CAPITOLO 3

La connessione di Levi–Civita

In questo capitolo introduciamo la nozione di *connessione* che fornisce un modo di derivare le sezioni di un fibrato vettoriale lungo la direzione data da un campo vettoriale sulla varietà.

3.1. Connessioni affini

DEFINIZIONE 3.1.1. Sia M una varietà differenziabile e $\pi : E \to M$ un fibrato vettoriale su di essa. Una *connessione* sul fibrato E è un'applicazione

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$
$$(X, \eta) \mapsto \nabla_X \eta$$

tale che,

- ∇ è $C^\infty(M)$–lineare in X,
- ∇ è $\mathbb{R}$–lineare in η,
- per ogni $X \in \Gamma(TM)$, $\eta \in \Gamma(E)$ e ogni $f \in C^\infty(M)$ vale la formula

$$\nabla_X(f\eta) = X(f)\eta + f\nabla_X\eta,$$

Chiamiamo la sezione $\nabla_X\eta$ *derivata covariante di η rispetto a X.*
Se E è il fibrato tangente TM alla varietà M, diremo che ∇ è una *connessione affine* su M.

OSSERVAZIONE 3.1.2. Si noti che la derivata di Lie $(X, Y) \mapsto L_X Y = [X, Y]$ *non* è una connessione affine, non essendo $C^\infty(M)$–lineare in X.

Per ogni connessione ∇, il valore della sezione $\nabla_X\eta$ in un punto $p \in M$ dipende solo dal comportamento locale della sezione η e dal valore del campo vettoriale X nel punto p. Si provi per esercizio la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 3.1.3. *Sia ∇ una connessione su E. Presi $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$, $\eta_1, \eta_2 \in \Gamma(E)$ e $p \in M$, se*

$$X_1(p) = X_2(p) \quad e \quad \eta_1 = \eta_2 \text{ in un intorno di } p,$$

allora

$$(\nabla_{X_1}\eta_1)_p = (\nabla_{X_2}\eta_2)_p \ .$$

In particolare, se ∇ è una connessione la scrittura $(\nabla_X\eta)_p$ ha senso anche se η è definito solo localmente e X solo nel punto $p \in M$. Segue che se ∇ è una connessione affine su M e Y un campo vettoriale, $X \mapsto \nabla_X Y$ è un tensore di tipo $(1, 1)$.

Esprimiamo una connessione ∇ su E in coordinate locali. Supponiamo che U sia un aperto coordinato di M su cui E risulta essere banale. Fissate delle coordinate $(x^1, \dots, x^n)$ e un riferimento locale $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ di E in U, se

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

è un campo vettoriale e

$$\eta = \eta^j \xi_j$$

una sezione di E su U, si ha

$$\nabla_X \eta = \nabla_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \big(\eta^j \xi_j\big) = X^i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \big(\eta^j \xi_j\big) = X^i \Big(\frac{\partial \eta^j}{\partial x^i} \xi_j + \eta^j \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \xi_j\Big) .$$

Se dunque definiamo i coefficienti Γ^k_{ij} come

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \xi_j = \Gamma^k_{ij} \xi_k ,$$

si ha che

$$\nabla_X \eta = X^i \Big(\frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} + \eta^j \Gamma^k_{ij}\Big) \xi_k .$$

I coefficienti Γ^k_{ij} sono detti *simboli di Christoffel* della connessione ∇, chiaramente la determinano in maniera univoca nell'aperto U e variano al variare della carta di M e del riferimento locale di E in U.

ESERCIZIO 3.1.4. Si determinino le formule che esprimono come variano i simboli di Christoffel per un cambio di coordinate e riferimento locali.

ESERCIZIO 3.1.5. Si mostri che per ogni connessione ∇, il valore della sezione $\nabla_X \eta$ in un punto $p \in M$ dipende solo dal valore X_p del campo vettoriale X nel punto p e dai valori della sezione η lungo una qualunque curva γ in M, tale che $\gamma(0) = p$ e $\dot\gamma(0) = X_p$.

Nel caso di una connessione affine su M, se $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ sono campi vettoriali, in un carta coordinata si ha

$$\nabla_X Y = X^i \Big(\frac{\partial Y^k}{\partial x^i} + Y^j \Gamma^k_{ij}\Big) \frac{\partial}{\partial x^k} ,$$

dove i simboli di Christoffel Γ^k_{ij} di ∇ sono definiti da

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial}{\partial x^k} .$$

OSSERVAZIONE 3.1.6. I simboli di Christoffel *non* determinano un tensore (nel senso che non sono le componenti di un fissato tensore nella carta coordinata scelta), così come la connessione affine $(X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ *non* è un tensore di tipo $(1, 2)$, non essendo $C^\infty(M)$–lineare nella variabile Y. Si mostri invece che la differenza di due connessioni affini ∇^1 e ∇^2 è un tensore, cioè $(X, Y) \mapsto \big(\nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y\big)$ è un tensore di tipo $(1, 2)$.

DEFINIZIONE 3.1.7. Sia ∇ una connessione affine su una varietà differenziabile M. Definiamo il tensore di *torsione* T^∇ di ∇ come

$$T^\nabla(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

dove $X, Y \in \Gamma(TM)$ sono due campi vettoriali su M.
Una connessione affine ∇ si dice *simmetrica* se $T^\nabla = 0$, cioè se vale

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] ,$$

per ogni $X, Y \in \Gamma(TM)$.

ESERCIZIO 3.1.8. Si mostri che T^∇ è un tensore antisimmetrico di tipo $(1, 2)$.

In una carta coordinata di M denotiamo con Γ^k_{ij} i simboli di Christoffel di una connessione affine ∇ e calcoliamo i coefficienti di T^∇. Abbiamo

$$T^\nabla = T^k_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^k} ,$$

dunque

$$\begin{aligned}
T^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} &= T^\nabla\Big(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i} - \Big[\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\Big]\\
&= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}\\
&= \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k}\\
&= \big(\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}\big)\,\frac{\partial}{\partial x^k}\,.
\end{aligned}$$

Si ha quindi che una connessione affine ∇ è simmetrica se e soltanto se, in ogni sistema di coordinate, i suoi simboli di Christoffel soddisfano la relazione

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}\,,$$

cioè sono simmetrici negli indici i e j (da cui l'aggettivo "simmetrica" per una connessione a torsione nulla).

DEFINIZIONE 3.1.9. Sia (M,g) una varietà riemanniana. Una connessione affine ∇ su M si dice *compatibile con la metrica* g se per ogni $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ vale la formula

$$Xg(Y,Z) = g\left(\nabla_X Y, Z\right) + g\left(Y,\nabla_X Z\right)\,.$$

In una carta coordinata di M, se la connessione affine ∇ è compatibile con la metrica g, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^k}\,g\Big(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) &= g\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) + g\Big(\frac{\partial}{\partial x^i},\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}}\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\\
&= g\Big(\Gamma^l_{ki}\frac{\partial}{\partial x^l},\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) + g\Big(\frac{\partial}{\partial x^i},\Gamma^l_{kj}\frac{\partial}{\partial x^l}\Big)\\
&= \Gamma^l_{ki}g\Big(\frac{\partial}{\partial x^l},\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) + \Gamma^l_{kj}g\Big(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^l}\Big)\,.
\end{aligned}$$

Dunque, in un qualsiasi sistema di coordinate, i simboli di Christoffel di una connessione compatibile con la metrica sono legati ai coefficienti della metrica dalle relazioni

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ki}g_{lj} + \Gamma^l_{kj}g_{li}\,. \tag{3.1}$$

Ovviamente, tali relazioni sono anche sufficienti affinché la connessione sia compatibile con la metrica.

3.2. La connessione di Levi–Civita

Il seguente teorema esprime il fatto che ogni varietà riemanniana ha una ed unica connessione affine "canonica". Tale connessione fornisce allora un modo "invariante rispetto alle coordinate" di derivare un campo lungo una direzione data da un altro campo (detto "calcolo differenziale assoluto" da Tullio Levi–Civita [243]).

TEOREMA 3.2.1 (Teorema fondamentale della geometria riemanniana). *Su ogni varietà riemanniana (M,g) esiste un'unica connessione affine ∇, detta* connessione di Levi–Civita, *che sia:*

- *simmetrica*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \qquad \textit{per ogni } X,Y\in\Gamma(TM),$$

- *compatibile con la metrica*

$$Xg(Y,Z) = g\left(\nabla_X Y,Z\right) + g\left(Y,\nabla_X Z\right) \qquad \textit{per ogni } X,Y,Z\in\Gamma(TM). \tag{3.2}$$

Sia (M, g) una varietà riemanniana e ∇ la sua connessione di Levi–Civita. In una carta coordinata le condizioni di simmetria e compatibilità di ∇ con la metrica g si esprimono come

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{li} \,. \tag{3.3}$$

Permutando ciclicamente gli indici nella condizione di compatibilità abbiamo allora

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} &= \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \Gamma_{ik}^l g_{jl} \,, \\
\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= \Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il} \,, \\
\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} &= \Gamma_{jk}^l g_{li} + \Gamma_{ji}^l g_{kl} \,,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

da cui sommando a segni alterni, per le condizioni di simmetria concludiamo che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} &= \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \Gamma_{ik}^l g_{jl} + \Gamma_{jk}^l g_{li} + \Gamma_{ji}^l g_{kl} - \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \Gamma_{kj}^l g_{il} \\
&= \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \Gamma_{ji}^l g_{kl} \\
&= 2\Gamma_{ij}^l g_{kl} \,.
\end{aligned}$$

Si ha dunque la formula

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{kl} \Big(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \Big) \,. \tag{3.5}$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.2.1. I simboli Γ_{ij}^k ottenuti dalla metrica usando la formula (3.5) definiscono in modo univoco una connessione affine su (M, g), simmetrica e compatibile con g.
Senza usare le coordinate locali, per ogni tre campi vettoriali $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ si ha

$$\begin{aligned}
Xg(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\
Yg(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X) \\
Zg(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \,.
\end{aligned}$$

Sommando le prime due equazioni e sottraendo la terza otteniamo, per le condizioni di simmetria,

$$\begin{aligned}
Xg(Y, Z) &+ Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\
&= g(\nabla_X Y, Z) + g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X) + g(X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y) \\
&= 2g(\nabla_X Y, Z) - g([X, Y], Z) + g(Y, [X, Z]) + g(X, [Y, Z]) \,,
\end{aligned}$$

dunque la seguente *formula di Koszul*,

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_X Y, Z) = {} & Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\
& + g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) - g(X, [Y, Z])
\end{aligned} \tag{3.6}$$

che determina univocamente il campo vettoriale $\nabla_X Y$. Viceversa, si può verificare che definendo $\nabla_X Y$ con tale formula si ha una connessione simmetrica e compatibile con g (lo si provi per esercizio). □

OSSERVAZIONE 3.2.2. Ci si può chiedere sotto quali condizioni una connessione affine simmetrica sia la connessione di Levi–Civita associata a una metrica riemanniana (localmente o globalmente). Tale domanda non ha una risposta semplice (per esempio in termini di una condizione sui suoi simboli di Christoffel), si veda [20].

OSSERVAZIONE 3.2.3. In generale, la derivata di Lie non soddisfa una condizione di compatibilità con la metrica analoga all'equazione (3.2). Infatti, per la formula (1.3) nell'Esercizio 1.3.4, si ha

$$Xg(Y,Z) = (L_X g)(Y,Z) + g\,(L_X Y, Z) + g\,(Y, L_X Z)\ ,$$

che contiene il termine "extra" $(L_X g)(Y,Z)$.
Se un campo vettoriale X su una varietà riemanniana (M,g) ha la proprietà che $L_X g = 0$, si dice che è un *campo di Killing* (dal matematico tedesco Wilhelm Killing, 1847 – 1923). Equivalentemente, X è un campo di Killing se e solo se

$$Xg(Y,Z) = g\,(L_X Y, Z) + g\,(Y, L_X Z)\ ,$$

per ogni $Y, Z \in \Gamma(TM)$.
Osservando che in coordinate abbiamo

$$\begin{aligned}
(L_X g)_{ij} &= Xg_{ij} - g([X,\partial_i],\partial_j) - g(\partial_i,[X,\partial_j])\\
&= Xg_{ij} - g_{jk}[X,\partial_i]^k - g_{ik}[X,\partial_j]^k\\
&= Xg_{ij} + g_{jk}\partial_i X^k + g_{ik}\partial_j X^k\\
&= X^k\partial_k g_{ij} + g_{jk}\nabla_i X^k - g_{jk}\Gamma^k_{i\ell}X^\ell + g_{ik}\nabla_j X^k - g_{ik}\Gamma^k_{j\ell}X^\ell\\
&= g_{jk}\nabla_i X^k + g_{ik}\nabla_j X^k\ ,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la formula (3.5) (∇ è la connessione di Levi–Civita), si ha che X è di Killing se e solo se $g_{jk}\nabla_i X^k + g_{ik}\nabla_j X^k = 0$, cioè se il tensore $A_{ij} = g_{jk}\nabla_i X^k$ è antisimmetrico. Essendo $A(Y,Z) = g(\nabla_Y X, Z)$, ciò è equivalente a

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) = 0\,,$$

per ogni $Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Vediamo un'altra caratterizzazione, che suggerisce che l'esistenza di un campo di Killing denoti la presenza di "simmetrie" della varietà.

PROPOSIZIONE 3.2.4. *Sia (M,g) una varietà riemanniana. Allora X è un campo di Killing su M se e solo se il gruppo locale a un parametro di X (si veda la Sezione 1.5) è composto da isometrie.*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo il gruppo locale a un parametro θ_t di X. Allora

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\theta_{t*}g)_p\Big|_{t=t_0} &= \frac{d}{dt}\Big(\big(\theta_{t_0+t-t_0}\big)_* g\Big)_p\Big|_{t=t_0}\\
&= \frac{d}{dt}\Big(\big(\theta_{t_0}\circ\theta_{t-t_0}\big)_* g\Big)_p\Big|_{t=t_0}\\
&= \frac{d}{dt}\Big(\theta_{t_0\,*}(\theta_{t-t_0\,*}g)\Big)_p\Big|_{t=t_0}\\
&= \frac{d}{ds}\Big(\theta_{t_0\,*}(\theta_{s*}g)\Big)_p\Big|_{s=0}\\
&= -(\theta_{t_0\,*}L_X g)_p
\end{aligned}$$

per ogni $p \in M$. Poiché $\theta_0 = \mathrm{Id}$, la tesi segue. □

ESERCIZIO 3.2.5. Ogni campo costante su $\mathbb{R}^n$ è ovviamente un campo di Killing. Si provi a determinare tutti i campi di Killing di $\mathbb{R}^n$.
Si mostri che i campi

$$x^i\frac{\partial}{\partial x^j} - x^j\frac{\partial}{\partial x^i}$$

sono campi di Killing su $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ con la metrica indotta, per ogni coppia $i,j \in \{1,\dots,n\}$.

ESERCIZIO 3.2.6. Facendo riferimento alla superficie di rotazione S considerata nell'Esercizio 2.3.5, con la metrica indotta e parametrizzata da $(t,\theta) \mapsto (x(t), y(t)\sin\theta, y(t)\cos\theta) \in \mathbb{R}^3$, si mostri che il campo vettoriale

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = (0, y(t)\cos\theta, -y(t)\sin\theta) \in T_{(x(t),y(t)\sin\theta,y(t)\cos\theta)}S$$

è un campo di Killing su S.

ESERCIZIO 3.2.7. Se $f : M \to N$ è un'isometria tra due varietà riemanniane (M,g) e (N,h), si mostri che la connessione di Levi–Civita di N è data da

$$\nabla^N_X Y = f_*(\nabla^M_{f^*X} f^*Y)\,,$$

per ogni $X, Y \in \Gamma(TN)$ (si osservi che l'applicazione da $\Gamma(TN) \times \Gamma(TN)$ a $\Gamma(TN)$, definita dal membro destro di questa uguaglianza, è una connessione affine su N simmetrica e compatibile con la metrica).

ESEMPIO 3.2.8 (Connessione di Levi–Civita dello spazio euclideo). Se su $(\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{eucl}})$ consideriamo l'usuale carta globale $(\mathbb{R}^n, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n})$, dalla formula (3.5) deduciamo immediatamente $\Gamma^k_{ij} = 0$, dunque la connessione di Levi–Civita è la semplice derivazione componente per componente di un campo, cioè

$$\nabla_X Y = XY^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\,.$$

Vedremo che questa proprietà di avere, nell'intorno di ogni punto, una carta coordinata con simboli di Christoffel nulli caratterizzerà le varietà localmente isometriche a $(\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{eucl}})$.

ESEMPIO 3.2.9 (Connessione di Levi–Civita di metriche conformi). Sia (M,g) una varietà riemanniana. Fissata $u : M \to (0,+\infty)$ di classe C^∞, consideriamo la metrica $\widetilde{g} = ug$ conforme alla metrica g e calcoliamo la relazione tra i simboli di Christoffel $\widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ della connessione di Levi–Civita $\widetilde{\nabla}$ della metrica $\widetilde{g}$ e quelli Γ^k_{ij} di ∇, connessione di Levi–Civita di g. Per la formula (3.5) si ha

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}^k_{ij} &= \frac{g^{km}}{2u}\Big(\frac{\partial(ug_{jm})}{\partial x^i} + \frac{\partial(ug_{mi})}{\partial x^j} - \frac{\partial(ug_{ij})}{\partial x^m}\Big)\\ &= \frac{g^{km}}{2u}\Big[\Big(\frac{\partial u}{\partial x^i}g_{jm} + u\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i}\Big) + \Big(\frac{\partial u}{\partial x^j}g_{mi} + u\frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j}\Big) - \Big(\frac{\partial u}{\partial x^m}g_{ij} + u\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\Big)\Big]\,.\end{aligned}$$

Segue dunque

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \frac{g^{km}}{2u}\Big(\frac{\partial u}{\partial x^i}g_{jm} + \frac{\partial u}{\partial x^j}g_{mi} - \frac{\partial u}{\partial x^m}g_{ij} + 2u\Gamma^l_{ij}g_{lm}\Big)$$

da cui

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \frac{g^{km}}{2u}\Big(\frac{\partial u}{\partial x^i}g_{jm} + \frac{\partial u}{\partial x^j}g_{mi} - \frac{\partial u}{\partial x^m}g_{ij}\Big)\,, \tag{3.7}$$

o anche

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + \frac{1}{2u}\Big(\frac{\partial u}{\partial x^i}\delta^k_j + \frac{\partial u}{\partial x^j}\delta^k_i\Big) - \frac{g^{km}}{2u}\frac{\partial u}{\partial x^m}g_{ij}\,. \tag{3.8}$$

Quindi

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \frac{1}{2}X(\log u)\,Y + \frac{1}{2}Y(\log u)\,X - \frac{1}{2}g(X,Y)\,\nabla\log u\,.$$

Si osservi che se la funzione u è costante, cioè la metrica $\widetilde{g}$ è omotetica a g, si ha

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}\,,$$

dunque $\widetilde{\nabla} = \nabla$.

ESEMPIO 3.2.10 (Connessione di Levi–Civita della sfera). Usando l'equazione (2.1) per la metrica canonica della sfera $\mathbb{S}^n$ in coordinate stereografiche, abbiamo

$$\partial_\gamma g^{\mathbb{S}^n}_{\alpha\beta} = -\frac{16x^\gamma_N}{(|x_N|^2+1)^3}\delta_{\alpha\beta}\,,$$

da cui si ottiene, per la formula (3.5),

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{\gamma\sigma}\big(\partial_\alpha g_{\beta\sigma} + \partial_\beta g_{\alpha\sigma} - \partial_\sigma g_{\alpha\beta}\big) = -\frac{2}{|x_N|^2+1}\big(x^\alpha_N\delta^\gamma_\beta + x^\beta_N\delta^\gamma_\alpha - x^\gamma_N\delta_{\alpha\beta}\big)\,.$$

Nell'Esempio 2.3.1 abbiamo visto che le sfere di raggio $R>0$ sono isometriche a $(\mathbb{S}^n, R^2 g_{\mathrm{can}})$, che per quanto detto nell'esempio precedente, hanno gli stessi simboli di Christoffel.

ESEMPIO 3.2.11 (Connessione di Levi–Civita dello spazio iperbolico). Essendo la metrica canonica su $\mathbb{H}^n = \big\{(x^1,\dots,x^n)\in\mathbb{R}^n \,:\, x^n>0\big\}$ conforme a quella di $\mathbb{R}^n$, abbiamo

$$g_{\mathrm{can}} = \frac{1}{(x^n)^2}g_{\mathrm{eucl}} = \frac{1}{(x^n)^2}\sum_{i=1}^n dx^i\otimes dx^i\,.$$

Usando la formula (3.7) e l'equazione (2.2), per lo spazio iperbolico si ha (ricordando che per $(\mathbb{R}^n, g_{\mathrm{eucl}})$ i simboli di Christoffel sono nulli),

$$\Gamma^k_{ij} = -\frac{1}{x^n}\left(\delta^n_i\delta^k_j + \delta^n_j\delta^k_i - \delta_{ij}\delta^{kn}\right)\,.$$

Si osservi che se tutti e tre gli indici i,j,k sono diversi da n, si ha $\Gamma^k_{ij}=0$.
Come per le sfere, gli spazi $(\mathbb{H}^n_c, g^c)$, omotetici allo spazio iperbolico $(\mathbb{H}^n, g_{\mathrm{can}})$ (si veda l'Esempio 2.3.2), hanno gli stessi simboli di Christoffel.

ESERCIZIO 3.2.12. Siano (M,g) e (N,h) due varietà riemanniane e consideriamo la varietà prodotto $(M\times N, g\times h)$. Se $\big(U,(x^1,\dots,x^m)\big)$ e $(V,(y^1,\dots,y^n))$ sono rispettivamente una carta di M e N, allora $\big(U\times V,(x^1,\dots,x^m,y^1,\dots,y^n)\big)$ è una carta di $M\times N$. Se $g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j$ e $h=h_{\alpha\beta}dy^\alpha\otimes dy^\beta$, nell'Esempio 2.3.4 abbiamo definito la metrica prodotto $g\times h$ che in coordinate ha la forma

$$g\times h_{(p,q)} = g_{ij}(p)dx^i_{(p,q)}\otimes dx^j_{(p,q)} + h_{\alpha\beta}(q)dy^\alpha_{(p,q)}\otimes dy^\beta_{(p,q)}\,.$$

Si mostri che

$$\begin{aligned}\Gamma^k_{ij}(p,q) &= {}^M\Gamma^k_{ij}(p)\\ \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(p,q) &= {}^N\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}(q)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Gamma^\alpha_{ij}(p,q) = \Gamma^k_{\alpha j}(p,q) = \Gamma^k_{i\alpha}(p,q) = 0\\ \Gamma^k_{\alpha\beta}(p,q) = \Gamma^\gamma_{\alpha j}(p,q) = \Gamma^\gamma_{i\beta}(p,q) = 0\,.\end{aligned}$$

Di conseguenza, se X e Y sono campi vettoriali su $M\times N$ tali che $X(p,q) = X^i(p,q)\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{(p,q)} + X^\alpha(p,q)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\big|_{(p,q)}$ e $Y(p,q) = Y^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{(p,q)} + Y^\alpha(q)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\big|_{(p,q)}$ su $U\times V$, si ha

$$\begin{aligned}\nabla_X Y_{(p,q)} &= \nabla^M_{X^i(\cdot,q)\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^k_p\frac{\partial}{\partial x^k}\bigg|_{(p,q)} + \nabla^N_{X^\alpha(p,\cdot)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\left(Y^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)^\gamma_q\frac{\partial}{\partial y^\gamma}\bigg|_{(p,q)}\\ &= \left(\nabla^M_{X^i(\cdot,q)\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p, \nabla^N_{X^\alpha(p,\cdot)\frac{\partial}{\partial y^\alpha}}\left(Y^\beta\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)_q\right)\end{aligned}$$

con l'identificazione dell'Esempio 2.3.4.
Si scrivano poi i simboli di Christoffel della connessione di Levi–Civita del prodotto warped di due varietà riemanniane in termini degli analoghi simboli di Christoffel delle due varietà (in particolare, nel caso di un prodotto warped su un intervallo di $\mathbb{R}$).

Ricci e Levi–Civita dopo la pubblicazione del
calcolo differenziale assoluto a fine '800

3.3. La connessione di Levi–Civita di una sottovarietà

Sia $\iota : S \hookrightarrow M$ una sottovarietà riemanniana di (M, g) con la metrica indotta. Ricordiamo che consideriamo T_pS come un sottospazio vettoriale di T_pM, per ogni punto $p \in S$. Allora ogni vettore $v \in T_pM$ può essere decomposto ortogonalmente rispetto a g_p in modo unico come $v = v^\top + v^\perp$ con $v^\top \in T_pS$ e $v^\perp \in T_pS^\perp$. Indicando con ∇^Me ∇^S le connessioni di Levi–Civita rispettivamente di M e S, se $X, Y \in \Gamma(TS)$, per ogni $p \in S$ si ha

$$\big(\nabla^S_X Y\big)_p = \big(\nabla^M_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\big)^\top_p \,, \tag{3.9}$$

dove $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ sono campi estensioni locali dei campi X e Y (visti come mappe da S in TM) in un intorno di $p \in M$.

Si vede infatti facilmente che il membro destro di questa equazione è indipendente dalle estensioni scelte e definisce una connessione compatibile con la metrica indotta $h = i^*g$ su S, in quanto, se $Y \in \Gamma(TS)$ e $W \in \Gamma(TM)$, su S vale

$$g(W, Y) = g(W^\top + W^\perp, Y) = g(W^\top, Y) = h(W^\top, Y)\,.$$

Inoltre, se $\widetilde{f} \in C^\infty(M)$ e $X \in \Gamma(TS)$, considerate la funzione $f = \widetilde{f}|_S = \widetilde{f} \circ \iota$ e un'estensione locale $\widetilde{X}$ di X definita in un intorno U di $p \in S$ in M, per ogni $q \in U \cap S$ si ha

$$Xf(q) = df_q(X_q) = d\widetilde{f}_q \circ d\iota_q(X_q) = d\widetilde{f}_q(\widetilde{X}_q) = \widetilde{X}\widetilde{f}(q)\,.$$

Dunque,

$$\begin{aligned} Xh(Y, Z) &= \widetilde{X} g(\widetilde{Y}, \widetilde{Z}) \\ &= g\big(\nabla^M_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}, \widetilde{Z}\big) + g\big(\widetilde{Y}, \nabla^M_{\widetilde{X}} \widetilde{Z}\big) \\ &= h\big(\big(\nabla^M_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\big)^\top, Z\big) + h\big(Y, \big(\nabla^M_{\widetilde{X}} \widetilde{Z}\big)^\top\big)\,, \end{aligned}$$

per ogni $X, Y, Z \in \Gamma(TS)$. Tale connessione è anche simmetrica, in quanto

$$\big(\nabla^M_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\big)^\top - \big(\nabla^M_{\widetilde{Y}} \widetilde{X}\big)^\top = \big(\nabla^M_{\widetilde{X}} \widetilde{Y} - \nabla^M_{\widetilde{Y}} \widetilde{X}\big)^\top = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^\top = [X, Y]$$

(si veda l'Esercizio 1.6.12 per l'ultimo passaggio). La formula (3.9) segue allora per l'unicità della connessione di Levi–Civita di S.

In una carta coordinata (U, φ) tale che $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}|_p$ sia una base coordinata di T_pS e $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ di T_pM, per ogni $p \in U \cap S$ (per l'esistenza di una tale carta, si veda la nozione di carta adattata a una sottovarietà nella Sezione 1.6), si ha allora

$${}^S\Gamma^k_{ij} = {}^M\Gamma^k_{ij} + {}^M\Gamma^s_{ij} \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial x^s} \Big)^\top \Big]^k$$

per ogni $i, j, k \in \{1, \dots, m\}$, con s che varia tra $m+1$ e n. Si noti che questa formula si può chiaramente estendere anche a riferimenti locali con le stesse proprietà, anche quando non vengono necessariamente da una carta coordinata.

OSSERVAZIONE 3.3.1. La formula (3.9) è particolarmente rilevante per le sottovarietà di $\mathbb{R}^n$, data la "semplicità" della sua connessione di Levi–Civita.

OSSERVAZIONE 3.3.2. Tutta la precedente discussione vale anche se $f : S \to M$ è un'immersione isometrica tra le due varietà riemanniane (S, h) e (M, g), con ∇^S e ∇^M le rispettive connessioni di Levi–Civita. Per vederlo, per ogni $p \in S$ identifichiamo T_pS con il sottospazio vettoriale $df_p(T_pS)$ di $T_{f(p)}M$ e denotiamo con $v^\top$ la proiezione ortogonale rispetto a $g_{f(p)}$ su $T_pS \subseteq T_{f(p)}M$ di un vettore $v \in T_{f(p)}M$. Fissando allora $p \in S$ e ricordando che possiamo restringere l'immersione f a un intorno U di $p \in S$ dove f è un embedding, se $X, Y \in \Gamma(TS)$

abbiamo che i campi $(f|_U)_*(X)$ e $(f|_U)_*(Y)$ sono campi vettoriali definiti su $f(U)$ che si estendono localmente a dei campi vettoriali $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ in un intorno di $f(p)$ in M. A questo punto basta provare (lo si mostri per esercizio) che

$$\big(\nabla^S_X Y\big)_p = \big(\nabla^M_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\big)^\top_{f(p)}\,,$$

per l'arbitrarietà di p, X e Y.

DEFINIZIONE 3.3.3. Sia $f : S \to M$ un'immersione isometrica tra le due varietà riemanniane (S, h) e (M, g), rispettivamente di dimensione n e m. Per ogni punto $p \in S$, definiamo lo *spazio normale* N_pS di S in p come il sottospazio vettoriale $T_pS^\perp$ di $T_{f(p)}M$, di dimensione $m - n$, dei vettori ortogonali a T_pS rispetto a $g_{f(p)}$. Abbiamo allora, per restrizione delle banalizzazioni locali di TM, il fibrato vettoriale $NS = \cup_{p\in S} N_pS$ di rango $m - n$ su S, detto *fibrato normale*. Le sezioni di NS sono dette *campi normali* su S.
In particolare, se $n = m - 1$, localmente S è un'ipersuperficie di M con spazio normale unidimensionale N_pS, per ogni $p \in S$. Esiste dunque sempre un unico campo normale unitario ν (a meno di segno) localmente e il vettore ν_p è detto "*la normale*" a S in p (sebbene sia definita solo a meno di segno). Segue dunque che ogni campo normale X su S ha localmente la forma $X = s\nu$, per una funzione s funzione a valori reali di classe C^∞.

OSSERVAZIONE 3.3.4. Se consideriamo la sottovarietà $(m - k)$–dimensionale $S = f^{-1}(c)$ di (M, g) data dalla controimmagine di $c \in \mathbb{R}^k$ per una sommersione $f : M \to \mathbb{R}^k$, con la metrica indotta da g, in ogni $p \in S$ (per il quale, ovviamente, $f(p) = c$) lo spazio normale a S è dato da

$$\begin{aligned} N_pS = (T_pS)^\perp = (\ker df_p)^\perp &= \big\{v \in T_pM \;:\; g_p(v, w) = 0 \text{ per ogni } w \in \ker df_p\big\}\\ &= \langle \nabla f^1_p, \dots, \nabla f^k_p\rangle\,. \end{aligned}$$

In particolare, se $k = 1$ abbiamo un'ipersuperficie S di M con iperpiano tangente $T_pS = \ker df_p = \nabla f_p^\perp$ e spazio normale unidimensionale N_pS generato dal gradiente ∇f_p in ogni punto $p \in S$. Il campo $\nu = \nabla f/|\nabla f|_g \in \Gamma(NS)$ è dunque un campo normale e unitario su S (ed è l'unico, a meno di segno).

DEFINIZIONE 3.3.5. Sia $f : S \to M$ un'immersione isometrica tra le due varietà riemanniane (S, h) e (M, g), con ∇^S e ∇^M le rispettive connessioni di Levi–Civita. Se $X \in \Gamma(TS)$ e $Y \in \Gamma(NS)$, definiamo la *connessione normale* $\nabla^\perp$ sul fibrato normale NS di S, per ogni $p \in S$, come

$$\big(\nabla^\perp_X Y\big)_p = \big(\nabla^M_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}\big)^\perp_{f(p)} \tag{3.10}$$

dove $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ sono delle estensioni locali dei campi $(f|_U)_*(X)$ e Y su $f(U)$, in un intorno di $f(p)$ in M, restringendo l'immersione f all'intorno U di $p \in S$ dove è un embedding e abbiamo indicato con $v^\perp$ la proiezione ortogonale rispetto a $g_{f(p)}$ su N_pS di un vettore $v \in T_{f(p)}M$.

Si ha allora (lo si provi per esercizio) che il membro destro dell'equazione (3.10) è indipendente dalle estensioni dei campi e definisce una connessione sul fibrato normale NS di S. Tale connessione $\nabla^\perp$ è compatibile con la metrica g ristretta a NS, infatti se $Y, Z \in \Gamma(NS)$ sono campi normali su S, abbiamo in $p \in S$,

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) &= \widetilde{X} g(\widetilde{Y}, \widetilde{Z})\\ &= g\big(\nabla^M_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}, \widetilde{Z}\big) + g\big(\widetilde{Y}, \nabla^M_{\widetilde{X}} \widetilde{Z}\big)\\ &= g\big((\nabla^M_{\widetilde{X}} \widetilde{Y})^\perp, \widetilde{Z}\big) + g\big(\widetilde{Y}, (\nabla^M_{\widetilde{X}} \widetilde{Z})^\perp\big)\\ &= g\big(\nabla^\perp_X Y, Z\big) + g\big(Y, \nabla^\perp_X Z\big) \end{aligned}$$

per ogni $X \in \Gamma(TS)$, dove $\widetilde{X}, \widetilde{Y}, \widetilde{Z}$ sono estensioni locali in un intorno di $f(p)$ in M dei campi $df(X), df(Y), df(Z)$ definiti solo su $f(S)$.

Supponendo che $S \subseteq M$ sia una sottovarietà di M, in una carta coordinata (U, φ) tale che $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p$ sia una base coordinata di T_pS e $\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}|_p$ di T_pM e i campi vettoriali $\frac{\partial}{\partial x^{n+1}}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m}|_p$ generino N_pS, per ogni $p \in S \cap U$ (si mostra che una tale carta coordinata si può sempre trovare nell'intorno di ogni punto di S, si veda dopo l'Osservazione 10.2.7), si ha allora

$$ {}^S\Gamma_{ij}^k = {}^M\Gamma_{ij}^k $$

per ogni $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ e i simboli di Christoffel ${}^\perp\Gamma_{ij}^k$ di $\nabla^\perp$ sono dati da

$$ {}^\perp\Gamma_{ij}^k = {}^M\Gamma_{ij}^k \tag{3.11} $$

per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j, k \in \{n+1, \dots, m\}$. Queste formule si possono chiaramente estendere anche a riferimenti locali con le stesse proprietà, anche quando non vengono necessariamente da una carta coordinata.

OSSERVAZIONE 3.3.6. Nel caso di un'ipersuperficie $S \subseteq M$ con campo normale unitario locale ν, ogni campo normale Y su S ha localmente la forma $Y = s\nu$, con s funzione a valori reali di classe C^∞. Dunque, la sua *derivata covariante normale* rispetto a un campo $X \in \Gamma(TS)$ è data da

$$ \nabla_X^\perp Y = \nabla_X^\perp(s\nu) = \big((Xs)\nu + s\nabla_{\widetilde{X}}^M \widetilde{\nu}\big)^\perp = (Xs)\nu\,, $$

in quanto

$$ 0 = Xg\big(\nu, \nu\big) = 2g\big(\nabla_{\widetilde{X}}^M \widetilde{\nu}, \nu\big)\,, \tag{3.12} $$

cioè $\nabla_{\widetilde{X}}^M \widetilde{\nu}$ è un campo tangente a S, da cui $\nabla_X^\perp \nu = \big(\nabla_{\widetilde{X}}^M \widetilde{\nu}\big)^\perp = 0$.
Si noti che questo è coerente con le relazioni (3.11), se la base coordinata è tale che $\frac{\partial}{\partial x^{n+1}} = \nu$, infatti la connessione normale è definita in questa base coordinata dai simboli di Christoffel ${}^\perp\Gamma_{i\,n+1}^{n+1}$, per $i \in \{1, \dots, n\}$ e questi sono tutti nulli, per la formula (3.12).

3.4. Connessione di Levi–Civita e sommersioni riemanniane

DEFINIZIONE 3.4.1. Data una sommersione riemanniana $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \to (M, g)$, con sottospazio orizzontale $H_{\widetilde{p}} \subseteq T_{\widetilde{p}}\widetilde{M}$, per ogni $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$,

- diciamo che un vettore $v \in T_{\widetilde{p}}\widetilde{M}$ è *orizzontale* se $v \in H_{\widetilde{p}}$, *verticale* se $v \in H_{\widetilde{p}}^\perp = \ker d\pi_{\widetilde{p}}$
- diciamo che un campo vettoriale $\widetilde{X} \in \Gamma(T\widetilde{M})$ è *orizzontale/verticale* se $\widetilde{X}_{\widetilde{p}}$ è orizzontale/verticale per ogni $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$,
- per ogni campo $X \in \Gamma(TM)$ esiste un unico campo orizzontale $\widetilde{X} \in \Gamma(T\widetilde{M})$ tale che $d\pi_{\widetilde{p}}(\widetilde{X}_{\widetilde{p}}) = X_{\pi(\widetilde{p})}$ per ogni $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$, detto *sollevamento orizzontale di X*.

Vogliamo stabilire la relazione tra le derivate di Levi–Civita $\widetilde{\nabla}$ e ∇, rispettivamente di $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ e di (M, g), usando l'equazione (3.6) e i seguenti lemmi.

LEMMA 3.4.2. *Un campo vettoriale $\widetilde{X} \in \Gamma(T\widetilde{M})$ è verticale se e solo se $\widetilde{X}(f \circ \pi) = 0$ per ogni $f \in C^\infty(M)$.*

DIMOSTRAZIONE. Si ha $\widetilde{X}(f \circ \pi)(\widetilde{p}) = df_{\pi(\widetilde{p})}(d\pi_{\widetilde{p}}(\widetilde{X}_{\widetilde{p}}))$ per ogni $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$. Tale identità implica immediatamente che se $\widetilde{X} \in \Gamma(T\widetilde{M})$ è verticale allora $\widetilde{X}(f \circ \pi) = 0$ per ogni $f \in C^\infty(M)$. Viceversa, se $\widetilde{X}(f \circ \pi) = 0$ per ogni $f \in C^\infty(M)$, allora per ogni n–pla $(f_1, \dots, f_n)$ di funzioni in $C^\infty(M)$ che ristrette a un aperto U di M formano un sistema di coordinate, si ha $\widetilde{X}(f_i \circ \pi) = 0$ che implica $d\pi(\widetilde{X}) = 0$ in $\pi^{-1}(U)$, per l'identità iniziale. $\square$

LEMMA 3.4.3. *Siano $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \Gamma(T\widetilde{M})$ i sollevamenti orizzontali dei campi vettoriali $X, Y \in \Gamma(TM)$. Allora il campo vettoriale $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] - \widetilde{[X, Y]}$ è verticale e se $\widetilde{W}$ è verticale si ha che $[\widetilde{X}, \widetilde{W}]$ è verticale.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\widetilde{f} = f \circ \pi$, allora per ogni $\widetilde{Z} \in \Gamma(T\widetilde{M})$, sollevamento orizzontale di un campo vettoriale $Z \in \Gamma(TM)$, si ha

$$\widetilde{Z}\widetilde{f}(\widetilde{p}) = d\widetilde{f}_{\widetilde{p}}(\widetilde{Z}_{\widetilde{p}}) = df_{\pi(\widetilde{p})}(d\pi_{\widetilde{p}}(\widetilde{Z}_{\widetilde{p}})) = df_{\pi(\widetilde{p})}(Z_{\pi(\widetilde{p})}) = Zf(\pi(\widetilde{p}))\,.$$

Dunque, la prima asserzione segue per la definizione di parentesi di Lie, la relazione $\widetilde{[X, Y]}\widetilde{f} = ([X, Y]f) \circ \pi$ e il Lemma 3.4.2. Per la seconda, essendo $\widetilde{W}\widetilde{f} = 0$, si ha

$$[\widetilde{X}, \widetilde{W}]\widetilde{f} = -\widetilde{W}\widetilde{X}\widetilde{f} = -\widetilde{W}[(Xf) \circ \pi)] = 0$$

dunque, anch'essa segue dal Lemma 3.4.2. □

PROPOSIZIONE 3.4.4. *Siano $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \Gamma(T\widetilde{M})$ i sollevamenti orizzontali dei campi vettoriali $X, Y \in \Gamma(TM)$, allora*

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y} = \widetilde{\nabla_X Y} + \frac{1}{2}[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V$$

dove abbiamo indicato con $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V$ la componente verticale di $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$. In particolare, si ha

$$\big(\nabla_X Y\big)_{\pi(\widetilde{p})} = d\pi_{\widetilde{p}}\big[\big(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}\big)_{\widetilde{p}}\big]\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $\widetilde{Z} \in \Gamma(T\widetilde{M})$ il sollevamento orizzontale di un campo vettoriale $Z \in \Gamma(TM)$ e $\widetilde{W} \in \Gamma(T\widetilde{M})$ un campo vettoriale verticale. Poiché valgono

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}\big(\widetilde{X}, \widetilde{Y}\big) &= g(X, Y) \circ \pi \\
\widetilde{g}\big([\widetilde{X}, \widetilde{Y}], \widetilde{Z}\big) &= \widetilde{g}\big(\widetilde{[X, Y]}, \widetilde{Z}\big) = g([X, Y], Z) \circ \pi \\
\widetilde{W}\widetilde{g}\big(\widetilde{X}, \widetilde{Y}\big) &= \widetilde{W}\big(g(X, Y) \circ \pi\big) = 0\,,
\end{aligned}$$

allora per la formula (3.6) si ha

$$\widetilde{g}\big(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \widetilde{Z}\big) = g(\nabla_X Y, Z) \circ \pi = \widetilde{g}\big(\widetilde{\nabla_X Y}, \widetilde{Z}\big)$$

e

$$\widetilde{g}\big(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}, \widetilde{W}\big) = \frac{1}{2}\widetilde{g}\big([\widetilde{X}, \widetilde{Y}], \widetilde{W}\big)\,.$$

La tesi dunque segue. □

ESERCIZIO 3.4.5. Si noti che i campi $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$ e $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ non sono necessariamente orizzontali. Si mostri che

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] - \widetilde{[X, Y]} = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V$$

e che la funzione $(X, Y) \mapsto [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V$ è $C^\infty(M)$–multilineare, dunque un tensore di tipo $(1, 2)$. Inoltre, si noti che tale funzione "misura" la non–integrabilità della distribuzione orizzontale $\widetilde{p} \mapsto H_{\widetilde{p}}$, associata alla sommersione.

3.5. La derivata covariante lungo una curva

Siano M una varietà differenziabile e ∇ una connessione affine su M.

DEFINIZIONE 3.5.1. Sia $\gamma : I \to M$ una curva. Un *campo vettoriale lungo* γ è un'applicazione $X : I \to TM$, di classe C^∞, tale che $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ per ogni $t \in I$.

Si osservi che l'insieme dei campi vettoriali lungo γ ha una naturale struttura di $C^\infty(I)$–modulo (e quindi di spazio vettoriale reale). Considerando il fibrato vettoriale su I che a ogni punto $t \in I$ associa lo spazio $T_{\gamma(t)}M$, indicato con γ^*TM e detto *pull–back* del fibrato TM (si veda [**237**], per esempio), tali campi ne sono le sezioni $\Gamma(\gamma^*TM)$.

OSSERVAZIONE 3.5.2. Se $\gamma : I \to M$ è una curva, un esempio di campo vettoriale lungo γ è la sua *velocità* $\dot\gamma$, che opera come segue:

$$\dot\gamma(t)f = \frac{d\,(f\circ\gamma)}{dt}(t)\,,$$

per ogni $f \in C^\infty(M)$ e $t \in I$.

OSSERVAZIONE 3.5.3. Data la curva $\gamma : I \to M$, una classe importante di campi vettoriali lungo γ è dato dai campi del tipo

$$X(t) = \widetilde{X}_{\gamma(t)} \qquad\qquad \text{per ogni } t \in I,$$

dove $\widetilde{X}$ è un fissato campo vettoriale definito in un intorno del supporto di γ. Un campo vettoriale X lungo γ di questo tipo è detto *estendibile* (e in tal caso si dice che $\widetilde{X}$ è un'*estensione* di X).

OSSERVAZIONE 3.5.4. In generale, data una mappa $f : N \to M$ tra due varietà differenziabili N e M, possiamo definire i *campi vettoriali lungo* f, che formano uno spazio vettoriale e un $C^\infty(N)$–modulo, come le applicazioni $X : N \to TM$ tali che $X(p) \in T_{f(p)}M$, per ogni $p \in N$. Ciò sarà particolarmente rilevante se N è una sottovarietà di M, oppure se la mappa f è un'immersione.

PROPOSIZIONE 3.5.5 (Derivata covariante lungo una curva). *Data una curva $\gamma : I \to M$ esiste un unico operatore $\frac{D}{dt}$ dallo spazio dei campi vettoriali lungo γ in se stesso, con le seguenti proprietà:*

- *$\frac{D}{dt}$ è $\mathbb{R}$–lineare,*
- *per ogni $f \in C^\infty(I)$ vale la formula*

$$\frac{D}{dt}(fX)(t) = f'(t)X(t) + f(t)\frac{D}{dt}X(t)\,,$$

  per ogni $t \in I$,
- *se X è un campo localmente estendibile in un intorno di $\gamma(t_0)$ (relativamente alla curva "ristretta" $\gamma|_{(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)}$, per un qualche $\varepsilon > 0$) e $\widetilde{X}$ è una sua estensione, vale la formula*

$$\frac{D}{dt}X(t_0) = \big(\nabla_{\dot\gamma(t_0)}\widetilde{X}\big)_{\gamma(t_0)}\,. \tag{3.13}$$

DIMOSTRAZIONE. Fissiamo $t_0 \in I$ e delle coordinate locali in un intorno di $\gamma(t_0)$. Se X è un campo vettoriale lungo la curva $\gamma : I \to M$, possiamo allora scrivere $X(t) = X^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{\gamma(t)}$ per t in un intorno di t_0 e usando le proprietà formali che definiscono la derivata covariante, si ha

$$
\begin{aligned}
\frac{D}{dt}X(t) &= \frac{D}{dt}\Big(X^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)}\Big) \\
&= \dot X^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)} + X^i(t)\,\frac{D}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)} \\
&= \dot X^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)} + X^i(t)\,\Big(\nabla_{\dot\gamma(t)}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)_{\gamma(t)} \\
&= \dot X^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)} + X^i(t)\,\dot\gamma^j(t)\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)_{\gamma(t)} \\
&= \dot X^i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t)} + X^i(t)\,\dot\gamma^j(t)\,\Gamma^k_{ji}(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{\gamma(t)} \\
&= \Big(\dot X^k(t) + X^i(t)\,\dot\gamma^j(t)\,\Gamma^k_{ji}(\gamma(t))\Big)\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{\gamma(t)}.
\end{aligned}
$$

Quindi l'operatore di derivata covariante lungo una curva γ deve soddisfare la formula

$$
\frac{D}{dt}X(t) = \Big(\dot X^k(t) + \Gamma^k_{ji}(\gamma(t))\,\dot\gamma^j(t)\,X^i(t)\Big)\frac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{\gamma(t)} \tag{3.14}
$$

in coordinate locali. È facile vedere che se allora usiamo questa formula per definire $\frac{D}{dt}$ per t in un intorno di ogni $t_0 \in I$, abbiamo un operatore univocamente determinato che soddisfa le proprietà nell'enunciato della proposizione (lo si mostri per esercizio). □

L'operatore $\frac{D}{dt}$ così definito è detto *derivata covariante lungo* γ (rispetto alla connessione ∇). Il campo $\frac{D}{dt}X$ si indicherà talvolta anche con X' o $\dot X$, oppure con $\nabla_{\dot\gamma}X$, per la formula (3.13). Si noti la similarità con l'espressione della connessione di una sottovarietà discussa nella sezione precedente e si osservi la coerenza con quanto visto nell'Esercizio 3.1.5.

OSSERVAZIONE 3.5.6. Non ci servirà questo punto di vista più astratto, ma si osservi che la mappa $(f\frac{\partial}{\partial t}, X) \mapsto (\gamma^*\nabla)_{f\frac{\partial}{\partial t}}X = f\frac{D}{dt}X$, per $f : I \to \mathbb{R}$ e X campo lungo $\gamma : I \to M$, determina una connessione $\gamma^*\nabla$ sul fibrato vettoriale *pull–back* γ^*TM del fibrato TM (si veda il commento immediatamente dopo la Definizione 3.5.1), che può essere definita come il *pull–back* della connessione affine ∇ su TM. In tali notazioni si ha dunque $\frac{D}{dt}X = (\gamma^*\nabla)_{\frac{\partial}{\partial t}}X$.

Dalle proprietà della derivata covariante si deduce immediatamente che $\frac{D}{dt}$ è un operatore locale, nel senso che se J è un intervallo contenuto in I, si ha

$$
\frac{\overline{D}}{dt}(X|_J)(t) = \frac{D}{dt}X(t) \qquad \text{per ogni } t \in J \text{ e } X \text{ campo vettoriale lungo } \gamma,
$$

dove $\frac{\overline{D}}{dt}$ indica l'operatore di derivata covariante associato alla curva $\gamma|_J$.

ESERCIZIO 3.5.7. Si mostri che una connessione affine ∇ su M è univocamente determinata dalla famiglia degli operatori $\frac{D}{dt}$ a lei associati, per tutte le curve di M.

Nel caso in cui ∇ sia una connessione affine compatibile con la metrica, in particolare se ∇ è la connessione di Levi–Civita di (M, g), si ha la formula

$$
\frac{d}{dt}g(X(t), Y(t)) = g\Big(\frac{D}{dt}X(t), Y(t)\Big) + g\Big(X(t), \frac{D}{dt}Y(t)\Big), \tag{3.15}
$$

che segue facilmente dalle proprietà di $\frac{D}{dt}$ e dalla formula (3.14).

ESERCIZIO 3.5.8. Si mostri che se $S \subseteq M$ è una sottovarietà di (M, g) con la metrica indotta, l'operatore $\frac{D^S}{dt}$ lungo una curva $\gamma : I \to S$ è dato da

$$\frac{D^S}{dt}X(t) = \left(\frac{D^M}{dt}X(t)\right)^{\top},$$

cioè è la proiezione ortogonale su ogni tangente a S del campo vettoriale lungo γ (vista come una curva di M) che si ottiene applicando l'operatore $\frac{D^M}{dt}$.

ESERCIZIO 3.5.9. Siano $f : M \to N$ un'isometria tra due varietà riemanniane (M, g) e (N, h) e $\gamma : I \to M$ una curva di M. Indichiamo con $\frac{D^M}{dt}$ e $\frac{D^N}{dt}$ le derivate covarianti lungo γ e lungo $f \circ \gamma$, relative alle connessioni di Levi–Civita di M e N, rispettivamente. Si mostri che

$$\frac{D^N}{dt}Y = df\left(\frac{D^M}{dt}\left(df^{-1}(Y)\right)\right),$$

per ogni Y campo vettoriale lungo $f \circ \gamma$ (si tenga presente l'Esercizio 3.2.7).

OSSERVAZIONE 3.5.10. Per mezzo della derivata covariante lungo una curva $\gamma : I \to M$, possiamo definire la sua *accelerazione* $\ddot{\gamma}$ come la derivata covariante lungo γ stessa del suo campo di velocità $\dot{\gamma}$, cioè il campo lungo γ dato da

$$\ddot{\gamma}(t) = \frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t)$$

per ogni $t \in I$.

3.6. Trasporto parallelo

Siano M una varietà differenziabile e ∇ una connessione affine su M.

DEFINIZIONE 3.6.1. Un campo vettoriale X si dice *parallelo* in un aperto $U \subseteq M$, se $\nabla_Y X = 0$ per ogni campo vettoriale Y in U.

Un campo vettoriale X lungo una curva $\gamma : I \to M$ si dice *parallelo lungo* γ, se $\frac{D}{dt}X(t) = 0$ per ogni $t \in I$.

OSSERVAZIONE 3.6.2. Vediamo alcune immediate conseguenze di questa definizione e degli Esercizi 3.5.8 e 3.5.9 (le si provi per esercizio).

- Un campo X su un aperto $U \subseteq M$ è parallelo se e solo se è parallelo lungo tutte le curve in U.
- Se $S \subseteq M$ è una sottovarietà di (M, g) con la metrica indotta, un campo vettoriale X lungo una curva $\gamma : I \to S$ è parallelo se solo se $\left(\frac{D^M}{dt}X(t)\right)^{\top}$ è nullo.
- Se $f : (M, g) \to (N, h)$ è un'isometria e X è un campo parallelo lungo una curva $\gamma : I \to M$, allora $df(X)$ è un campo parallelo lungo la curva $f \circ \gamma : I \to N$.

Un fatto fondamentale riguardo ai campi paralleli lungo una curva γ in M è che ogni vettore di T_pM, con p un punto di γ, può essere esteso a un campo parallelo lungo tale curva.

PROPOSIZIONE 3.6.3. *Data una curva $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ e $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ esiste un unico campo X parallelo lungo γ tale che $X(t_0) = X_0$. Tale campo vettoriale è detto* trasporto parallelo *del vettore X_0 lungo γ.*

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col caso in cui il supporto di $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ sia contenuto in un'unica carta coordinata $(U, (x^1, \dots, x^n))$. Le condizioni

$$\begin{cases} \frac{D}{dt}X(t) = 0 \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

in coordinate locali diventano

$$\begin{cases} \Big(\dot{X}^k(t) + \Gamma^k_{ji}(\gamma(t))\,\dot\gamma^j(t)\,X^i(t)\Big)\dfrac{\partial}{\partial x^k}\Big|_{\gamma(t)} = 0 \\ X(t_0) = X^i_0 \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{\gamma(t_0)} \end{cases}$$

per ogni $t \in [t_0, t_1]$ e $k \in \{1, \dots, n\}$.
Dunque, per ottenere l'esistenza e l'unicità dell'estensione parallela di X_0, in questo caso basta osservare che il sistema (lineare a coefficienti C^∞) di ODE,

$$\begin{cases} \dot{X}^k(t) + \Gamma^k_{ji}(\gamma(t))\,\dot\gamma^j(t)\,X^i(t) = 0 \\ X^k(t_0) = X^k_0 \end{cases} \tag{3.16}$$

per ogni $k \in \{1, \dots, n\}$, ha una e unica soluzione su tutto $[t_0, t_1]$ (si veda [173]).
Nel caso generale, per ottenere il campo parallelo $X(t)$ suddividiamo l'intervallo $[t_0, t_1]$ in sottointervalli $I_s = [\tau_{s-1}, \tau_s]$ con $\tau_0 = t_0$ e $\tau_m = t_1$, in modo tale che per ogni $s \in \{1, \dots, m\}$ la curva $\gamma_s = \gamma|_{I_s}$ abbia supporto contenuto in una singola carta coordinata di M. Poi definiamo induttivamente dei campi $X_s(t)$ lungo le curve γ_s prendendo le soluzioni dei sistemi:

$$\begin{cases} \frac{D}{dt} X_1 = 0 \\ X_1(\tau_0) = X_0 \end{cases}$$
$$\dots$$
$$\begin{cases} \frac{D}{dt} X_s = 0 \\ X_s(\tau_{s-1}) = X_{s-1}(\tau_{s-1}) \end{cases}$$
$$\dots$$

A questo punto il trasporto parallelo di X_0 lungo γ è dato dal campo definito ponendo

$$X(t) = X_s(t) \qquad \text{se } t \in I_s.$$

$\square$

OSSERVAZIONE 3.6.4. Si noti che usando la costruzione di cui sopra si può definire il trasporto parallelo di un vettore lungo una curva anche per una curva soltanto C^1 a tratti.

Fissata una curva $\gamma : [t_0, t_1] \to M$, definiamo allora l'*operatore di trasporto parallelo lungo* γ

$$P : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$$

mediante la formula

$$P(X_0) = X(t_1) \in T_{\gamma(t_1)}M$$

dove $X(t)$ indica il trasporto parallelo di $X_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ lungo la curva γ.

ESERCIZIO 3.6.5. Si provi che l'operatore di trasporto parallelo $P : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$ lungo $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ è un isomorfismo lineare, la cui inversa è la mappa $T_{\gamma(t_1)}M \ni v \mapsto V(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}M$ essendo V il campo parallelo lungo γ soddisfacente $V(t_1) = v$. Si noti infatti che l'esistenza e unicità di un siffatto campo vettoriale può essere provata procedendo analogamente alla dimostrazione della Proposizione 3.6.3.

Nel caso speciale che ∇ sia la connessione di Levi–Civita di (M, g), quindi compatibile con la metrica, dalla formula (3.15) segue che se $X(t)$ e $Y(t)$ sono due campi paralleli lungo la curva γ, si ha

$$\frac{d}{dt} g(X(t), Y(t)) = g\Big(\frac{D}{dt}X(t), Y(t)\Big) + g\Big(X(t), \frac{D}{dt}Y(t)\Big) = 0\,,$$

cioè $g(X(t), Y(t))$ è costante in t. In particolare, l'operatore $P : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$ è un'isometria e $|X(t)|_{\gamma(t)}$ è costante lungo γ.

OSSERVAZIONE 3.6.6. L'operatore di trasporto parallelo $P : T_pM \to T_qM$ tra due punti p e q di M *dipende* in generale dalla curva γ che li unisce (un esempio è mostrato nella figura seguente). In $\mathbb{R}^n$ invece è indipendente da γ, infatti ogni vettore costante è un campo parallelo su tutto $\mathbb{R}^n$, da cui il trasporto parallelo è semplicemente la funzione identità tra i tangenti ai punti di una curva (identificandoli con $\mathbb{R}^n$ stesso). In particolare, in $\mathbb{R}^n$ ogni vettore tangente v si può estendere a un campo parallelo. Vedremo che anche queste proprietà caratterizzeranno le varietà localmente isometriche a $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$.

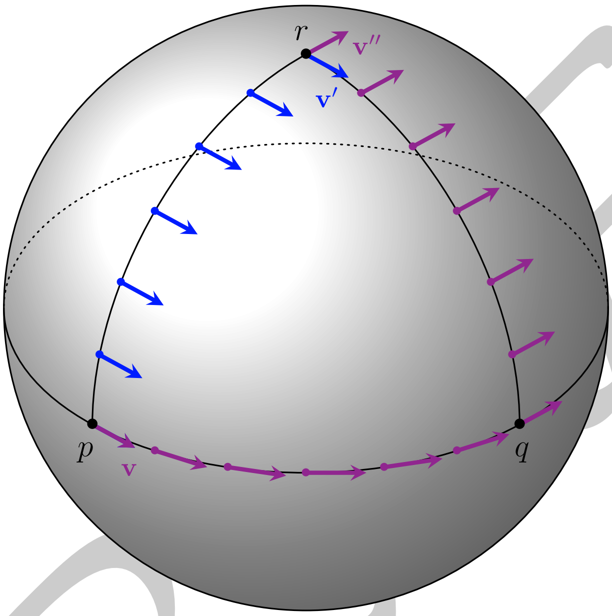

FIGURA 3.1 Un esempio di dipendenza dal cammino del trasporto parallelo. Considerando il triangolo geodetico su $\mathbb{S}^2$ come nella figura (un *ottante* della sfera unitaria di $\mathbb{R}^3$), il trasporto parallelo del vettore $v \in T_p\mathbb{S}^2$ lungo l'arco pr è dato dal vettore $v' \in T_r\mathbb{S}^2$, mentre lungo il cammino unione degli archi pq e poi qr, dal vettore $v'' \in T_r\mathbb{S}^2$ con $v'' \neq v'$.

OSSERVAZIONE 3.6.7. Se $\gamma : [t_0, t_1] \to M$ è una curva chiusa C^∞ a tratti con base $p \in M$, cioè $\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = p$, l'operatore di trasporto parallelo $P : T_pM \to T_pM$ definisce un automorfismo lineare di T_pM in sé, che è un'isometria, se ∇ è la connessione di Levi–Civita di (M, g). L'insieme di tali automorfismi (al variare della curva chiusa con base $p \in M$) è detto *gruppo di olonomia* di (M, g) in p.

ESERCIZIO 3.6.8 (Trasporto parallelo sul cono). Consideriamo un cono con un angolo di apertura al vertice uguale ad $\alpha > 0$, con la metrica indotta da $\mathbb{R}^3$. Possiamo "aprire" il cono privato di una sua *retta generatrice* sul piano $\mathbb{R}^2$ e chiaramente costruire un'isometria che lo identifichi con un settore circolare aperto infinito di $\mathbb{R}^2$ (si veda la figura sottostante). Sappiamo che il trasporto parallelo in $\mathbb{R}^2$ è dato semplicemente dalle traslazioni, invariante per la curva scelta che congiunge il punto di partenza col punto d'arrivo. Si osservi allora, per esercizio, che l'operatore di trasporto parallelo lungo una circonferenza sul cono perpendicolare al suo asse, applicato a un vettore di una retta generatrice del cono, è una "rotazione" e se ne calcoli l'angolo in dipendenza da α.

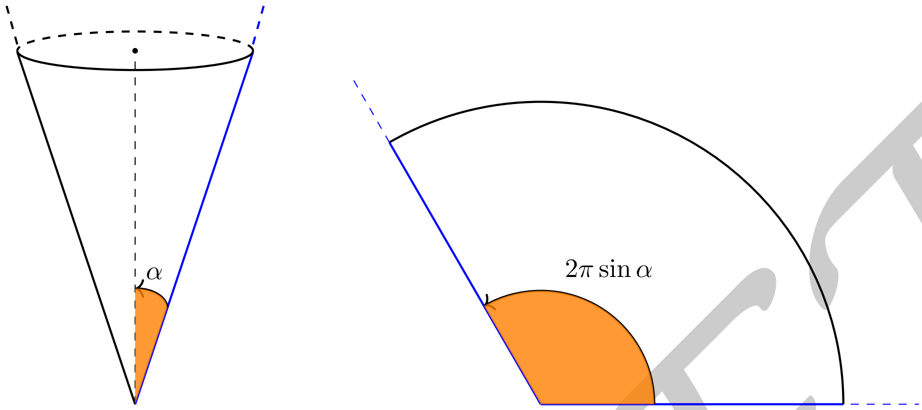

FIGURA 3.2

ESERCIZIO 3.6.9. Siano X, Y due campi vettoriali su M e γ una curva tale che $\gamma(0) = p$ e $\dot\gamma(0) = X_p$. Se $P_t : T_pM \to T_{\gamma(t)}M$ è l'operatore di trasporto parallelo lungo γ, allora

$$\frac{d}{dt} P_t^{-1}(Y_{\gamma(t)})\Big|_{t=0} = (\nabla_X Y)_p$$

per ogni $p \in M$ (si confronti con la Proposizione 1.5.2).

3.7. Estensione delle connessioni affini ai tensori

Come per la derivata di Lie nella Sezione 1.3, vediamo l'estensione di una connessione affine a tutti i fibrati tensoriali T^r_sM.

DEFINIZIONE 3.7.1. Data una connessione affine ∇ su M, esiste un'unica connessione su ogni fibrato vettoriale T^r_sM che coincida con ∇ su TM e soddisfi

- $\nabla_X f = Xf = df(X)$ per ogni funzione $f \in C^\infty(M) = \Gamma(T^0_0M)$,
- $\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S$ per ogni coppia di tensori T ed S (∇_X è una derivazione sull'algebra dei tensori di M),
- $\nabla_X \circ c^p_q = c^p_q \circ \nabla_X$ per ogni contrazione c^p_q (∇_X commuta con le contrazioni),

per ogni $X \in \Gamma(TM)$.

L'esistenza e l'unicità di tale connessione si ottiene con lo stesso argomento con cui si estende unicamente la derivata di Lie ai tensori. Per la linearità e la proprietà di essere una derivazione, usando carte locali, basta dimostrare che $\nabla_X\omega$ è unicamente definita e determinata per ogni 1–forma ω su M. Per ogni campo vettoriale Y si deve avere

$$\begin{aligned}(\nabla_X\omega)(Y) &= c^1_1(\nabla_X\omega \otimes Y)\\ &= c^1_1\big(\nabla_X(\omega\otimes Y) - \omega\otimes\nabla_X Y\big)\\ &= c^1_1 \circ \nabla_X(\omega\otimes Y) - c^1_1(\omega\otimes\nabla_X Y)\\ &= \nabla_X \circ c^1_1(\omega\otimes Y) - \omega(\nabla_X Y)\\ &= X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)\,, \end{aligned} \tag{3.17}$$

dunque $\nabla_X \omega$ è unicamente determinata.

Si noti che in una carta coordinata, ponendo

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^j = G^j_{ik} dx^k$$

e $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^k}$, $\omega = dx^j$ nella formula sopra, otteniamo

$$G^j_{ik} = \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^j\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = -dx^j\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^k}\right) = -\Gamma^j_{ik}\,.$$

Cioè i simboli di Christoffel della connessione sul fibrato cotangente sono gli opposti dei simboli di Christoffel di ∇. In ogni carta coordinata, una volta noti i simboli di Christoffel della connessione sul fibrato tangente e cotangente, dato un tensore $T \in \Gamma(T^r_s M)$, abbiamo che

$$\begin{aligned}(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} T)^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} &= \frac{\partial}{\partial x^k} T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} + \sum_{p=1}^{s} G^{l_p}_{kj_p} T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_{p-1} l_p j_{p+1}\dots j_s} + \sum_{q=1}^{r} \Gamma^{i_q}_{kl_q} T^{i_1\dots i_{q-1} l_q i_{q+1}\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} - \sum_{p=1}^{s} \Gamma^{l_p}_{kj_p} T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_{p-1} l_p j_{p+1}\dots j_s} + \sum_{q=1}^{r} \Gamma^{i_q}_{kl_q} T^{i_1\dots i_{q-1} l_q i_{q+1}\dots i_r}_{j_1\dots j_s}\,.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 3.7.2. Si mostri che se $T \in \Gamma(T^r_s M)$, per ogni $X, X_1, \dots, X_s \in \Gamma(TM)$ e per ogni $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Gamma(TM^*)$, si ha

$$\begin{aligned}(\nabla_X T)(X_1, \dots, X_s, \omega_1, \dots, \omega_r) &= X\big(T(X_1, \dots, X_s, \omega_1, \dots, \omega_r)\big)\\ &\quad - \sum_{i=1}^{s} T(X_1, \dots, X_{i-1}, \nabla_X X_i, X_{i+1}, \dots, X_s, \omega_1, \dots, \omega_r)\\ &\quad - \sum_{j=r}^{s} T(X_1, \dots, X_s, \omega_1, \dots, \omega_{j-1}, \nabla_X \omega_j, \omega_{j+1}, \dots, \omega_r)\,.\end{aligned}$$

In particolare, se $\omega \in \Gamma(T^0_s M)$ e $X, X_1, \dots, X_s$ sono campi vettoriali,

$$\begin{aligned}(\nabla_X \omega)(X_1, \dots, X_s) &= X(\omega(X_1, \dots, X_s))\\ &\quad - \sum_{i=1}^{s} \omega(X_1, \dots, X_{i-1}, \nabla_X X_i, X_{i+1}, \dots, X_s)\,.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Per gli Esercizi 1.3.4 e 1.4.13, se la connessione ∇ è simmetrica, si provi che allora

$$\begin{aligned}(L_X \omega)(X_1, \dots, X_s) &= (\nabla_X \omega)(X_1, \dots, X_s)\\ &\quad + \sum_{i=1}^{s} \omega(X_1, \dots, X_{i-1}, \nabla_{X_i} X, X_{i+1}, \dots, X_s)\end{aligned}$$

e

$$d\alpha(X_0, X_1, \dots, X_s) = \sum_{i=0}^{s} (-1)^i (\nabla_{X_i} \alpha)(X_0, \dots, X_{i-1}, \widehat{X_i}, X_{i+1}, \dots, X_s)\,, \tag{3.19}$$

per ogni s–forma differenziale $\alpha \in \Omega^s M$.

PROPOSIZIONE 3.7.3. *Se ∇ è la connessione di Levi–Civita della varietà riemanniana (M, g), si ha $\nabla_X g = 0$, per ogni campo vettoriale X.*

DIMOSTRAZIONE. Considerati tre campi vettoriali $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, usando l'equazione (3.18) si ha

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0\,,$$

per la condizione di compatibilità con la metrica, da cui la tesi. □

OSSERVAZIONE 3.7.4. Si hanno naturalmente le nozioni di campo tensoriale lungo una curva $\gamma : I \to M$, di derivata covariante $\frac{D}{dt}$ lungo γ, associata a una connessione sul fibrato vettoriale $T^r_s M$, così come di campo tensoriale *parallelo lungo* γ (precisamente, diremo che un campo tensoriale T lungo γ è parallelo se soddisfa $\frac{D}{dt}T = 0$ in tutti i punti $t \in I$) e di trasporto parallelo di un tensore.
Inoltre, diremo che T è *parallelo* in un aperto $U \subseteq M$ se ∇T è zero in U. Si ha dunque che la metrica g è una 2–forma parallela su M per la connessione di Levi–Civita.

ESERCIZIO 3.7.5. Si enunci e provi una formula analoga a quella dell'Esercizio 1.5.3 per la derivata covariante di un tensore T.

ESERCIZIO 3.7.6. Sia ∇ la connessione di Levi–Civita di (M, g). Si osservi che in una carta coordinata, così come $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma^l_{ki} g_{lj} + \Gamma^l_{kj} g_{li}$, si ha $\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = G^i_{kl} g^{lj} + G^j_{kl} g^{li}$. Poi si mostri che l'estensione di ∇ ai fibrati vettoriali $T^r_s M$, data dalla Definizione 3.7.1, è compatibile con l'estensione della metrica g, definita nella Sezione 2.4, cioè

$$Xg(T, S) = g(\nabla_X T, S) + g(T, \nabla_X S),$$

per ogni coppia $T, S \in \Gamma(T^r_s M)$.

Dato un tensore $T \in \Gamma(T^r_s M)$, con $r + s > 0$, possiamo dunque definire il tensore $\nabla T \in \Gamma(T^r_{s+1} M)$ che opera come

$$(\nabla T)(X_0, X_1, \dots, X_s, \omega_1, \dots, \omega_r) = (\nabla_{X_0} T)(X_1, \dots, X_s, \omega_1, \dots, \omega_r).$$

In coordinate, useremo spesso le notazioni

$$\nabla_k T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \nabla T^{i_1 \dots i_r}_{k j_1 \dots j_s} = (\nabla T)^{i_1 \dots i_r}_{k j_1 \dots j_s} = \big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} T\big)^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s}$$

e indicheremo con $\nabla^\ell T$ l'applicazione ℓ–volte della connessione ∇ a T,

$$\nabla^\ell_{k_1 \dots k_\ell} T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \nabla^\ell T^{i_1 \dots i_r}_{k_1 \dots k_\ell j_1 \dots j_s} = (\nabla^\ell T)^{i_1 \dots i_r}_{k_1 \dots k_\ell j_1 \dots j_s}.$$

Per la "regola di Leibniz", si ha

$$\begin{aligned}\nabla_m (T \otimes S)^{i_1 \dots i_r k_1 \dots k_p}_{j_1 \dots j_s \ell_1 \dots \ell_q} &= (\nabla_m T \otimes S + T \otimes \nabla_m S)^{i_1 \dots i_r k_1 \dots k_p}_{j_1 \dots j_s \ell_1 \dots \ell_q} \\ &= \nabla_m T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} S^{k_1 \dots k_p}_{\ell_1 \dots \ell_q} + T^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} \nabla_m S^{k_1 \dots k_p}_{\ell_1 \dots \ell_q}.\end{aligned}$$

Con queste convenzioni è facile vedere che se ∇ è la connessione di Levi–Civita, si ha $\nabla_k g_{ij} = \nabla_k g^{ij} = 0$, che insieme alla regola di Leibniz semplificano notevolmente il calcolo in coordinate, in quanto mostrano che possiamo sempre commutare le operazioni di prendere una derivata covariante e di contrarre con la metrica o la sua inversa.

OSSERVAZIONE 3.7.7. Abbiamo richiesto che $r + s > 0$ nella definizione sopra di ∇T, con $T \in \Gamma(T^r_s M)$, in quanto se T è una funzione $f \in C^\infty(M) = \Gamma(T^0_0 M)$, con la notazione sopra ∇f si indicherebbe il *differenziale* df, mentre abbiamo denotato con ∇f il *gradiente* di f, cioè $df^\sharp$, nella Definizione 2.5.7.

3.8. Operatori differenziali su varietà riemanniane

La derivata covariante permette di generalizzare a una varietà riemanniana gli operatori differenziali "classici" di $\mathbb{R}^n$: gradiente, divergenza, laplaciano, hessiano. Sia ∇ la connessione di Levi–Civita della varietà riemanniana (M, g), abbiamo già visto che il gradiente di una funzione $f \in C^\infty(M)$ è dato dal campo vettoriale $\nabla f = df^\sharp$, definito da $g(\nabla f, X) = df(X)$.

DEFINIZIONE 3.8.1. La *divergenza* $\operatorname{div} T$ di un tensore $T \in \Gamma(T^r_s M)$, con $r > 0$, è data dalla contrazione $c^1_1 \nabla T \in \Gamma(T^{r-1}_s M)$, in particolare la *divergenza* di un campo vettoriale X è la *traccia* di ∇X, cioè $\operatorname{div} X = \operatorname{tr} \nabla X = c^1_1 \nabla X$, in coordinate $\nabla_i X^i$. La *divergenza* di una s–forma $\omega \in \Gamma(T^0_s M)$ è la $(s-1)$–forma $\operatorname{div} \omega = c^1_1 (\nabla \omega)^\sharp$, data in coordinate dalla contrazione

$$\operatorname{div} \omega_{k_1 \dots k_{s-1}} = g^{ij} \nabla_i \omega_{j k_1 \dots k_{s-1}} ,$$

in particolare, se ω è una 1–forma, $\operatorname{div} \omega = g^{ij} \nabla_i \omega_j$.
Si noti che $\operatorname{div} X = \operatorname{div} X^\flat$, per ogni campo vettoriale X e $\operatorname{div} \omega = \operatorname{div} \omega^\sharp$, per ogni 1–forma ω.

Vediamo il calcolo della divergenza di un campo X e di una 1–forma ω in coordinate locali:

$$\operatorname{div} X = \nabla_i X^i = \nabla_{\partial_i} (X^j \partial_j)^i = \Big(\frac{\partial X^j}{\partial x^i} \partial_j + X^j \Gamma^k_{ij} \partial_k \Big)^i = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^j \Gamma^i_{ij} ,$$

$$\operatorname{div} \omega = g^{ij} \nabla_i \omega_j = g^{ij} \nabla_{\partial_i} (\omega_k dx^k)_j = g^{ij} \Big(\frac{\partial \omega_k}{\partial x^i} dx^k - \omega_k \Gamma^k_{is} dx^s \Big)_j = g^{ij} \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - g^{ij} \omega_k \Gamma^k_{ij} .$$

Come in $\mathbb{R}^n$ abbiamo il fondamentale *teorema della divergenza*.

TEOREMA 3.8.2 (Teorema della divergenza). *Sia (M, g) una varietà riemanniana orientata e $D \subseteq M$ un aperto limitato con ∂D un'ipersuperficie di classe C^∞ (si ricordi che segue che anche ∂D è orientata, Proposizione 1.8.4). Allora, denotando con ν la normale esterna e con $d\sigma$ la forma di volume canonica su ∂D indotta dalla metrica $g|_{\partial D}$, cioè $d\sigma = i_\nu d\mu_g$, con $d\mu_g$ la forma di volume di M, si ha*

$$\int_D \operatorname{div} X \, d\mu_g = \int_{\partial D} g(X, \nu) \, d\sigma ,$$

per ogni campo vettoriale $X \in C^\infty(\overline{D})$.

DIMOSTRAZIONE. Ponendo

$$\omega = \sqrt{\det g_{ij}} \Big(\sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} X^k \, dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^k} \dots \wedge dx^n \Big) = i_X \big(\sqrt{\det g_{ij}} \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \big)$$

si ha

$$\begin{aligned}
d\omega &= \Big(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^k}{\partial x^k} \sqrt{\det g_{ij}} + X^k \frac{\partial}{\partial x^k} \sqrt{\det g_{ij}} \Big) \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\
&= \Big(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^k}{\partial x^k} \sqrt{\det g_{ij}} + \frac{X^k}{2\sqrt{\det g_{ij}}} \frac{\partial}{\partial x^k} \det g_{ij} \Big) \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\
&= \Big(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^k}{\partial x^k} \sqrt{\det g_{ij}} + \frac{X^k \sqrt{\det g_{ij}}}{2} g^{pq} \frac{\partial g_{pq}}{\partial x^k} \Big) \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\
&= \Big(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^k}{\partial x^k} \sqrt{\det g_{ij}} + \frac{X^k \sqrt{\det g_{ij}}}{2} g^{pq} \big(\Gamma^l_{kp} g_{lq} + \Gamma^l_{kq} g_{pl} \big) \Big) \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\
&= \Big(\sum_{k=1}^n \frac{\partial X^k}{\partial x^k} \sqrt{\det g_{ij}} + \frac{X^k \sqrt{\det g_{ij}}}{2} \big(\Gamma^p_{kp} + \Gamma^q_{kq} \big) \Big) \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\
&= \Big(\sum_{k=1}^n \Big(\frac{\partial X^k}{\partial x^k} + X^k \Gamma^p_{kp} \Big) \sqrt{\det g_{ij}} \Big) \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \\
&= \operatorname{div} X \sqrt{\det g_{ij}} \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n ,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la formula

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\det A = \det A \sum_{p,q=1}^{n} A^{-1}_{pq}\frac{\partial}{\partial x^k}A_{pq}\,,$$

che vale per qualunque matrice $A \in \mathrm{GL}(n)$ dipendente da x, derivabile e le equazioni (3.4).
La tesi segue allora applicando il teorema di Stokes 1.8.6 alla $(n-1)$–forma differenziale ω, in quanto

$$i_X\big(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n\big)\big|_{\partial D} = \iota^*\big(i_X\big(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n\big)\big) = g(X,\nu)\,d\sigma$$

dove $\iota : \partial D \hookrightarrow M$ è l'inclusione (lo si provi per esercizio, osservando che le forme differenziali coincidono su una base di $T_p\partial D$, per ogni $p \in \partial D$). $\square$

Una facile conseguenza è il seguente corollario (lo si mostri per esercizio).

COROLLARIO 3.8.3. *Sia (M, g) una varietà riemanniana orientata. Allora*

$$\int_M \mathrm{div} X\, d\mu_g = 0$$

per ogni campo vettoriale $X \in \Gamma(TM)$ a supporto compatto.

ESERCIZIO 3.8.4. Nelle stesse notazioni e ipotesi del Teorema 3.8.2, si mostri che se $\omega \in \Gamma(T^0_k M)$, $T \in \Gamma(T^{k+1}_0 M)$ e $S \in \Gamma(T^k_0 M)$, si hanno le formule

$$\int_D \omega(\mathrm{div}\, T)\, d\mu_g + \int_D \nabla\omega(T)\, d\mu_g = \int_{\partial D} (\nu^\flat \otimes \omega)(T)\, d\sigma\,,$$

$$\int_D g(\mathrm{div}\, T, S)\, d\mu_g + \int_D g(T^\flat, \nabla S)\, d\mu_g = \int_{\partial D} g(T, \nu \otimes S)\, d\sigma\,.$$

In particolare, in coordinate locali, la prima formula si scrive come

$$\int_D \omega_{j_1\dots j_k}\nabla_i T^{ij_1\dots j_k}\, d\mu_g + \int_D \nabla_i\omega_{j_1\dots j_k} T^{ij_1\dots j_k}\, d\mu_g = \int_{\partial D} \omega_{j_1\dots j_k} g_{im}\nu^m T^{ij_1\dots j_k}\, d\sigma\,.$$

DEFINIZIONE 3.8.5. Il *rotore* $\mathrm{rot}\, X$ di un campo vettoriale X è la 2–forma differenziale $dX^\flat$. In coordinate locali,

$$\mathrm{rot}\, X = \frac{\partial(g_{ik}X^i)}{\partial x^j}\, dx^j \wedge dx^k\,.$$

Si noti che vale la relazione "classica" $\mathrm{rot}\,\nabla f = 0$ per ogni $f \in C^\infty(M)$, in quanto

$$\mathrm{rot}\,\nabla f = d\nabla f^\flat = ddf = 0\,.$$

OSSERVAZIONE 3.8.6. In $\mathbb{R}^3$ il rotore di un campo $\mathrm{rot}\, X$ viene identificato con il campo vettoriale $(\star\,\mathrm{rot}\, X)^\sharp = (\star\, dX^\flat)^\sharp$, per mezzo dell'operatore $\star$ di Hodge (si veda la Sezione 2.6).

DEFINIZIONE 3.8.7. L'*hessiano* di una funzione $f \in C^\infty(M)$ è dato dalla 2–forma simmetrica

$$\mathrm{Hess} f = \nabla df = \nabla^2 f\,,$$

il *laplaciano* di f è la traccia dell'hessiano $\mathrm{Hess} f$, cioè

$$\Delta f = \mathrm{tr}\,\mathrm{Hess} f = \mathrm{Hess} f^i_i = g^{ij}\mathrm{Hess} f_{ij} = g^{ij}\nabla^2_{ij} f\,,$$

in coordinate locali (si ricordi la Definizione 2.5.5).
Si noti che segue $\Delta f = \mathrm{div}\,\nabla f = \mathrm{div}\, df$, come in $\mathbb{R}^n$.

Esplicitando questa definizione, per la formula (3.17), si ha

$$\mathrm{Hess}f(X,Y) = (\nabla_X df)(Y) = Xdf(Y) - df(\nabla_X Y) = XYf - (\nabla_X Y)f\,,$$

da cui segue la simmetria dell'hessiano in quanto

$$\begin{aligned}\mathrm{Hess}f(X,Y) - \mathrm{Hess}f(Y,X) &= XYf - (\nabla_X Y)f - YXf + (\nabla_Y X)f\\ &= [X,Y]f - (\nabla_X Y - \nabla_Y X)f\\ &= 0\,,\end{aligned}$$

per la proprietà di torsione nulla (simmetria) della connessione di Levi–Civita.
Si noti che vale anche

$$\mathrm{Hess}f(X,Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y)\,.$$

In coordinate, l'hessiano di $f \in C^\infty(M)$ si scrive dunque

$$\mathrm{Hess}f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k} \tag{3.20}$$

e il laplaciano di f come

$$\Delta f = g^{ij}\mathrm{Hess}f_{ij} = g^{ij}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - g^{ij}\Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}\,.$$

OSSERVAZIONE 3.8.8. Si noti il caso speciale

$$\Delta x^i = \mathrm{div}\,\nabla x^i = g^{jk}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^j \partial x^k} - g^{jk}\Gamma^s_{jk}\frac{\partial x^i}{\partial x^s} = -g^{jk}\Gamma^i_{jk}$$

del laplaciano delle funzioni coordinate locali.

ESERCIZIO 3.8.9. Si provino le seguenti identità:

$$\mathrm{div}X = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}\frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\sqrt{\det g_{ij}}\,X^k\Big)\,,$$

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}}\frac{\partial}{\partial x^k}\Big(\sqrt{\det g_{ij}}\,g^{k\ell}\frac{\partial f}{\partial x^\ell}\Big)\,,$$

$$\mathrm{div}(fX) = g(\nabla f, X) + f\,\mathrm{div}X\,,$$

$$\mathrm{div}(h\nabla f) = g(\nabla h,\nabla f) + h\Delta f \quad \text{e} \quad \Delta(hf) = h\Delta f + 2g(\nabla h,\nabla f) + f\Delta h\,,$$

per ogni campo vettoriale X e $f, g \in C^\infty(M)$. Si ricordi l'uguaglianza

$$\frac{\partial\sqrt{\det g_{ij}}}{\partial x^k} = \Gamma^p_{kp}\sqrt{\det g_{ij}}\,.$$

OSSERVAZIONE 3.8.10. L'hessiano di una funzione $f \in C^\infty(M)$ è un concetto riemanniano, non differenziale. Chiaramente, l'hessiano "in coordinate" non sarebbe invariante per cambio di queste, ma anche considerata una generica connessione affine e definendo l'hessiano di una funzione come sopra, sarebbe diverso a seconda della connessione e in particolare potrebbe non essere nemmeno simmetrico. Però, nel caso speciale che lo si consideri in un punto critico p di f (dove quindi $\frac{\partial f}{\partial x^k}\big|_p = 0$, per ogni $k \in \{1,\dots,n\}$) si ha $\mathrm{Hess}f_p(X_p,Y_p) = XYf(p)$, cioè coincide con l'hessiano usuale in qualunque sistema di coordinate, dunque è indipendente dalla connessione affine (e in particolare dalla metrica, che potrebbe non essere nemmeno definita) e dalla carta coordinata scelta.

ESERCIZIO 3.8.11. Si mostri che per una funzione $f \in C^\infty(M)$ valgono le stesse relazioni di $\mathbb{R}^n$ tra le proprietà di essere massimo o minimo locale e il gradiente e gli autovalori dell'hessiano di f.

ESERCIZIO 3.8.12. Si mostri che per ogni campo vettoriale X e ogni funzione $f \in C^\infty(M)$, si ha (si veda l'Esercizio 1.4.8)

$$\frac{1}{2}L_X g = \mathcal{S}ym(\nabla X^\flat) \qquad \text{cioè} \qquad L_X g_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i$$

dove $X_i = X_i^\flat$ e

$$\frac{1}{2}L_{\nabla f} g = \nabla^2 f = \mathrm{Hess} f\,.$$

DEFINIZIONE 3.8.13. L'hessiano di un tensore $T \in \Gamma(T^r_s M)$ è dato da $\mathrm{Hess}\, T = \nabla^2 T$. Il laplaciano ΔT di T è la *traccia* di tale hessiano sulle prime due componenti covarianti, cioè in coordinate $\Delta T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s} = g^{ij}\nabla^2_{ij} T^{i_1\dots i_r}_{j_1\dots j_s}$. Si noti che segue $\Delta T = \operatorname{div} \nabla T$, se T è una s–forma e in generale $\Delta T = \operatorname{div} \nabla T^\sharp$, dove il diesis opera sull'indice di derivazione di T (si veda la Definizione 3.8.1).

OSSERVAZIONE 3.8.14. Mentre l'hessiano di una funzione è simmetrico, lo stesso non vale per l'hessiano di un campo vettoriale Z, infatti (calcolando come nella formula (3.17)) si ha

$$\nabla^2_{X,Y} Z = (\nabla_X \nabla Z)(Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z\,,$$

quindi

$$\begin{aligned}\nabla^2_{X,Y} Z - \nabla^2_{Y,X} Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{\nabla_Y X} Z\\ &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z\,.\end{aligned}$$

Se dunque il tensore $-R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$ non è nullo (a differenza di $\mathbb{R}^n$ e delle varietà ad esso localmente isometriche, dove invece lo è), l'hessiano di un campo non è simmetrico (analogamente l'hessiano di una 1–forma o di un generico tensore).
L'operatore $R(X,Y)$ che "misura" questo "errore" nello scambio delle derivate covarianti

$$-R(X,Y) = \nabla^2_{X,Y} - \nabla^2_{Y,X} = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]} = \nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_Y \circ \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$$

verrà detto *operatore di Riemann* (in onore di Bernhard Riemann [214]). Si verifichi per esercizio la seconda uguaglianza per un qualunque tensore $T \in \Gamma(T^r_s M)$ e si osservi che *definendo* analogamente per la derivata di Lie

$$L^2_{X,Y} - L^2_{Y,X} = [L_X, L_Y] - L_{[X,Y]}$$

si ha, per la formula (1.4),

$$L^2_{X,Y} - L^2_{Y,X} = [L_X, L_Y] - L_{[X,Y]} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X - L_{[X,Y]} = 0\,,$$

cioè l'analogo operatore per L è nullo (si noti in particolare la seconda formula nella Proposizione 1.3.5 e si ricordi la discussione dopo la Proposizione 1.5.1).

OSSERVAZIONE 3.8.15. Il laplaciano Δ sopra definito (detto anche laplaciano "semplice", "banale", "rough" o *operatore di Laplace–Beltrami*) e il laplaciano di Hodge Δ^H (si veda la Definizione 2.6.4) coincidono sulle funzioni $f \in C^\infty(M)$, ma differiscono in generale sulle forme differenziali.

PROPOSIZIONE 3.8.16 (Corollario del teorema della divergenza – Formule di Green). *Sia (M,g) una varietà riemanniana orientata e $\Omega \subseteq M$ un aperto limitato con bordo regolare. Siano $u, v \in C^\infty(M)$, zero su $\partial\Omega$. Allora,*

$$\int_\Omega u\Delta v\, d\mu_g = -\int_\Omega g(\nabla u, \nabla v)\, d\mu_g = \int_\Omega v\Delta u\, d\mu_g\,,$$

da cui

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\, d\mu_g = 0\,.$$

DIMOSTRAZIONE. La prima formula si ottiene applicando il Corollario 3.8.3 al campo $X = u\nabla v$, in quanto $\operatorname{div}(u\nabla v) = u\Delta v + g(\nabla u, \nabla v)$. La seconda è un'ovvia conseguenza. □

Segue che se (M, g) è una varietà riemanniana compatta (senza bordo), il laplaciano $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ è un operatore differenziale semidefinito negativo e autoaggiunto per il prodotto scalare L^2 di funzioni su M (si tenga presente che a causa del fatto che Δ è semidefinito negativo, per comodità vari autori indicano con Δ l'opposto del laplaciano).

DEFINIZIONE 3.8.17. Una funzione $f \in C^\infty(M)$ si dice *armonica* se $\Delta f = 0$.

Le funzioni armoniche su una varietà riemanniana (M, g) soddisfano le stesse proprietà locali delle funzioni armoniche su $\mathbb{R}^n$ e molte analoghe proprietà globali (in particolare se la varietà M è compatta). Per esempio, si provi il *principio del massimo (debole)*, cioè che una funzione armonica su un dominio limitato di M assume massimo e minimo al bordo del dominio. Inoltre, vale il seguente teorema.

PROPOSIZIONE 3.8.18. *Sia (M, g) una varietà riemanniana connessa, compatta (senza bordo) e orientata. Se $f \in C^\infty(M)$ è una funzione* armonica *su M, allora f è costante.*

DIMOSTRAZIONE. Per la proposizione precedente, ponendo $u = v = f$ si ha

$$0 = \int_\Omega f\Delta f\, d\mu_g = -\int_\Omega g(\nabla f, \nabla f)\, d\mu_g\,,$$

da cui la tesi, in quanto segue che ∇f è identicamente nullo e M è connessa. □

ESERCIZIO 3.8.19. Facendo riferimento alla Sezione 1.8, si provi a generalizzare alle varietà riemanniane i teoremi di Gauss–Green e del rotore (si tenga presente anche la Sezione 2.6). Inoltre, si estendano e discutano i concetti (e le mutue relazioni) di campi irrotazionali, solenoidali, conservativi, a divergenza nulla sulle varietà riemanniane (eventualmente 3–dimensionali) come fatto per $\mathbb{R}^3$ nella Sezione 1.8.