

Curvatura

Seguendo Riemann [214] (si veda [190, Volume 2, Capitolo 4]), possiamo definire una nozione di curvatura per una varietà riemanniana (M, g) in qualche modo generalizzando la *curvatura di Gauss* di una superficie in $\mathbb{R}^3$ (che vedremo nella Sezione 7.3, Definizione 7.3.3), che è un concetto di curvatura geometricamente intuitivo. Per ogni piano $\pi \subseteq T_p M$ consideriamo la superficie S generata dalle geodetiche uscenti da p con velocità iniziale appartenente a π e calcoliamo la curvatura di Gauss in p , una volta immerso un suo intorno in S isometricamente in $\mathbb{R}^3$ (ciò è sempre possibile se la varietà è analitica, ma se è solo C^∞ tale possibilità in generale è un famoso problema aperto, si veda la parte finale della Sezione 7.6 – molti autori trascurano questo punto). Grazie al “Teorema Egregium” di Gauss 7.5.1 ([1, Sezione 4.6]), tale curvatura è indipendente dall’immersione, dunque abbiamo una ben definita nozione di curvatura associata a ognuno dei piani di $T_p M$ (la curvatura così ottenuta coinciderà con la *curvatura sezionale* che definiremo nella Sezione 5.4, nella cui parte finale renderemo più precisa questa discussione). Per esempio, con questa definizione la curvatura di $\mathbb{R}^n$ è zero, quella di $\mathbb{S}^n$ è uno e quella di $\mathbb{H}^n$ è meno uno, per ogni piano in un loro qualunque spazio tangente.



Bernhard Riemann, 1866 – 1826

Esaminando i termini del second’ordine nell’espansione di Taylor della metrica in coordinate normali Riemann definisce anche quello che sarà poi il *tensore di curvatura di Riemann* (si veda sempre [190, Volume 2, Capitolo 4, Sezione B]). Ritorniamo su questo punto in seguito (si veda l’Osservazione 5.1.9), mentre nella nostra esposizione seguiremo la linea moderna dovuta a Jean-Louis Koszul [228] che lega la curvatura all’errore nell’interscambio di due derivate covarianti successive di un campo.

5.1. Il tensore di Riemann

Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n e ∇ la sua connessione di Levi-Civita.

L’hessiano $\nabla^2 f$ di una funzione $f \in C^\infty$ è una 2-forma simmetrica (per la simmetria di ∇), mentre nell’Osservazione 3.8.14 abbiamo visto che l’applicazione $C^\infty(M)$ –bilinare $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ data dall’hessiano di un campo vettoriale Z non lo è. Infatti abbiamo calcolato

$$\nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,X}^2 Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

che non è necessariamente nullo (cosa che vale invece in $\mathbb{R}^n$). Analogamente, lo stesso fenomeno si ha per l’hessiano di una 1-forma o di un generico tensore.

DEFINIZIONE 5.1.1 (Operatore di Riemann). Dati due campi vettoriali X, Y su M , l'operatore $R(X, Y) : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ che "misura l'errore" nello scambio delle derivate covarianti rispetto a X, Y di un campo, ovvero

$$R(X, Y) = \nabla_{Y,X}^2 - \nabla_{X,Y}^2 = [\nabla_Y, \nabla_X] - \nabla_{[Y,X]} = \nabla_Y \circ \nabla_X - \nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_{[Y,X]}$$

è detto *operatore di Riemann* (o anche *operatore di curvatura di Riemann*) rispetto a X, Y . Chiamiamo *operatore di Riemann* l'applicazione $R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$, che a ogni terna X, Y, Z di campi vettoriali su M associa $R(X, Y)Z$. Esplicitamente,

$$R(X, Y)Z = \nabla_{Y,X}^2 Z - \nabla_{X,Y}^2 Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]} Z. \quad (5.1)$$

OSSERVAZIONE 5.1.2. Si noti la "posizione" dei campi Y, X nella formula per $R(X, Y)Z$. Talvolta in letteratura si trova la definizione di $R(X, Y)Z$ con X e Y invertiti, dunque l'operatore di Riemann ha il segno opposto al nostro con tale definizione. Noi seguiamo [93]; i motivi di questa scelta saranno chiari in seguito (Osservazione 5.4.3).

PROPOSIZIONE 5.1.3. L'operatore di Riemann R è un tensore di tipo $(1, 3)$, ossia l'applicazione

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

è $C^\infty(M)$ -lineare in tutte le sue variabili.

DIMOSTRAZIONE. Sebbene la $C^\infty(M)$ -linearità di R in X e Y segua dalla definizione di derivata covariante di un tensore, la mostriamo comunque direttamente. Si ha

$$\begin{aligned} R(fX, Y)Z &= \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{fX} \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, fX]} Z \\ &= \nabla_Y (f \nabla_X Z) - f \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{f[Y, X] + (Yf)X} Z \\ &= (Yf) \nabla_X Z + f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_{[Y, X]} Z - (Yf) \nabla_X Z \\ &= f(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]} Z) \\ &= fR(X, Y)Z \end{aligned}$$

e analogamente $R(X, fY)Z = fR(X, Y)Z$.

Ora verifichiamo che $R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z$. Abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla_{X,Y}^2(fZ) &= \nabla_X \nabla_Y(fZ) - \nabla_{\nabla_X Y}(fZ) \\ &= \nabla_X((Yf)Z + f \nabla_Y Z) - ((\nabla_X Y)f)Z - f \nabla_{\nabla_X Y} Z \\ &= X(Yf)Z + (Yf) \nabla_X Z + (Xf) \nabla_Y Z + f \nabla_X \nabla_Y Z \\ &\quad - ((\nabla_X Y)f)Z - f \nabla_{\nabla_X Y} Z \\ &= f(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z) + (X(Yf) - (\nabla_X Y)f)Z \\ &\quad + (Yf) \nabla_X Z + (Xf) \nabla_Y Z, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} R(X, Y)(fZ) &= \nabla_{Y,X}^2(fZ) - \nabla_{X,Y}^2(fZ) \\ &= f(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]} Z) \\ &\quad + Y(Xf)Z - X(Yf)Z - ((\nabla_Y X)f)Z + ((\nabla_X Y)f)Z \\ &= fR(X, Y)Z - ([X, Y]f)Z + ((\nabla_X Y - \nabla_Y X)f)Z \\ &= fR(X, Y)Z, \end{aligned}$$

avendo ∇ torsione nulla. □

In coordinate locali, si ha

$$\begin{aligned}
 R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)X^k &= \nabla_{ji}^2 X^k - \nabla_{ij}^2 X^k \\
 &= [\nabla_j \nabla_i X - \nabla_i \nabla_j X]^k \\
 &= \left\{ \nabla_j \left[\left(\frac{\partial X^s}{\partial x^i} + \Gamma_{im}^s X^m \right) \frac{\partial}{\partial x^s} \right] - \nabla_i \left[\left(\frac{\partial X^s}{\partial x^j} + \Gamma_{jm}^s X^m \right) \frac{\partial}{\partial x^s} \right] \right\}^k \\
 &= \frac{\partial^2 X^k}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^j} (\Gamma_{im}^k X^m) + \left(\frac{\partial X^s}{\partial x^i} + \Gamma_{im}^s X^m \right) \Gamma_{js}^k \\
 &\quad - \frac{\partial^2 X^k}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^i} (\Gamma_{jm}^k X^m) - \left(\frac{\partial X^s}{\partial x^j} + \Gamma_{jm}^s X^m \right) \Gamma_{is}^k \\
 &= \left(\frac{\partial \Gamma_{im}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jm}^k}{\partial x^i} \right) X^m + \frac{\partial X^m}{\partial x^j} \Gamma_{im}^k - \frac{\partial X^m}{\partial x^i} \Gamma_{jm}^k \\
 &\quad + \Gamma_{im}^s \Gamma_{js}^k X^m - \Gamma_{jm}^s \Gamma_{is}^k X^m + \frac{\partial X^s}{\partial x^i} \Gamma_{js}^k - \frac{\partial X^s}{\partial x^j} \Gamma_{is}^k \\
 &= \left(\frac{\partial \Gamma_{im}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jm}^k}{\partial x^i} + \Gamma_{im}^s \Gamma_{js}^k - \Gamma_{jm}^s \Gamma_{is}^k \right) X^m. \tag{5.2}
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$R = R_{ijk}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l},$$

con

$$R_{ijk}^l = \left[R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} \right]^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l \tag{5.3}$$

e

$$\nabla_{ij}^2 X^l - \nabla_{ji}^2 X^l = -R_{ijk}^l X^k.$$

Se inoltre siamo in coordinate normali centrate in $p \in M$, nel punto p abbiamo

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i},$$

in quanto i simboli di Christoffel sono tutti nulli in p . Esplicitando i simboli di Christoffel per mezzo della formula (3.5), abbiamo, sempre in $p \in M$,

$$\begin{aligned}
 R_{ijk}^l &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\frac{1}{2} g^{lm} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{1}{2} g^{lm} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} g^{lm} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right) \right] - \frac{1}{2} g^{lm} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} \right], \tag{5.4}
 \end{aligned}$$

in coordinate normali (si ricordi che in p la matrice dei coefficienti della metrica e la sua inversa sono l'identità e le derivate $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ sono tutte nulle).

ESEMPIO 5.1.4. L'operatore di Riemann di $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$ è identicamente nullo. Avendo infatti $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$, nell'usuale carta globale, tutti i simboli di Christoffel nulli, dalla formula (5.3) segue $R_{ijk}^l = 0$ in ogni punto di $\mathbb{R}^n$. Ciò vale, per lo stesso motivo, anche per ogni varietà riemanniana 1-dimensionale, cioè tutte le curve (astratte) hanno curvatura (riemanniana) nulla, malgrado osserviamo chiaramente la "curvatura" di una curva (immersa) nel piano o nello

spazio. Quest'altra nozione di curvatura, molto più "intuitiva", sarà definita nel Capitolo 7 (Esempio 7.2.3).

ESERCIZIO 5.1.5. Si mostri che l'operatore di Riemann è invariante per isometrie. Vale a dire, se $f : M \rightarrow N$ è un'isometria tra due varietà riemanniane con associati operatori di Riemann R^M e R^N , si ha $R^M = f^* R^N$, cioè

$$R^M(X, Y)Z = f^*(R^N(f_*X, f_*Y)f_*Z),$$

per ogni $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ (si veda l'Esercizio 3.2.7).

Di conseguenza, una varietà riemanniana con operatore di Riemann identicamente nullo come $\mathbb{R}^n$ non può essere isometrica a una varietà con operatore di Riemann non nullo.

Un'altra conseguenza è che se $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ è un rivestimento riemanniano, localmente $\tilde{M}$ e M hanno lo stesso operatore di Riemann.

ESERCIZIO 5.1.6. Si mostri che se (M, g) e (N, h) sono due varietà riemanniane con associati operatori di Riemann R^M e R^N , l'operatore di Riemann della varietà prodotto $(M \times N, g \times h)$ è dato da (R^M, R^N) , cioè

$$\begin{aligned} R_{(p,q)}^{M \times N}(X_{(p,q)}, Y_{(p,q)})Z_{(p,q)} &= R_{(p,q)}^{M \times N}((X_p^M, X_q^N), (Y_p^M, Y_q^N))(Z_p^M, Z_q^N) \\ &= (R_p^M(X_p^M, Y_p^M)Z_p^M, R_q^N(X_q^N, Y_q^N)Z_q^N), \end{aligned}$$

con $X_{(p,q)} = (X_p^M, X_q^N)$, $Y_{(p,q)} = (Y_p^M, Y_q^N)$, $Z_{(p,q)} = (Z_p^M, Z_q^N)$, identificando $T_{(p,q)}M \times N$ con $T_pM \times T_qN$, per ogni $(p, q) \in M \times N$ (si tenga in considerazione l'Esercizio 3.2.12).

ESERCIZIO 5.1.7. Si mostri che se ω è una 1-forma e X, Y due campi vettoriali su (M, g) si ha

$$R(X, Y)\omega = \nabla_{Y,X}^2\omega - \nabla_{X,Y}^2\omega = [R(X, Y)\omega^\#]^\flat$$

e in coordinate

$$\nabla_{ij}^2\omega_k - \nabla_{ji}^2\omega_k = -R_{ijk}^l\omega_l.$$

Si estenda in modo naturale l'operatore di Riemann a tutti gli spazi tensoriali $\Gamma(T_s^r M)$ e si scriva $R(X, Y)T$ in coordinate locali, per $T \in \Gamma(T_s^r M)$.

Vedremo che in generale risulta più utile considerare la versione $(0, 4)$ dell'operatore di Riemann detto *tensore di Riemann* (o *tensore di curvatura*).

DEFINIZIONE 5.1.8. Definiamo il *tensore di Riemann* come il tensore di tipo $(0, 4)$ dato da

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W),$$

per ogni $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$. Per distinguerlo dall'operatore di Riemann, talvolta lo indicheremo con il simbolo *Riem*.

In coordinate si ha

$$R = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \quad \text{con} \quad R_{ijkl} = R_{ijk}^m g_{ml},$$

$$R_{ijkl} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^m - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^m \right) g_{ml} \quad (5.5)$$

Segue inoltre

$$R_{ijk}^m = R_{ijkl} g^{lm}.$$

Per il calcolo (5.4), essendo $g_{ij} = \delta_{ij}$ in $p \in M$, in coordinate normali centrate in tale punto, abbiamo

$$R_{ijkl} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} \right]. \quad (5.6)$$

OSSERVAZIONE 5.1.9. Con gli strumenti del prossimo capitolo, dimostreremo (Proposizione 6.4.23) che, in coordinate normali centrate in $p \in M$, si ha

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} = -\frac{1}{3}(R_{ikjl} + R_{iljk}).$$

Sottolineiamo che questo non segue da una semplice manipolazione algebrica delle relazioni (5.6) (si veda [190, Volume 2, Capitolo 4, Sezione B], per una dimostrazione “computazionale”). Espandendo con la formula di Taylor la metrica attorno a p in tali coordinate, si ha allora

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{6}(R_{ikjl} + R_{iljk})x^k x^l + o(|x|^2) = \delta_{ij} + \frac{1}{3}R_{kijl}x^k x^l + o(|x|^2),$$

formula che Riemann ha utilizzato per introdurre quello che per noi oggi è il tensore di curvatura Riem.

OSSERVAZIONE 5.1.10. Se accettiamo il fatto che la presenza di “curvatura” per una varietà sia equivalente a un operatore di Riemann R non nullo, o più precisamente che tale operatore contenga tutte le informazioni su quanto una varietà sia “curva”, abbiamo allora definito la “curvatura” di una varietà come un difetto di simmetria negli hessiani dei campi vettoriali (assente in $\mathbb{R}^n$, che come intuitivamente e giustamente ci aspettiamo, è piatto, non ha “curvatura”). Per quanto sia molto utile dal punto di vista dell’estensione delle tecniche dell’analisi matematica alle varietà (data la rilevanza del teorema di Schwarz in $\mathbb{R}^n$), questo non è chiaramente un modo geometricamente intuitivo per introdurre il concetto di curvatura. Anche il modo (analitico) originale di Riemann di definire il tensore di curvatura considerando i termini del second’ordine nell’espansione di Taylor della metrica in coordinate normali, come nell’osservazione precedente, ne nasconde la natura geometrica.

Sicuramente più naturale è invece legare la “curvatura” della varietà alla *curvatura di Gauss* (post immersione isometrica locale in $\mathbb{R}^3$) delle superfici “geodetiche”, come descritto nell’introduzione a questo capitolo, ma meno efficiente per i calcoli, come sarà evidente nella Sezione 5.4. Qualitativamente, abbiamo inoltre visto nell’Esercizio 5.1.5 che se vi è “curvatura”, non è possibile che la varietà sia localmente isometrica a $\mathbb{R}^n$, cioè la “curvatura” è un’ostruzione alla “piattezza”, come ci si aspetta (discuteremo quantitativamente questo fatto nella Sezione 9.1 e in particolare nell’Osservazione 9.2.11). Come vedremo, tale “piattezza” sarà equivalente all’esistenza di una base locale di campi paralleli, la presenza di “curvatura” esclude dunque tale possibilità.

Vediamo ora che l’operatore R_p è in relazione con “l’errore” nel trasporto parallelo lungo un cammino chiuso di punto base $p \in M$ (che è nullo in $\mathbb{R}^n$), che è un modo più geometrico (ma di nuovo poco utile in pratica per fare i calcoli) di definirlo e lo connette più intuitivamente al concetto di curvatura (si tengano presenti le Osservazioni 3.6.6, 3.6.7 e l’Esercizio 3.6.8). Consideriamo tre vettori $v, w, z \in T_p M$ e per $s, t > 0$ abbastanza piccoli, costruiamo il cammino chiuso σ in $T_p M$ che parte dall’origine O_p ed è individuato dai quattro vettori $tv, sw, -tv, -sw$, in quest’ordine, che quindi termina di nuovo nell’origine. Sia $\gamma(\tau) = \exp_p(\sigma(\tau))$ che dunque è un cammino chiuso di classe C^∞ a tratti, che parte e arriva in p . Se $Z_{t,s} \in T_p M$ è il “trasportato parallelo” del vettore z lungo il cammino γ , si ha

$$\frac{d}{ds} \frac{d}{dt} Z_{t,s} \Big|_{s=t=0} = -R_p(v, w)z$$

(si veda [138, Theorem 7.11], ad esempio, per la dimostrazione).

Cioè l’operatore di Riemann misura il “fallimento infinitesimale” del trasporto parallelo nel riportare un vettore alla sua posizione originaria lungo un cammino chiuso. In altre parole, R misura l’olonomia “infinitesimale” della varietà (si veda l’Osservazione 3.6.7). Segue che

se (M, g) ha gruppo di ologonia banale, allora l'operatore di Riemann è nullo (vale anche il viceversa, se M è semplicemente connessa).

Infine, facendo riferimento all'Esempio 4.4.2, mostriamo che il tensore di Riemann può essere anche interpretato come una "misura" della non-integrabilità della distribuzione orizzontale $v \mapsto H_v M$ su TM (e la presenza di curvatura come un'ostruzione a tale integrabilità). Siano X, Y due campi vettoriali su M e $\tilde{X}, \tilde{Y}$ i loro sollevamenti orizzontali su TM per mezzo della sommersione riemanniana $\pi : (TM, g_T) \rightarrow (M, g)$. Abbiamo visto nell'Esercizio 3.4.5 che la funzione

$$(X, Y) \mapsto [\tilde{X}, \tilde{Y}]^V = [\tilde{X}, \tilde{Y}] - \widetilde{[X, Y]},$$

dove abbiamo indicato con $[\tilde{X}, \tilde{Y}]^V$ la componente verticale di $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$, è un tensore di tipo $(1, 2)$ che determina l'integrabilità della distribuzione orizzontale $v \mapsto H_v M$ su TM , associata alla sommersione π . Mostriamo che, se $v \in T_p M$, si ha

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}]_v^V = R(X_p, Y_p)v,$$

usando l'identificazione di $V_v M$ con $T_{\pi(v)} M$ data dalla mappa $\mathcal{I}_v$ definita nella formula (4.12). Infatti, in una carta coordinata (U, x^i) di M con relativa carta coordinata $(\pi^{-1}(U), (x^i, v^j))$ di TM , consideriamo i campi $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$, i cui sollevamenti orizzontali sono dati da

$$\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial x^i} + \tilde{X}^k \frac{\partial}{\partial v^k} \quad \text{e} \quad \tilde{Y} = \frac{\partial}{\partial x^j} + \tilde{Y}^m \frac{\partial}{\partial v^m},$$

dove

$$\tilde{X}^k(v) = -\Gamma_{il}^k(x)v^l \quad \text{e} \quad \tilde{Y}^m(v) = -\Gamma_{js}^m(x)v^s,$$

per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$, per la formula (4.10). Dunque,

$$\tilde{X} = \frac{\partial}{\partial x^i} - (\Gamma_{il}^k \circ \pi)v^l \frac{\partial}{\partial v^k} \quad \text{e} \quad \tilde{Y} = \frac{\partial}{\partial x^j} - (\Gamma_{js}^m \circ \pi)v^s \frac{\partial}{\partial v^m}.$$

Segue che

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, \tilde{Y}] &= - \left(\frac{\partial \Gamma_{js}^m}{\partial x^i} \circ \pi \right) v^s \frac{\partial}{\partial v^m} + (\Gamma_{il}^k \circ \pi)v^l (\Gamma_{js}^m \circ \pi) \delta_k^s \frac{\partial}{\partial v^m} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j} \circ \pi \right) v^l \frac{\partial}{\partial v^k} - (\Gamma_{js}^m \circ \pi)v^s (\Gamma_{il}^k \circ \pi) \delta_m^l \frac{\partial}{\partial v^k} \\ &= - \left(\frac{\partial \Gamma_{js}^m}{\partial x^i} \circ \pi \right) v^s \frac{\partial}{\partial v^m} + (\Gamma_{il}^k \circ \pi)v^l (\Gamma_{js}^m \circ \pi) \frac{\partial}{\partial v^m} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j} \circ \pi \right) v^l \frac{\partial}{\partial v^k} - (\Gamma_{js}^m \circ \pi)v^s (\Gamma_{im}^k \circ \pi) \frac{\partial}{\partial v^k} \\ &= \left[\left(\frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x^i} + \Gamma_{il}^m \Gamma_{jm}^k - \Gamma_{jl}^m \Gamma_{im}^k \right) \circ \pi \right] v^l \frac{\partial}{\partial v^k}, \end{aligned}$$

dove abbiamo riordinato e raccolto i termini nell'ultimo passaggio. Allora, $[\tilde{X}, \tilde{Y}]_v = [\tilde{X}, \tilde{Y}]_v^V \in V_v M$ e usando l'identificazione di $V_v M$ con $T_{\pi(v)} M$, concludiamo

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right]_v^V = \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x^i} + \Gamma_{il}^m \Gamma_{jm}^k - \Gamma_{jl}^m \Gamma_{im}^k \right) (\pi(v)) v^l \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\pi(v)} = R_{\pi(v)} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) v$$

per l'equazione (5.2). Dunque, la distribuzione orizzontale $v \mapsto H_v M$ su TM è integrabile se e solo se il tensore di Riemann è nullo.

OSSERVAZIONE 5.1.11. Per un generico fibrato vettoriale E con una connessione ∇ , la definizione dell'operatore di Riemann in termini di ∇^2 perde di significato (si avrebbe $\nabla_{X,Y}^2 \eta =$

$\nabla_X \nabla_Y \eta - \nabla_{\nabla_X Y} \eta$, che non è definito, se $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $\eta \in \Gamma(E)$, tuttavia è ancora possibile definire l'operatore di Riemann $R^\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ associato a ∇ , che descrive la "curvatura" della connessione ∇ su E , con la formula (5.1)

$$R^\nabla(X, Y)\eta = [\nabla_Y, \nabla_X]\eta - \nabla_{[Y, X]}\eta = \nabla_Y \nabla_X \eta - \nabla_X \nabla_Y \eta - \nabla_{[Y, X]}\eta, \quad (5.7)$$

per ogni $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $\eta \in \Gamma(E)$.

In altre parole, sebbene l'operatore ∇^2 non sia definito, lo è la sua "antisimmetrizzazione". Definiamo l'operatore *differenziale esterno covariante* d^∇ che agisce come ∇ sulle sezioni di E (identifichiamo $\Gamma(E)$ con $\Omega^0(M, E)$) e nel modo seguente su $\Omega^k(M, E)$ (le k -forme alternanti a valori in E), producendo un elemento di $\Omega^{k+1}(M, E)$:

$$\begin{aligned} (d^\nabla \omega)(X_0, X_1, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \nabla_{X_i}(\omega(X_0, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], \dots, \widehat{X_i}, \dots, \widehat{X_j}, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Nel caso particolare $\omega = \alpha \otimes \eta \in \Omega^k(M, E)$, con $\alpha \in \Omega^k(M)$ e $\eta \in \Gamma(E)$, si può allora mostrare che

$$d^\nabla(\alpha \otimes \eta) = d\alpha \otimes \eta + (-1)^k \alpha \wedge \nabla \eta$$

e si verifica facilmente che

$$(d^\nabla)^2(\alpha \otimes \eta) = (d^\nabla \circ d^\nabla)(\alpha \otimes \eta) = d^\nabla d^\nabla(\alpha \otimes \eta) = -\alpha \wedge R^\nabla \eta,$$

dunque $(d^\nabla)^2$ non è identicamente nullo come nel caso del "classico" differenziale esterno, se $R^\nabla \neq 0$ (si veda [199] o [136, Sezione 12.9] per queste relazioni e per approfondire).

Se dunque $E = TM$ e ∇ è la connessione di Levi-Civita, la curvatura di una varietà può essere allora interpretata come un'ostruzione alla *semi-esattezza* della sequenza

$$\begin{aligned} \Gamma(TM) = \Omega^0(M, TM) &\xrightarrow{d^\nabla} \Omega^1(M, TM) \xrightarrow{d^\nabla} \dots \\ \dots &\xrightarrow{d^\nabla} \Omega^k(M, TM) \xrightarrow{d^\nabla} \Omega^{k+1}(M, TM) \xrightarrow{d^\nabla} \dots \\ \dots &\xrightarrow{d^\nabla} \Omega^{n-1}(M, TM) \xrightarrow{d^\nabla} \Omega^n(M, TM) \xrightarrow{d^\nabla} 0 \end{aligned}$$

cioè al fatto che $\text{Im } d^\nabla \subseteq \ker d^\nabla$.

Si noti che se E è il fibrato banale $M \times \mathbb{R}$, da cui $\Gamma(E) = C^\infty(M)$, con la connessione ∇ naturale data dal differenziale, si ha $\Omega^k(M, \mathbb{R}) = \Omega^k(M)$ e $d^\nabla = d$. Essendo $d^2 = 0$, questa connessione ha dunque "curvatura" nulla, cioè $R^\nabla = 0$ (cosa che si può vedere anche direttamente dalla formula (5.7)).

5.2. Proprietà algebriche del tensore di Riemann

Vediamo ora alcune "simmetrie" di cui gode il tensore di Riemann.

PROPOSIZIONE 5.2.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

(1) *Antisimmetria nelle prime due variabili*

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$$

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}$$

(2) *Antisimmetria nelle ultime due variabili*

$$R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$$

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}$$

(3) *Simmetria per scambio della prima e seconda coppia*

$$R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$$

$$R_{ijkl} = R_{klij}$$

per ogni $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ e ogni $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$.

DIMOSTRAZIONE. Usando la formula (5.6), in coordinate normali centrate in $p \in M$, si vede facilmente che in p valgono le tre identità in coordinate, per la simmetria della metrica e il teorema di Schwarz. Dunque valgono le tre identità per il tensore di Riemann in p e poiché p è un generico punto di M , la tesi segue. $\square$

OSSERVAZIONE 5.2.2. Si noti che la prima identità è immediata, poiché dalla definizione dell'operatore di Riemann, si ha $R(X, Y) = -R(Y, X)$ e che la terza è una delle prime due implicano l'altra. Segue inoltre che

$$R(X, X, Z, W) = R(X, Y, Z, Z) = 0$$

e

$$R_{ikkl} = R_{ijkk} = 0,$$

per ogni $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ e ogni $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$.

PROPOSIZIONE 5.2.3 (Prima identità di Bianchi [231]). *Vale la seguente identità:*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$$

o equivalentemente,

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0, \quad (5.8)$$

per ogni $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$.

In coordinate locali si ha

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Usando la definizione dell'operatore e la simmetria di ∇ , di abbiamo

$$\begin{aligned} & R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\ &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]} Z \\ &\quad + \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{[Z, Y]} X \\ &\quad + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_{[X, Z]} Y \\ &= \nabla_Y (\nabla_X Z - \nabla_Z X) + \nabla_Z (\nabla_Y X - \nabla_X Y) + \nabla_X (\nabla_Z Y - \nabla_Y Z) \\ &\quad - \nabla_{[Y, X]} Z - \nabla_{[Z, Y]} X - \nabla_{[X, Z]} Y \\ &= \nabla_Y [X, Z] + \nabla_Z [Y, X] + \nabla_X [Z, Y] \\ &\quad - \nabla_{[Y, X]} Z - \nabla_{[Z, Y]} X - \nabla_{[X, Z]} Y \\ &= [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] + [X, [Z, Y]] \\ &= 0 \end{aligned}$$

per l'identità di Jacobi (1.1).

Si noti la rilevanza della simmetria (torsione nulla) della connessione di Levi-Civita in questa dimostrazione. $\square$

OSSERVAZIONE 5.2.4. Per le simmetrie del tensore di Riemann, qualunque dei primi tre indici di R_{ijkl} può essere "mandato" al quarto posto, eventualmente moltiplicando per -1 ,

$$\begin{array}{lll} R_{ijkl} = -R_{ijlk}, & R_{ijkl} = R_{klij}, & R_{ijkl} = -R_{klji}. \\ \text{3° indice al 4° posto} & \text{2° indice al 4° posto} & \text{1° indice al 4° posto} \end{array}$$

Segue che la prima identità di Bianchi vale per qualunque terna di indici di R_{ijkl} ,

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = -R_{klji} - R_{ljki} - R_{jkli} = 0 \quad (\text{con primo indice fissato})$$

$$R_{ijkl} + R_{kjli} + R_{ljik} = R_{klij} + R_{likj} + R_{iklj} = 0 \quad (\text{con secondo indice fissato})$$

$$R_{ijkl} + R_{jlik} + R_{likj} = -R_{ijlk} - R_{lijk} - R_{jlki} = 0 \quad (\text{con terzo indice fissato})$$

e analogamente per $R(X, Y, Z, W)$, permutando ciclicamente su una qualunque terna di campi vettoriali e sommando si ottiene zero, per ogni $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ e ogni $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$.

ESERCIZIO 5.2.5. Si mostri che in dimensione $n = 2, 3$ la prima identità di Bianchi è conseguenza delle simmetrie del tensore di Riemann, dunque non fornisce nuove informazioni.

Concludiamo questa sezione con un modo alternativo che non fa uso di coordinate, di mostrare le simmetrie del tensore di Riemann. Per dimostrare l'antisimmetria nella seconda coppia di variabili è sufficiente dimostrare che si ha $R(X, Y, Z, Z) = 0$. Infatti, se $R(X, Y, Z, Z) = 0$ si ha

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= R(X, Y, Z - W + W, W) \\ &= R(X, Y, Z - W, W) + R(X, Y, W, W) \\ &= R(X, Y, Z - W, W - Z + Z) \\ &= -R(X, Y, Z - W, Z - W) + R(X, Y, Z - W, Z) \\ &= R(X, Y, Z, Z) - R(X, Y, W, Z) \\ &= -R(X, Y, W, Z) \end{aligned}$$

e per definizione, abbiamo

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, Z) &= g(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]} Z, Z) \\ &= g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) - g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_{[Y, X]} Z, Z) \\ &= YXg(Z, Z)/2 - g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) - XYg(Z, Z)/2 + g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) \\ &\quad - [Y, X]g(Z, Z)/2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Per dimostrare la terza formula della Proposizione 5.2.1, scriviamo quattro volte l'identità di Bianchi e sommiamo, ottenendo

$$\begin{aligned} 0 &= R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) \\ &\quad + R(Y, Z, W, X) + R(Z, W, Y, X) + R(W, Y, Z, X) \\ &\quad + R(Z, W, X, Y) + R(W, X, Z, Y) + R(X, Z, W, Y) \\ &\quad + R(W, X, Y, Z) + R(X, Y, W, Z) + R(Y, W, X, Z) \\ &= 2R(Z, X, Y, W) - 2R(Y, W, Z, X), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato ripetutamente l'antisimmetria del tensore di Riemann nella prima e seconda coppia di variabili. La tesi dunque segue.

OSSERVAZIONE 5.2.6. Quest'ultima dimostrazione può essere in un certo senso "visualizzata" nella seguente figura.

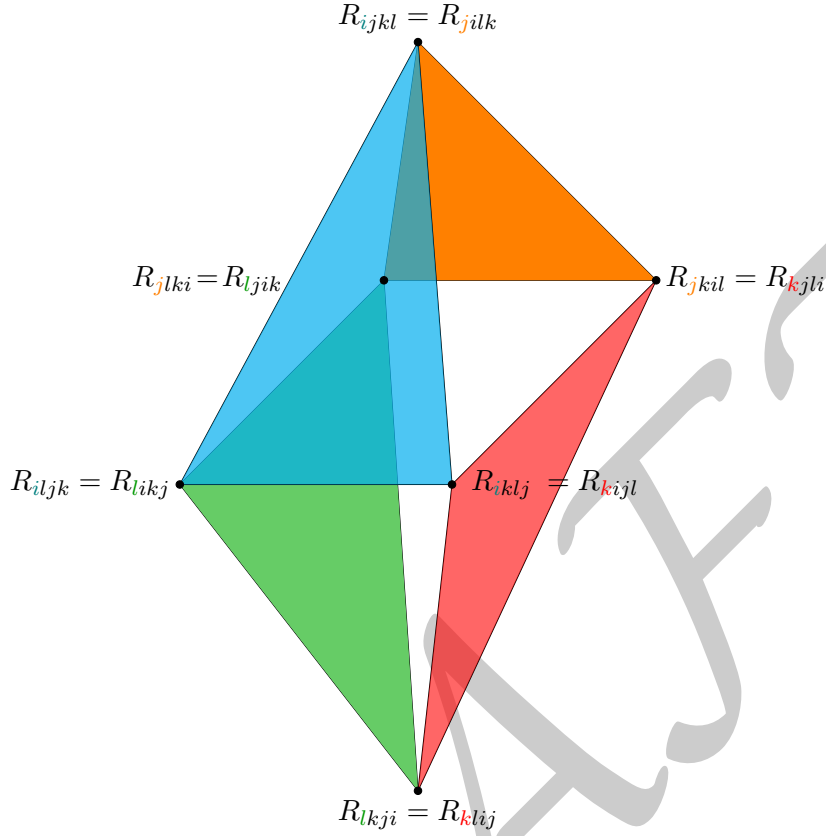


FIGURA 5.1

Le uguaglianze sui vertici dell'ottaedro sono tutte dovute allo scambio degli indici nella prima e seconda coppia (prima e seconda formula della Proposizione 5.2.1), mentre la somma dei valori sui vertici dei triangoli colorati sono nulle per la prima identità di Bianchi. Segue che la somma dei quattro valori sui vertici "centrali" è uguale a due volte il valore sia sul vertice in alto, che su quello in basso, da cui la tesi $R_{ijkl} = R_{klij}$.

5.3. Tensori di curvatura algebrici

DEFINIZIONE 5.3.1. Diciamo che una forma quadrilineare $P : T_p M \times T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ su $T_p M$ è un *tensore di curvatura algebrico* in $p \in M$ se verifica

- $P(x, y, z, w) = -P(y, x, z, w)$,
- $P(x, y, z, w) = -P(x, y, w, z)$,
- $P(x, y, z, w) = P(z, w, x, y)$,
- l'identità di Bianchi $P(x, y, z, w) + P(y, z, x, w) + P(z, x, y, w) = 0$,

per ogni $x, y, z, w \in T_p M$.

Chiamiamo $C_p(M)$ lo spazio dei tensori di curvatura algebrici in p .

OSSERVAZIONE 5.3.2. Ovviamente il tensore di Riemann $Riem$ in ogni punto $p \in M$ è un tensore di curvatura algebrico, così come la forma quadrilineare $R_p^0 : T_p M \times T_p M \times T_p M \times$

$T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$R_p^0(x, y, z, w) = g_p(x, z)g_p(y, w) - g_p(x, w)g_p(y, z),$$

nel punto $p \in M$. Si ha allora un tensore R^0 di tipo $(0, 4)$ con coefficienti, in coordinate locali, dati da

$$R_{ijkl}^0 = g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}.$$

Si noti che

$$R_p^0(x, y, x, y) = g_p(x, x)g_p(y, y) - g_p(x, y)g_p(x, y) = |x|_p^2 |y|_p^2 - (g_p(x, y))^2$$

è il quadrato dell'area del parallelogramma di lati x e y in $T_p M$.

Vediamo ora un modo di costruire questi tensori.

DEFINIZIONE 5.3.3. Il *prodotto di Kulkarni–Nomizu* di due forme bilineari simmetriche h e k su $T_p M$ è la forma quadrilineare $h \oslash k$ definita come

$$(h \oslash k)(x, y, z, w) = h(x, z)k(y, w) + h(y, w)k(x, z) - h(x, w)k(y, z) - h(y, z)k(x, w),$$

per ogni $x, y, z, w \in T_p M$. In coordinate locali, si ha

$$(h \oslash k)_{ijml} = h_{im}k_{jl} + h_{jl}k_{im} - h_{il}k_{jm} - h_{jm}k_{il},$$

per ogni $i, j, m, l \in \{1, \dots, n\}$.

ESEMPIO 5.3.4. Calcoliamo il prodotto di Kulkarni–Nomizu del prodotto scalare g_p su $T_p M$ con se stesso:

$$(g \oslash g)_{ijkl} = g_{ik}g_{jl} + g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk} - g_{jk}g_{il} = 2(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) = 2R_{ijkl}^0,$$

cioè $R^0 = \frac{g \oslash g}{2}$ (abbiamo omissso il pedice p , per semplicità di notazione – lo faremo spesso nel seguito).

Si ha la seguente proposizione, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

PROPOSIZIONE 5.3.5. Il prodotto di Kulkarni–Nomizu di due forme bilineari simmetriche h e k su $T_p M$ è simmetrico e produce un tensore di curvatura algebrico su $T_p M$.

ESERCIZIO 5.3.6. Se M è una varietà di dimensione $n \in \mathbb{N}$, si mostri che per ogni forma bilineare simmetrica h su $T_p M$, con il prodotto scalare g_p esteso agli spazi vettoriali $T_s^r M_p = \otimes^s T_p M^* \otimes^r T_p M$ come nella Sezione 2.4, si ha, omettendo il pedice p ,

$$g(g \oslash g, g \oslash h) = 8(n-1)\text{tr } h \quad \text{da cui} \quad |g \oslash g|^2 = 8n(n-1)$$

$$|g \oslash h|^2 = 4(n-2)|h|^2 + 4(\text{tr } h)^2$$

$$(\text{tr } {}^{1,3}g \oslash h)_{im} = g^{jl}(g \oslash h)_{jilm} = (n-2)h_{im} + g_{im}\text{tr } h$$

$$\text{tr } (\text{tr } {}^{1,3}g \oslash h) = g^{im}g^{jl}(g \oslash h)_{jilm} = 2(n-1)\text{tr } h,$$

in particolare,

$$\text{tr } {}^{1,3}g \oslash g = 2(n-1)g \quad \text{e} \quad \text{tr } (\text{tr } {}^{1,3}g \oslash g) = 2n(n-1).$$

Si dimostri infine la seguente formula, per ogni coppia h, k di forme bilineari simmetriche su $T_p M$,

$$|h \oslash k|^2 = 4|h|^2 |k|^2 + 4(g(h, k))^2 - 8g(h^2, k^2)$$

dove i tensori h^2, k^2 sono dati da $h_{ij}^2 = h_{il}g^{lm}h_{mj}$ e $k_{ij}^2 = k_{il}g^{lm}k_{mj}$.

Consideriamo il sottospazio vettoriale $\mathcal{F}_p M$ di $\otimes^4 T_p M^*$ delle forme quadrilineari A su $T_p M$ che soddisfano le identità

- $A(x, y, z, w) = -A(y, x, z, w)$,
- $A(x, y, z, w) = -A(x, y, w, z)$,
- $A(x, y, z, w) = A(z, w, x, y)$,

ma non necessariamente l'identità di Bianchi

$$A(x, y, z, w) + A(y, z, x, w) + A(z, x, y, w) = 0,$$

per ogni $x, y, z, w \in T_p M$.

DEFINIZIONE 5.3.7. La mappa di Bianchi è l'endomorfismo $b : \mathcal{F}_p M \rightarrow \mathcal{F}_p M$ che agisce come segue,

$$b(A)(x, y, z, w) = \frac{1}{3} [A(x, y, z, w) + A(y, z, x, w) + A(z, x, y, w)],$$

per ogni $A \in \mathcal{F}_p M$ e $x, y, z, w \in T_p M$. Si ha dunque

$$C_p(M) = \ker b.$$

ESERCIZIO 5.3.8. Si mostri che, per le proprietà di A , si ha

$$b(A)(x, y, z, w) = -b(A)(y, x, z, w),$$

$$b(A)(x, y, z, w) = -b(A)(x, y, w, z),$$

$$b(A)(x, y, z, w) = b(A)(z, w, x, y),$$

per ogni $A \in \mathcal{F}_p M$ e $x, y, z, w \in T_p M$. Dunque $b(A) \in \mathcal{F}_p M$.

Si noti inoltre che

$$b(A)(x, y, z, w) = b(A)(y, z, x, w) = b(A)(z, x, y, w), \quad (5.9)$$

per ogni $A \in \mathcal{F}_p M$ e $x, y, z, w \in T_p M$, per la definizione di b .

LEMMA 5.3.9. La mappa di Bianchi b è un operatore idempotente (cioè $b^2 = b \circ b = b$), g -autoaggiunto e si ha la seguente decomposizione ortogonale

$$\mathcal{F}_p M = \ker b \oplus^\perp \operatorname{Im} b.$$

DIMOSTRAZIONE. Data $A \in \mathcal{F}_p M$, possiamo considerare $B = A - b(A)$. Si ha che $B \in \ker b$, dunque $B = A - b(A)$ e $b(A)$ decompongono A . Il fatto che $B \in \ker b$ segue da $b(B) = b(A) - b^2(A) = 0$, poiché la mappa di Bianchi è idempotente, cosa che segue dalla formula (5.9).

Siano $A, C \in \mathcal{F}_p M$, allora in una base ortonormale di $T_p M$ si ha

$$\begin{aligned} g(A, b(C)) &= A_{ijkl} b(C)_{ijkl} \\ &= \frac{1}{3} A_{ijkl} [C_{ijkl} + C_{jkil} + C_{kijl}] \\ &= \frac{1}{3} [A_{ijkl} C_{ijkl} + A_{kijl} C_{ijkl} + A_{jkil} C_{ijkl}] \\ &= \frac{1}{3} [A_{ijkl} + A_{kijl} + A_{jkil}] C_{ijkl} \\ &= g(b(A), C), \end{aligned}$$

cioè b è un operatore g -autoaggiunto. Se dunque $C \in \operatorname{Im} b$ e $B \in \ker b$, si ha $C = b(A)$ per qualche A e

$$g(B, C) = g(B, b(A)) = g(A, b(B)) = 0,$$

che implica $\operatorname{Im} b = \ker b^\perp$. Segue che b è la proiezione ortogonale di $\mathcal{F}_p M$ su $\operatorname{Im} b$ e la decomposizione

$$\mathcal{F}_p M = \ker b \oplus^\perp \operatorname{Im} b$$

è ortogonale. □

Abbiamo che $\text{Im } b = \Lambda_p^4 M \subseteq \otimes^4 T_p M^*$ (si ricordi l'Osservazione 1.4.1), in quanto su $\Lambda_p^4 M$ la mappa b è l'identità (lo si provi per esercizio) e poiché per la formula (5.9) e l'antisimmetria di $b(A)$ nelle prime due variabili si ha

$$b(A)(x, y, x, w) = b(A)(y, x, x, w) = -b(A)(x, y, x, w),$$

segue $b(A)(x, y, x, w) = 0$, che per le proprietà di simmetria e antisimmetria di $b(A) \in \mathcal{F}_p M$, implica che $b(A)$ si annulla in ogni quaterna in cui almeno due vettori di $T_p M$ coincidono e di conseguenza è una forma quadrilineare alternante su $T_p M$.

Si noti che se $n = 2, 3$ si ha $\dim(\text{Im } b) = 0$, infatti ogni forma quadrilineare alternante è nulla, dunque $\mathcal{F}_p M = C_p(M)$ (coerentemente con l'Esercizio 5.2.5). Se $n = 4$, $\dim(\text{Im } b) = 1$.

Vediamo che è possibile identificare $\mathcal{F}_p M$ con lo spazio vettoriale delle forme bilineari simmetriche sullo spazio $\Lambda^2 T_p M$ dei 2-vettori alternanti di $T_p M$, che denotiamo con $S^2(\Lambda^2 T_p M)$, mediante l'applicazione che associa ad $A \in \mathcal{F}_p M$ la forma $\mathcal{A} \in S^2(\Lambda^2 T_p M)$ univocamente ben definita dal seguente comportamento su una base $\{e_i \wedge e_j\}$ di $\Lambda^2 T_p M$,

$$\mathcal{A}(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l) = A(e_i, e_j, e_k, e_l),$$

con $\{e_1, \dots, e_n\}$ base di $T_p M$. Ovviamente, l'applicazione inversa che manda (riporta) $\mathcal{A} \in S^2(\Lambda^2 T_p M)$ in $A \in \mathcal{F}_p M$ è data da

$$A(x, y, z, w) = \mathcal{A}(x \wedge y, z \wedge w)$$

per ogni $x \wedge y, z \wedge w \in \Lambda^2 T_p M$, con $x, y, z, w \in T_p M$ (si verifichi che A è un elemento di $\mathcal{F}_p M$). Allora, poiché se V è uno spazio vettoriale di dimensione m si ha che $S^2(V)$ ha dimensione $\frac{m(m+1)}{2}$, avendo $\Lambda^2 T_p M$ dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$, abbiamo

$$\dim(\mathcal{F}_p M) = \dim(S^2(\Lambda^2 T_p M)) = \frac{n(n-1)(n^2 - n + 2)}{8}. \quad (5.10)$$

Calcoliamo ora la dimensione dello spazio dei tensori di curvatura algebrici $C_p(M)$.

PROPOSIZIONE 5.3.10. *Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n , allora*

$$\dim(C_p(M)) = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo dimostrato che $\mathcal{F}_p M = \ker b \oplus \text{Im } b$, dove b è la mappa di Bianchi e che $\text{Im } b = \Lambda_p^4 M$. Dunque,

$$\dim(\mathcal{F}_p M) = \dim(\ker b) + \dim(\text{Im } b) = \dim(C_p(M)) + \dim(\Lambda_p^4 M)$$

e avendo $\Lambda_p^4 M$ dimensione $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$, concludiamo facilmente che

$$\dim(C_p(M)) = \frac{n(n-1)}{24} (3n^2 - 3n + 6 - n^2 + 5n - 6) = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12},$$

per la formula (5.10). $\square$

Ovviamente ogni tensore di curvatura algebrico P in p può essere visto come un elemento $\mathcal{P}$ di $S^2(\Lambda^2 T_p M)$. Considerando il prodotto scalare indotto da g_p su $\Lambda^2 T_p M$, definito da (si veda l'Esempio 2.4.3)

$$\begin{aligned} g_p(x \wedge y, z \wedge w) &= g_p(x \otimes y - y \otimes x, z \otimes w - w \otimes z) \\ &= 2(g_p(x, z)g_p(y, w) - g_p(x, w)g_p(y, z)) \\ &= 2R_p^0(x, y, z, w) \\ &= 2\mathcal{R}_p^0(x \wedge y, z \wedge w) \end{aligned}$$

(quindi la forma bilineare simmetrica $\mathcal{R}_p^0$ su $\Lambda^2 T_p M$ associata al tensore R_p^0 coincide con la metà del prodotto scalare indotto dalla metrica g_p su $\Lambda^2 T_p M$, per ogni $p \in M$), deduciamo che esiste un endomorfismo lineare autoaggiunto (rispetto a $g_p/2$) $\mathcal{P} : \Lambda^2 T_p M \rightarrow \Lambda^2 T_p M$ tale che

$$\mathcal{P}(\omega, \sigma) = g_p(\mathcal{P}(\omega), \sigma)/2 = g_p(\omega, \mathcal{P}(\sigma))/2$$

per ogni $\omega, \sigma \in \Lambda^2 T_p M$.

Notiamo allora che per R^0 si ha

$$g_p(x \wedge y, z \wedge w) = 2R_p^0(x, y, z, w) = 2\mathcal{R}_p^0(x \wedge y, z \wedge w) = g_p(\mathcal{R}_p^0(x \wedge y), z \wedge w),$$

da cui segue, per l'arbitrarietà di $z \wedge w \in \Lambda^2 T_p M$, che $\mathcal{R}_p^0 = \text{Id}$, per ogni $p \in M$.

DEFINIZIONE 5.3.11. Vedendo Riem_p come la forma $\mathcal{R}_p \in \mathcal{S}^2(\Lambda^2 T_p M)$, per ogni $p \in M$, l'operatore $\mathcal{R}_p : \Lambda^2 T_p M \rightarrow \Lambda^2 T_p M$ associato come sopra a tale forma $\mathcal{R}_p$ viene detto *operatore di curvatura* di (M, g) in p .

Si ha dunque

$$\mathcal{R}_p(\omega, \sigma) = g_p(\mathcal{R}_p(\omega), \sigma)/2 = g_p(\omega, \mathcal{R}_p(\sigma))/2,$$

in particolare,

$$R_p(x, y, z, w) = \mathcal{R}_p(x \wedge y, z \wedge w) = g_p(\mathcal{R}_p(x \wedge y), z \wedge w)/2,$$

per ogni $p \in M$.

Essendo la forma bilineare $\mathcal{R}_p$ su $\Lambda^2 T_p M$ (che ha dimensione $n(n-1)/2$) simmetrica, $\mathcal{R}_p$ si diagonalizza in una base ortonormale $\{\omega_i\}$ di $\Lambda^2 T_p M$ di autovettori dell'operatore autoaggiunto $\mathcal{R}_p : \Lambda^2 T_p M \rightarrow \Lambda^2 T_p M$, per $i \in \{1, \dots, n(n-1)/2\}$. Nel caso tale base sia esprimibile in 2-vettori semplici, cioè della forma $\omega_i = x_i \wedge y_i$, per ogni $i \in \{1, \dots, n(n-1)/2\}$, per dei vettori $x_i, y_i \in T_p M$, diciamo che l'operatore $\mathcal{R}_p$ è *semplice*, mentre se esiste una base ortonormale $\{e_i\}$ di $T_p M$ tale che $\{e_i \wedge e_j\}$ sia una base di autovettori dell'operatore $\mathcal{R}_p$, si dice che $\mathcal{R}_p$ è *puro*. Diciamo che (M, g) ha *operatore di curvatura puro (semplice)* se $\mathcal{R}_p$ è puro (semplice), per ogni $p \in M$.

OSSERVAZIONE 5.3.12. Se $\mathcal{R}_p$ è puro, allora è chiaramente semplice, ma il viceversa non vale (si veda [73]). Ovviamente, in dimensione $n = 2$ l'operatore di curvatura è sempre puro.

OSSERVAZIONE 5.3.13. In dimensione $n = 3$ ogni elemento $\omega \in \Lambda^2 T_p M$ è semplice, cioè della forma $v \wedge w$. Infatti, assumendo $\omega \neq 0$, sia $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ una base di $\Lambda^2 T_p M$ (che ha dimensione tre) con $\omega = \alpha_1$ e fissiamo $\{w_1, w_2, w_3\}$ una base di $T_p M$. Consideriamo $\sigma = w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \in \Lambda^3 T_p M$ e determiniamo $v_1, v_2, v_3 \in T_p M$ tali che $v_i \wedge \alpha_j = \delta_{ij} \sigma$. Ponendo

$$\alpha_i = a_i w_1 \wedge w_2 + b_i w_2 \wedge w_3 + c_i w_3 \wedge w_1$$

e

$$v_i = d_i w_1 + e_i w_2 + f_i w_3,$$

per $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i \in \mathbb{R}$, si ha

$$v_i \wedge \alpha_j = (d_i b_j + e_i c_j + f_i a_j) \sigma.$$

Imponendo dunque le condizioni $v_i \wedge \alpha_j = \delta_{ij} \sigma$, si deve avere

$$\begin{pmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \text{Id},$$

da cui è possibile determinare univocamente le componenti dei vettori v_1, v_2, v_3 . Ciò segue dal fatto che, essendo la seconda matrice invertibile in quanto il suo determinante coincide con quello della matrice del cambio di base in $\Lambda^2 T_p M$, da $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ a $\{w_1 \wedge w_2, w_2 \wedge w_3, w_3 \wedge w_1\}$.

Una volta determinati v_1, v_2, v_3 e osservato che anch'essi formano una base di $T_p M$ (la matrice dei loro coefficienti è invertibile), si ha che $\sigma = \lambda v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ per un qualche $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($\Lambda^3 T_p M$ ha dimensione uno) e di conseguenza $\omega = \alpha_1 = \lambda v_2 \wedge v_3$ (sfruttando sempre le condizioni $v_i \wedge \alpha_j = \delta_{ij} \sigma$).

Da questa osservazione segue che se $n = 3$ l'operatore di curvatura è sempre semplice. In realtà è anche puro; infatti, sia $\{\alpha_i\}$ una base ortonormale di $\Lambda^2 T_p M$ che diagonalizza $\mathcal{R}_p$ e fissata $\sigma \in \Lambda^3 T_p M$ otteniamo v_1, v_2, v_3 come nell'osservazione sopra. A meno di moltiplicare ogni v_i per una (stessa) costante otteniamo allora che $\alpha_1 = v_2 \wedge v_3$, $\alpha_2 = v_3 \wedge v_1$ e $\alpha_3 = v_1 \wedge v_2$ e ponendo $e_i = v_i \sqrt[4]{2}$, si ha allora che $e_i \wedge e_j = \sqrt{2} v_i \wedge v_j$ è una base ortogonale di $\Lambda^2 T_p M$ che diagonalizza $\mathcal{R}_p$. Dunque si ha

$$\begin{aligned} 0 &= g(e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3) = 2g_{12}g_{23} - 2g_{22}g_{13} & g_{12}g_{23} &= g_{22}g_{13}, \\ 0 &= g(e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1) = 2g_{23}g_{31} - 2g_{33}g_{12} & \text{cioè} & \quad g_{23}g_{31} = g_{33}g_{12}, \\ 0 &= g(e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2) = 2g_{31}g_{12} - 2g_{11}g_{32} & & \quad g_{31}g_{12} = g_{11}g_{32}, \end{aligned}$$

e

$$2 = 2g(v_2 \wedge v_3, v_2 \wedge v_3) = g_p(e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3) = 2g_{22}g_{33} - 2g_{23}^2 \quad (5.11)$$

cioè $g_{22}g_{33} = g_{23}^2 + 1$, dove $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. Moltiplicando tra loro le prime due uguaglianze, otteniamo

$$g_{12}g_{23}g_{23}g_{31} = g_{22}g_{13}g_{33}g_{12} \quad \text{cioè} \quad g_{23}^2 = g_{22}g_{33}$$

se $g_{12}g_{13} \neq 0$, che è in contraddizione con l'uguaglianza (5.11). Segue che deve essere $g_{12}g_{13} = 0$ e lo stesso per $g_{23}g_{21}$, $g_{31}g_{32}$ da cui, per le prime tre uguaglianze (essendo $g_{11}, g_{22}, g_{33} \neq 0$) concludiamo che g_{12}, g_{23}, g_{31} sono nulli. Allora

$$g_{11}g_{22} = g_{22}g_{33} = g_{33}g_{11} = 1$$

da cui si ottiene immediatamente $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, cioè $e_i = v_i \sqrt[4]{2}$ è una base ortonormale di $T_p M$, quindi $\mathcal{R}_p$ è puro.

ESERCIZIO 5.3.14. Si scriva l'operatore di curvatura della varietà prodotto $(M \times N, g \times h)$ di due varietà riemanniane (M, g) e (N, h) e si mostri che se entrambe hanno operatori di curvatura puri rispettivamente in $p \in M$ e $q \in N$, allora $(M \times N, g \times h)$ ha operatore di curvatura puro in $(p, q) \in M \times N$.

5.4. Altre nozioni di curvatura

Vediamo che, per le proprietà di simmetria del tensore di Riemann (o di un qualunque tensore di curvatura algebrico), per determinare l'intero tensore è sufficiente conoscere il suo comportamento su particolari quaterne di vettori.

DEFINIZIONE 5.4.1. Sia (M, g) una varietà riemanniana, $p \in M$ e $v, w \in T_p M$ siano due vettori linearmente indipendenti che generano il 2-piano $\pi = \langle v, w \rangle \subseteq T_p M$. Definiamo la *curvatura sezionale* del 2-piano π come

$$\text{Sec}_p(\pi) = \frac{R_p(v, w, v, w)}{|v|_p^2 |w|_p^2 - (g_p(v, w))^2} = \frac{R_p(v, w, v, w)}{R_p^0(v, w, v, w)} = \frac{g_p(\mathcal{R}_p(v \wedge w), v \wedge w)}{g_p(v \wedge w, v \wedge w)}.$$

PROPOSIZIONE 5.4.2. La curvatura sezionale $\text{Sec}_p(\pi)$ dipende solo dal 2-piano $\pi \subseteq T_p M$ e non dalla scelta dei due generatori v e w .

DIMOSTRAZIONE. Se in una base ortonormale $\{e_1, e_2\}$ di $\pi = \langle v, w \rangle$ si ha $v = ae_1 + be_2$ e $w = ce_1 + de_2$,

$$\begin{aligned} \text{Sec}_p(\pi) &= \frac{R_p(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2, ae_1 + be_2, ce_1 + de_2)}{|ae_1 + be_2|_p^2 |ce_1 + de_2|_p^2 - (g_p(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2))^2} \\ &= \frac{R_p(e_1, e_2, e_1, e_2)(a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd)}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2} \\ &= R_p(e_1, e_2, e_1, e_2), \end{aligned}$$

per le simmetrie del tensore di Riemann, da cui la tesi. $\square$

OSSERVAZIONE 5.4.3. Vedremo nell'Esempio 5.5.3 che ogni sfera unitaria ha curvatura sezionale costante uguale a 1 per ogni 2-piano π , in ogni suo punto, cosa che si accorda con la nostra intuizione di curvatura (in particolare in dimensione due), cioè che le sfere "curvino positivamente". Se avessimo definito l'operatore di Riemann col segno opposto come molti autori (Osservazione 5.1.2), per avere lo stesso risultato avremmo dovuto definire la curvatura sezionale col segno opposto, come

$$\text{Sec}_p(\pi) = -R_p(v, w, v, w) = R_p(v, w, w, v),$$

con v, w base ortonormale di π . Analogamente, se vogliamo che le sfere abbiano le forme bilineari $\mathcal{R}_p \in \mathcal{S}^2(\Lambda^2 T_p M)$ associate a Riem_p e i relativi operatori di curvatura $\mathcal{R}_p$ definiti positivi, com'è naturale aspettarsi, dovremmo cambiarne il segno rispetto alla nostra Definizione 5.3.11. Troviamo dunque più semplice adottare la nostra definizione dell'operatore di Riemann, per evitare di dover ricordare (specie nei calcoli) questi "cambi di segno" in tali altre nozioni di curvatura.

OSSERVAZIONE 5.4.4. Si noti che se $x \wedge y$ è un autovettore dell'operatore di curvatura $\mathcal{R}_p$, allora l'autovalore λ associato è dato da $\text{Sec}_p(\langle x, y \rangle)$, in quanto

$$R_p(x, y, x, y) = g_p(\mathcal{R}_p(x \wedge y), x \wedge y)/2 = \lambda g_p(x \wedge y, x \wedge y)/2 = \lambda R_p^0(x, y, x, y).$$

In particolare, se l'operatore $\mathcal{R}_p$ è semplice, tutti i suoi autovalori sono dati da curvature sezionali in $p \in M$. Se $\mathcal{R}_p$ è puro i suoi autovalori sono dati da $R_p(e_i, e_j, e_i, e_j) = \text{Sec}_p(\langle e_i, e_j \rangle)$, dove $\{e_i \wedge e_j\}$ è la base che diagonalizza $\mathcal{R}_p$, con $\{e_i\}$ base ortonormale di $T_p M$ (per esempio in dimensione 3, si veda l'Osservazione 5.3.13 e la successiva discussione).

ESERCIZIO 5.4.5. Si mostri che se (M, g) e (N, h) sono due varietà riemanniane, ogni 2-piano "misto" della varietà prodotto $(M \times N, g \times h)$,

$$\langle v_p, w_q \rangle \subseteq T_{(p,q)}(M \times N) = T_p M \oplus T_q N,$$

con $v_p \in T_p M$ e $w_q \in T_q N$, ha curvatura sezionale nulla. Quali sono le altre curvature sezionali?

Ovviamente, conoscere il tensore di Riemann Riem nel punto p ci permette di calcolare la curvatura sezionale di ogni 2-piano di $T_p M$. Viceversa, mostriamo ora che l'insieme delle curvature sezionali di ogni 2-piano di $T_p M$ determina completamente il tensore di Riemann in p .

TEOREMA 5.4.6. Siano P, P' due operatori di curvatura algebrici in $p \in M$ e poniamo

$$\text{Pec}_p(\langle v, w \rangle) = \frac{P(v, w, v, w)}{|v|_p^2 |w|_p^2 - (g_p(v, w))^2} \quad e \quad \text{Pec}'_p(\langle v, w \rangle) = \frac{P'(v, w, v, w)}{|v|_p^2 |w|_p^2 - (g_p(v, w))^2},$$

dove $\langle v, w \rangle$ è il 2-piano in $T_p M$ generato da due vettori linearmente indipendenti v e w .

Allora, $\text{Pec}_p(\langle v, w \rangle) = \text{Pec}'_p(\langle v, w \rangle)$ per ogni 2-piano $\langle v, w \rangle \subseteq T_p M$ se e solo se $P = P'$.

DIMOSTRAZIONE. Siano P e P' con $\text{Pec}_p(\langle v, w \rangle) = \text{Pec}'_p(\langle v, w \rangle)$ per ogni 2-piano $\langle v, w \rangle \subseteq T_p M$, dunque $P(v, w, v, w) = P'(v, w, v, w)$ per ogni coppia di vettori $v, w \in T_p M$. Consideriamo la funzione

$$f(\alpha, \beta) = P(x + \alpha z, y + \beta t, x + \alpha z, y + \beta t) - P(x + \alpha t, y + \beta z, x + \alpha t, y + \beta z),$$

si vede con un calcolo diretto e sfruttando le proprietà algebriche di P che

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \right|_{\alpha=\beta=0} = 6P(x, y, z, t).$$

Poiché l'analoga funzione per P' coincide con f , in quanto la sua definizione coinvolge solo i valori del tipo $P(v, w, v, w)$, si ha che $P = P'$.

L'altra implicazione è ovvia. $\square$

ESERCIZIO 5.4.7. Si cerchi una formula esplicita che esprima $P(x, y, z, t)$ in termini delle "curvature sezionali" associate a P .

OSSERVAZIONE 5.4.8. Ovviamente, dalla definizione, la curvatura sezionale associata al tensore R_p^0 è 1, per ogni punto $p \in M$ e ogni 2-piano in $T_p M$.

COROLLARIO 5.4.9. Una varietà riemanniana ha curvatura sezionale $\text{Sec}_p(\pi) = K_p$, per ogni 2-piano $\pi \subseteq T_p M$, se e solo se $R_p = K_p R_p^0$.

DIMOSTRAZIONE. Se vale $R_p = K_p R_p^0$, dalla definizione segue $\text{Sec}_p(\pi) = K_p$ per ogni 2-piano $\pi \subseteq T_p M$. Supponiamo invece che $\text{Sec}_p(\pi) = K_p$ per ogni 2-piano $\pi \subseteq T_p M$, allora i tensori di curvatura algebrici R_p e $K_p R_p^0$ su $T_p M$ hanno le stesse curvature sezionali e la tesi segue dal Teorema 5.4.6. $\square$

DEFINIZIONE 5.4.10. Una varietà riemanniana (M, g) ha curvatura sezionale costante K_p in $p \in M$ se $\text{Sec}_p(\pi) = K_p$ per ogni 2-piano $\pi \subseteq T_p$. Diremo che (M, g) è a curvatura costante se inoltre $K_p = K$, per ogni $p \in M$ (le varietà a curvatura costante sono spesso anche chiamate *space forms*). In una carta locale si ha dunque $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, per ogni $p \in M$. Se la curvatura costante è nulla (come ad esempio $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea) la varietà riemanniana si dice *flat* (o *piatta*), ciò è equivalente a $\text{Riem} = 0$, per il corollario precedente.

DEFINIZIONE 5.4.11. Definiamo il *tensore di Ricci* Ric di tipo $(0, 2)$ (introdotto da Gregorio Ricci-Curbastro [223] nell'articolo nella figura che segue), cioè una forma bilineare Ric_p su $T_p M$ per ogni $p \in M$, come segue: $R(X, Y)$ è la traccia dell'endomorfismo lineare $Z \mapsto R(X, Z)Y$ di $\Gamma(TM)$, per ogni coppia $X, Y \in \Gamma(TM)$. Dunque, in coordinate locali,

$$R(X, Y) = \sum_{i=1}^n \left[R\left(X, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) Y \right]^i = g^{ij} R\left(X, \frac{\partial}{\partial x^i}, Y, \frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

da cui

$$R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl} = g^{jl} R_{jilk} = -g^{jl} R_{ijlk} = -g^{jl} R_{jikl} = R_{ijk}^j.$$

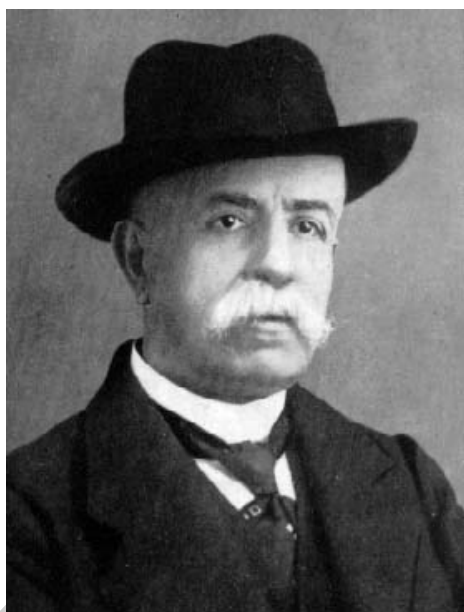
NOTA STORICA. Essendo il tensore di Ricci una traccia del tensore di Riemann (dunque, in un certo senso, una "media" di curvature), veniva talvolta chiamato "curvatura media" nei lavori della prima metà del '900 (ad esempio, in [162]), per analogia con la *curvatura media* che è la traccia della *seconda forma fondamentale* delle ipersuperfici (si veda il Capitolo 7).

ATTI DEL REALE ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI.
Anno accademico 1903-904 - Tomo LXIII - Parte seconda.

DIREZIONI E INVARIANTI PRINCIPALI IN UNA VARIETÀ QUALUNQUE

NOTA DEL PROF. GREGORIO RICCI, M. E.

(Adunanza del 10 luglio 1904)



Gregorio Ricci-Curbastro, 1853 – 1925

Per le simmetrie di Riem, segue immediatamente che Ric è una forma bilineare simmetrica, cioè $R(X, Y) = R(Y, X)$ per ogni $X, Y \in \Gamma(TM)$, dunque Ric_p si diagonalizza in una base ortonormale di $T_p M$, per ogni $p \in M$ ed esiste un unico $(1, 1)$ -tensore, chiamato *operatore di Ricci*, tale che

$$R(X, Y) = g(R(X), Y),$$

per ogni $X, Y \in \Gamma(TM)$. In coordinate locali, se $R(\frac{\partial}{\partial x^i}) = R_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, si ha

$$R_{ij} = R_i^k g_{kj} \quad \text{e} \quad R_i^j = R_{ik} g^{kj}.$$

Inoltre, se $\{e_i\}$ è una base ortonormale di $T_p M$, si ha

$$R_p(v, w) = \sum_{i=1}^n R_p(v, e_i, w, e_i),$$

per ogni $v, w \in T_p M$. Segue che

$$R_p(v, v) = \sum_{i=1}^n R_p(v, e_i, v, e_i) = \sum_{i=1}^n \text{Sec}_p(\langle v, e_i \rangle) (|v|_p^2 - (g_p(v, e_i))^2)$$

per ogni $v \in T_p M$, in particolare se $|v|_p = 1$ e i vettori $\{e_2, \dots, e_n\}$ “completano” v a una base ortonormale di $T_p M$, abbiamo

$$R_p(v, v) = \sum_{i=2}^n \text{Sec}_p(\langle v, e_i \rangle), \quad (5.12)$$

cioè $R_p(v, v)$ è la somma delle curvatures sezionali dei piani generati dalla coppia v e un elemento di $\{e_2, \dots, e_n\}$.

DEFINIZIONE 5.4.12. Definiamo la *curvatura scalare* $R \in C^\infty(M)$ come la traccia del tensore di Ricci

$$R = \text{tr Ric} = R_i^i = g^{ij} R_{ij}.$$

Segue allora che

$$R = g^{ij} R_{ij} = g^{ij} g^{kl} R_{ikjl} = g^{ij} R_{ikj}^k.$$

Inoltre, se $\{e_i\}$ è una base ortonormale di $T_p M$, si ha

$$R(p) = \sum_{i=1}^n R_p(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_p(e_i, e_j, e_i, e_j) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Sec}_p(\langle e_i, e_j \rangle) \quad (5.13)$$

cioè la curvatura scalare in $p \in M$ è il doppio della somma delle curvatures sezionali dei 2-piani distinti generati dalle coppie di elementi di una qualunque base ortonormale di $T_p M$.

OSSERVAZIONE 5.4.13. Abbiamo visto nell'Esercizio 5.1.5 che l'operatore di Riemann è invariante per isometrie, di conseguenza lo stesso vale per tutti i tensori di curvatura e le curvatures sezionali, queste ultime nel senso che se $f : M \rightarrow N$ è un'isometria $\text{Sec}_{f(p)}^N(df(\pi)) = \text{Sec}_p^M(\pi)$, per ogni 2-piano $\pi \subseteq T_p M$.

Se dunque $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ è un rivestimento riemanniano, localmente $\widetilde{M}$ e M hanno la stessa curvatura.

OSSERVAZIONE 5.4.14. Essendo l'operatore di Riemann di $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$ identicamente nullo, anche tutti questi tensori sono nulli e $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$ ha curvatura costante uguale a zero, cioè è una varietà flat.

ESERCIZIO 5.4.15. Si scrivano il tensore di Ricci e la curvatura scalare della varietà prodotto $(M \times N, g \times h)$ di due varietà riemanniane (M, g) e (N, h) .

Vediamo come sono i vari tensori di curvatura di una varietà riemanniana n -dimensionale (M, g) , con curvatura costante K . Abbiamo già visto nel Corollario 5.4.9 che $\text{Riem} = KR^0$, da cui segue immediatamente che $\mathcal{R} = K\text{Id}$ e in una carta locale si ha

$$R_{ijk}^l = R_{ijkm} g^{ml} = K(g_{ik} g_{jm} - g_{im} g_{jk}) g^{ml} = K(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk})$$

$$R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl} = K(n g_{ik} - g_{ik}) = (n-1)K g_{ik}$$

$$R = g^{ik} R_{ik} = n(n-1)K$$

per ogni $p \in M$.

OSSERVAZIONE 5.4.16. Poiché, come abbiamo visto nell'Esempio 3.2.9, la connessione di Levi-Civita della varietà riemanniana "riscalata" $(M, \lambda g)$ di (M, g) è inalterata (cioè i simboli di Christoffel non variano), segue che le corrispondenti curvature soddisfano

$$\begin{aligned} R_p^\lambda(v, w)z &= R_p(v, w)z \\ \text{Riem}_p^\lambda &= \lambda \text{Riem}_p \\ \mathcal{R}_p^\lambda &= \mathcal{R}_p / \lambda \\ \text{Sec}_p^\lambda(\pi) &= \text{Sec}_p(\pi) / \lambda \\ \text{Ric}_p^\lambda &= \text{Ric}_p \\ R^\lambda(p) &= R(p) / \lambda, \end{aligned} \tag{5.14}$$

per ogni $p \in M$, terna di vettori $v, w, z \in T_p M$ e ogni 2-piano $\pi \subseteq T_p M$.

Si noti che il tensore di Ricci è inalterato dal riscaldamento, mentre l'operatore di curvatura, la curvatura sezionale e la curvatura scalare si comportano "come ci aspettiamo dalla curvatura" (pensando alle superfici in $\mathbb{R}^3$), cioè che quando si dilata lo spazio la curvatura diminuisce. Invece, il tensore di Riemann, riscalda nel verso opposto, come la metrica.

Concludiamo questa sezione discutendo più precisamente l'interpretazione geometrica della curvatura sezionale menzionata nell'introduzione a questo capitolo. Per ogni $p \in M$, sappiamo dal capitolo precedente che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\exp_p : B_\varepsilon(O_p) \rightarrow M$ sia un diffeomorfismo sulla sua immagine. Proiettiamo dunque con $\exp_p$ la porzione di un 2-piano $\pi \subseteq T_p M$ data da $\pi \cap B_\varepsilon(O_p)$ e chiamiamo $S \subseteq M$ la superficie $\exp_p(\pi \cap B_\varepsilon(O_p))$, con la metrica indotta $g_S = g|_S$. Vediamo che $\text{Sec}_p(\pi)$ coincide con $\text{Sec}_p^S(\pi)$, che è la curvatura "intrinseca" di S , uguale alla metà della sua curvatura scalare R^S in p , dunque dipendente solo dalla metrica (indotta) di S . Scegliamo una base ortonormale $\mathcal{B} = \{e_i\}$ di $T_p M$ tale che $\pi = \langle e_1, e_2 \rangle$ e consideriamo le coordinate normali centrate in p associate a $\mathcal{B}$. Allora, per costruzione, essendo $\pi = T_p S$, la coppia (x^1, x^2) di tali coordinate sono delle coordinate normali centrate in p per S , dunque per la formula (5.6), si ha in p ,

$$\begin{aligned} R_{1212}^S &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{21}^S}{\partial x^2 \partial x^1} - \frac{\partial^2 g_{11}^S}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{22}^S}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 g_{21}^S}{\partial x^1 \partial x^2} \right] \\ &= \frac{\partial^2 g_{21}^S}{\partial x^2 \partial x^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}^S}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}^S}{\partial x^1 \partial x^1} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x^2 \partial x^1} - \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 g_{21}}{\partial x^1 \partial x^2} \right] \\ &= R_{1212}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

in quanto $g_{11}^S, g_{12}^S, g_{22}^S$ coincidono con g_{11}, g_{12}, g_{22} , rispettivamente. Essendo quindi anche

$$g_{11}^S g_{22}^S - (g_{12}^S)^2 = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2 = 1$$

nel punto p , concludiamo che $\text{Sec}_p^S(\pi) = \text{Sec}_p(\pi)$.

Se allora abbiamo una qualunque immersione isometrica in $\mathbb{R}^3$ di un intorno di p in S (come abbiamo sottolineato nell'introduzione non sempre vi è tale immersione), vedremo nell'Osservazione 7.4.5 che vale

$$R^S(p) = 2G_p,$$

dove G_p è la *curvatura di Gauss* della superficie immagine dell'immersione locale, che introdurremo nella Sezione 7.3. Dunque $\text{Sec}_p(\pi) = G_p$ (come definito da Riemann).

5.5. Gli spazi $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$

Mostreremo nel Teorema 9.1.1 che le uniche varietà riemanniane di dimensione n , complete e semplicemente connesse, con curvatura sezionale costante uguale a $k \in \{0, 1, -1\}$ sono:

- $\mathbb{R}^n$ se $k = 0$,
- $\mathbb{S}^n$ se $k = 1$,
- $\mathbb{H}^n$ se $k = -1$.

con le loro metriche canoniche (standard) definite nella Sezione 2.3. Vediamo in questa sezione che effettivamente la loro curvatura è costante.

ESEMPIO 5.5.1 (Spazio euclideo). Riassumiamo tutto quello che sappiamo sullo spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$, in coordinate standard:

- $g_{\text{eucl}} = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j = (dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2$, dunque $g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}$,
- la distanza riemanniana è data da $d(x, y) = |x - y|$ e lo spazio metrico $(\mathbb{R}^n, d)$ è completo,
- $\Gamma_{ij}^k = 0$ per ogni $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ e ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$,
- il trasporto parallelo di un vettore lungo un cammino è la semplice traslazione, in particolare l'olonomia di $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$ è banale,
- le geodetiche sono le rette, le semirette e i segmenti di retta e sono sempre minimali tra qualunque loro due punti. Precisamente, la geodetica uscente da $x \in \mathbb{R}^n$ con velocità iniziale $v \in T_x M \simeq \mathbb{R}^n$ è data dalla curva $t \mapsto x + tv$ ed è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$,
- la mappa esponenziale è data da $\exp_x(tv) = x + tv$,
- il raggio di iniettività di ogni punto, quindi di $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$, è uguale a $+\infty$,
- $\text{Riem} = 0$, cioè $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$ ha curvatura costante nulla.

OSSERVAZIONE 5.5.2. Ovviamente, se la mappa $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ è un rivestimento riemanniano di un toro piatto da parte di $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$, anche il tensore di Riemann di $\mathbb{T}^n$ è nullo.

ESEMPIO 5.5.3 (Sfere). Consideriamo la sfera unitaria $(\mathbb{S}^n, g_{\text{can}})$ con la sua metrica canonica, vista come la sottovarietà $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$. Le sfere di raggio diverso da 1 si ottengono moltiplicando la metrica per un fattore positivo (si veda l'Esempio 2.3.1). Abbiamo visto che in coordinate locali date dalle proiezioni stereografiche, per esempio dal polo Nord $N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$, la metrica g_{can} si scrive

$$g_{\alpha\beta} = \frac{4}{(|x_N|^2 + 1)^2} \delta_{\alpha\beta}$$

e abbiamo osservato che questo è un cambio conforme della metrica euclidea di $\mathbb{R}^n$ (che è topologicamente omeomorfo alla sfera $\mathbb{S}^n$ privata di un punto – il polo Nord in questo caso). Notiamo inoltre che $\mathbb{S}^n$ è uno spazio compatto e completo con la distanza data dalla metrica riemanniana.

Nell'Esempio 3.2.10 abbiamo calcolato i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita in queste coordinate:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = -\frac{2}{|x_N|^2 + 1} (x_N^\alpha \delta_\beta^\gamma + x_N^\beta \delta_\alpha^\gamma - x_N^\gamma \delta_{\alpha\beta}).$$

Le geodetiche di $(\mathbb{S}^n, g_{\text{can}})$ sono archi di cerchi massimi (Esempio 4.1.8) e la mappa esponenziale è definita su tutto $T\mathbb{S}^n$. Osserviamo che il raggio di iniettività in ogni punto $p \in \mathbb{S}^n$ vale π . Infatti, tutte le geodetiche più lunghe di π superano il punto antipodale a p (cioè $-p$) e la mappa esponenziale su una palla $B_r(O_p) \subseteq T_p \mathbb{S}^n$ con $r > \pi$ non è iniettiva (si mostri per esercizio che $\exp_p$ ristretta alla palla $B_\pi(O_p)$ è invece un diffeomorfismo). Dunque $\text{inj}(\mathbb{S}^n) = \pi$.

Calcoliamo ora la curvatura di $(\mathbb{S}^n, g_{\text{can}})$. Poiché abbiamo l'espressione sopra dei simboli di Christoffel, potremmo procedere usando la formula (5.5) (lo si faccia per esercizio), come

faremo per lo spazio iperbolico nell'esempio che segue, ma usiamo invece il fatto che $(\mathbb{S}^n, g_{\text{can}})$ è una sottovarietà di $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{eucl}})$, con la metrica indotta e sfruttiamo invece la formula (3.9) per la sua derivata di Levi-Civita.

Sia $\{e_i\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$, dunque $e_1, \dots, e_n$ è una base del tangente alla sfera nel polo Nord $N = (0, \dots, 0, 1)$ e

$$\tilde{e}_i(x) = e_i - \langle x, e_i \rangle x = e_i - x^i x^k e_k = (\delta^{ik} - x^i x^k) e_k$$

sono dei campi vettoriali su $\mathbb{R}^{n+1}$, tangenti alla sfera, che estendono i vettori $e_i \in T_N \mathbb{S}^n$. Calcoliamo allora, per $i, j \in \{1, \dots, n\}$, nel punto N ,

$$\begin{aligned} [\tilde{e}_i, \tilde{e}_j] &= [\tilde{e}_i, \tilde{e}_j]_{\mathbb{R}^{n+1}}^\top \\ &= [(\delta^{ik} - x^i x^k) e_k, (\delta^{jl} - x^j x^l) e_l] \\ &= (\delta^{ik} - x^i x^k) \frac{\partial}{\partial x^k} (-x^j x^l) e_l - (\delta^{jl} - x^j x^l) \frac{\partial}{\partial x^l} (-x^i x^k) e_k \\ &= -(\delta^{ik} - x^i x^k) (\delta_k^j x^l + \delta_k^l x^j) e_l + (\delta^{jl} - x^j x^l) (\delta_l^i x^k + \delta_l^k x^i) e_k \\ &= -\delta^{ij} x^m e_m - x^j \delta^{im} e_m + 2x^i x^j x^m e_m + \delta^{ij} x^m e_m + x^i \delta^{jm} e_m - 2x^i x^j x^m e_m \\ &= x^i e_j - x^j e_i, \end{aligned}$$

che è zero, in quanto, poiché $x = N = (0, \dots, 0, 1)$, abbiamo $x^i = x^j = 0$, essendo $i, j \neq n+1$. Si ha poi, per la formula (3.9),

$$\begin{aligned} \nabla_{\tilde{e}_i}^{\mathbb{S}^n} \tilde{e}_j &= (\nabla_{\tilde{e}_i}^{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{e}_j)^\top \\ &= (\nabla_{e_i}^{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{e}_j - x^i x^s \nabla_{e_s}^{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{e}_j)^\top \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i} (-x^j x^m) e_m + x^i x^s \frac{\partial}{\partial x^s} (x^j x^m) e_m \right)^\top \\ &= [(-\delta_i^j x^m - \delta_i^m x^j + x^i x^s (\delta_s^j x^m + \delta_s^m x^j)) e_m]^\top \\ &= (-\delta_i^j x - x^j e_i + 2x^i x^j x)^\top \\ &= -x^j \tilde{e}_i \end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{S}^n$ (abbiamo usato il fatto che in tali punti si ha $x^\top = 0$).

Dunque, nel punto N si ha $\nabla_{\tilde{e}_i}^{\mathbb{S}^n} \tilde{e}_j = 0$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e

$$\nabla_{\tilde{e}_k}^{\mathbb{S}^n} \nabla_{\tilde{e}_i}^{\mathbb{S}^n} \tilde{e}_j = \nabla_{\tilde{e}_k}^{\mathbb{S}^n} (-x^j \tilde{e}_i) = -\delta_{jk} \tilde{e}_i - x^j \nabla_{\tilde{e}_k}^{\mathbb{S}^n} \tilde{e}_i = -\delta_{jk} e_i,$$

da cui

$$R_N(e_i, e_k) e_j = -\delta_{jk} e_i + \delta_{ji} e_k.$$

Segue che, nel punto N , abbiamo

$$R_N(e_i, e_k, e_j, e_l) = \delta_{ji} \delta_{kl} - \delta_{jk} \delta_{il},$$

essendo $\{e_i\}$ una base ortonormale di $T_N \mathbb{S}^n$, cioè $\text{Riem}_N = g_N \otimes g_N / 2$. Quindi tutte le curvatures sezionali dei piani in $T_N \mathbb{S}^n$ sono uguali a 1. Avendo $\mathbb{S}^n$, per ogni coppia di suoi punti un'isometria in se stessa che manda il primo punto nel secondo, tutte le curvatures sezionali di tutti i piani contenuti in ogni suo spazio tangente sono uguali a 1 e $\mathbb{S}^n$ ha curvatura costante uguale a 1.

Si ha dunque $R_{ijkl} = g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}$, cioè $\text{Riem} = g \otimes g / 2$ e

$$R_{ij} = (n-1) \delta_{ij}, \text{ cioè Ric} = (n-1)g \quad \text{e} \quad R = n(n-1).$$

OSSERVAZIONE 5.5.4. Considerando il rivestimento riemanniano a due fogli $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$, con le metriche canoniche su $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{RP}^n$ (Esempio 2.3.11), segue che lo spazio proiettivo ha anch'esso curvatura costante 1.

ESEMPIO 5.5.5 (Spazio iperbolico). Nell'Esempio 2.3.2 abbiamo definito lo spazio iperbolico $(\mathbb{H}^n, g_{\text{can}})$ come il semispazio di $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}$$

con la metrica

$$g_{\text{can}} = \frac{1}{(x^n)^2} g_{\text{eucl}} = \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i,$$

che è chiaramente conforme a quella di $\mathbb{R}^n$ ristretta al semispazio $\mathbb{H}^n$. Come per le sfere omotetiche a $\mathbb{S}^n$, le proprietà degli spazi $(\mathbb{H}_c^n, g^c)$, omotetici a $(\mathbb{H}^n, g_{\text{can}})$ (si veda l'Esempio 2.3.2), si ottengono usando le relazioni (5.14) (ricordiamo che i simboli di Christoffel non cambiano per omotetia della metrica).

Nell'Esempio 3.2.11 abbiamo calcolato i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita,

$$\Gamma_{ij}^k = -\frac{1}{x^n} (\delta_i^n \delta_j^k + \delta_j^n \delta_i^k - \delta_{ij} \delta^{kn}),$$

osservando che se esattamente uno o tutti e tre gli indici i, j, k sono diversi da n , si ha $\Gamma_{ij}^k = 0$. Nei restanti casi si ha

$$\Gamma_{ij}^n = \frac{\delta_{ij}}{x^n} \quad \Gamma_{in}^k = -\frac{\delta_i^k}{x^n} \quad \Gamma_{nn}^n = -\frac{1}{x^n},$$

per ogni $i, j \neq n$.

Possiamo allora ricavare il tensore di curvatura per mezzo della formula (5.5) e calcolare le curvature sezionali. Essendo $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 1/(x^n)^4$,

$$R_{1212} = \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial x^1} + \Gamma_{11}^n \Gamma_{2n}^2 - \Gamma_{21}^n \Gamma_{1n}^2 \right) / (x^n)^2 = \Gamma_{11}^n \Gamma_{2n}^2 / (x^n)^2 = -1/(x^n)^4$$

da cui $\text{Sec}(\langle e_1, e_2 \rangle) = -1$ in ogni punto di $\mathbb{H}^n$. Quindi $(\mathbb{H}^n, g_{\text{can}})$ ha curvatura costante -1 , in quanto è omogeneo e isotropo (Osservazione 2.3.3), dunque per ogni punto $y \in \mathbb{H}^n$ e piano $\pi \in T_y \mathbb{H}^n$ esiste un'isometria $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ tale che $f(x) = y$ e $df_x(\langle e_1, e_2 \rangle) = \pi$, da cui $\text{Sec}(\pi) = -1$. Segue che $R_{ijkl} = -(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, cioè $\text{Riem} = -g \otimes g/2$ (per esercizio si provi tale uguaglianza ricavando il tensore di curvatura, per mezzo della formula (5.5), dall'espressione sopra dei simboli di Christoffel) e

$$R_{ij} = -\frac{n-1}{(x^n)^2} \delta_{ij} \quad \text{cioè} \quad \text{Ric} = -(n-1)g \quad \text{e} \quad R = -n(n-1).$$

La varietà riemanniana $(\mathbb{H}^n, g_{\text{can}})$ è completa e lo studio delle geodetiche è ben noto: fissiamo $x \in \mathbb{H}^n$ e una direzione $v \in T_x \mathbb{H}^n \simeq \mathbb{R}^n$. Vogliamo calcolare la traiettoria della geodetica γ uscente da x con velocità v . Abbiamo, per la formula (4.2) e l'espressione dei simboli di Christoffel vista sopra,

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}^i = 2\dot{\gamma}^n \dot{\gamma}^i / \gamma^n, & \text{per } i = 1, \dots, n-1 \\ \ddot{\gamma}^n = ((\dot{\gamma}^n)^2 - \sum_{k=1}^{n-1} (\dot{\gamma}^k)^2) / \gamma^n \end{cases} \quad (5.16)$$

con $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = v$.

Dobbiamo distinguere due casi: se v è parallelo all'asse x^n allora si vede facilmente che la soluzione (unica) γ deve soddisfare $\gamma^i = x^i$ per $i = 1, \dots, n-1$ e

$$\ddot{\gamma}^n = (\dot{\gamma}^n)^2 / \gamma^n,$$

che ha la soluzione $\gamma^n(t) = x^n e^{tv^n/x^n}$. Dunque γ è una semiretta parallela all'asse x^n , definita su tutto $\mathbb{R}$ e $\gamma^n(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$ o $t \rightarrow -\infty$ a seconda del segno del rapporto v^n/x^n . Supponiamo adesso che v non sia parallelo all'asse x^n . Sia π il 2-piano affine di $\mathbb{R}^n$ passante per x individuato dai vettori $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ e v , proviamo che il supporto di γ è la semicirconferenza ottenuta intersecando con $\mathbb{H}^n$ l'unica circonferenza contenuta in π , passante per x tangente a v e che incontra l'iperpiano $x^n = 0$ formando un angolo retto (quest'ultima condizione significa che il centro della circonferenza in questione appartiene all'iperpiano $x^n = 0$).

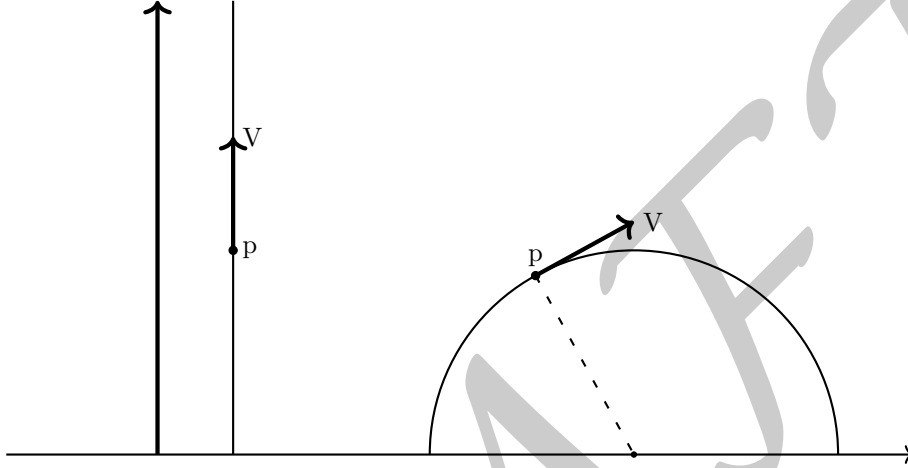


FIGURA 5.2

Prima di procedere con la dimostrazione, osserviamo che la metrica g_{can} è invariante rispetto alle isometrie euclidee di $\mathbb{R}^n$ che non modificano l'ultima componente. Di conseguenza non è restrittivo assumere $x = (0, \dots, 0, x^n)$ e $v = (v^1, 0, \dots, 0, v^n)$. Poiché la "traiettoria" della geodetica γ è invariante rispetto alla lunghezza del vettore v , possiamo anche assumere $v = (1, 0, \dots, 0, \lambda)$, per un certo $\lambda \in \mathbb{R}$. Ci siamo dunque di fatto ridotti al caso del piano iperbolico di coordinate $(w, z) = (w, 0, \dots, 0, z)$ soltanto. La semicirconferenza sopra è allora data dai punti $y \in \mathbb{H}^n$ tali che $y^i = 0$ per $i \in \{2, \dots, n-1\}$ e

$$(y^1 - \lambda x^n)^2 + (y^n)^2 = (x^n)^2(1 + \lambda^2).$$

Consideriamo la seguente curva $\tilde{\gamma}(t) = (w(t), 0, \dots, 0, z(t))$ che la descrive, definita da

$$\begin{cases} w(t) = \lambda x^n - [(x^n)^2(1 + \lambda^2)]^{1/2} \cos s(t) \\ z(t) = [(x^n)^2(1 + \lambda^2)]^{1/2} \sin s(t) \end{cases}$$

dove $s(t) = 2 \arctan e^{t-t_0}$ (che dunque soddisfa $s'(t) = \sin s(t)$), per ogni $t \in \mathbb{R}$, scegliendo il valore t_0 tale che $\tilde{\gamma}(0) = x$. La curva $\tilde{\gamma}$ è allora una geodetica parametrizzata in lunghezza d'arco (rispetto alla metrica g_{can}), infatti le funzioni $w, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verificano

$$\begin{cases} z\ddot{w} = 2\dot{w}\dot{z} \\ z\ddot{z} = \dot{z}^2 - \dot{w}^2 \end{cases}$$

che sono le equazioni (5.16) delle geodetiche di $\mathbb{H}^n$.

Osserviamo che, per costruzione, $\tilde{\gamma}(0) = x$ mentre $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \frac{x^n}{\sqrt{1+\lambda^2}}v$, quindi $\tilde{\gamma}$ è una riparametrizzazione della geodetica γ cercata. Vediamo infine che $\tilde{\gamma}$ è definita in tutto $\mathbb{R}$, di conseguenza lo

è anche γ . Infatti, notiamo che $z(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \pm\infty$, dunque γ tende all'iperpiano $x^n = 0$ per $t \rightarrow \pm\infty$.

OSSERVAZIONE 5.5.6. Si noti che in $\mathbb{H}^n$ (così come in $\mathbb{R}^n$) due geodetiche possono incontrarsi in un solo punto. Dunque, due geodetiche distinte uscenti da uno stesso punto non si intersecano in altri punti. Inoltre, dall'analisi precedente si vede facilmente che per ogni coppia di punti vi è sempre una geodetica che li unisce che, per quanto detto, deve essere allora unica. Infine, si noti che per un punto esterno a una geodetica completa (una "retta" iperbolica) passano infinite altre geodetiche complete che non la intersecano, proprietà chiaramente estremamente rilevante per la discussione sulle geometrie non euclidee (si ricordi la nota storica nell'Esempio 2.3.2).

ESERCIZIO 5.5.7. Si mostri che nel modello del disco di Poincaré di $\mathbb{H}^2$ (si veda l'Esempio 2.3.2), le curve geodetiche sono i diametri oppure gli archi di circonferenza che incontrano il bordo formando un angolo retto. Se ne deduca, ricordando che la metrica è conforme a quella euclidea nel disco, che la somma degli angoli di un triangolo (geodetico) nel piano iperbolico è sempre minore di π . Si descrivano poi le geodetiche di $\mathbb{H}^n$ nel modello analogo.

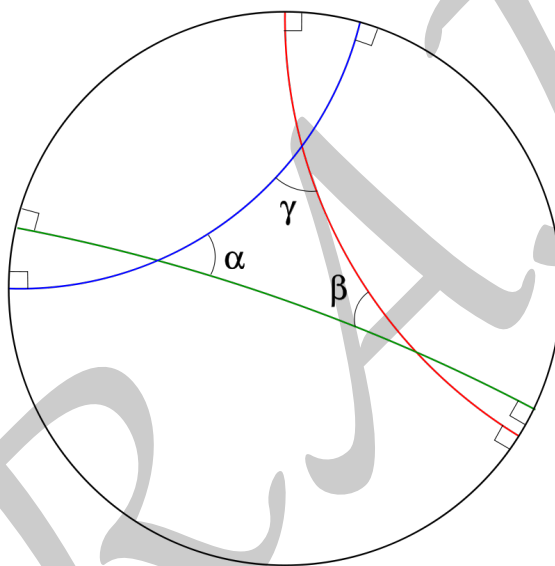


FIGURA 5.3

ESERCIZIO 5.5.8. Si calcolino i vari tensori/operatori di curvatura e le curvature sezionali dei prodotti riemanniani di spazi a curvatura costante.

5.6. Relazioni tra le curvature

Abbiamo visto che l'operatore di Riemann, il tensore di Riemann, l'operatore di curvatura e le curvature sezionali in un punto $p \in M$ di una varietà riemanniana n -dimensionale (M, g) sono in corrispondenza biunivoca tra di loro. Vediamo che ciò non vale in generale per il tensore di Riemann con il tensore di Ricci e la curvatura scalare. Un motivo euristico, come abbiamo visto nella Proposizione 5.3.10, è che il tensore di Riemann Riem in un punto di una varietà riemanniana n -dimensionale (M, g) è determinato da $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ coefficienti, mentre Ric (che è una forma bilineare simmetrica) è determinato da $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficienti e R da uno solo.

In dimensione $n = 1$, non vi è curvatura e tutti questi tensori sono nulli.

In dimensione $n = 2$, la curvatura scalare R determina completamente il tensore di curvatura. Infatti per ogni $p \in M$ si ha $\text{Sec}_p = R_p/2$ (c'è un unico piano in $T_p M$, che è $T_p M$ stesso) dalla formula (5.13), di conseguenza

$$R_{ijkl} = \frac{R}{2}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \quad \text{cioè} \quad \text{Riem} = \frac{R}{4}(g \otimes g)$$

poiché tale uguaglianza è soddisfatta dalle uniche componenti non nulle del tensore di Riemann,

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{2112} = -R_{1221}.$$

Segue che $\mathcal{R} = R \text{Id}/2$ e $\text{Ric} = Rg/2$.

In dimensione $n = 3$, sia il tensore di Riemann che il tensore di Ricci hanno 6 componenti indipendenti, dunque si può ipotizzare che Ric determini Riem . Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormale di $T_p M$, allora per l'equazione (5.12), abbiamo

$$\begin{aligned} R_p(e_1, e_1) &= \text{Sec}_p(\langle e_1, e_2 \rangle) + \text{Sec}_p(\langle e_1, e_3 \rangle) \\ R_p(e_2, e_2) &= \text{Sec}_p(\langle e_2, e_3 \rangle) + \text{Sec}_p(\langle e_2, e_1 \rangle) \\ R_p(e_3, e_3) &= \text{Sec}_p(\langle e_3, e_1 \rangle) + \text{Sec}_p(\langle e_3, e_2 \rangle), \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} 2 \text{Sec}_p(\langle e_1, e_2 \rangle) &= R_p(e_1, e_1) + R_p(e_2, e_2) - R_p(e_3, e_3) \\ 2 \text{Sec}_p(\langle e_2, e_3 \rangle) &= R_p(e_2, e_2) + R_p(e_3, e_3) - R_p(e_1, e_1) \\ 2 \text{Sec}_p(\langle e_3, e_1 \rangle) &= R_p(e_3, e_3) + R_p(e_1, e_1) - R_p(e_2, e_2). \end{aligned}$$

Segue allora che se $n = 3$, conoscendo il tensore di Ricci in $p \in M$, possiamo calcolare le curvature sezionali di ogni piano in $T_p M$, quindi Riem_p è univocamente determinato. Invece, la curvatura scalare $R(p)$ non determina il tensore di Ricci (dunque nemmeno Riem_p), si veda l'Esempio 5.8.10.

Se $n = 4$ il tensore di Ricci ha 10 componenti indipendenti mentre il tensore di Riemann 20 e la differenza aumenta all'aumentare della dimensione (Esempio 5.8.11). Pertanto, in generale, il tensore di Ricci non determina il tensore di Riemann, se $n \geq 4$.

Il tensore di Riemann in termini del tensore di Ricci (e della curvatura scalare che ne è la traccia) in dimensione $n = 3$ è descritto esplicitamente dalla seguente formula

$$\text{Riem} = \frac{R}{12}g \otimes g + \left(\text{Ric} - \frac{R}{3}g\right) \otimes g. \quad (5.17)$$

Inoltre, questa "decomposizione" è ortogonale, nel senso che i tensori di curvatura algebrici $\frac{R}{12}g \otimes g$ e $(\text{Ric} - Rg/3) \otimes g$ sono ortogonali rispetto all'estensione della metrica a $T_4^0 M$, di cui lo spazio dei tensori di curvatura algebrici su TM è un sottospazio vettoriale delle sue sezioni. Una conseguenza è che

$$|\text{Riem}|^2 = \frac{R^2}{144}|g \otimes g|^2 + \left| \left(\text{Ric} - \frac{R}{3}g\right) \otimes g \right|^2 = \frac{R^2}{3} + 4 \left| \left(\text{Ric} - \frac{R}{3}g\right) \right|^2 = 4|\text{Ric}|^2 - R^2,$$

per le formule dell'Esercizio 5.3.6 e il fatto che il tensore $\text{Ric} - Rg/3$ ha traccia nulla.

Un modo di dimostrare la formula (5.17) è quello di considerare il tensore di curvatura algebrico

$$P = \frac{R}{12}g \otimes g + \left(\text{Ric} - \frac{R}{3}g\right) \otimes g$$

e di vedere che $\text{Pic} = \text{Ric}$, dove Pic è l'analogo per P del tensore di Ricci, cioè in coordinate $P_{ik} = g^{jl}P_{ijkl}$ e $P = g^{ik}P_{ik} = g^{ik}g^{jl}P_{ijkl}$ è l'analogo della curvatura scalare per P . Poiché Pic determina unicamente P in dimensione 3 (analogamente a Ric con Riem), possiamo concludere che $P = \text{Riem}$.

ESERCIZIO 5.6.1. Si mostri che per ogni forma bilineare simmetrica h e tensore di curvatura algebrico P su $T_p M$, si ha

$$g(g \otimes h, P) = 4g(h, \text{Pic}) = 4\text{Pic}_{ik} h_{jl} g^{ij} g^{kl}$$

da cui

$$g(g \otimes g, P) = 4P.$$

In dimensione $n \geq 4$, la naturale analoga n -dimensionale della formula (5.17)

$$\text{Riem} = \frac{R}{2n(n-1)} g \otimes g + \frac{1}{n-2} \left(\text{Ric} - \frac{R}{n} g \right) \otimes g$$

non vale in generale (altrimenti, il tensore di Ricci determinerebbe univocamente il tensore di Riemann). Vi è infatti un termine (tensore) ulteriore, detto *tensore di Weyl* (da Hermann Weyl [224]), denotato con Weyl :

$$\text{Riem} = \frac{R}{2n(n-1)} g \otimes g + \frac{1}{n-2} \left(\text{Ric} - \frac{R}{n} g \right) \otimes g + \text{Weyl}. \quad (5.18)$$

Definendo il tensore a traccia nulla $\overset{\circ}{\text{Ric}} = \text{Ric} - Rg/n$, chiamato *tensore di Ricci trace-free* (si noti che in dimensione $n = 2$ si ha $\overset{\circ}{\text{Ric}} = 0$), questa formula si può scrivere come

$$\text{Riem} = \frac{R}{2n(n-1)} g \otimes g + \frac{1}{n-2} \overset{\circ}{\text{Ric}} \otimes g + \text{Weyl}. \quad (5.19)$$

Si vede facilmente che il tensore di Weyl è un tensore di curvatura algebrico (dunque ha le stesse simmetrie del tensore di Riemann) ed ha la proprietà che ogni sua traccia è nulla, cioè è *completamente trace-free*. Si noti dunque (si faccia riferimento alle formule dell'Esercizio 5.3.6) che allora la traccia "totale" del primo addendo, cioè $\text{tr}^{1,3}(\frac{R}{2n(n-1)} g \otimes g)$, è nulla in un punto $p \in M$ se e solo se $R_p = 0$, la traccia sul primo e terzo indice del secondo addendo è nulla in $p \in M$ se e solo se $\overset{\circ}{\text{Ric}}_p$ è nullo, mentre la sua traccia "totale" è sempre zero. Infine, ogni traccia del terzo è nulla.

Per mostrare che tutte le tracce del tensore di Weyl sono nulle, basta ovviamente controllare che $g^{jl} W_{ijkl} = 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} g^{jl} W_{ijkl} &= g^{jl} \left(R_{ijkl} - \frac{R}{2n(n-1)} (g \otimes g)_{ijkl} - \frac{1}{n-2} (\overset{\circ}{\text{Ric}} \otimes g)_{ijkl} \right) \\ &= R_{ik} - Rg_{ik}/n - \overset{\circ}{R}_{ik} \\ &= 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la formula

$$g^{jl} (g \otimes h)_{ijkl} = (n-2)h_{ik} + g_{ik} \text{tr } h$$

dell'Esercizio 5.3.6.

La decomposizione del tensore di Riemann espressa nella formula (5.19) è inoltre ortogonale (come in dimensione $n = 3$), infatti

$$g(g \otimes g, \overset{\circ}{\text{Ric}} \otimes g) = 8(n-1) \text{tr } \overset{\circ}{\text{Ric}} = 0$$

$$g(g \otimes g, \text{Weyl}) = 4g^{jl} g^{ki} W_{ijkl} = 0$$

$$g(\overset{\circ}{\text{Ric}} \otimes g, \text{Weyl}) = 4g^{jl} W_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ms} g^{im} g^{ks} = 0$$

dove abbiamo utilizzato le formule degli Esercizi 5.3.6 e 5.6.1 e la proprietà di Weyl di essere completamente trace-free. Una conseguenza è la formula

$$\begin{aligned} |\text{Riem}|^2 &= \frac{R^2}{4n^2(n-1)^2} |g \otimes g|^2 + \frac{1}{(n-2)^2} |\overset{\circ}{\text{Ric}} \otimes g|^2 + |\text{Weyl}|^2 \\ &= \frac{2}{n(n-1)} R^2 + \frac{4}{n-2} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + |\text{Weyl}|^2. \end{aligned}$$

Se nella formula (5.18) “raccolliamo” il termine $Rg \otimes g$, otteniamo un'altra decomposizione ortogonale del tensore di Riemann,

$$\text{Riem} = \frac{1}{n-2} \left(\text{Ric} - \frac{R}{2(n-1)} g \right) \otimes g + \text{Weyl}. \quad (5.20)$$

Il tensore

$$S = \frac{1}{n-2} \left(\text{Ric} - \frac{R}{2(n-1)} g \right)$$

è detto *tensore di Schouten* (in dimensione $n = 2$, per convenzione lo poniamo uguale a zero), dunque

$$\text{Riem} = S \otimes g + \text{Weyl}.$$

OSSERVAZIONE 5.6.2. Dalla formula (5.18) segue anche la seguente decomposizione (non ortogonale) di Riem

$$\text{Riem} = -\frac{R}{2(n-1)(n-2)} g \otimes g + \frac{1}{n-2} \text{Ric} \otimes g + \text{Weyl}. \quad (5.21)$$

OSSERVAZIONE 5.6.3. La formula (5.18) vale anche se $n = 3$, poiché non vi sono tensori di curvatura algebrici completamente trace-free, se $n = 3$. Infatti, ogni ipotetica componente non nulla P_{ijkl} di un tale tensore in una base ortonormale deve avere due (e non tre) indici uguali, poiché gli indici possono variare solo in $\{1, 2, 3\}$, che dunque non possono stare entrambi nella prima o seconda coppia. Consideriamo allora P_{1212} e P_{1213} , abbiamo

$$\begin{aligned} P_{1212} &= -P_{1313} = P_{2323} = -P_{2121} = -P_{1212} = 0 \\ P_{1213} &= -P_{2223} - P_{3233} = 0 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la proprietà trace-free e le simmetrie di P . Sempre per tali simmetrie, concludiamo che $P_{ijkl} = 0$ per ogni $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$. Quindi la formula (5.17) può essere vista come un caso particolare della formula (5.18), dicendo che in dimensione minore di 4 il tensore di Weyl è sempre nullo.

ESERCIZIO 5.6.4. Si scriva la norma al quadrato di $\overset{\circ}{\text{Ric}}$ e di S .

Usando le formule degli Esercizi 5.3.6 e 5.6.1, si scriva la norma al quadrato del tensore di Riemann in termini della norma al quadrato di Ric , Weyl e di R^2 , oppure di S e Weyl .

ESERCIZIO 5.6.5. In dimensione $n = 3$, si esprimano R^2 e le norme al quadrato di $\mathcal{R}$, Riem , Ric , $\overset{\circ}{\text{Ric}}$ e S in termini degli autovalori del tensore di Ricci.

ESERCIZIO 5.6.6. Si scrivano il tensore di Ricci trace-free, il tensore di Schouten e il tensore di Weyl della varietà prodotto $(M \times N, g \times h)$ di due varietà riemanniane (M, g) e (N, h) .

ESERCIZIO 5.6.7. Usando la formula (5.18), si mostri che data una base ortonormale $\{e_i\}$ di $T_p M$, la base $\{e_i \wedge e_j\}$ di $\Lambda^2 T_p M$ diagonalizza la forma bilineare simmetrica $\mathcal{R}_p$, nella Definizione 5.3.11, se e solo se tale base diagonalizza le forme analogamente associate al tensore di Weyl e a $\text{Ric} \otimes g$. Si osservi che se $\{e_i\}$ è una base ortonormale di $T_p M$ che diagonalizza una forma bilineare simmetrica h di $T_p M$, con autovalori λ_i (rispetto all'endomorfismo lineare

autoaggiunto di $T_p M$ relativo a g_p), allora la base $\{e_i \wedge e_j\}$ di $\Lambda^2 T_p M$ diagonalizza la forma bilineare simmetrica analogamente associata a $h \otimes g_p$, con autovalori $(\lambda_i + \lambda_j)/2$ (rispetto all'endomorfismo lineare autoaggiunto di $\Lambda^2 T_p M$ relativo a g_p), rispettivamente. Si concluda che allora se una varietà (M, g) ha tensore di Weyl nullo, ha operatore di curvatura puro (si veda la Sezione 5.3). Ciò fornisce una dimostrazione alternativa del fatto che ogni varietà di dimensione $n = 3$ ha tale proprietà, in quanto $W = 0$ (si veda la discussione immediatamente seguente l'Osservazione 5.3.13).

Tutta la precedente discussione e in particolare, la decomposizione data dalla formula (5.19) (o (5.18)) vale in realtà, con gli stessi argomenti, per ogni tensore di curvatura algebrico. Dato un tensore di curvatura algebrico P su $T_p M$ sia Pic l'analogo per P del tensore di Ricci, cioè in coordinate $P_{ik} = g^{jl} P_{ijkl}$ e $P = g^{ik} P_{ik} = g^{ik} g^{jl} P_{ijkl}$ l'analogo della curvatura scalare per P . Abbiamo visto nella Proposizione 5.3.10 che P è determinato da $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ coefficienti, mentre Pic , che è una forma bilineare simmetrica, è determinata da $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficienti e P da uno solo. Si ha dunque la seguente decomposizione ortogonale di $C_p(M)$.

TEOREMA 5.6.8. *Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione $n > 2$ e sia $\mathcal{S}_0^2 M_p$ lo spazio delle forme bilineari simmetriche su $T_p M$ a traccia nulla. Allora vale la seguente decomposizione ortogonale dello spazio dei tensori di curvatura algebrici in p ,*

$$C_p(M) = \langle g_p \otimes g_p \rangle \oplus^\perp \mathcal{S}_0^2 M_p \otimes g_p \oplus^\perp \mathcal{W}_p$$

dove $\mathcal{W}_p \subseteq C_p(M)$ è lo spazio dei tensori di curvatura algebrici su $T_p M$ tali che ogni traccia è nulla, detto spazio dei tensori di Weyl.

Per ogni $P \in C_p(M)$, si ha la seguente somma di tensori mutualmente ortogonali,

$$P = \frac{P}{2n(n-1)} g \otimes g + \frac{1}{n-2} \text{Pic} \otimes g + W,$$

dove Pic è la forma bilineare simmetrica $\text{tr}^{1,3} P$, la cui traccia (che è la traccia "totale" di P) è P e di cui la versione trace-free è $\text{Pic} = \text{Pic} - P g_p / n$, infine W è un tensore di curvatura algebrico con ogni traccia nulla.

OSSERVAZIONE 5.6.9. Se $n = 1$ lo spazio $C_p(M)$ ha dimensione zero, se $n = 2$ lo spazio $C_p(M)$ ha dimensione uno,

$$C_p(M) = \langle g_p \otimes g_p \rangle$$

e

$$P = \frac{P}{4} g \otimes g,$$

per ogni $P \in C_p(M)$.

ESERCIZIO 5.6.10. Si consideri la mappa lineare $\Psi_g : \mathcal{S}_p^2 M \rightarrow C_p(M)$ dallo spazio delle forme bilineari simmetriche allo spazio dei tensori di curvatura algebrici su $T_p M$, data da $h \mapsto \Psi_g(h) = h \otimes g$. Si mostri che Ψ_g è iniettiva per $n > 2$ e si noti che la prima formula dell'Esercizio 5.6.1 esprime il fatto che la contrazione di Ricci $c_g : C_p(M) \rightarrow \mathcal{S}_p^2 M$, definita da $c_g(P)_{ik} = g^{jl} P_{ijkl}$ è l'aggiunta (o trasposta) di Ψ diviso 4.

OSSERVAZIONE 5.6.11. Per il Lemma 5.3.9 e l'esercizio precedente si ha allora,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^2(\Lambda^2 T_p M) &= \Lambda_p^4 M \oplus^\perp \langle g_p \otimes g_p \rangle \oplus^\perp \mathcal{S}_0^2 M_p \otimes g_p \oplus^\perp \mathcal{W}_p \\ &= \Lambda_p^4 M \oplus^\perp \Psi_g(\langle g_p \rangle) \oplus^\perp \Psi_g(\mathcal{S}_0^2 M_p) \oplus^\perp \mathcal{W}_p \\ &\simeq \Lambda_p^4 M \oplus^\perp \mathbb{R} \oplus^\perp \mathcal{S}_0^2 M_p \oplus^\perp \mathcal{W}_p, \\ C_p(M) &\simeq \mathbb{R} \oplus^\perp \mathcal{S}_0^2 M_p \oplus^\perp \mathcal{W}_p. \end{aligned}$$

Si può mostrare che questa decomposizione (del Teorema 5.6.8) è *irriducibile* rispetto all'azione di $SO(n, g_p)$, si veda [93, Sezione 3.K], per approfondire.

Legate alla decomposizione ortogonale (5.19) del tensore di Riemann, abbiamo le seguenti famiglie di varietà riemanniane.

- Se $\dim(M) \geq 3$ e $\text{Ric} = 0$, il tensore di Ricci è proporzionale alla metrica in ogni punto e si dice che (M, g) è una *varietà di Einstein*. Vedremo inoltre nel Teorema 5.7.8, che la costante di proporzionalità è indipendente dal punto e nell'Osservazione 5.7.9, che se $\dim(M) = 3$, le varietà di Einstein coincidono con le varietà a curvatura costante.
- Se $\dim(M) \geq 4$ e $\text{Weyl} = 0$ in ogni punto, mostreremo nella Sezione 9.2 che (M, g) è *localmente conformalmente flat* (LCF), cioè per ogni punto di M esiste un intorno e un cambio conforme della metrica g tale che la varietà risultante sia flat (piatta) in tale intorno. Vedremo che vale anche il viceversa, cioè se (M, g) è LCF, allora $\text{Weyl} = 0$.
- Se $\dim(M) \geq 4$, $\text{Ric} = 0$ e $\text{Weyl} = 0$, la varietà (M, g) ha curvatura sezionale costante in ogni punto. Ciò implica che la varietà (M, g) è *a curvatura costante* (Teorema 5.7.6) e localmente isometrica a $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{S}^n$ o $\mathbb{H}^n$, eventualmente riscalandone la metrica (Proposizione 9.1.3).

Ovviamente, ogni varietà a curvatura costante è di Einstein e ha $\text{Weyl} = 0$. Inoltre, si può vedere direttamente che $\mathbb{S}^n$ e $\mathbb{H}^n$ (e ovviamente $\mathbb{R}^n$) con le loro metriche canoniche o riscalamanti di queste, sono LCF, per l'espressione locale esplicita di tali metriche, conforme a quella di $\mathbb{R}^n$ (Esempi 2.3.1 e 2.3.2).

ESERCIZIO 5.6.12. Il prodotto di due varietà LCF (o con $\text{Weyl} = 0$) è ancora una varietà LCF (o con $\text{Weyl} = 0$)? E il prodotto di due varietà di Einstein è ancora una varietà di Einstein? Sotto quali condizioni?

Concludiamo questa sezione discutendo il concetto di segno della curvatura. È chiaro cosa significa che una varietà (M, g) ha curvatura scalare positiva/negativa o tensore di Ricci definito o semidefinito positivo/negativo, mentre per il tensore di Riemann abbiamo due possibilità di parlare del suo "segno": possiamo richiedere che tutte le curvature sezionali abbiano lo stesso segno oppure la positività/negatività della forma bilineare $\mathcal{R}$ associata all'operatore di curvatura $\mathcal{R}$. Si ha (puntualmente), per ogni $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$\mathcal{R} \geq 0 \implies g(\mathcal{R}(X \wedge Y), X \wedge Y) \geq 0 \iff \text{Sec} \geq 0 \implies \text{Ric} \geq 0 \implies R \geq 0$$

(analogamente per le curvature negative o se le disuguaglianze sono strette), la prima freccia e l'equivalenza seguente seguono dalla definizione di curvatura sezionale 5.4.1, la terza freccia dalla formula (5.12) e l'ultima dal fatto che la curvatura scalare è la traccia del tensore di Ricci (quindi la somma degli autovalori nonnegativi dell'endomorfismo associato).

Se $n \geq 4$, nessuna di queste frecce è reversibile, si vedano gli esempi nella Sezione 5.8. Se $n = 2$ sono invece tutte equivalenti, per la discussione precedente sulla curvatura in dimensione due. Se $n = 3$, vi sono varietà con curvatura scalare positiva ma con tensore di Ricci con degli autovalori negativi (mostreremo un esempio nel prossimo capitolo) mentre, sebbene la prima freccia sia un'equivalenza in quanto in dimensione tre ogni 2-vettore alternante (o forma) è semplice (Osservazione 5.3.13), la condizione $\text{Ric} \geq 0$ non implica che tutte le curvature sezionali siano maggiori o uguali a zero (Esempio 5.8.14).

DEFINIZIONE 5.6.13. Diciamo che una varietà riemanniana ha curvatura positiva (nonnegativa, negativa, nonpositiva) se tutte le sue curvature sezionali in ogni punto sono positive (maggiori o uguali a zero, negative, minori o uguali a zero).

5.7. La seconda identità di Bianchi

PROPOSIZIONE 5.7.1 (Seconda identità di Bianchi). *Vale la seguente identità:*

$$\nabla_X R(Y, Z, W, T) + \nabla_Y R(Z, X, W, T) + \nabla_Z R(X, Y, W, T) = 0,$$

per ogni $X, Y, Z, W, T \in \Gamma(TM)$.

In coordinate locali si ha

$$\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kil m} + \nabla_k R_{ijl m} = 0. \quad (5.22)$$

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo il tensore di Riemann in coordinate normali centrate in $p \in M$:

$$R_{jklm} = \left(\frac{\partial \Gamma_{jl}^q}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^q}{\partial x^j} + \Gamma_{jl}^s \Gamma_{ks}^q - \Gamma_{kl}^s \Gamma_{js}^q \right) g_{qm}.$$

Allora, nel punto p si ha

$$\nabla_i R_{jklm} = \frac{\partial R_{jklm}}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 \Gamma_{jl}^m}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma_{kl}^m}{\partial x^i \partial x^j},$$

essendo tutti i simboli di Christoffel nulli in p e g_{ij} l'identità. Sommiamo i tre addendi

$$\begin{aligned} & \nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kil m} + \nabla_k R_{ijl m} \\ &= \frac{\partial^2 \Gamma_{jl}^m}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma_{kl}^m}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 \Gamma_{kl}^m}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 \Gamma_{il}^m}{\partial x^k \partial x^j} + \frac{\partial^2 \Gamma_{il}^m}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 \Gamma_{jl}^m}{\partial x^k \partial x^i} \\ &= 0, \end{aligned}$$

da cui la tesi. $\square$

OSSERVAZIONE 5.7.2. Per motivi evidenti la prima identità di Bianchi (5.8) è talvolta detta “identità di bianchi *algebraica*”, mentre la seconda, “identità di Bianchi *differenziale*”.

OSSERVAZIONE 5.7.3. Chiaramente, per ogni campo vettoriale X , il tensore $\nabla_X \text{Riem}$ è un tensore di curvatura algebrico e lo stesso vale per $\nabla_{X_1, \dots, X_k}^k \text{Riem}$, per ogni famiglia di campi vettoriali $X_1, \dots, X_k$. Analogamente, $\nabla_{X_1, \dots, X_k}^k \nabla \text{Riem}$ è un tensore di tipo $(0, 5)$ tale che sommandone il valore sulle permutazioni pari delle sue prime tre variabili, si ottiene zero.

ESERCIZIO 5.7.4. Si mostri che la seconda identità di Bianchi vale anche se i tre indici di ∇Riem su cui si permuta sono quello relativo alla derivata covariante e i due della *seconda* coppia. Si mostri invece che il seguente tensore di tipo $(0, 5)$, definito in coordinate locali da

$$T_{ijklm} = \nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{likm} + \nabla_l R_{ikjm}$$

è simmetrico negli indici k, m ma non è necessariamente nullo.

Sono di grande importanza anche le versioni “contratte” della seconda identità di Bianchi.

Contraendo l'identità in coordinate (5.22) con g^{kl} , otteniamo

$$0 = g^{kl} (\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kil m} + \nabla_k R_{ijl m}) = g^{kl} \nabla_k R_{ijl m} - \nabla_i R_{jm} + \nabla_j R_{im}$$

cioè (per le simmetrie del tensore di Riemann)

$$g^{kl} \nabla_k R_{lmij} = \nabla_i R_{jm} - \nabla_j R_{im} \quad (5.23)$$

che, per la definizione di divergenza, possiamo scrivere come

$$\text{div Riem}_{mij} = \nabla_i R_{jm} - \nabla_j R_{im}.$$

Dunque, nel caso in cui $\text{div Riem} = 0$ si ha

$$\nabla_i R_{jm} = \nabla_j R_{im},$$

cioè il tensore ∇Ric è simmetrico.

Contraendo ulteriormente l'equazione (5.23) con g^{im} , otteniamo

$$-g^{kl}\nabla_k R_{lj} = g^{im}g^{kl}\nabla_k R_{lmij} = g^{im}\nabla_i R_{jm} - g^{im}\nabla_j R_{im}$$

cioè (poiché il tensore di Ricci è simmetrico)

$$2g^{kl}\nabla_k R_{lj} = \nabla_j R.$$

Si ha dunque la seguente identità, detta *lemma di Schur*,

$$2\text{div Ric} = dR \quad (5.24)$$

che può essere scritta equivalentemente nella forma

$$\nabla^i \left(R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} \right) = 0 \quad \text{oppure} \quad \text{div} \left(\text{Ric} - \frac{R}{2} g \right) = 0.$$

Il tensore E che appare nell'equazione precedente

$$E = \text{Ric} - \frac{R}{2} g, \quad E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij},$$

è detto *tensore di Einstein*.

Si può dimostrare che E è l'unico tensore a divergenza nulla che può essere "ottenuto" dalla metrica e dalla curvatura (dalle derivate prima e seconda del tensore metrico in coordinate) e gioca un ruolo centrale nelle equazioni di Einstein per il campo gravitazionale (si veda [218]).

OSSERVAZIONE 5.7.5. Uno dei motivi dell'importanza del tensore di Einstein $E = \text{Ric} - Rg/2$ (in particolare in relatività) è il fatto che è l'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale di azione di Einstein-Hilbert su una varietà differenziabile compatta M (detto anche *curvatura scalare totale*),

$$\mathcal{S}(g) = \int_M R_g d\mu_g$$

dove R_g è la curvatura scalare di (M, g) e μ_g la sua misura canonica, associate a una metrica g . Precisamente, si ha

$$\delta \mathcal{S}_g(h) = \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{S}(g + \varepsilon h) \Big|_{\varepsilon=0} = - \int_M g(E_g, h) d\mu_g = - \int_M E_g^{ij} h_{ij} d\mu_g,$$

per ogni tensore simmetrico h di tipo $(0, 2)$ su M (si vedano [32, Capitolo 4] e [53, Sezione 2.2]).

TEOREMA 5.7.6. Sia (M, g) una varietà riemanniana connessa, di dimensione $n \geq 3$ e con curvatura sezionale costante K_p per ogni $p \in M$. Allora (M, g) ha curvatura costante (cioè la funzione $p \mapsto K_p$ è costante su M).

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario 5.4.9, abbiamo $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$ in coordinate locali, da cui seguono $R_{ij} = (n-1)Kg_{ij}$ e $R = n(n-1)K$. Applicando il lemma di Schur (5.24), otteniamo

$$0 = 2g^{ij}\nabla_i R_{jl} - \nabla_l R = 2(n-1)g^{ij}g_{jl} \frac{\partial K}{\partial x^i} - n(n-1) \frac{\partial K}{\partial x^l} = -(n-1)(n-2) \frac{\partial K}{\partial x^l}.$$

Dunque, la funzione $p \mapsto K_p$ è costante, poiché $n \geq 3$ e $l \in \{1, \dots, n\}$. $\square$

DEFINIZIONE 5.7.7. Una varietà riemanniana (M, g) di dimensione $n \geq 3$ si dice una *varietà di Einstein* se il suo tensore di Ricci è un multiplo della metrica, cioè $\text{Ric} = \lambda g$, per $\lambda \in C^\infty(M)$.

Si noti che ciò è equivalente a richiedere che il tensore di Ricci trace-free, o il tensore di Schouten, o quello di Einstein siano proporzionali alla metrica.

TEOREMA 5.7.8. *Sia (M, g) una varietà di Einstein con $\text{Ric} = \lambda g$, allora λ è costante. In particolare, la sua curvatura scalare è costante.*

DIMOSTRAZIONE. Per la definizione di varietà di Einstein, vale $R_{ij} = \lambda g_{ij}$ per qualche $\lambda \in C^\infty(M)$. Prendendo la traccia di questa equazione si ha $R = \lambda n$, da cui $\lambda = R/n$. Applicando dunque il lemma di Schur (5.24) come nella dimostrazione del Teorema 5.7.6, poiché $n \geq 3$, otteniamo che la funzione $p \mapsto \lambda(p)$ è costante. $\square$

Dunque, le varietà di Einstein con $\text{Ric} = \lambda g$, vengono dette *di costante λ* . Talvolta, quelle di costante nulla si dicono *Ricci-flat* (o *Ricci-piatte*).

OSSERVAZIONE 5.7.9. Se $n = 3$ e in un punto $p \in M$ si ha $\text{Ric}_p = \lambda g_p$, allora, per la formula (5.17), abbiamo $\text{Riem}_p = \frac{R(p)}{12} g_p \otimes g_p$, dunque la varietà (M, g) ha curvatura sezionale costante in p , uguale a $R(p)/6$. Segue dunque dal teorema precedente che in dimensione $n = 3$ le varietà di Einstein coincidono con le varietà a curvatura costante.

ESERCIZIO 5.7.10. Si mostri che se $n = 2$ si ha $\text{Ric} = S = 0$ e che se $n \geq 3$ e il tensore di Einstein è nullo, si ha $\text{Ric} = 0$, dunque (M, g) è una varietà di Einstein con costante zero (lo stesso vale se il tensore di Schouten è nullo).

DEFINIZIONE 5.7.11. Sia (M, g) una varietà riemanniana e S il suo tensore di Schouten. Definiamo il *tensore di Cotton* (talvolta detto anche di *Cotton-York*) come

$$C_{ijk} = \nabla_i S_{jk} - \nabla_j S_{ik} = \frac{1}{n-2} \left(\nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)} (\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}) \right),$$

per $n \geq 3$. Come si vede, il tensore di Cotton “misura” la non-simmetria del tensore ∇S (che è simmetrico negli indici secondo/terzo).

DEFINIZIONE 5.7.12. Un tensore simmetrico B di tipo $(0, 2)$ su (M, g) si dice *di Codazzi* se il tensore ∇B è simmetrico (vedremo il motivo di tale nome nell'Osservazione 7.4.12), cioè se

$$\nabla_i B_{jk} = \nabla_j B_{ik}$$

per ogni terna di indici i, j, k .

Segue dunque che se B è un tensore di Codazzi, si ha

$$\text{div} B = \nabla \text{tr} B.$$

OSSERVAZIONE 5.7.13. Il tensore di Cotton C è zero se e solo se il tensore di Schouten S è un tensore di Codazzi.

ESERCIZIO 5.7.14. Si mostri per un generico tensore simmetrico h di tipo $(0, 2)$ su (M, g) , il tensore di curvatura algebrico $h \otimes h$ non soddisfa necessariamente la seconda identità di Bianchi (e analogamente $h \otimes g$). Si provi che invece tale identità è soddisfatta se h è un tensore di Codazzi (lo stesso per $h \otimes g$).

OSSERVAZIONE 5.7.15. Possiamo decomporre ogni tensore E di tipo $(0, 3)$ su (M, g) , di dimensione $n \geq 2$, considerandone le tracce, come per le 2-forme nell'Osservazione 2.5.6. Scrivendo

$$E_{ijk} = \alpha_i g_{jk} + \beta_j g_{ik} + \gamma_k g_{ij} + F_{ijk},$$

con

$$\begin{aligned}\alpha_i &= \frac{(n+1)g^{\ell m}E_{i\ell m} - g^{\ell m}E_{\ell i m} - g^{\ell m}E_{\ell m i}}{(n+2)(n-1)} \\ \beta_j &= \frac{(n+1)g^{\ell m}E_{\ell j m} - g^{\ell m}E_{j\ell m} - g^{\ell m}E_{\ell m j}}{(n+2)(n-1)} \\ \gamma_k &= \frac{(n+1)g^{\ell m}E_{\ell m k} - g^{\ell m}E_{k\ell m} - g^{\ell m}E_{\ell k m}}{(n+2)(n-1)}\end{aligned}$$

(si noti che sono termini che si ottengono dalle tracce di E), si ha che il tensore F è *completamente trace-free* (ogni sua traccia è nulla) ed è ortogonale agli altri tre della decomposizione.

Segue che

$$|E|^2 \geq |\alpha_i g_{jk} + \beta_j g_{ik} + \gamma_k g_{ij}|^2 = n|\alpha|^2 + n|\beta|^2 + n|\gamma|^2 + 2g(\alpha, \beta) + 2g(\alpha, \gamma) + 2g(\beta, \gamma).$$

Applicando questo argomento al tensore $E = \nabla \text{Ric}$ e tenendo presente il lemma di Schur (5.24), si ottiene (si veda [114, Lemma 11.6])

$$\nabla_i \text{Ric}_{jk} = \frac{n \nabla_i R}{(n+2)(n-1)} g_{jk} + \frac{(n-2) \nabla_j R}{2(n+2)(n-1)} g_{ik} + \frac{(n-2) \nabla_k R}{2(n+2)(n-1)} g_{ij} + F_{ijk},$$

da cui

$$\begin{aligned}|\nabla \text{Ric}|^2 &\geq \left| \frac{n \nabla_i R}{(n+2)(n-1)} g_{jk} + \frac{(n-2) \nabla_j R}{2(n+2)(n-1)} g_{ik} + \frac{(n-2) \nabla_k R}{2(n+2)(n-1)} g_{ij} \right|^2 \\ &= \frac{3n^3 + n^2 - 8n + 4}{2(n+2)^2(n-1)^2} |\nabla R|^2,\end{aligned}$$

che migliora la disuguaglianza standard per ogni 3-forma E ,

$$|E|^2 \geq \frac{|\text{tr } E|^2}{n}, \quad (5.25)$$

per ogni $n \geq 2$, che in questo caso sarebbe

$$|\nabla \text{Ric}|^2 \geq \frac{|\nabla R|^2}{n}.$$

Nel caso E sia simmetrico nelle ultime due componenti, si ha $\beta_\ell = \gamma_\ell$, per ogni $\ell \in 1, \dots, n$, mentre se E è simmetrico (in tutte le sue tre componenti),

$$E_{ijk} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik} + \lambda_k g_{ij} + F_{ijk},$$

con

$$\lambda_i = \frac{(n+1)g^{\ell m}E_{i\ell m} - g^{\ell m}E_{\ell i m} - g^{\ell m}E_{\ell m i}}{(n+2)(n-1)}$$

e tracciando

$$\text{tr } E_i = g^{jk} E_{ijk} = (n+2)\lambda_i.$$

Dunque,

$$|E|^2 = (3n+6)|\lambda|^2 + |F|^2 \quad \text{e} \quad |\text{tr } E|^2 = (n+2)^2 |\lambda|^2$$

da cui la disuguaglianza

$$|E|^2 \geq (3n+6)|\lambda|^2 = \frac{3n+6}{(n+2)^2} |\text{tr } E|^2 = \frac{3}{n+2} |\text{tr } E|^2,$$

che è chiaramente più forte della disuguaglianza standard (5.25). Se B è un tensore di Codazzi, si ha che ∇B è simmetrico, dunque

$$|\nabla B|^2 \geq \frac{3}{n+2} |\nabla \text{tr } B|^2.$$

Un tensore simmetrico h di tipo $(0, 2)$ su (M, g) si dice *armonico* se è di Codazzi e ha divergenza nulla. È facile vedere che ciò è equivalente a essere di Codazzi e con traccia costante.

Per la seconda identità di Bianchi contratta $\nabla^i R_{ijkl} = \nabla_k R_{lj} - \nabla_l R_{kj}$, si ha che il tensore di Ricci è un tensore di Codazzi se e solo se il tensore di Riemann ha divergenza nulla. In tal caso, per il lemma di Schur (5.24), si ha che la curvatura scalare è costante, dunque il tensore di Ricci è armonico se e solo se $\text{div Riem} = 0$. Una varietà (M, g) con $\text{div Riem} = 0$ si dice che ha *curvatura armonica* (o *tensore di Riemann armonico*). Chiaramente, se $\nabla \text{Riem} = 0$ il tensore di Riemann è armonico (essendo parallelo), ma vi sono varietà con curvatura armonica e ∇Riem non nullo (si vedano [60, 72]).

ESERCIZIO 5.7.16. Si mostri per ogni tensore simmetrico h di tipo $(0, 2)$ su una varietà di dimensione $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\text{div}(g \otimes h)_{jkl} = \nabla^i (g \otimes h)_{ijkl} = g_{jl} \text{div} h_k + \nabla_k h_{jl} - g_{jk} \text{div} h_l - \nabla_l h_{jk}.$$

Ovviamente, $\text{div}(g \otimes g) = 0$.

ESERCIZIO 5.7.17. Si mostri che se (M, g) ha curvatura armonica, allora $\nabla R = 0$, il tensore di Ricci trace-free $\hat{\text{Ric}}$ e il tensore di Schouten S sono di Codazzi (quindi il tensore di Cotton C è nullo). Infine, si mostri che $\text{div Weyl} = 0$.

Una varietà (M, g) con $\text{div Weyl} = 0$ si dice che ha *tensore di Weyl armonico*.

PROPOSIZIONE 5.7.18. Se $n \geq 4$, allora

$$\text{div Weyl}_{jkl} = (n-3) C_{klj}.$$

Dunque, se $n \geq 4$, una varietà riemanniana ha tensore di Weyl armonico se e solo se il suo tensore di Cotton è nullo.

DIMOSTRAZIONE. Usando le formule (5.21), (5.23) e (5.24), calcoliamo

$$\begin{aligned} \nabla^i W_{ijkl} &= \nabla_k R_{lj} - \nabla_l R_{kj} + \frac{\nabla^i R}{(n-1)(n-2)} (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) \\ &\quad - \frac{1}{(n-2)} (g_{jl} \text{div Ric}_k + \nabla_k R_{lj} - g_{jk} \text{div Ric}_l - \nabla_l R_{kj}) \\ &= \left(1 - \frac{1}{n-2}\right) (\nabla_k R_{lj} - \nabla_l R_{kj}) \\ &\quad + \left[\frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{2(n-2)} \right] (\nabla_k R_{jl} - \nabla_l R_{kj}) \\ &= (n-3) (\nabla_k S_{lj} - \nabla_l S_{kj}) \\ &= (n-3) C_{klj}, \end{aligned}$$

che è quanto volevamo dimostrare. $\square$

Abbiamo detto nella sezione precedente che in dimensione $n \geq 4$, una varietà (M, g) è LCF se e solo se il suo tensore di Weyl è nullo. In dimensione $n = 3$, dove il tensore di Weyl è sempre nullo, (M, g) è LCF se e solo se il suo tensore di Cotton è nullo. In dimensione $n = 2$ invece, ogni superficie è LCF. Dimostreremo questi fatti nella Sezione 9.2.

OSSERVAZIONE 5.7.19. Facendo riferimento all'Osservazione 5.7.5, un altro interessante funzionale dipendente dalla metrica g su una varietà differenziabile M (di dimensione $n \geq 4$) è il *funzionale di Weyl*

$$\mathcal{W}(g) = \int_M |\text{Weyl}|^2 d\mu_g.$$

Si può mostrare che in dimensione $n = 4$,

$$\delta \mathcal{W}_g(h) = - \int_M g(B, h) d\mu_g,$$

per ogni $(0, 2)$ -tensore simmetrico h (si veda [32, Capitolo 4]), dove il tensore B che rappresenta l'equazione di Eulero–Lagrange di $\mathcal{W}$ si dice *tensore di Bach* ed è definito, in ogni dimensione $n \geq 4$, da

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \frac{1}{n-3} \nabla^k \nabla^l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2} R^{kl} W_{ikjl} \\ &= g^{km} g^{ls} \left(\frac{1}{n-3} \nabla_{kl}^2 W_{imjs} + \frac{1}{n-2} R_{kl} W_{imjs} \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

(si noti che B è un tensore nelle derivate covarianti seconde della curvatura, quindi in coordinate si esprime in derivate fino alla quarta della metrica).

Si può chiaramente scrivere il primo termine di B come una “doppia divergenza” del tensore di Weyl, dunque per la Proposizione 5.7.18 abbiamo la seguente espressione del tensore di Bach in termini del tensore di Cotton (della sua divergenza)

$$B_{ij} = \nabla^k C_{kij} + \frac{1}{n-2} R^{kl} W_{ikjl} = g^{km} \nabla_m C_{kij} + \frac{1}{n-2} g^{ls} g^{km} R_{kl} W_{imjs}. \quad (5.27)$$

Questa espressione suggerisce come definire il tensore di Bach anche in dimensione $n = 3$ (a differenza delle precedenti che per $n = 3$ sono indeterminate), poniamo dunque $B_{ij} = \nabla^k C_{kij}$ se $n = 3$, cioè $B = \text{div } C$.

ESERCIZIO 5.7.20. Si mostri che il tensore di Bach è simmetrico, a traccia nulla e che

$$\text{div } B_i = \nabla^j B_{ji} = \frac{n-4}{n-2} R^{jk} C_{ijk} = (n-4) S^{jk} (\nabla_i S_{jk} - \nabla_j S_{ik})$$

dunque, in dimensione $n = 4$, si ha $\text{div } B = 0$. Si calcoli poi $\text{div div } B$.

5.8. Esempi

ESEMPIO 5.8.1 (Metriche conformi). Consideriamo una varietà riemanniana (M, g) e un cambio conforme della sua metrica. Per comodità nei conti che seguono, si preferisce usualmente descrivere una metrica $\tilde{g}$ conforme a g come $\tilde{g} = e^{2\varphi} g$, per una funzione $\varphi \in C^\infty(M)$. Si noti che dunque $\tilde{g}^{ij} = e^{-2\varphi} g^{ij}$.

Vediamo, nella seguente proposizione, come le quantità geometriche di $\tilde{g}$ si esprimono in termini di quelle di g e delle derivate di φ (rispetto alla connessione di Levi–Civita ∇ di g).

PROPOSIZIONE 5.8.2. Siano (M, g) una varietà riemanniana e $\varphi \in C^\infty(M)$. Allora la metrica conforme $\tilde{g} = e^{2\varphi} g$ ha:

(1) *Connessione di Levi–Civita*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + d\varphi(X) Y + d\varphi(Y) X - g(X, Y) \nabla \varphi$$

(2) *Tensore di Riemann*

$$\widetilde{\text{Riem}} = e^{2\varphi} \left\{ \text{Riem} - [\nabla^2 \varphi - d\varphi \otimes d\varphi + |\nabla \varphi|^2 g/2] \otimes g \right\}$$

(3) *Tensore di Ricci*

$$\widetilde{\text{Ric}} = \text{Ric} - (n-2)(\nabla^2\varphi - d\varphi \otimes d\varphi) - (\Delta\varphi + (n-2)|\nabla\varphi|^2)g$$

(4) *Curvatura scalare*

$$\widetilde{R} = e^{-2\varphi} [R - 2(n-1)\Delta\varphi - (n-2)(n-1)|\nabla\varphi|^2]$$

(5) *Tensore di Weyl*

$$\widetilde{\text{Weyl}} = e^{2\varphi} \text{Weyl}$$

dove $\nabla\varphi$, $|\nabla\varphi|$, $\nabla^2\varphi$ e $\Delta\varphi$ sono rispettivamente il gradiente, la sua norma, l'hessiano e il laplaciano di φ rispetto alla metrica g .

DIMOSTRAZIONE. Per la formula (3.8) e $\tilde{g}^{ij} = e^{-2\varphi}g^{ij}$, i simboli di Christoffel di $\tilde{g}$ soddisfano

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \delta_j^k \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \delta_i^k \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} - g^{kl} \frac{\partial\varphi}{\partial x^l} g_{ij},$$

da cui otteniamo immediatamente la formula per la connessione di Levi-Civita di $(M, \tilde{g})$. Segue allora che il tensore di Riemann è dato da

$$\widetilde{\text{Riem}} = e^{2\varphi} (\text{Riem} - A \otimes g)$$

con

$$A = \nabla^2\varphi - d\varphi \otimes d\varphi + |\nabla\varphi|^2 g/2.$$

Infatti, in un sistema di coordinate normali di (M, g) rispetto a un generico punto $p \in M$, per la Proposizione 4.2.7, in tale punto si hanno le seguenti uguaglianze:

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \delta_j^k \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \delta_i^k \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} - \delta_{ij} \frac{\partial\varphi}{\partial x^k},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ik}^r}{\partial x^j} &= \frac{\partial \Gamma_{ik}^r}{\partial x^j} + \delta_k^r \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j} + \delta_i^r \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial g^{rs}}{\partial x^j} \frac{\partial\varphi}{\partial x^s} g_{ik} - g^{rs} \frac{\partial\varphi}{\partial x^s} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - g^{rs} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^j \partial x^s} g_{ik} \\ &= \frac{\partial \Gamma_{ik}^r}{\partial x^j} + \delta_k^r \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j} + \delta_i^r \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^j \partial x^k} - \delta_{ik} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^j \partial x^r}. \end{aligned}$$

Di conseguenza, sempre nel punto $p \in M$, si ha

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ijk}^r &= \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ik}^r}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{jk}^r}{\partial x^i} + \tilde{\Gamma}_{ik}^m \tilde{\Gamma}_{jm}^r - \tilde{\Gamma}_{jk}^m \tilde{\Gamma}_{im}^r \\ &= \frac{\partial \Gamma_{ik}^r}{\partial x^j} + \delta_i^r \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^j \partial x^k} - \delta_{ik} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^j \partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^r}{\partial x^i} - \delta_j^r \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^k} + \delta_{jk} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^r} \\ &\quad + \left(\delta_k^m \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \delta_i^m \frac{\partial\varphi}{\partial x^k} - \delta_{ik} \frac{\partial\varphi}{\partial x^m} \right) \left(\delta_m^r \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + \delta_j^r \frac{\partial\varphi}{\partial x^m} - \delta_{jm} \frac{\partial\varphi}{\partial x^r} \right) \\ &\quad - \left(\delta_k^m \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + \delta_j^m \frac{\partial\varphi}{\partial x^k} - \delta_{jk} \frac{\partial\varphi}{\partial x^m} \right) \left(\delta_m^r \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \delta_i^r \frac{\partial\varphi}{\partial x^m} - \delta_{im} \frac{\partial\varphi}{\partial x^r} \right) \\ &= R_{ijk}^r + \delta_i^r \nabla_{jk}^2\varphi + \delta_{jk} \nabla_{ir}^2\varphi - \delta_{ik} \nabla_{jr}^2\varphi - \delta_j^r \nabla_{ik}^2\varphi \\ &\quad + \delta_j^r \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \frac{\partial\varphi}{\partial x^k} - \delta_{jk} \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} \frac{\partial\varphi}{\partial x^r} - \delta_{ik} \delta_j^r |\nabla\varphi|^2 \\ &\quad - \delta_i^r \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} \frac{\partial\varphi}{\partial x^k} + \delta_{ik} \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} \frac{\partial\varphi}{\partial x^r} + \delta_{jk} \delta_i^r |\nabla\varphi|^2, \end{aligned}$$

quindi concludiamo (in un generico sistema di coordinate), per ogni $p \in M$,

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_{ijkl} &= \tilde{g}_{rl} \tilde{R}_{ijk}^r \\
 &= e^{2\varphi} \left[R_{ijkl} + \delta_{il} \nabla_{jk}^2 \varphi + \delta_{jk} \nabla_{il}^2 \varphi - \delta_{ik} \nabla_{jl}^2 \varphi - \delta_{jl} \nabla_{ik}^2 \varphi \right. \\
 &\quad \left. - \delta_{ik} \delta_{jl} |\nabla \varphi|^2 + \delta_{jk} \delta_{il} |\nabla \varphi|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \delta_{jl} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \delta_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} - \delta_{il} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \delta_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} \right] \\
 &= e^{2\varphi} \left[R_{ijkl} - (\nabla^2 \varphi \otimes g)_{ijkl} + ((d\varphi \otimes d\varphi) \otimes g)_{ijkl} - |\nabla \varphi|^2 (g \otimes g)_{ijkl}/2 \right] \\
 &= e^{2\varphi} (R_{ijkl} - (A \otimes g)_{ijkl}) .
 \end{aligned}$$

Per il tensore di Ricci abbiamo allora, per l'Esercizio 5.3.6,

$$\begin{aligned}
 \tilde{R}_{ik} &= \tilde{g}^{jl} \tilde{R}_{ijkl} \\
 &= g^{jl} (R_{ijkl} - (A \otimes g)_{ijkl}) \\
 &= R_{ik} - (n-2) A_{ik} - \text{tr } A g_{ik} \\
 &= R_{ik} - (n-2) \nabla_{ik}^2 \varphi + (n-2) \nabla_i \varphi \nabla_k \varphi - (n-2) |\nabla \varphi|^2 g_{ik}/2 \\
 &\quad - (\Delta \varphi - |\nabla \varphi|^2 + n |\nabla \varphi|^2/2) g_{ik} \\
 &= R_{ik} - (n-2) \nabla_{ik}^2 \varphi + (n-2) \nabla_i \varphi \nabla_k \varphi - (\Delta \varphi + (n-2) |\nabla \varphi|^2) g_{ik} ,
 \end{aligned}$$

dunque, per la curvatura scalare,

$$\tilde{R} = \tilde{g}^{ik} \tilde{R}_{ik} = e^{-2\varphi} (R - 2(n-1) \text{tr } A) = e^{-2\varphi} [R - 2(n-1) \Delta \varphi - (n-2)(n-1) |\nabla \varphi|^2] .$$

Infine, calcoliamo il tensore di Weyl:

$$\begin{aligned}
 \widetilde{\text{Weyl}} &= \widetilde{\text{Riem}} + \frac{\tilde{R}}{2(n-1)(n-2)} \tilde{g} \otimes \tilde{g} - \frac{\widetilde{\text{Ric}} \otimes \tilde{g}}{n-2} \\
 &= e^{2\varphi} \{ \text{Riem} - A \otimes g \} + e^{2\varphi} \frac{R - 2(n-1) \text{tr } A}{2(n-1)(n-2)} g \otimes g \\
 &\quad - \frac{e^{2\varphi}}{n-2} \{ \text{Ric} \otimes g - (n-2) A \otimes g - \text{tr } A g \otimes g \} \\
 &= e^{2\varphi} \left(\text{Riem} + \frac{R}{2(n-1)(n-2)} g \otimes g - \frac{\text{Ric} \otimes g}{n-2} \right) \\
 &= e^{2\varphi} \text{Weyl} .
 \end{aligned}$$

□

Si usa dunque dire che il tensore di Weyl è *conformalmente invariante*, in quanto la sua versione $(1, 3)$ data da $\tilde{W}_{ijk}^l = W_{ijkm} g^{ml}$ soddisfa

$$\tilde{W}_{ijk}^l = \tilde{W}_{ijkm} \tilde{g}^{ml} = W_{ijkm} g^{ml} = W_{ijk}^l .$$

Ogni spazio flat (come $\mathbb{R}^n$ con la metrica canonica), avendo tensore di Riemann nullo, ha anche tensore di Weyl nullo. Dunque, ogni spazio LCF, avendo localmente attorno a ogni suo punto un cambio conforme della metrica che lo rende flat, deve avere tensore di Weyl nullo. Come detto, vedremo il viceversa di questo fatto nella Sezione 9.2.

ESERCIZIO 5.8.3. Si calcolino i tensori di curvatura della sfera e dello spazio iperbolico, usando il fatto che le loro metriche sono localmente conformi alla metrica canonica di $\mathbb{R}^n$.

ESEMPIO 5.8.4 (Metriche warped). Date una varietà riemanniana (N, g_N) , di dimensione $n-1$ e una funzione positiva $h : I \times N \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^∞ , dove I è un intervallo aperto di $\mathbb{R}$, consideriamo la varietà riemanniana

$$(M = I \times N, g = dt^2 + h^2(t, p)g_N)$$

e vediamo come le quantità geometriche di g si esprimono in termini di quelle di g_N e delle derivate di h in un sistema di coordinate (t, y^α) , con $\alpha \in \{1, \dots, n-1\}$. Ovviamente, se la funzione h non dipende da $p \in N$, si ha la metrica warped $g = g_{\text{eucl}} \otimes h^2 g_N$ su $I \times N$ (si veda l'Esempio 2.3.4). Poiché

$$g_{tt} = g^{tt} = 1 \quad g_{\alpha t} = g^{\alpha t} = 0 \quad g_{\alpha\beta} = h^2 g_{\alpha\beta}^N \quad g^{\alpha\beta} = h^{-2} g_N^{\alpha\beta},$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \Gamma_{tt}^t &= \Gamma_{tt}^\alpha = \Gamma_{t\alpha}^t = \Gamma_{\alpha t}^t = 0 \\ \Gamma_{\alpha t}^\gamma &= \Gamma_{t\alpha}^\gamma = \frac{\partial_t h}{h} \delta_\alpha^\gamma \\ \Gamma_{\alpha\beta}^t &= -h \partial_t h g_{\alpha\beta}^N = -\frac{\partial_t h}{h} g_{\alpha\beta} \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma &= {}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \frac{1}{h} (\delta_\beta^\gamma \partial_\alpha h + \delta_\alpha^\gamma \partial_\beta h - g_{\alpha\beta}^N g_N^{\gamma\kappa} \partial_\kappa h). \end{aligned}$$

Per la formula (5.5), supponendo di aver scelto un sistema di coordinate normali per (N, g_N) rispetto a un generico punto $p \in N$ (dunque i simboli di Christoffel ${}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(p)$ sono tutti nulli), in ogni punto $(t, p) \in M$ valgono le seguenti uguaglianze,

$$\begin{aligned} R_{tttt} &= R_{\alpha ttt} = R_{\alpha\beta tt} = 0 \\ R_{\alpha t\beta t} &= R_{\alpha t\beta}^t = \partial_t \Gamma_{\alpha\beta}^t - \Gamma_{t\beta}^\gamma \Gamma_{\gamma\alpha}^t = -\partial_t (h \partial_t h) g_{\alpha\beta}^N + (\partial_t h)^2 g_{\alpha\beta}^N = -h \partial_t \partial_t h g_{\alpha\beta}^N \\ R_{\alpha\beta\gamma t} &= R_{\alpha\beta\gamma}^t = \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^t - \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^t + \Gamma_{\alpha\gamma}^\kappa \Gamma_{\kappa\beta}^t - \Gamma_{\beta\gamma}^\kappa \Gamma_{\kappa\alpha}^t \\ &= h \partial_\alpha \partial_t h \delta_{\beta\gamma} - h \partial_\beta \partial_t h \delta_{\alpha\gamma} + \delta_{\alpha\gamma} \partial_\beta h \partial_t h - \delta_{\beta\gamma} \partial_\alpha h \partial_t h \\ &= h \delta_{\beta\gamma} \left(\partial_\alpha \partial_t h - \frac{\partial_t h}{h} \partial_\alpha h \right) - h \delta_{\alpha\gamma} \left(\partial_\beta \partial_t h - \frac{\partial_t h}{h} \partial_\beta h \right) \\ &= h [g_{\beta\gamma}^N \text{Hess}_{\alpha t} h - g_{\alpha\gamma}^N \text{Hess}_{\beta t} h] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\gamma\lambda} &= (\partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\kappa - \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\kappa + \Gamma_{\alpha\gamma}^t \Gamma_{t\beta}^\kappa - \Gamma_{\beta\gamma}^t \Gamma_{t\alpha}^\kappa + \Gamma_{\alpha\gamma}^\iota \Gamma_{\iota\beta}^\kappa - \Gamma_{\beta\gamma}^\iota \Gamma_{\iota\alpha}^\kappa) g_{\kappa\lambda} \\
&= h^2 R_{\alpha\beta\gamma\lambda}^N + h^2 \delta_{\kappa\lambda} \partial_\beta \left[\frac{1}{h} (\delta_\alpha^\kappa \partial_\gamma h + \delta_\gamma^\kappa \partial_\alpha h - g_{\alpha\gamma}^N \nabla^N h^\kappa) \right] \\
&\quad - h^2 \delta_{\kappa\lambda} \partial_\alpha \left[\frac{1}{h} (\delta_\beta^\kappa \partial_\gamma h + \delta_\gamma^\kappa \partial_\beta h - g_{\beta\gamma}^N \nabla^N h^\kappa) \right] - h^2 (\partial_t h)^2 (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\lambda} - \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\gamma}) \\
&\quad + (\delta_\gamma^\iota \partial_\alpha h + \delta_\alpha^\iota \partial_\gamma h - \delta_{\alpha\gamma} \partial_t h) (\delta_{\beta\lambda} \partial_t h + \delta_{\iota\lambda} \partial_\beta h - \delta_{\beta\iota} \partial_\lambda h) \\
&\quad - (\delta_\gamma^\iota \partial_\beta h + \delta_\beta^\iota \partial_\gamma h - \delta_{\beta\gamma} \partial_t h) (\delta_{\alpha\lambda} \partial_t h + \delta_{\iota\lambda} \partial_\alpha h - \delta_{\alpha\iota} \partial_\lambda h) \\
&= h^2 R_{\alpha\beta\gamma\lambda}^N \\
&\quad - \partial_\beta h (\delta_{\alpha\lambda} \partial_\gamma h + \delta_{\gamma\lambda} \partial_\alpha h - \delta_{\alpha\gamma} \partial_\lambda h) + \partial_\alpha h (\delta_{\beta\lambda} \partial_\gamma h + \delta_{\gamma\lambda} \partial_\beta h - \delta_{\beta\gamma} \partial_\lambda h) \\
&\quad + h (\delta_{\alpha\lambda} \partial_\beta \partial_\gamma h - \delta_{\alpha\gamma} \partial_\beta \partial_\lambda h - \delta_{\beta\lambda} \partial_\alpha \partial_\gamma h + \delta_{\beta\gamma} \partial_\alpha \partial_\lambda h) \\
&\quad - h^2 (\partial_t h)^2 (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\lambda} - \delta_{\alpha\lambda} g_{\beta\gamma}) \\
&\quad + 2 (\delta_{\beta\lambda} \partial_\alpha h \partial_\gamma h - \delta_{\alpha\lambda} \partial_\beta h \partial_\gamma h) + \partial_\beta h (\delta_{\alpha\lambda} \partial_\gamma h + \delta_{\gamma\lambda} \partial_\alpha h + \delta_{\alpha\gamma} \partial_\lambda h) \\
&\quad - \partial_\alpha h (\delta_{\beta\lambda} \partial_\gamma h + \delta_{\gamma\lambda} \partial_\beta h + \delta_{\beta\gamma} \partial_\lambda h) - |\nabla^N h|_N^2 (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\lambda} - \delta_{\alpha\lambda} g_{\beta\gamma}) \\
&= h^2 R_{\alpha\beta\gamma\lambda}^N - [|\nabla^N h|_N^2 + h^2 (\partial_t h)^2] (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\lambda} - \delta_{\alpha\lambda} g_{\beta\gamma}) \\
&\quad - h (\delta_{\alpha\gamma} \partial_\beta \partial_\lambda h + \delta_{\beta\lambda} \partial_\alpha \partial_\gamma h - \delta_{\alpha\lambda} \partial_\beta \partial_\gamma h - \delta_{\beta\gamma} \partial_\alpha \partial_\lambda h) \\
&\quad + 2 (\delta_{\alpha\gamma} \partial_\beta h \partial_\lambda h + \delta_{\beta\lambda} \partial_\alpha h \partial_\gamma h - \delta_{\alpha\lambda} \partial_\beta h \partial_\gamma h - \delta_{\beta\gamma} \partial_\alpha h \partial_\lambda h) \\
&= h^2 R_{\alpha\beta\gamma\lambda}^N - [|\nabla^N h|_N^2 + h^2 (\partial_t h)^2] (g_N \odot g_N)_{\alpha\beta\gamma\lambda} / 2 \\
&\quad - h \left[\left(\text{Hess}^N h - \frac{2}{h} d^N h \otimes d^N h \right) \odot g_N \right]_{\alpha\beta\gamma\lambda},
\end{aligned}$$

dove d^N , $\nabla^N h$ e Hess^N sono rispettivamente il differenziale, il gradiente e l'hessiano di h rispetto a N (cioè della funzione $h(t, \cdot) \in C^\infty(N)$, con t "fissato"). Si noti che (essendo tensoriali) le espressioni finali sopra ottenute continuano a valere per un qualsiasi sistema di coordinate, in particolare, se (N, g_N) ha curvatura costante K , si ha $\text{Riem}^N = K g_N \odot g_N / 2$ e

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\gamma\lambda} &= [K h^2 - |\nabla^N h|_N^2 - h^2 (\partial_t h)^2] (g_N \odot g_N)_{\alpha\beta\gamma\lambda} / 2 \\
&\quad - h \left[\left(\text{Hess}^N h - \frac{2}{h} d^N h \otimes d^N h \right) \odot g_N \right]_{\alpha\beta\gamma\lambda}.
\end{aligned}$$

Tracciando con g per ottenere il tensore di Ricci, dall'Esercizio 5.3.6, otteniamo

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= g^{\alpha\beta} R_{\alpha t \beta t} = -(n-1) \frac{\partial_t \partial_t h}{h} \\
R_{\alpha t} &= -g^{\beta\gamma} R_{\alpha \beta \gamma t} = -(n-2) \frac{\text{Hess}_{\alpha t} h}{h} \\
R_{\alpha\gamma} &= R_{\alpha t \gamma t} + g^{\beta\lambda} R_{\alpha \beta \gamma \lambda} \\
&= R_{\alpha\gamma}^N - h \partial_t \partial_t h g_{\alpha\gamma}^N - (n-2) (\partial_t h)^2 g_{\alpha\gamma}^N - (n-4) \frac{|\nabla^N h|_N^2}{h^2} g_{\alpha\gamma}^N - \frac{\Delta^N h}{h} g_{\alpha\gamma}^N \\
&\quad - (n-3) \left(\frac{\text{Hess}_{\alpha\gamma}^N h}{h} - 2 \frac{d^N h_\alpha d^N h_\gamma}{h^2} \right)
\end{aligned}$$

e contraendo ancora per ottenere la curvatura scalare,

$$\begin{aligned}
R &= R_{tt} + g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\
&= \frac{R^N}{h^2} - 2(n-1) \frac{\partial_t \partial_t h}{h} - (n-2) \left[(n-1) \frac{(\partial_t h)^2}{h^2} + (n-5) \frac{|\nabla^N h|_N^2}{h^4} + 2 \frac{\Delta^N h}{h^3} \right].
\end{aligned}$$

Se la funzione h non dipende da $p \in N$, cioè g è la metrica warped $g_{\text{eucl}} \times^{h^2} g_N$ su $I \times N$, le formule si semplificano notevolmente:

$$\begin{aligned}
 R_{tttt} &= R_{\alpha ttt} = R_{\alpha\beta tt} = 0 \\
 R_{\alpha t\beta t} &= -hh''g_{\alpha\beta}^N \\
 R_{\alpha\beta\gamma t} &= 0 \\
 R_{\alpha\beta\gamma\lambda} &= h^2 R_{\alpha\beta\gamma\lambda}^N - h^2(h')^2(g_N \otimes g_N)_{\alpha\beta\gamma\lambda}/2 \\
 R_{tt} &= -(n-1)\frac{h''}{h} \\
 R_{\alpha t} &= 0 \\
 R_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta}^N - [hh'' + (n-2)(h')^2]g_{\alpha\beta}^N \\
 R &= \frac{R^N}{h^2} - 2(n-1)\frac{h''}{h} - (n-1)(n-2)\frac{(h')^2}{h^2}.
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

In particolare, se (N, g_N) ha curvatura costante K ,

$$\begin{aligned}
 R_{tttt} &= R_{\alpha ttt} = R_{\alpha\beta tt} = 0 \\
 R_{\alpha t\beta t} &= -hh''g_{\alpha\beta}^N \\
 R_{\alpha\beta\gamma t} &= 0 \\
 R_{\alpha\beta\gamma\lambda} &= h^2[K - (h')^2](g_N \otimes g_N)_{\alpha\beta\gamma\lambda}/2 \\
 R_{tt} &= -(n-1)\frac{h''}{h} \\
 R_{\alpha t} &= 0 \\
 R_{\alpha\beta} &= \{(n-2)[K - (h')^2] - hh''\}g_{\alpha\beta}^N \\
 R &= (n-1)\frac{(n-2)[K - (h')^2] - 2hh''}{h^2}.
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Se (M, g) è una superficie, cioè $n = 2$, segue che (N, g_N) ha curvatura nulla, avendo dimensione 1, dunque

$$\begin{aligned}
 R_{tttt} &= R_{1ttt} = R_{11tt} = R_{111t} = R_{1111} = 0 \\
 R_{1t1t} &= -hh''g_{11}^N \\
 R_{tt} &= -\frac{h''}{h} \\
 R_{1t} &= 0 \\
 R_{11} &= -hh''g_{11}^N \\
 R &= -2\frac{h''}{h}.
 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5.8.5. Se g è la metrica warped $g_{\text{eucl}} \times^{h^2} g_N$ su $M = I \times N$, con $n = \dim(M) \geq 4$ e (M, g) è una varietà di Einstein di costante zero, cioè $\text{Ric} = 0$, si mostri che (N, g_N) è una varietà di Einstein di costante nonnegativa. Cosa si può dire su (N, g_N) e h , se (M, g) è una varietà di Einstein di costante generica?

Se $n = 3$, sotto quali condizioni su h si ha che (M, g) è una varietà di Einstein?

ESEMPIO 5.8.6 (Varietà Ricci-flat). Varietà riemanniane con $\text{Ric} = 0$ ma non flat, $\text{Riem} \neq 0$. Consideriamo la varietà di Einstein $N = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ con la metrica prodotto σ data dal prodotto delle

metriche canoniche delle due sfere, che soddisfa $\text{Ric}^N = \sigma$. La metrica warped $g = g_{\text{eucl}} \times h^2 \sigma$ su $M = (0, 1) \times N$, con la funzione $h(t) = t/\sqrt{3}$, soddisfa

$$\begin{aligned} R_{tttt} &= R_{\alpha ttt} = R_{\alpha\beta tt} = R_{\alpha t\beta t} = R_{\alpha\beta\gamma t} = 0 \\ R_{ijkl} &= t^2 R_{\alpha\beta\gamma\lambda}^N / 3 - t^2 (\sigma \otimes \sigma)_{\alpha\beta\gamma\lambda} / 18 \\ R_{tt} &= R_{\alpha t} = 0 \\ R_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta}^N - \sigma_{\alpha\beta} = 0 \\ R &= 0 \end{aligned}$$

per le formule (5.28). Dunque la varietà 5-dimensionale (M, g) è una varietà di Einstein con tensore di Ricci nullo, ma con $\text{Riem} \neq 0$, come si può vedere facilmente, considerando un 2-piano “misto” di $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, dalla seconda formula sopra. In particolare, $\text{Riem} = \text{Weyl}$, non nullo. Questa costruzione non funziona invece in dimensione 4, in quanto una varietà di Einstein 3-dimensionale di costante positiva ha curvatura costante (si veda l'Osservazione 5.7.9) e si vede allora facilmente che se la varietà (M, g) è Ricci-flat, allora per le formule (5.29), è in realtà flat. Un esempio (compatto e semplicemente connesso) analogo in dimensione 4, più complesso, è dato dalle cosiddette *superfici K3* (si veda [229] e anche [130]) che hanno $\text{Ric} = 0$, ma $\text{Riem} = \text{Weyl} \neq 0$.

Per approfondire l'argomento della classificazione delle varietà compatte Ricci-flat o più in generale di Einstein, in dimensione 4, si vedano [121, 130].

ESEMPIO 5.8.7 (Spazio di Schwarzschild). Lo spazio di Schwarzschild di massa m , visto nell'Esempio 2.3.19, dato dalla metrica

$$g_{\text{Schw}} = \frac{dr \otimes dr}{1 - \frac{2m}{r^{n-2}}} + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

su $M_{\text{Schw}} = ((2m)^{\frac{1}{n-2}}, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$, è un caso particolare di una classe di varietà riemanniane, prodotti warped della forma

$$\left(I \times \mathbb{S}^{n-1}, \frac{dr \otimes dr}{u^2(r)} + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}} \right),$$

dove I è un intervallo aperto contenuto in $\mathbb{R}^+$ e $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione positiva di classe C^∞ . I simboli di Christoffel rispetto a un sistema di coordinate (r, θ^α) , per $\alpha \in \{1, \dots, n-1\}$ sono allora dati da

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= -u'/u \\ \Gamma_{rr}^\alpha &= \Gamma_{\alpha r}^r = \Gamma_{r\alpha}^r = 0 \\ \Gamma_{\alpha r}^\gamma &= \Gamma_{r\alpha}^\gamma = \delta_\alpha^\gamma / r \\ \Gamma_{\alpha\beta}^r &= -ru^2 g_{\alpha\beta}^{\mathbb{S}^{n-1}} \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma &= \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \end{aligned}$$

dove $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ sono i simboli di Christoffel di $\mathbb{S}^{n-1}$. Segue che il tensore di Riemann, di Ricci e la curvatura scalare sono dati da

$$\begin{aligned} \text{Riem} &= \left[-\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2(1-u^2)}{2} g_{\mathbb{S}^{n-1}} \right] \otimes g_{\mathbb{S}^{n-1}} \\ \text{Ric} &= -(n-1) \frac{u'}{ru} dr \otimes dr + \left[(n-2)(1-u^2) - ruu' \right] g_{\mathbb{S}^{n-1}} \\ R &= -2(n-1) \frac{uu'}{r} + (n-1)(n-2) \frac{1-u^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Queste formule sono conseguenza della seguente proposizione generale e delle formule dell'Esempio 5.5.3.

PROPOSIZIONE 5.8.8. *Per una varietà riemanniana della forma*

$$\left(I \times N, \frac{dr \otimes dr}{u^2(r)} + r^2 g_N \right),$$

dove I è un intervallo aperto contenuto in $\mathbb{R}^+$, $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione positiva classe C^∞ e (N, g_N) è una varietà riemanniana $(n-1)$ -dimensionale, valgono le seguenti formule in un sistema di coordinate (r, y^α) , con $\alpha \in \{1, \dots, n-1\}$.

$$\begin{aligned}\Gamma_{rr}^r &= -u'/u \\ \Gamma_{rr}^\gamma &= \Gamma_{\alpha r}^r = \Gamma_{r\alpha}^r = 0 \\ \Gamma_{\alpha r}^\gamma &= \Gamma_{r\alpha}^\gamma = \delta_\alpha^\gamma / r \\ \Gamma_{\alpha\beta}^r &= -ru^2 g_{\alpha\beta}^N \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma &= {}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Riem} &= r^2 \text{Riem}^N - \left[\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2 u^2}{2} g_N \right] \otimes g_N \\ \text{Ric} &= \text{Ric}^N - (n-1) \frac{u'}{ru} dr \otimes dr - \left[(n-2)u^2 + ruu' \right] g_N \\ R &= \frac{R^N}{r^2} - 2(n-1) \frac{uu'}{r} - (n-1)(n-2) \frac{u^2}{r^2}.\end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Le formule per i simboli di Christoffel si ottengono direttamente dalla formula (3.5).

La formula per il tensore di Riemann è un'uguaglianza tra i tensori di curvatura algebrici Riem e

$$T = r^2 \text{Riem}^N - \left[\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2 u^2}{2} g_N \right] \otimes g_N,$$

dunque, per dimostrare l'uguaglianza tra i due tensori basterà provare

$$R_{\alpha r \beta r} = T_{\alpha r \beta r}, \quad R_{\alpha \beta r \gamma} = T_{\alpha \beta r \gamma} \quad \text{e} \quad R_{\alpha \beta \gamma \delta} = T_{\alpha \beta \gamma \delta}.$$

Si ha, ponendo $g = \frac{dr \otimes dr}{u^2(r)} + r^2 g_N$,

$$\begin{aligned}R_{\alpha r \beta r} &= \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^r}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{r\beta}^r}{\partial y^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^r \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_{r\gamma}^r - \Gamma_{r\beta}^r \Gamma_{\alpha r}^r - \Gamma_{r\beta}^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^r \right) g_{rr} \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^r}{\partial r} + \Gamma_{\alpha\beta}^r \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{r\beta}^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^r \right) g_{rr} \\ &= \left(-u^2 g_{\alpha\beta}^N - 2ruu' g_{\alpha\beta}^N + ruu' g_{\alpha\beta}^N + u^2 g_{\alpha\beta}^N \right) \frac{1}{u^2} \\ &= -\frac{ru'}{u} g_{\alpha\beta}^N = -\left[\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2 u^2}{2} g_N \right]_{rr} g_{\alpha\beta}^N = T_{\alpha r \beta r} \\ R_{\alpha \beta r \gamma} &= \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha r}^\delta}{\partial y^\beta} - \frac{\partial \Gamma_{\beta r}^\delta}{\partial y^\alpha} + \Gamma_{\alpha r}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\delta + \Gamma_{\alpha r}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\delta - \Gamma_{\beta r}^\sigma \Gamma_{\alpha\sigma}^\delta - \Gamma_{\beta r}^\sigma \Gamma_{\alpha\sigma}^\delta \right) g_{\delta\gamma} \\ &= \left(\Gamma_{\alpha r}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\delta - \Gamma_{\beta r}^\sigma \Gamma_{\alpha\sigma}^\delta \right) g_{\delta\gamma} = \left(\frac{\delta_\alpha^\sigma}{r} {}^N \Gamma_{\beta\sigma}^\delta - \frac{\delta_\beta^\sigma}{r} {}^N \Gamma_{\alpha\sigma}^\delta \right) r^2 g_{\delta\gamma}^N \\ &= \left(\frac{1}{r} {}^N \Gamma_{\beta\alpha}^\delta - \frac{1}{r} {}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \right) r^2 g_{\delta\gamma}^N = 0 = T_{\alpha \beta r \gamma}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^{\sigma}}{\partial y^{\beta}} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^{\sigma}}{\partial y^{\alpha}} + \Gamma_{\alpha\gamma}^r \Gamma_{\beta r}^{\sigma} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\tau} \Gamma_{\beta\tau}^{\sigma} - \Gamma_{\beta\gamma}^r \Gamma_{\alpha r}^{\sigma} - \Gamma_{\beta\gamma}^{\tau} \Gamma_{\alpha\tau}^{\sigma} \right) g_{\sigma\delta} \\
&= r^2 R_{\alpha\beta\gamma\delta}^N + \left((-ru^2 g_{\alpha\gamma}^N) \frac{\delta_{\beta}^{\sigma}}{r} - (-ru^2 g_{\beta\gamma}^N) \frac{\delta_{\alpha}^{\sigma}}{r} \right) r^2 g_{\sigma\delta}^N \\
&= r^2 R_{\alpha\beta\gamma\delta}^N - r^2 u^2 g_{\alpha\gamma}^N g_{\beta\delta}^N + r^2 u^2 g_{\beta\gamma}^N g_{\alpha\delta}^N \\
T_{\alpha\beta\gamma\delta} &= r^2 R_{\alpha\beta\gamma\delta}^N - \left[\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2 u^2}{2} g_N \right]_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta}^N - \left[\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2 u^2}{2} g_N \right]_{\beta\delta} g_{\alpha\gamma}^N \\
&\quad + \left[\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2 u^2}{2} g_N \right]_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}^N + \left[\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2 u^2}{2} g_N \right]_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta}^N \\
&= r^2 R_{\alpha\beta\gamma\delta}^N - r^2 u^2 g_{\alpha\gamma}^N g_{\beta\delta}^N + r^2 u^2 g_{\alpha\delta}^N g_{\beta\gamma}^N
\end{aligned}$$

dunque, la formula per il tensore di Riemann è provata. Tracciando, otteniamo le formule per il tensore di Ricci e la curvatura scalare

$$\begin{aligned}
R_{rr} &= g^{\alpha\beta} R_{r\alpha r\beta} = \frac{1}{r^2} g_N^{\alpha\beta} \left(-\frac{ru'}{u} g_{\alpha\beta}^N \right) = -(n-1) \frac{u'}{ru}, \\
R_{\alpha r} &= R_{r\alpha} = g^{rr} R_{\alpha r r r} + g^{r\beta} R_{\alpha r r \beta} + g^{\beta r} R_{\alpha\beta r r} + g^{\beta\gamma} R_{\alpha\beta r \gamma} = 0, \\
R_{\alpha\beta} &= g^{rr} R_{\alpha r \beta r} + g^{\gamma\sigma} R_{\alpha\gamma \beta\sigma} \\
&= u^2 \left(-\frac{ru'}{u} g_{\alpha\beta}^N \right) + \frac{1}{r^2} g_N^{\gamma\sigma} (r^2 R_{\alpha\gamma \beta\sigma}^N - r^2 u^2 g_{\alpha\beta}^N g_{\gamma\sigma}^N + r^2 u^2 g_{\gamma\beta}^N g_{\alpha\sigma}^N) \\
&= -ruu' g_{\alpha\beta}^N + R_{\alpha\beta}^N - u^2 g_{\alpha\beta}^N g_{\gamma\sigma}^N g_N^{\gamma\sigma} + u^2 g_{\gamma\beta}^N g_{\alpha\sigma}^N g_N^{\gamma\sigma} \\
&= R_{\alpha\beta}^N - ((n-2)u^2 + ruu') g_{\alpha\beta}^N \\
R &= g^{rr} R_{rr} + g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\
&= u^2 \left(-(n-1) \frac{u'}{ru} \right) + \frac{1}{r^2} g_N^{\alpha\beta} (R_{\alpha\beta}^N - ((n-2)u^2 + ruu') g_{\alpha\beta}^N) \\
&= -(n-1) \frac{uu'}{r} + \frac{R^N}{r^2} - (n-1)(n-2) \frac{u^2}{r^2} - (n-1) \frac{uu'}{r} \\
&= \frac{R^N}{r^2} - 2(n-1) \frac{uu'}{r} - (n-1)(n-2) \frac{u^2}{r^2}.
\end{aligned}$$

□

Si ha allora che il tensore di Riemann, di Ricci e la curvatura scalare dello spazio di Schwarzschild di massa m sono dati da

$$\begin{aligned}
\text{Riem} &= \frac{m}{r^{n-2}} \left[-(n-2) \frac{dr \otimes dr}{1 - \frac{2m}{r^{n-2}}} + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}} \right] \oslash g_{\mathbb{S}^{n-1}} \\
\text{Ric} &= \frac{m(n-2)}{r^n} \left[-(n-1) \frac{dr \otimes dr}{1 - \frac{2m}{r^{n-2}}} + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}} \right] \\
R &= 0,
\end{aligned}$$

ponendo $u = \sqrt{1 - \frac{2m}{r^{n-2}}}$ nelle formule precedenti. Il tensore di Weyl è nullo, per la sua invarianza conforme (punto (5) della Proposizione 5.8.2) ed essendo la metrica di Schwarzschild conforme a quella euclidea (flat), come visto nella formula (2.3) dell'Esempio 2.3.19. Segue dunque che

$$\text{Ric} = \overset{\circ}{\text{Ric}} \quad \text{e} \quad \text{Riem} = \frac{\overset{\circ}{\text{Ric}} \oslash g_{\text{Schw}}}{n-2},$$

per la decomposizione (5.19).

ESEMPIO 5.8.9. Vari altri esempi interessanti di varietà riemanniane (ed esercizi correlati), col calcolo della loro curvatura, sono discussi nel libro di Petersen [171, Capitolo 4]. Tra di essi, in particolare, i prodotti doubly warped e i gruppi di Lie.

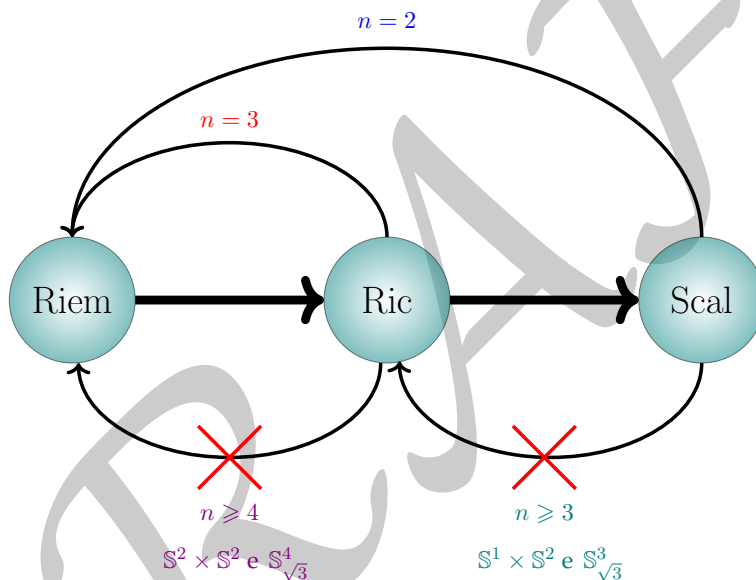
DRAFT

Riassumiamo nella seguente tabella alcune delle formule di questa e delle sezioni precedenti.

Metriche con curvatura costante K su varietà n -dimensionali	
	$\text{Sec}(\pi) = K$ $\text{Riem} = \frac{1}{2}Kg \odot g$ $\text{Ric} = (n-1)Kg$ $R = n(n-1)K$
Metriche "riscalate"	
$\tilde{g} = \lambda g \quad \lambda > 0$	$\widetilde{\text{Sec}}(\pi) = \text{Sec}(\pi)/\lambda$ $\widetilde{\text{Riem}} = \lambda \text{Riem}$ $\widetilde{\text{Ric}} = \text{Ric}$ $\widetilde{R} = R/\lambda$
Metriche prodotto su varietà prodotto $M \times N$	
$g = g_M + g_N$	$\text{Riem} = \text{Riem}^M + \text{Riem}^N$ $\text{Ric} = \text{Ric}^M + \text{Ric}^N$ $R = R^M + R^N$
Metriche conformi su varietà n -dimensionali	
$\tilde{g} = e^{2\varphi}g$	$\widetilde{\text{Riem}} = e^{2\varphi} \{ \text{Riem} - [\nabla^2\varphi - d\varphi \otimes d\varphi + \nabla\varphi ^2 g/2] \odot g \}$ $\widetilde{\text{Ric}} = \text{Ric} - (n-2)(\nabla^2\varphi - d\varphi \otimes d\varphi) - (\Delta\varphi + (n-2) \nabla\varphi ^2)g$ $\widetilde{R} = e^{-2\varphi}(R - 2(n-1)\Delta\varphi - (n-2)(n-1) \nabla\varphi ^2)$ $\widetilde{\text{Weyl}} = e^{2\varphi}\text{Weyl}$
Metriche warped su varietà n -dimensionali $I \times N$	
$g = dt^2 + h^2(t)g_N$	$\text{Riem} = h^2 \text{Riem}^N - [h h'' dt \otimes dt + \frac{1}{2} h^2 (h')^2 g_N] \odot g_N$ $\text{Ric} = \text{Ric}^N - (n-1)\frac{h''}{h} dt \otimes dt - [h h'' + (n-2)(h')^2]g_N$ $R = \frac{R^N}{h^2} - 2(n-1)\frac{h''}{h} - (n-1)(n-2)\frac{(h')^2}{h^2}$
Metriche di Schwarzschild "generalizzate" su varietà n -dimensionali $I \times N$	
$g = \frac{dr \otimes dr}{u^2(r)} + r^2 g_N$	$\text{Riem} = r^2 \text{Riem}^N - \left[\frac{r u'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2 u^2}{2} g_N \right] \odot g_N$ $\text{Ric} = \text{Ric}^N - (n-1)\frac{u'}{r u} dr \otimes dr - \left[(n-2)u^2 + r u u' \right] g_N$ $R = \frac{R^N}{r^2} - 2(n-1)\frac{u u'}{r} - (n-1)(n-2)\frac{u^2}{r^2}$

ESEMPIO 5.8.10. *In dimensione $n \geq 3$ la curvatura scalare non determina il tensore di Ricci.* Consideriamo infatti le due varietà $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ e $\mathbb{S}_{\sqrt{3}}^3$, dove sulle sfere abbiamo le metriche canoniche, per l'Esercizio 5.4.15 e l'Osservazione 5.4.16, entrambe hanno curvatura scalare uguale a 2 ma il tensore di Ricci della prima è dato da $\text{Ric}^{\mathbb{S}^1} + \text{Ric}^{\mathbb{S}^2} \simeq \text{Ric}^{\mathbb{S}^2}$ (in quanto $\text{Ric}^{\mathbb{S}^1} = 0$), mentre quello della seconda da $\text{Ric}^{\mathbb{S}^3}$.

ESEMPIO 5.8.11. *In dimensione $n \geq 4$ il tensore di Ricci non determina le curvature sezionali.* Se consideriamo le due varietà $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ e $\mathbb{S}_{\sqrt{3}}^4$, aventi entrambe $\text{Ric} = g$ (Esercizio 5.4.15 e Osservazione 5.4.16), la prima varietà ha i piani misti con curvatura sezionale nulla (Esercizio 5.4.5), mentre tutte le curvature sezionali della seconda sono uguali a $1/3$. Un altro esempio è dato dal toro 4-dimensionale $\mathbb{T}^4$ e dalle superfici K3 che sono varietà Ricci-flat (come detto nell'Esempio 5.8.6), ma mentre il toro è flat (tutte le curvature sezionali sono nulle), le superfici K3 hanno tensore di Riemann non nullo (dunque non tutte le curvature sezionali sono nulle).



ESEMPIO 5.8.12. *In dimensione $n \geq 4$ la curvatura sezionale $\text{Sec} > 0$ non implica $\mathcal{R} \geq 0$.* Consideriamo la varietà $(\mathbb{CP}^2, g_{\text{can}})$ (oppure $\mathbb{CP}^n$, per $n \geq 2$) vista nell'Esempio 2.3.17. Mostriamo nell'Esempio 6.4.18 che ha tutte le curvature sezionali positive, maggiori o uguali a 1, ma l'operatore di curvatura $\mathcal{R}$ ha un autovalore nullo (di molteplicità due) e la forma $\mathcal{R}$ è soltanto *semidefinita* positiva. Perturbando allora localmente la metrica, è possibile ottenere una varietà riemanniana con curvatura positiva e operatore di curvatura $\mathcal{R}$ che ha autovalori negativi). Si veda la discussione in [154], per maggiori dettagli.

ESEMPIO 5.8.13. *In dimensione $n \geq 3$, tensore di Ricci definito positivo, $\text{Ric} > 0$, non implica curvatura nonnegativa $\text{Sec} \geq 0$.*

Consideriamo infatti su $M = (-\delta, \delta) \times \mathbb{H}^2$ la metrica warped

$$g = g_{\text{eucl}} \lrcorner^{h^2} g_{\text{can}}^{\mathbb{H}^2} = dt^2 + h^2(t) g_{\text{can}}^{\mathbb{H}^2}$$

con $h : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione positiva. Per i calcoli dell'Esempio 5.8.4, abbiamo allora

$$\begin{aligned}
R_{1212} &= -[1 + (h')^2] \frac{h^2}{(x^2)^4} < 0, \\
R_{tt} &= -2 \frac{h''}{h} \quad R_{1t} = R_{2t} = R_{12} = 0, \\
R_{11} &= R_{22} = -[1 + (h')^2 + hh''] \frac{1}{(x^2)^2}.
\end{aligned}$$

Se dunque h soddisfa

$$h'' < -\frac{1 + (h')^2}{h} < 0,$$

la varietà (M, g) ha tensore di Ricci definito positivo ma almeno una curvatura sezionale negativa. Per esempio, possiamo scegliere $h(t) = 1 - t^2$, con $\delta = 1/\sqrt{6}$.

ESEMPIO 5.8.14. In dimensione $n \geq 3$, curvatura scalare positiva, $R > 0$, non implica tensore di Ricci semidefinito positivo $\text{Ric} \geq 0$ (dunque nemmeno $\text{Sec} \geq 0$).

Consideriamo la stessa costruzione dell'esempio precedente, sempre per i calcoli dell'Esempio 5.8.4, abbiamo

$$R = -2 \left(\frac{1 + (h')^2 + 2hh''}{h^2} \right).$$

Se dunque h soddisfa

$$-\frac{1 + (h')^2}{h} < h'' < -\frac{1 + (h')^2}{2h},$$

sostituendo nelle equazioni sopra, si vede che $R > 0$ ma $R_{11} = R_{22} < 0$. Per esempio, possiamo scegliere $h(t) = 1 - t^2/3$, con $\delta = \sqrt{3/8}$.

ESERCIZIO 5.8.15. Con costruzioni analoghe a quelle dei due esempi precedenti, si mostri che in dimensione $n \geq 3$ il tensore di Ricci definito negativo non implica curvatura nonpositiva e che curvatura scalare negativa non implica tensore di Ricci semidefinito negativo (dunque, a maggior ragione, nemmeno curvatura nonpositiva).

5.9. La formula di Bochner

Introduciamo in questa sezione un'apparentemente semplice formula, attribuita a Bochner (sebbene Bernstein l'avesse precedentemente utilizzata in $\mathbb{R}^n$), che ha condotto ad alcuni risultati estremamente importanti nella geometria riemanniana moderna. Inoltre, è uno degli strumenti "fondazionali" principali dell'analisi in spazi metrici, settore che ha avuto recentemente un grande sviluppo (si vedano [12, 23, 45, 96, 97, 144, 194, 195], per approfondire). Vedremo più avanti in dettaglio, nel Capitolo 13, come utilizzarla per ottenere risultati sulla geometria/topologia delle varietà con curvatura nonnegativa, mediante la cosiddetta *tecnica di Bochner*. Mostriamo qui, come immediata conseguenza, solo una stima sugli autovalori del Laplaciano nelle varietà compatte.

PROPOSIZIONE 5.9.1 (Formula di Bochner). Vale la formula

$$|\Delta \nabla f|^2 = 2|\nabla^2 f|^2 + 2R(\nabla f, \nabla f) + 2g(\nabla \Delta f, \nabla f), \quad (5.30)$$

per ogni $f \in C^\infty(M)$.

DIMOSTRAZIONE. In coordinate locali, abbiamo

$$\begin{aligned}
\nabla_i \nabla_j \nabla_k f - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f &= R_{ijkl} \nabla^l f \\
\nabla_i \nabla_j \nabla_k f &= \nabla_i \nabla_k \nabla_j f
\end{aligned}$$

quindi

$$\nabla_i \nabla_k \nabla_j f - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f = R_{ijkl} \nabla^l f,$$

da cui, contraendo con g^{ik} , otteniamo

$$\Delta df_j - \nabla_j \Delta f = R_{jl} \nabla^l f. \quad (5.31)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \Delta |\nabla f|^2 &= g^{ik} \nabla_{ik}^2 |\nabla f|^2 \\ &= g^{ik} \nabla_i \nabla_k g(\nabla f, \nabla f) \\ &= 2g^{ik} \nabla_i (g^{jm} \nabla_k \nabla_j f \nabla_m f) \\ &= 2g^{ik} g^{jm} \nabla_i \nabla_k \nabla_j f \nabla_m f + 2g^{ik} g^{jm} \nabla_k \nabla_j f \nabla_i \nabla_m f \\ &= 2g^{jm} \Delta df_j \nabla_m f + 2|\nabla^2 f|^2 \\ &= 2g^{jm} (\nabla_j \Delta f + R_{jl} \nabla^l f) \nabla_m f + 2|\nabla^2 f|^2 \\ &= 2g(\nabla \Delta f, \nabla f) + 2R(\nabla f, \nabla f) + 2|\nabla^2 f|^2. \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 5.9.2. L'uguaglianza (5.31) nella dimostrazione della formula di Bochner implica la seguente utile formula di scambio delle derivate:

$$\Delta \nabla f = \nabla \Delta f + R(\nabla f, \cdot)^\sharp.$$

OSSERVAZIONE 5.9.3. Se la funzione f è armonica, abbiamo

$$|\nabla^2 f|^2 = \Delta |\nabla f|^2 / 2 - R(\nabla f, \nabla f)$$

e se invece f è una soluzione dell'equazione eikonale $|\nabla f| = 1$,

$$|\nabla^2 f|^2 = -R(\nabla f, \nabla f) - g(\nabla \Delta f, \nabla f).$$

Se dunque f è armonica e soddisfa $|\nabla f| = 1$, si ha

$$|\nabla^2 f|^2 = -R(\nabla f, \nabla f) \quad (5.32)$$

che, se $\text{Ric} \geq 0$ implica $\nabla^2 f = 0$. Questa osservazione sarà sviluppata nella dimostrazione del *teorema di splitting*, nella Sezione 12.2.

Dalla formula (5.30) segue inoltre

$$2|\nabla^2 f|^2 = \Delta |\nabla f|^2 - 2R(\nabla f, \nabla f) - 2\text{div}(\nabla f \Delta f) + 2|\Delta f|^2,$$

da cui

$$\begin{aligned} |\nabla^2 f|^2 &= |\Delta f|^2 - \text{div}(\nabla f \Delta f) - R(\nabla f, \nabla f) + \Delta |\nabla f|^2 / 2 \\ &= |\Delta f|^2 - \text{div}(\nabla f \Delta f - \nabla^2 f \nabla f) - R(\nabla f, \nabla f), \end{aligned}$$

in quanto $\Delta |\nabla f|^2 / 2 = \text{div}(\nabla^2 f \nabla f)$, ricordando la Definizione 3.8.7.

Si ha allora che se $D \subseteq M$ è un aperto limitato con ∂D un'ipersuperficie di classe C^∞ , denotando con ν la normale esterna e con $d\sigma$ la forma di volume canonica su ∂D , per il teorema della divergenza 3.8.2, vale la formula

$$\begin{aligned} \int_D |\nabla^2 f|^2 d\mu &= \int_D |\Delta f|^2 d\mu - \int_D R(\nabla f, \nabla f) d\mu - \int_D \text{div}(\nabla f \Delta f - \nabla^2 f \nabla f) d\mu \\ &= \int_D |\Delta f|^2 d\mu - \int_D R(\nabla f, \nabla f) d\mu - \int_{\partial D} g(\nu, \nabla f) \Delta f - \nabla^2 f(\nu, \nabla f) d\sigma, \end{aligned}$$

in particolare, se M è compatta,

$$\int_M |\nabla^2 f|^2 d\mu = \int_M |\Delta f|^2 d\mu - \int_M R(\nabla f, \nabla f) d\mu.$$

Inoltre, se f è armonica, abbiamo

$$|\nabla^2 f|^2 = \operatorname{div}(\nabla^2 f \nabla f) - R(\nabla f, \nabla f).$$

dunque,

$$\int_D |\nabla^2 f|^2 d\mu = - \int_D R(\nabla f, \nabla f) d\mu + \int_{\partial D} \nabla^2 f(\nu, \nabla f) d\sigma$$

e

$$\int_M |\nabla^2 f|^2 d\mu = - \int_M R(\nabla f, \nabla f) d\mu,$$

se M è compatta.

OSSERVAZIONE 5.9.4. Se λ è un autovalore di $-\Delta$ su una varietà riemanniana compatta (M, g) di dimensione n , allora $\lambda \geq 0$. Infatti, se $-\Delta f = \lambda f$ abbiamo

$$\lambda \int_M f^2 d\mu = - \int_M f \Delta f d\mu = \int_M |\nabla f|^2 d\mu,$$

da cui $\lambda \geq 0$.

Si noti che $\lambda = 0$ se e solo se f è costante, cioè le uniche funzioni armoniche su una varietà compatta sono le costanti.

TEOREMA 5.9.5 (Lichnerowicz). Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta di dimensione n e sia $\lambda > 0$ un autovalore positivo di $-\Delta$. Se $\operatorname{Ric} \geq k(n-1)g$ con $k > 0$ (cioè $\operatorname{Ric} - k(n-1)g$ è puntualmente una forma bilineare semidefinita positiva) allora $\lambda \geq nk$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in C^\infty(M)$ tale che $-\Delta f = \lambda f$. Usando la formula di Bochner (5.30) e il teorema della divergenza, otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \int_M \Delta |\nabla f|^2 d\mu \\ &= \int_M |\nabla^2 f|^2 + R(\nabla f, \nabla f) + g(\nabla \Delta f, \nabla f) d\mu \\ &\geq \int_M |\nabla^2 f|^2 d\mu + k(n-1) \int_M |\nabla f|^2 d\mu - \lambda \int_M |\nabla f|^2 d\mu \\ &\geq \frac{1}{n} \int_M (\Delta f)^2 d\mu + (k(n-1) - \lambda) \int_M |\nabla f|^2 d\mu \\ &= -\frac{\lambda}{n} \int_M f \Delta f d\mu + (k(n-1) - \lambda) \int_M |\nabla f|^2 d\mu \\ &= (nk - \lambda) \frac{n-1}{n} \int_M |\nabla f|^2 d\mu, \end{aligned}$$

dove abbiamo applicato la disuguaglianza $|\nabla^2 f|^2 = |\operatorname{Hess} f|^2 \geq (\Delta f)^2/n$ che è conseguenza della simmetria di $\nabla_{ij}^2 f$ e della ben nota disuguaglianza

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 / n \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i^2,$$

per ogni $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. La tesi segue. $\square$

OSSERVAZIONE 5.9.6. Obata [166] ha poi provato che se esiste effettivamente un autovalore $\lambda = kn$, allora la varietà è la sfera di raggio $1/\sqrt{k}$.

OSSERVAZIONE 5.9.7. Nella dimostrazione abbiamo visto che vale la disuguaglianza (di Bochner)

$$\Delta|\nabla f|^2 \geq 2(\Delta f)^2/n + 2R(\nabla f, \nabla f) + 2g(\nabla \Delta f, \nabla f).$$

Se dunque f è una funzione armonica, cioè $\Delta f = 0$, abbiamo

$$\Delta|\nabla f|^2 \geq 2R(\nabla f, \nabla f).$$

ESERCIZIO 5.9.8. Sia g una metrica riemanniana su $\mathbb{R}^n$ tale che la varietà $(\mathbb{R}^n, g)$ sia abbia $\text{Ric} \geq 0$. Si mostri che se $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione $\Delta u + |\nabla u|^2 = 0$ tale che $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \nabla u(x) = 0$, allora u è costante.