\nabla_i \omega_j = c_{ij}$, quindi

$$
\nabla_j c_{im} - \nabla_i c_{jm} = \nabla_j \nabla_i \omega_m - \nabla_i \nabla_j \omega_m = -R_{ijml} g^{kl} \omega_l\,.
$$

OSSERVAZIONE 9.2.11. Per il punto (10) della Proposizione 9.1.4, una varietà (M, g) è localmente isometrica a $\mathbb{R}^n$ se e solo se per ogni punto $p \in M$, ogni vettore $v \in T_pM$ si estende localmente a un campo parallelo. Ciò è chiaramente equivalente alla possibilità di estendere localmente in modo parallelo ogni 1–forma $\omega_p \in T_pM^*$, cioè di poter risolvere in un intorno W di p il problema

$$\begin{cases} \omega(p) = \omega_p \\ \nabla\omega = 0 \qquad \text{in } W \end{cases}$$

La condizione di integrabilità (9.7) nella proposizione diventa allora semplicemente $\mathrm{Riem} = 0$, essendo $c = c_{ij} = 0$, il che mostra che in tensore di Riemann può essere interpretato analiticamente come un'ostruzione differenziale all'esistenza di un'isometria locale con $\mathbb{R}^n$.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 9.2.8. Se (M, g) è LCF, si ha che $\widetilde{\mathrm{Riem}} = 0$ da cui $\widetilde{\mathrm{Weyl}} = 0$ e $\widetilde{\mathrm{C}} = 0$, dunque se $n = 3$ anche $\mathrm{C} = 0$ e se $n \geqslant 4$ anche $\mathrm{Weyl} = 0$, per l'invarianza conforme di Weyl, per ogni $n \geqslant 4$ e di C in dimensione $n = 3$.
Per avere l'altra implicazione dobbiamo poter risolvere localmente l'equazione $\widetilde{\mathrm{Riem}} = 0$ dove $\widetilde{g} = e^{2\varphi}g$. Per l'ipotesi $\mathrm{Weyl} = 0$, oppure se siamo in dimensione 3, abbiamo

$$\mathrm{Riem} = \frac{\mathrm{S} \owedge g}{n-2}$$

(ricordiamo che S è il tensore di Schouten) e ponendo $A = \nabla^2\varphi - d\varphi \otimes d\varphi + |\nabla\varphi|^2 g/2$, dall'equazione (9.3) si ha

$$\begin{aligned} e^{-2\varphi}\widetilde{\mathrm{Riem}} &= \mathrm{Riem} - A \owedge g \\ &= \mathrm{S} \owedge g - A \owedge g \\ &= (\mathrm{S} - A) \owedge g \\ &= \Psi_g(\mathrm{S} - A) \end{aligned}$$

dove, come sopra nella Proposizione 9.2.3, Ψ_g è la mappa lineare dallo spazio delle forme bilineari simmetriche allo spazio dei tensori di curvatura algebrici, data da $h \mapsto \Psi_g(h) = h \owedge g$.
Sappiamo dall'Esercizio 5.6.10 che Ψ_g è iniettiva per $n \geqslant 3$, dunque

$$\widetilde{\mathrm{Riem}} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{S} = A$$

cioè

$$\mathrm{S}_{ij} = \nabla^2_{ij}\varphi - \nabla_i\varphi\nabla_j\varphi + \frac{|\nabla\varphi|^2}{2}g_{ij}\,. \tag{9.8}$$

Mostriamo ora che, sotto l'ipotesi $\mathrm{C} = 0$ (in dimensione $n \geqslant 4$, $\mathrm{C} = 0$ segue dalla Proposizione 5.7.18), ovvero $\nabla_i\mathrm{S}_{jk} = \nabla_j\mathrm{S}_{ik}$, questa equazione ha localmente una soluzione $\varphi : U \to \mathbb{R}$ di classe C^∞. Ciò è equivalente a trovare localmente una 1–forma $\omega = \omega_j dx^j$ soluzione di

$$\nabla_i\omega_j = \mathrm{S}_{ij} + \omega_i\omega_j - \frac{|\omega|^2}{2}g_{ij}\,, \tag{9.9}$$

infatti, se φ è una soluzione dell'equazione (9.8), allora $\omega = d\varphi$ è soluzione di questa. Viceversa, se ω è soluzione dell'equazione (9.9), notiamo che

$$d\omega_{ij} = (\nabla_i\omega_j - \nabla_j\omega_i) = 0\,, \tag{9.10}$$

per la formula (3.19). Quindi, per il lemma di Poincaré ω è localmente esatta, dunque esiste φ tale che $d\varphi = \omega$ e φ è soluzione dell'equazione (9.8).
Per la Proposizione 9.2.9, abbiamo una soluzione unica, fissata ω_p se in una carta coordinata attorno a p vale la condizione di integrabilità

$$\widetilde{\nabla}_j c_{im} + c_{jk}\frac{\partial c_{im}}{\partial y^k} - \widetilde{\nabla}_i c_{jm} - c_{ik}\frac{\partial c_{jm}}{\partial y^k} = -R_{ijml}g^{kl}y^l\,,$$

dove

$$c_{ij}(x, y) = \mathrm{S}_{ij}(x) + y^i y^j - \frac{g^{ht}(x)y^h y^t}{2}g_{ij}(x)\,.$$

e

$$\widetilde{\nabla}_j c_{im} = \frac{\partial c_{im}}{\partial x^j} - c_{ik}\Gamma^k_{jm} - c_{km}\Gamma^k_{ji} + \Gamma^l_{jk}y^l\frac{\partial c_{im}}{\partial y^k}\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\frac{\partial c_{im}}{\partial y^k}(x) &= \delta_{ik} y^m + \delta_{mk} y^i - y^h g^{hk}(x) g_{im}(x)\\ &= \big(\delta_{ik} g_{mt}(x) + \delta_{mk} g_{it}(x) - \delta_{kt} g_{im}(x)\big) y^h g^{ht}(x)\,,\end{aligned}$$

dunque,

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_j c_{im}(x) =&\, \nabla_j \mathrm{S}_{im}(x) - \Gamma^k_{jm}(x) y^k y^i - \Gamma^k_{ji}(x) y^k y^m - \frac{\partial g^{ht}(x)}{\partial x^j}\frac{y^h y^t}{2} g_{im}(x)\\ &+ \Gamma^l_{jk}(x) y^l \frac{\partial c_{im}}{\partial y^k}(x)\\ =&\, \nabla_j \mathrm{S}_{im}(x) - \Gamma^k_{jm}(x) y^k y^i - \Gamma^k_{ji}(x) y^k y^m + \frac{\partial g_{sr}(x)}{\partial x^j}\frac{g^{sh}(x) g^{rt}(x) y^h y^t}{2} g_{im}(x)\\ &+ \Gamma^l_{jk}(x)\big(\delta_{ik} y^m + \delta_{mk} y^i - y^h g^{hk}(x) g_{im}(x)\big) y^l\\ =&\, \nabla_j \mathrm{S}_{im}(x) - \Gamma^l_{jk}(x)(x) g_{im}(x) g^{hk}(x) y^h y^l\\ &+ \big(\Gamma^l_{sj}(x) g_{lr}(x) + \Gamma^l_{rj}(x) g_{ls}(x)\big)\frac{g^{sh}(x) g^{rt}(x) y^h y^t}{2} g_{im}(x)\\ =&\, \nabla_j \mathrm{S}_{im}(x) - \Gamma^l_{jk}(x)(x) g_{im}(x) g^{hk}(x) y^h y^l\\ &+ \Gamma^t_{sj}(x) g_{im}(x) g^{sh}(x) y^h y^t\\ =&\, \nabla_j \mathrm{S}_{im}(x)\,.\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}c_{jk}(x)\frac{\partial c_{im}}{\partial y^k}(x) &= c_{jk}(x)\big(\delta_{ik} g_{mt}(x) + \delta_{mk} g_{it}(x) - \delta_{kt} g_{im}(x)\big) y^h g^{ht}(x)\\ &= \big(c_{ji}(x) g_{mt}(x) + c_{mj}(x) g_{it}(x) - c_{jt}(x) g_{im}(x)\big) y^h g^{ht}(x)\,.\end{aligned}$$

Abbiamo allora,

$$\begin{aligned}\widetilde{\nabla}_j c_{im} - \widetilde{\nabla}_i c_{jm} + c_{jk}\frac{\partial c_{im}}{\partial y^k} - c_{ik}\frac{\partial c_{jm}}{\partial y^k}&\\ = \nabla_j \mathrm{S}_{im} - \nabla_i \mathrm{S}_{jm} + \big(c_{jm} g_{it} - c_{jt} g_{im} - c_{im} g_{jt} + c_{it} g_{jm}\big) y^h g^{ht}&\\ = \mathrm{C}_{jim} + \Big(\mathrm{S}_{jm} g_{it} + y^j y^m g_{it} - \frac{|y|^2}{2} g_{jm} g_{it}\Big) y^h g^{ht}&\\ - \Big(\mathrm{S}_{jt} g_{im} + y^j y^t g_{im} - \frac{|y|^2}{2} g_{jt} g_{im}\Big) y^h g^{ht}&\\ - \Big(\mathrm{S}_{im} g_{jt} + y^i y^m g_{jt} - \frac{|y|^2}{2} g_{im} g_{jt}\Big) y^h g^{ht}&\\ + \Big(\mathrm{S}_{it} g_{jm} + y^i y^t g_{jm} - \frac{|y|^2}{2} g_{it} g_{jm}\Big) y^h g^{ht}&\\ = (\mathrm{S} \owedge g)_{ijtm} g^{ht} y^h&\\ = -R_{ijmt} g^{ht} y^h\,,&\end{aligned}$$

quindi la condizione di integrabilità è soddisfatta e la tesi segue. □

COROLLARIO 9.2.12. *Se (M,g) di dimensione $n \geqslant 3$ è localmente conformalmente flat, per ogni punto $p \in M$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\omega_p \in T_pM^*$, esiste una funzione $\varphi : U \to \mathbb{R}$ in un intorno U di p tale che $\varphi(p) = \alpha$, $d\varphi_p = \omega_p$ e $\widetilde{g} = e^{2\varphi} g$ è una metrica flat su U. Inoltre, φ è unica, nel senso che un'altra funzione con le stesse proprietà definita in un intorno V di p, coincide con φ nella componente connessa di $U \cap V$ che contiene p.*

DIMOSTRAZIONE. Per la dimostrazione del teorema precedente la soluzione ω dell'equazione (9.9) (che è equivalente al fatto che $\widetilde{g} = e^{2\varphi} g$ sia una metrica flat, se $d\varphi = \omega$) che prende il valore ω_p in $p \in M$, esiste ed è unica, nel senso precisato dall'enunciato, inoltre è una 1–forma chiusa (equazione (9.10)). Localmente attorno a p, per il lemma di Poincaré, esiste allora un'unica (nel senso detto sopra) funzione φ tale che $d\varphi = \omega$ (in particolare $d\varphi_p = \omega_p$) e $\varphi(p) = \alpha$. □

ESERCIZIO 9.2.13. Nel caso speciale delle superfici ($n = 2$), la parte di unicità di questo corollario non vale. Vi sono infatti infinite funzioni φ tali che localmente la metrica $\widetilde{g} = e^{2\varphi}g$ è flat (si veda la Proposizione 9.2.7), anche fissando $\varphi(p) \in \mathbb{R}$ e $d\varphi_p \in T_pM^*$. Si spieghi il motivo, ripercorrendo l'analisi del caso $n \geqslant 3$.

Segue da questo corollario che vi sono varie funzioni φ non costanti tali che localmente la metrica $\widetilde{g} = e^{2\varphi}g$ sia flat, anche se lo è già la metrica originale g. Per esempio, su $\mathbb{R}^n$ vi sono infinite soluzioni *locali* attorno a 0 dell'equazione (9.8), che diventa

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j} - \frac{|\nabla\varphi|^2}{2}\delta_{ij}\,,$$

per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$, che sono unicamente determinate dal valore di φ e $\nabla\varphi$ in $0 \in \mathbb{R}^n$. Non è difficile mostrare (ragionando come nella discussione che segue) che sono tutte e sole date dalle costanti e dalla famiglia di funzioni

$$\varphi(x) = -\log|x - x_0|^2 + a$$

per $x_0 \neq 0$ e $a \in \mathbb{R}$.
Non vi sono invece soluzioni *globali* φ non costanti, cioè definite su tutto $\mathbb{R}^n$, di questa equazione. Infatti, consideriamo la funzione positiva $f = e^{-\varphi}$, che soddisfa

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \Big(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^j}\Big)e^{-\varphi} = \frac{|\nabla\varphi|^2}{2}e^{-\varphi}\delta_{ij} = \frac{|\nabla f|^2}{2f}\delta_{ij}\,.$$

Dunque $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ha hessiano proporzionale alla metrica in ogni punto, in particolare $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = 0$ se $i \neq j$, segue allora che

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = A_i(x^i)$$

per delle funzioni $A_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i}(x) = A_i'(x^i) = \frac{|\nabla f(x)|^2}{2f(x)}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, che implica

$$A_1'(x^1) = \dots = A_n'(x^n) = \frac{|\nabla f|^2}{2f} = \text{costante } = a\,,$$

quindi le funzioni A_i sono lineari. Allora, o almeno una di esse ha derivata nulla, quindi $a = 0$, oppure sono tutte della forma $A_i(x^i) = ax^i + b_i$ con $a \neq 0$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ ma allora $A_i(-b_i/a) = 0$, da cui

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(-b_1/a, \dots, -b_n/a) = A_i(-b_i/a) = 0\,,$$

per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, cioè $\nabla f(-b_1/a, \dots, -b_n/a) = 0$, che implica la contraddizione $a = 0$. Dunque, $\nabla f = a$ è allora identicamente nullo e f è costante, di conseguenza anche φ.
Questo implica che se $n \geqslant 3$, i soli cambi conformi (*globali*) della metrica canonica di $\mathbb{R}^n$ che lo mantengano flat sono dati dai riscalamenti della metrica per un fattore positivo.
Notiamo che invece nel caso $n = 2$, se $\Delta\varphi = 0$, cioè $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una qualunque funzione armonica, la metrica $\widetilde{g} = e^{2\varphi}g_{\mathrm{eucl}}$ è flat (e viceversa), di nuovo per la discussione nella dimostrazione della Proposizione 9.2.7.

OSSERVAZIONE 9.2.14. Se $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è una funzione armonica non costante, la metrica $\widetilde{g} = e^{2\varphi}g_{\mathrm{eucl}}$ su $\mathbb{R}^2$ è flat ma potrebbe non essere completa, per esempio se $\varphi(x, y) = x^2 - y^2$, lo si provi per esercizio.

Dimostriamo la seguente proposizione riguardante le varietà (M, g) (*globalmente*) conformalmente flat (CF), cioè tali che esista una funzione $\varphi : M \to \mathbb{R}$ con la metrica $\widetilde{g} = e^{2\varphi}g$ flat.

PROPOSIZIONE 9.2.15. *Se (M, g) è conformalmente flat e ha dimensione $n \geqslant 3$, esiste un'unica funzione $\varphi : M \to \mathbb{R}$, a meno di somma di costanti, tale che la metrica $\widetilde{g} = e^{2\varphi}g$ sia una metrica flat su M.*

DIMOSTRAZIONE. Se avessimo due funzioni $\varphi, \psi : M \to \mathbb{R}$ tali che le metriche $\widetilde{g} = e^{2\varphi}g$ e $\overline{g} = e^{2\psi}g$ sono entrambe flat, avremmo che la varietà flat $(M, \widetilde{g})$ ha un cambio conforme della metrica dato da $\overline{g} = e^{2(\psi-\varphi)}\widetilde{g}$ che la mantiene flat. Possiamo dunque assumere che g e $\widetilde{g} = e^{2\varphi}g$ siano entrambe flat e provare che allora φ deve essere costante.
Essendo (M, g) flat, il suo rivestimento universale riemanniano è $\mathbb{R}^n$ con la sua metrica canonica g_{eucl} per il Teorema 9.1.1, dunque la funzione $\widetilde{\varphi} = \varphi \circ \pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dove $\pi : \mathbb{R}^n \to M$ è l'isometria locale di rivestimento, ha la proprietà che la metrica $e^{2\widetilde{\varphi}}g_{\mathrm{eucl}}$ su $\mathbb{R}^n$ è flat. Questo, per la discussione precedente, implica che φ è costante. □

OSSERVAZIONE 9.2.16. Se (S, g) è una superficie conformalmente flat tale che S con la metrica $\widetilde{g} = e^{2\varphi}g$ è completa e flat, allora $(S, \widetilde{g})$ è un quoziente riemanniano di $\mathbb{R}^2$, dunque è isometrica a $\mathbb{R}^2$, o a un cilindro $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ o a un toro flat, se orientata, a un *nastro di Möbius* o a una *bottiglia di Klein* (anch'essi flat, rivestiti riemannianamente a due fogli rispettivamente da un cilindro o da un toro flat), se non orientata, si veda [93, Sezioni 2.22–2.25].

OSSERVAZIONE 9.2.17. Analogamente allo studio delle condizioni sotto le quali una varietà sia localmente conformalmente flat, ci si può chiedere quando sia possibile avere localmente un cambio conforme della metrica tale che la varietà risultante sia (localmente) Ricci–flat, cioè Einstein di costante zero, oppure più in generale che sia di Einstein. Chiamiamo le varietà per cui esiste un cambio conforme nell'intorno di ogni loro punto che le renda Ricci–flat, *localmente conformalmente Ricci–flat* o LCRF e quelle localmente conformalmente equivalenti a varietà di Einstein, *localmente conformalmente Einstein* o LCE. Per quanto detto nella Sezione 5.6, le varietà LCRF in dimensione $n = 3$ coincidono con le varietà LCF e le LCE sono localmente conformalmente equivalenti a varietà a curvatura costante. In dimensione maggiore di tre, le condizioni necessarie e sufficienti (che coinvolgono i tensori di Weyl, Cotton e Bach, definiti nelle Sezioni 5.6 e 5.7) affinché una varietà sia LCRF o LCE sono state determinate e discusse da Gover e Nurowski [101], che hanno generalizzato il precedente lavoro di Kozameh, Newman e Tod [133] nel caso di dimensione $n = 4$, articoli ai quali rimandiamo il lettore interessato.

9.3. Esempi

Metriche warped e LCF

Consideriamo una varietà riemanniana (N, σ) di dimensione $n-1$, con $n \geqslant 4$ e la metrica data da $g_{(t,p)} = dt^2 + h^2(t,p)\sigma_p$ sulla varietà prodotto n–dimensionale $M = I \times N$, dove $h : I \times M \to \mathbb{R}^+$. Se $h^2(t, \cdot)\sigma$ è una metrica a curvatura costante per ogni $t \in I$, dunque g è una metrica warped $g_{\mathrm{eucl}} \times^{f^2} \sigma$ data da $g_{(t,p)} = dt^2 + f^2(t)g^K_p$ con g^K a curvatura costante $K = 0, \pm 1$ e $f : I \to \mathbb{R}^+$, allora (M, g) è LCF. Infatti, facendo riferimento ai calcoli dell'Esempio 5.8.4, si ha in generale

$$g_{tt} = g^{tt} = 1 \qquad g_{it} = g^{it} = 0 \qquad g_{ij} = h^2\sigma^{ij} \qquad g^{ij} = h^{-2}\sigma^{ij}$$

$$\begin{aligned}
R_{tttt} &= R_{ittt} = 0 \\
R_{itkt} &= -h\partial_t^2 h\sigma_{ik} && (9.11)\\
R_{ijkt} &= -R_{ijtk} = \frac{g_{jk}\mathrm{Hess}_{it}h - g_{ik}\mathrm{Hess}_{jt}h}{h} \\
R_{ijkl} &= h^2 R^\sigma_{ijkl} - \big[|\nabla^\sigma h|^2_\sigma + h^2(\partial_t h)^2\big](\sigma \owedge \sigma)_{ijkl}/2 \\
&\quad - h\Big[\Big(\mathrm{Hess}^\sigma h - 2\frac{dh^\sigma \otimes dh^\sigma}{h}\Big)\owedge\sigma\Big]_{ijkl}. && (9.12)
\end{aligned}$$

In particolare, se (N, σ) ha curvatura costante K, si ha $\mathrm{Riem}^\sigma = K(\sigma \owedge \sigma)/2$ e

$$R_{ijkl} = \big[Kh^2 - |\nabla^\sigma h|^2_\sigma - h^2(\partial_t h)^2\big](\sigma \owedge \sigma)_{ijkl}/2 - h\Big[\Big(\mathrm{Hess}^\sigma h - 2\frac{dh^\sigma \otimes dh^\sigma}{h}\Big)\owedge\sigma\Big]_{ijkl}.$$

Tornando al caso generale, contraendo otteniamo il tensore di Ricci e la curvatura scalare,

$$
\begin{aligned}
R_{tt} &= -(n-1)\frac{\partial_t^2 h}{h} \\
R_{it} &= -(n-2)\frac{\mathrm{Hess}_{it} h}{h} \\
R_{ik} &= R^\sigma_{ik} - \frac{\partial_t^2 h}{h} g_{ik} - (n-2)(\partial_t h)^2\sigma_{ik} - (n-4)\frac{|\nabla^\sigma h|^2_\sigma}{h^2}\sigma_{ik} - \frac{\Delta^\sigma h}{h}\sigma_{ik} \\
&\quad -(n-3)\Big(\frac{\mathrm{Hess}^\sigma_{ik} h}{h} - 2\frac{dh^\sigma_i\, dh^\sigma_k}{h^2}\Big) \\
\mathrm{R} &= \mathrm{R}^\sigma - 2(n-1)\frac{\partial_t^2 h}{h} - (n-1)(n-2)\frac{(\partial_t h)^2}{h^2} \\
&\quad -(n-2)(n-5)\frac{|\nabla^\sigma h|^2_\sigma}{h^4} - 2(n-2)\frac{\Delta^\sigma h}{h^3}\,.
\end{aligned}
\tag{9.13}
$$

Se $h(t,p) = f(t)$ e $\sigma = g^K$, cioè g è la metrica warped $g_{\mathrm{eucl}}\times^{f^2} g^K$ su $M = I\times N$, usando l'equazione sopra per Riem quando (N,σ) ha curvatura costante K, abbiamo

$$
\begin{aligned}
R_{tttt} &= R_{ittt} = 0 \\
R_{itkt} &= -ff''\sigma_{ik} \\
R_{ijkt} &= -R_{ijtk} = 0 \\
R_{ijkl} &= \big\{\big[K-(f')^2\big]f^2\big\}(\sigma \owedge \sigma)_{ijkl}/2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{tt} &= -(n-1)\frac{f''}{f} \\
R_{it} &= 0 \\
R_{ik} &= \big\{(n-2)[K-(f')^2] - ff''\big\}\sigma_{ik} \\
\mathrm{R} &= (n-1)\Big[\frac{(n-2)[K-(f')^2] - 2ff''}{f^2}\Big]\,.
\end{aligned}
$$

Calcoliamo quindi il tensore di Weyl con la formula (5.20), tenendo presente che $g_{tt} = g^{tt} = 1$, $g_{it} = g^{it} = 0$, $g_{ij} = h^2\sigma^{ij}$ e $g^{ij} = h^{-2}\sigma^{ij}$,

$$
\mathrm{Weyl} = \mathrm{Riem} - \frac{1}{n-2}\Big(\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{R}g}{2(n-1)}\Big)\owedge g\,.
$$

Si ha

$$
\frac{\mathrm{R}g}{2(n-1)} = \Big[(n-2)\frac{K-(f')^2}{2f^2} - \frac{f''}{f}\Big]\,,
$$

da cui

$$
\begin{aligned}
\Big(\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{R}g}{2(n-1)}\Big)_{tt} &= (n-2)\frac{(f')^2 - K - 2ff''}{2f^2} \\
\Big(\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{R}g}{2(n-1)}\Big)_{it} &= 0 \\
\Big(\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{R}g}{2(n-1)}\Big)_{ik} &= (n-2)\frac{K-(f')^2}{2}\sigma_{ik}\,.
\end{aligned}
$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
W_{tttt} &= W_{ittt} = 0 \\
W_{itkt} &= -ff''\sigma_{ik} - \frac{1}{n-2}\Big[\Big(\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{R}g}{2(n-1)}\Big)_{ik} g_{tt} + \Big(\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{R}g}{2(n-1)}\Big)_{tt} g_{ik}\Big] \\
&= -ff''\sigma_{ik} - \frac{K-(f')^2}{2}\sigma_{ik} - \frac{(f')^2 - K - 2ff''}{2}\sigma_{ik} = 0 \\
W_{ijkt} &= -W_{ijtk} = 0 \\
W_{ijkl} &= \big\{\big[K-(f')^2\big]f^2\big\}(\sigma\owedge\sigma)_{ijkl}/2 - f^2\frac{K-(f')^2}{2}(\sigma\owedge\sigma)_{ijkl} = 0\,,
\end{aligned}
$$

cioè $\mathrm{Weyl} = 0$ e (M,g) è LCF, come detto all'inizio.

Vogliamo ora mostrare anche l'inverso, nella seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 9.3.1. *Se (M,g) è una varietà riemanniana come sopra e inoltre è LCF, allora g è una metrica warped $g_{\mathrm{eucl}}\times^{f^2}\sigma$ data da $g_{(t,p)} = dt^2 + f^2(t)g^K_p$ con $K = 0, \pm 1$, per una metrica g^K su N a curvatura costante K e una funzione $f : I \to \mathbb{R}^+$.*

DIMOSTRAZIONE. Essendo Weyl $= 0$ si ha che Riem $= \mathrm{S} \owedge g$ dove S è il tensore di Schouten, da cui

$$R_{ijkl} = h^2(\mathrm{S} \owedge \sigma)_{ijkl}$$

e per l'equazione (9.12) si ha

$$\mathrm{Riem}^\sigma = \Big(\mathrm{S} + \frac{|\nabla^\sigma h|^2_\sigma}{2h^2}\sigma + \frac{(\partial_t h)^2}{2}\sigma + \frac{\mathrm{Hess}^\sigma h}{h} - 2\frac{dh^\sigma \otimes dh^\sigma}{h^2}\Big) \owedge \sigma\,.$$

Il che implica (per la formula di decomposizione ortogonale (5.20) del tensore di Riemann) $\mathrm{Weyl}^\sigma = 0$, da cui segue dunque che anche (N,σ) è LCF.
Se ora calcoliamo il tensore di Ricci della metrica conforme $h^2\sigma$ su N, per mezzo della formula (9.4),

$$\begin{aligned} R^{\sigma h^2}_{ik} &= R^\sigma_{ik} - (n-3)\Big(\mathrm{Hess}^\sigma_{ik}\log h - \frac{dh^\sigma_i\, dh^\sigma_k}{h^2}\Big) - (\Delta^\sigma \log h + (n-3)|\nabla^\sigma \log h|^2_\sigma)\sigma_{ik} \\ &= R^\sigma_{ik} - (n-3)\Big(\frac{\mathrm{Hess}^\sigma_{ik} h}{h} - 2\frac{dh^\sigma_i\, dh^\sigma_k}{h^2}\Big) - \Big(\frac{\Delta^\sigma h}{h} + (n-4)\frac{|\nabla^\sigma h|^2_\sigma}{h^2}\Big)\sigma_{ik}\,, \end{aligned}$$

concludiamo, con la formula (9.13), che

$$R_{ik} = -\big[h\partial^2_t h + (n-2)(\partial_t h)^2\big]\sigma_{ik} + R^{\sigma h^2}_{ik}$$

e contraendo di nuovo per ottenere la curvatura scalare

$$\begin{aligned} \mathrm{R} &= R_{tt} - g^{ik}\big\{\big[h\partial^2_t h + (n-2)(\partial_t h)^2\big]\sigma_{ik} - R^{\sigma h^2}_{ik}\big\} \\ &= -2(n-1)\frac{\partial^2_t h}{h} - (n-1)(n-2)\frac{(\partial_t h)^2}{h^2} + \mathrm{R}^{\sigma h^2}\,. \end{aligned} \tag{9.14}$$

Consideriamo che $R_{itkt} = -h\partial^2_t h\sigma_{ik}$ (dall'equazione (9.11)), tenendo presente che $W_{itkt} = 0$, per la decomposizione del tensore di Riemann, abbiamo

$$\begin{aligned} -h\partial^2_t h\sigma_{ik} &= R_{itkt} \\ &= \frac{1}{n-2}(R_{ik} + R_{tt}g_{ik}) - \frac{\mathrm{R}}{(n-1)(n-2)}g_{ik} \\ &= \frac{1}{n-2}\big\{-\big[h\partial^2_t h + (n-2)(\partial_t h)^2\big]\sigma_{ik} + R^{\sigma h^2}_{ik} - (n-1)h\partial^2_t h\sigma_{ik}\big\} \\ &\quad + \frac{g_{ik}}{(n-1)(n-2)}\Big[2(n-1)\frac{\partial^2_t h}{h} + (n-1)(n-2)\frac{(\partial_t h)^2}{h^2} - \mathrm{R}^{\sigma h^2}\Big] \\ &= -\frac{nh\partial^2_t h}{n-2}\sigma_{ik} - (\partial_t h)^2\sigma_{ik} + \frac{R^{\sigma h^2}_{ik}}{n-2} + \frac{2\partial^2_t h}{n-2}\sigma_{ik} + (\partial_t h)^2\sigma_{ik} \\ &\quad - \frac{\mathrm{R}^{\sigma h^2}}{(n-1)(n-2)}\sigma_{ik}h^2 \\ &= -h\partial^2_t h\sigma_{ik} + \frac{R^{\sigma h^2}_{ik}}{n-2} - \frac{\mathrm{R}^{\sigma h^2}}{(n-1)(n-2)}\sigma_{ik}h^2\,, \end{aligned}$$

che dunque implica

$$R^{\sigma h^2}_{ik} = \frac{\mathrm{R}^{\sigma h^2}}{n-1}h^2\sigma_{ik}\,.$$

Dunque, essendo $n \geqslant 4$, per ogni $t \in I$, la varietà riemanniana (N,σ_t) con $\sigma_t = h^2(t,\cdot)\sigma$ è una varietà di Einstein ed essendo anche LCF, segue che deve avere curvatura costante.

Supponiamo che per un qualche $t_0 \in I$ la varietà (N,σ_{t_0}) ha curvatura costante positiva $K(t_0)$, allora, per la formula (9.14), la curvatura $K(t)$ di (N,σ_t) è continua in I e non nulla in un intervallo aperto massimale $I' \subseteq I$ attorno a t_0, inoltre $h^2(t,p)\sigma_p = g^1_p/K(t)$ dove g^1 è una metrica su N a curvatura costante uguale a 1. Segue (fissando $p \in N$ e calcolando la curvatura sezionale di un piano $\pi \subseteq T_pM$ per le metriche $K(t)h^2(t,p)\sigma_p$) che la funzione $K(t)h^2(t,p)$ è indipendente da t in I', da cui $h^2(t,p) = \alpha^2(p)/K(t)$, per una funzione $\alpha : N \to \mathbb{R}$. Se non fosse $I' = I$, si avrebbe che in almeno uno dei due bordi di I' la curvatura $K(t)$ tende a zero, per t che tende a tale bordo, ma allora avremmo che $h^2(t)$ tenderebbe a $+\infty$, il che è una contraddizione, dunque $I' = I$. Con un'analisi analoga se $K(t_0) < 0$, concludiamo che la funzione $t \mapsto K(t)$ è identicamente nulla o ha segno costante in I e in tal caso si ha $g_{(t,p)} = dt^2 + \alpha^2(p)\sigma_p/|K(t)|$ da cui la tesi ponendo $f(t) = 1/\sqrt{|K(t)|}$, in quanto la metrica $\alpha^2(p)\sigma_p$ (conforme a σ) su N ha curvatura costante (1 o -1, a seconda del segno costante di $K(t)$). Se $K(t)$ è identicamente nulla, abbiamo che per ogni $t \in I$ la metrica $\sigma_t = h^2(t,p)\sigma_p$ su N è flat, dunque tutte queste metriche differiscono solo per un fattore di riscalamento (che dipende solo da t), per la Proposizione 9.2.15 (si noti che la dimensione di N è almeno 3) e la tesi segue anche in questo caso. □

ESERCIZIO 9.3.2. Si discuta il caso di dimensione $n = 3$.

Ipersuperfici LCF negli spazi euclidei

Sia S un'ipersuperficie n–dimensionale in $\mathbb{R}^{n+1}$, localmente conformalmente piatta, con $n \geqslant 4$. Per la formula (5.18), abbiamo

$$\begin{aligned}\mathrm{Weyl} &= \mathrm{Riem} - \frac{\mathrm{R}}{2n(n-1)}\, g \owedge g - \frac{1}{n-2}\Big(\mathrm{Ric} - \frac{\mathrm{R}}{n} g\Big) \owedge g \\ &= \frac{h \owedge h}{2} - \frac{\mathrm{H}^2 - |h|^2}{2n(n-1)}\, g \owedge g - \frac{1}{n-2}\Big(\mathrm{H}h - h^2 - \frac{\mathrm{H}^2 - |h|^2}{n} g\Big) \owedge g\,.\end{aligned}$$

Se dunque Weyl $= 0$ e diagonalizziamo h in una base ortonormale, si ha

$$\begin{aligned}0 = h_{ii}h_{jj} &- \frac{\mathrm{H}^2 - |h|^2}{n(n-1)} - \frac{1}{n-2}\Big(\mathrm{H}h_{ii} - h^2_{ii} - \frac{\mathrm{H}^2 - |h|^2}{n}\Big) \\ &- \frac{1}{n-2}\Big(\mathrm{H}h_{jj} - h^2_{jj} - \frac{\mathrm{H}^2 - |h|^2}{n}\Big),\end{aligned}$$

per ogni $i \neq j$, cioè

$$\lambda_i\lambda_j = \frac{\mathrm{H}^2 - |h|^2}{n(n-1)} + \frac{1}{n-2}\Big(\mathrm{H}\lambda_i - \lambda_i^2 - \frac{\mathrm{H}^2 - |h|^2}{n}\Big) + \frac{1}{n-2}\Big(\mathrm{H}\lambda_j - \lambda_j^2 - \frac{\mathrm{H}^2 - |h|^2}{n}\Big),$$

ponendo $\lambda_i = h_{ii}$. Si ha allora, per i, j, k diversi tra loro (considerando la differenza $\lambda_i\lambda_j - \lambda_i\lambda_k$),

$$(\lambda_j - \lambda_k)\big[(n-2)\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k - \mathrm{H})\big] = 0\,,$$

dunque, se ci fossero tre autovalori distinti λ_i, λ_j e λ_k, si avrebbe

$$\begin{aligned}(n-2)\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k &= \mathrm{H}\\ (n-2)\lambda_j + \lambda_k + \lambda_i &= \mathrm{H}\\ (n-2)\lambda_k + \lambda_i + \lambda_j &= \mathrm{H}\end{aligned}$$

che per $n \geqslant 4$ implica una contraddizione. Se gli autovalori non sono tutti uguali, scelti due diversi $\lambda_j \neq \lambda_k$, si ha che ogni altro autovalore λ_i è uguale a $(H - \lambda_j - \lambda_k)/(n-2)$, che deve essere uguale a uno dei due. Concludiamo allora che in ogni punto di S gli autovalori della seconda forma fondamentale sono tutti uguali, oppure sono solo due distinti, uno di molteplicità uno e l'altro di molteplicità $n-1$ (risultato ottenuto da Cartan in [49]).

ESERCIZIO 9.3.3. Si mostri che vale il viceversa di questa conclusione sugli autovalori della seconda forma fondamentale.

Questo fatto permette una classificazione locale e globale, se S è compatta, delle ipersuperfici LCF in $\mathbb{R}^{n+1}$, se $n \geqslant 4$, si veda [76, 165].
Mentre il caso $n = 2$ è banale, in quanto tutte le superfici in $\mathbb{R}^3$ sono LCF, il caso $n = 3$ è aperto, non valendo il fatto che in ogni punto dell'ipersuperficie gli autovalori della seconda forma fondamentale sono soltanto due, si veda [94] per un risultato di classificazione parziale (e per un'ottima introduzione al problema).