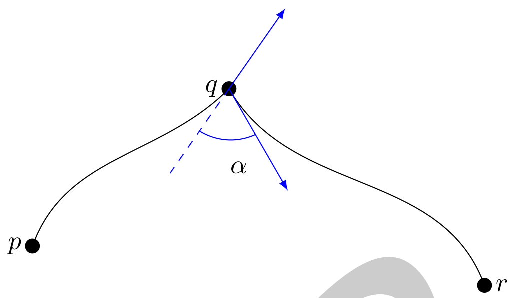
IL TEOREMA DI TOPONOGOV

Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione $n \in \mathbb{N}$.

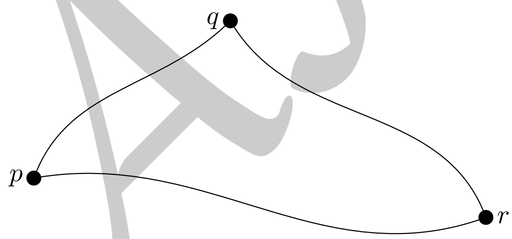
Definizione 0.1. Una cerniera (in inglese, hinge) consiste in due segmenti di geodetica minimale σ_1 e σ_2 tali che: σ_1 parte da un punto $r \in M$ e arriva in un punto $q \in M$; σ_2 parte dallo stesso punto q e arriva in un punto $p \in M$. Chiamiamo α l'angolo che formano. Possiamo sempre parametrizzare le geodetiche in lunghezza d'arco, in modo tale che valga

$$\sigma_1\left(\ell(\sigma_1)\right) = p = \sigma_2(0)\,, \qquad \alpha = \pi - \angle\left(\dot{\sigma_1}\left(\ell(\sigma_1)\right), \dot{\sigma_2}\left(0\right)\right)\,.$$

Definizione 0.2. Un triangolo consiste di tre punti p, q, r uniti a due a due da tre segmenti di geodetica minimale σ_1, σ_2, σ_3, che supporremmo anche stavolta parametrizzati in lunghezza d'arco.



cerniera



triangolo

Sia

$$(\mathbb{S}^n_k, g) = \begin{cases} (\mathbb{S}^n, \frac{1}{k} g_{can}) & k > 0 \text{ (Sfera)} \\ (\mathbb{R}^n, g_{eucl}) & k = 0 \\ (\mathbb{H}^n, \frac{1}{k} g_{can}) & k < 0 \text{ (Spazio iperbolico).} \end{cases}$$

Lemma 0.3. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa di dimensione n e $\mathrm{Sec} \geq k$ con $k \in \mathbb{R}$. Consideriamo inoltre $\mathbb{S}^n_k$.*

Allora per ogni cerniera formata dai segmenti σ_1, σ_2 con angolo α in M esiste una cerniera in $\mathbb{S}^n_k$ con segmenti della stessa lunghezza di σ_1, σ_2 e con lo stesso angolo α,

per ogni triangolo formato dai segmenti σ_1, σ_2, σ_3 in M esiste un triangolo in $\mathbb{S}^n_k$ con segmenti della stessa lunghezza di σ_1, σ_2, σ_3.

Dimostrazione. Se $k > 0$ si potrebbe porre il problema che le geodetiche da un certo punto in poi smettano di essere minimali.

Date: 31 marzo 2022.

La stima del teorema di Myers

$$diam(M) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}} = diam(\mathbb{S}_k^n)$$

dice che data una cerniera in M i due segmenti di geodetica minimale che lo compongono devono avere entrambi lunghezza minore di $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

È perciò possibile costruire una qualsiasi cerniera su $\mathbb{S}_k^n$ se era precedentemente stata realizzata in M,

infatti chiamati $p,\ q \in M$ i vertici di σ_1, per realizzare il primo segmento su $\mathbb{S}_k^n$ scegliamo $\overline{p}$,$\overline{q} \in \mathbb{S}_k^n$ a distanza $d\left(\overline{p}, \overline{q}\right) = d\left(p, q\right)$ e li uniamo con un segmento.

Ciò è possibile poiché $d\left(p, q\right) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Prendiamo $w \in T_{\overline{q}}\mathbb{S}_k^n$ tale che $\angle\left(\dot{\overline{\sigma_1}}\left(\ell(\sigma_1)\right), w\right) = \pi - \alpha$ e consideriamo la geodetica uscente da $\overline{q}$ con velocità iniziale w e lunghezza pari a quella di σ_2 in M. Sarà anch'essa un segmento poiché la sua lunghezza di σ_2 è minore di $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

Con un ragionamento simile si dimostra la tesi per il caso del triangolo.

Infatti, chiamati $p,\ q,\ r$ i tre vertici del triangolo in M, prendiamo nuovamente $\overline{p}, \overline{q} \in \mathbb{S}_k^n$, tali che il lato p,q sia il più lungo del triangolo.

Consideriamo poi $\partial B_1\left(\overline{p}, d\left(p, r\right)\right)$ e $\partial B_2\left(\overline{q}, d\left(q, r\right)\right)$, poiché $d\left(p, r\right)$ e $d\left(q, r\right)$ sono entrambe minori o uguali a $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, ∂B_1 e ∂B_2 hanno intersezione non vuota; $\overline{r}$ sarà uno dei due punti di intersezione.

Se $k \leq 0$, la stessa costruzione è sufficiente, e non si ha nemmeno il problema della minimalità. ☐

Teorema 0.4 (Teorema di Toponogov – versione hinge). *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa di dimensione n e con* $\mathrm{Sec} \geq k$ *con $k \in \mathbb{R}$.*

Allora, data una cerniera con vertici (p, q, r) e angolo α in (M, g), se la cerniera di vertici $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r})$ e angolo α è la cerniera di confronto in $\mathbb{S}_k^n$, si ha che

$$d\left(p, r\right) \leq d\left(\overline{p}, \overline{r}\right) .$$

Teorema 0.5 (Teorema di Toponogov – versione triangolo). *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa di dimensione n e con* $\mathrm{Sec} \geq k$ *con $k \in \mathbb{R}$.*

Allora, dato un triangolo di vertici (p, q, r) e angoli $\alpha,\ \beta\ , \gamma$ in M, se costruisco il triangolo di confronto in $\mathbb{S}_k^n$ di vertici $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r})$ e angoli $\overline{\alpha},\ \overline{\beta},\ \overline{\gamma}$ si ha

$$\overline{\alpha} \leq \alpha,\ \overline{\beta} \leq \beta,\ \overline{\gamma} \leq \gamma\,.$$

Per dimostrare entrambe le versioni del teorema di Toponogov seguiremo il seguente schema:

(1) dimostreremo la legge dei coseni per spazi a curvatura costante;
(2) faremo vedere come la versione hinge implica la versione triangolo;
(3) infine, andremo a dimostrare la versione hinge.

Osservazione 0.6. Calcoliamo l'hessiano della funzione

$$r\left(x\right)=d_p\left(x\right)$$

in spazi a curvatura costante.

- Se $k=0$ allora

$$Hess\frac{r^2}{2}=g\,,$$

$$Hessr=\frac{Hess\,r^2}{2r}-\frac{\nabla r\otimes\nabla r}{r}=\frac{1}{r}\left(g-\nabla r\otimes\nabla r\right)\,.$$

  Infatti, in coordinate normali, si ha

$$Hess\left(\frac{r^2}{2}\right)(e_i,e_j)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^i\partial x^j}\left(\sum_k x_k^2\right)=\delta_{ij}=g(e_i,e_j)\,.$$

  (Nota che il tangente di $\mathbb{R}^n$ è localmente $\mathbb{R}^n$.)
- Se $k=-1$ allora

$$Hess\left(r\right)=\frac{\cosh r}{\sinh r}g_r$$

  dove g_r è la metrica sui sottolivelli della funzione distanza.
- Se $k=1$ allora

$$Hess\left(r\right)=\frac{\cos r}{\sin r}g_r$$

  dove g_r è la metrica sui sottolivelli della funzione distanza.

Proposizione 0.7. *Consideriamo un triangolo in $\mathbb{S}_k^n$. Siano a,b,c le lunghezze dei tre lati e α l'ampiezza dell'angolo opposto ad a:*

- *se $k=0$, allora*

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha\,;$$

- *se $k=-1$, allora*

$$\cosh a=\cosh b\cosh c-\sinh b\sinh c\cos\alpha\,;$$

- *se $k=1$, allora*

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha\,.$$

Dimostrazione. Chiamiamo p,q,r i vertici del triangolo. Prendiamo una curva $\sigma:[0,c]\to S_k^n$ parametrizzata con velocità unitaria tale che $\sigma(0)=q$ e $\sigma(c)=r$. La distanza tra p e q è b. La distanza tra p e r è a. L'angolo in q è α. Studiamo la funzione

$$r(t)=d_p\circ\sigma(t)\,,$$

dove $d_p(x)$ indica la distanza di x dal punto p.

- Caso $k = 0$. Studiamo
$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left(d_p^2(\sigma(t))\right) .$$
Calcoliamo
$$\varphi'(t) = g\left(\nabla d_p(\sigma(t)), \dot\sigma(t)\right) \cdot d_p(\sigma(t)) = g\left(\frac{1}{2}\nabla d_p^2(\sigma(t)), \dot\sigma(t)\right) ,$$
$$\varphi''(t) = Hess\left(\frac{1}{2}d_p^2(\sigma(t))\right)(\dot\sigma(t), \dot\sigma(t)) = g\left(\dot\sigma(t), \dot\sigma(t)\right) = 1 .$$
Quindi
$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot t + \frac{1}{2}\varphi''(0)\cdot t^2 \\ &= \frac{1}{2}b^2 + g\left(\nabla d_p(\sigma(0)), \dot\sigma(0)\right)\cdot b \cdot t + \frac{1}{2}t^2 \\ &= \frac{1}{2}b^2 + \cos(\pi-\alpha)\cdot b\cdot t + \frac{1}{2}t^2 \\ &= \frac{1}{2}b^2 - \cos\alpha\cdot b\cdot t + \frac{1}{2}t^2 \end{aligned}$$
Prendiamo $t = c$, ottenendo il risultato.
- Caso $k = -1$. Studiamo
$$\varphi(t) = \cosh\left(d_p(\sigma(t))\right) - 1 .$$
Calcoliamo
$$\varphi'(t) = \sinh(d_p(\sigma(t))) \cdot g\left(\nabla d_p(\sigma(t)), \dot\sigma(t)\right) ,$$
$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= \cosh\left(d_p\left(\sigma\left(t\right)\right)\right)\left[g\left(\nabla d_p\left(\sigma\left(t\right)\right), \dot\sigma\left(t\right)\right)\right]^2 + \sinh\left(d_p\left(\sigma\left(t\right)\right)\right) Hess d_p(\sigma(t))\left(\dot\sigma(t), \dot\sigma(t)\right) \\ &= \cosh\left(d_p\left(\sigma\left(t\right)\right)\right)\left\{\left[g\left(\nabla d_p(\sigma(t)), \dot\sigma(t)\right)\right]^2 + g_r\left(\dot\sigma(t)^{\perp^r}, \dot\sigma(t)^{\perp^r}\right)\right\} = \cosh(d_p(\sigma(t))) \end{aligned}$$
Quindi
$$\begin{cases} \varphi''(t) = & \varphi(t) + 1 \\ \varphi(0) = & \cosh(b) - 1 \\ \varphi'(0) = & \sinh(b)\cos(\pi - \alpha) \end{cases}$$
La soluzione del sistema è:
$$\varphi(t) = (\varphi(0) + 1)\cosh(t) + \varphi'(0)\sinh(t) - 1 .$$
Sostituendo $t = c$, si ottiene la tesi.
- Caso $k = 1$. Studiamo
$$\varphi(t) = 1 - \cos\left(d_p\left(\sigma\left(t\right)\right)\right)$$
Calcoliamo
$$\varphi'(t) = \sin(d_p(\sigma(t))) \cdot g\left(\nabla d_p(\sigma(t)), \dot\sigma(t)\right) ,$$

$$
\begin{aligned}
\varphi''(t) &= \cos\left(d_p\left(\sigma(t)\right)\right)\left[g\left(\nabla d_p\left(\sigma(t)\right), \dot\sigma(t)\right)\right]^2 + \sin\left(d_p\left(\sigma(t)\right)\right) Hess d_p(\sigma(t))\left(\dot\sigma(t), \dot\sigma(t)\right) \\
&= \cos\left(d_p\left(\sigma(t)\right)\right)\left\{\left[g\left(\nabla d_p(\sigma(t)), \dot\sigma(t)\right)\right]^2 + g_r\left(\dot\sigma(t)^{\perp^r}, \dot\sigma(t)^{\perp^r}\right)\right\} = \cos(d_p(\sigma(t)))
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\begin{cases}
\varphi''(t) = & -\varphi(t) + 1 \\
\varphi(0) = & 1 - \cos(b) \\
\varphi'(0) = & -\sin(b)\cos(\pi - \alpha)
\end{cases}
$$

La soluzione del sistema è:

$$
\varphi(t) = (\varphi(0) - 1)\cos(t) + \varphi'(0)\sin(t) + 1 \ .
$$

Sostituendo $t = c$, si ottiene la tesi. □

Definizione 0.8. Diciamo che $Hess f \leq h$ nel senso delle barriere in q se $\forall \varepsilon$ esiste U_q^ε intorno di q e una funzione $\varphi_\varepsilon : U_q^\varepsilon \to \mathbb{R}$ di classe $C^2(U_q^\varepsilon)$ tale che

(1) $\varphi_\varepsilon(q) = f(q)$,
(2) $\varphi_\varepsilon \geq f$ in U_q^ε,
(3) $Hess \varphi_\varepsilon(q) \leq h(q) + \varepsilon g(q)$.

Lemma 0.9. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa con $\mathrm{Sec} \geq k$. Poniamo $r(x) = d_p(x)$.*

- *Se $k = 0$, allora $r_0 = \frac{r^2}{2}$ soddisfa*
$$
Hess(r_0) \leq g \, ,
$$
- *Se $k = -1$, allora $r_{-1} = \cosh(r) - 1$ soddisfa*
$$
Hess(r_{-1}) \leq (\cosh(r)) g = (1 + r_{-1})\, g \, ,
$$
- *Se $k = 1$, allora $r = 1 - \cos(r)$ soddisfa*
$$
Hess(r_1) \leq (\cos r)\, g = (1 - r_1)\, g \, ,
$$

nel senso delle barriere.

Dimostrazione. Vediamo la dimostrazione nel caso $k = 0$, gli altri due casi sono analoghi. Supponiamo prima che r sia liscia. Se $w \perp \nabla r$, allora si ha, per la disuguaglianza di Riccati

$$
Hess\, r(w, w) \leq \frac{1}{r} g(w, w) \ ,
$$

quindi, per l'uguaglianza 0.6, che vale in qualsiasi varietà

$$
Hess\, r_0(w, w) \leq g(w, w) \ .
$$

Se $w = \nabla r$, è ovvio.

Se r non è liscia, vediamo che la disuguaglianza vale nel senso delle barriere. Infatti, sia $q \in M$ e σ da p a q parametrizzata in lunghezza d'arco, di lunghezza ℓ. Poniamo

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{2}\left(\varepsilon + d(x,\sigma(\varepsilon))\right)^2 = \frac{1}{2}\left(d(p,\sigma(\varepsilon)) + d(x,\sigma(\varepsilon))\right)^2$$

quindi, per la disuguaglianza triangolare

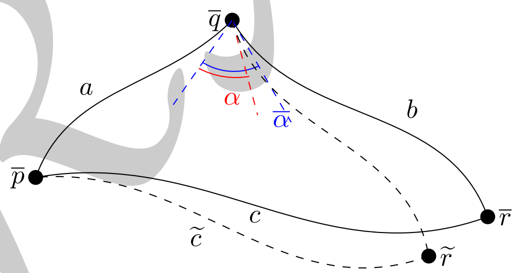
$$\varphi_\varepsilon(x) \geq \frac{d_p(x)^2}{2} \quad \text{se } x \in U_q^\varepsilon\,.$$

Se allora φ_ε è di classe C^2, si ottiene la tesi. Dimostriamo quindi che le funzioni φ_ε sono di classe C^2. Se non lo sono, allora significa che o q è coniugato a $\sigma(\varepsilon)$, oppure ci sono due curve da $\sigma(\varepsilon)$ a q. In entrambi i casi, la curva non potrebbe essere minimale da q a p. □

Proposizione 0.10. *Il teorema di Toponogov versione hinge implica il teorema di Toponogov versione triangoli.*

Dimostrazione. Prendiamo un triangolo T di vertici p, q, r e lati a, b, c nella varietà riemanniana (M, g), e il triangolo di confronto $\overline{T}$ di vertici $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$ e lati a, b, c nella space–form. Chiamato α l'angolo di vertice q, per assurdo, supponiamo che l'angolo $\overline{\alpha}$ corrispondente sia maggiore. Allora costruiamo la cerniera $\overline{p}, \overline{q}, \widetilde{r}$ di confronto a p, q, r e angolo α in $\mathbb{S}^n_k$, con segmento minimale di estremi $\overline{q}$ e $\widetilde{r}$ di lunghezza b. Sia $\widetilde{c}$ il segmento minimale da $\widetilde{r}$ a $\overline{p}$. Per la legge dei coseni $c > \widetilde{c}$, cioè

$$c = d\left(\overline{p}, \overline{r}\right) > d\left(\overline{p}, \widetilde{r}\right) = \widetilde{c}\,.$$



D'altra parte, per il teorema di Toponogov versione hinge, si deve avere $\widetilde{c} \geq c$, cioè

$$c = d\left(\overline{p}, \overline{r}\right) \leq d\left(\overline{p}, \widetilde{r}\right) = \widetilde{c}$$

Ciò è assurdo. □

Teorema 0.11. *Vale il teorema di Toponogov versione hinge.*

Dimostrazione. Siano σ la geodetica da q a r, di lunghezza ℓ, e $\overline{\sigma}$ la geodetica da $\overline{q}$ a $\overline{r}$, di lunghezza ℓ.

caso $k = 0$: Consideriamo
$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\left[d_p(\sigma(t))\right]^2$$
sulla varietà M, e
$$\overline{\varphi}(t) = \frac{1}{2}\left[d_{\overline{p}}(\overline{\sigma}(t))\right]^2$$
sulla space–form.

Assumiamo che $d_p(x)$ sia liscia in $q = \sigma(0)$. Allora le condizioni iniziali sono
$$d(p, \sigma(0)) = d(\overline{p}, \overline{\sigma}(0)) \ ,$$
ossia $\varphi(0) = \overline{\varphi}(0)$, e
$$g\left(\nabla d_p(\sigma(t)), \dot{\sigma}(0)\right) = g\left(\nabla d_{\overline{p}}(\overline{\sigma}(t)), \dot{\overline{\sigma}}(0)\right) \ ,$$
ossia $\varphi'(0) = \overline{\varphi}'(0)$. Se $d_p(x)$ non è liscia in q, allora ragioniamo per approssimazione avvicinando q a p. In questo modo esco dal cutlocus, quindi ottengo $\varphi(0) < \overline{\varphi}(0)$. Inoltre, chiudo un po' l'angolo α, perciò ottengo $\varphi'(0) < \overline{\varphi}'(0)$. Inoltre, vale $\overline{\varphi}'' = 1$ e, nel senso delle barriere, abbiamo $\varphi'' \leq 1$.

Quindi, segue che, posto $\psi = \overline{\varphi} - \varphi$, vale
$$\begin{cases} \psi(0) > 0 \\ \psi'(0) > 0 \\ \psi''(t) \geq 0 \end{cases}$$
nel senso delle barriere.

Dunque ψ è convessa, positiva in zero, crescente per t piccoli, quindi è sempre positiva. Infatti, assumiamo per assurdo che esista t_0 tale che $\psi(t_0) = 0$. Poiché ψ cresce per tempi piccoli, esiste un punto di massimo $\bar{t}$ in $[0, t_0]$, in cui $\psi\left(\bar{t}\right) > 0$. Per definizione di $\psi'' \geq 0$ nel senso delle barriere, si ha che $\forall \varepsilon\ \exists\ f_\varepsilon \in C^2$ tale che

(1) $f_\varepsilon\left(\bar{t}\right) = \psi\left(\bar{t}\right)$;
(2) $f_\varepsilon \leq \psi$ vicino a $\bar{t}$;
(3) $f''_\varepsilon \geq -\varepsilon$ vicino a $\bar{t}$.

Dunque, vicino a $\bar{t}$, vale $\psi(t) > f_\varepsilon(t) \geq \psi\left(\bar{t}\right) - \frac{\varepsilon\left(t-\bar{t}\right)^2}{2}$. Ripetendo il ragionamento, si ottiene che questa disuguaglianza vale $\forall t \in [0, t_0)$. Quindi $\psi(t) \geq \psi(\bar{t}) - \frac{\varepsilon(t-\bar{t})}{2}$, da cui, mandando $\varepsilon \to 0$, si ha $\psi(t) \geq \psi\left(\bar{t}\right)$, che è assurdo.

Essendo $\psi > 0$, si ottiene la tesi.

caso $k = -1$: Consideriamo
$$\varphi(t) = \cosh\left(d_p(\sigma(t))\right) - 1$$
e
$$\overline{\varphi}(t) = \cosh\left(d_{\overline{p}}(\overline{\sigma}(t))\right) - 1$$

Si ottiene allora

$$\begin{cases} \varphi(0) < \overline{\varphi}(0) \\ \varphi'(0) \le \overline{\varphi}'(0) \\ \varphi''(t) \le \varphi(t) + 1 & \text{nel senso delle barriere} \\ \overline{\varphi}''(t) = \overline{\varphi}(t) + 1 \end{cases}$$

quindi, prendendo $\psi(t) = \overline{\varphi}(t) - \varphi(t)$, si ottiene

$$\begin{cases} \psi(0) > 0 \\ \psi'(0) \ge 0 \\ \psi''(t) \ge \psi(t) & \text{nel senso delle barriere} \end{cases}$$

da cui ottengo la tesi.

caso $k = 1$: Consideriamo

$$\varphi\left(t\right) = 1 - \cos\left(d_p\left(\sigma\left(t\right)\right)\right)$$

e

$$\overline{\varphi}\left(t\right) = 1 - \cos\left(d_{\overline{p}}\left(\overline{\sigma}\left(t\right)\right)\right)$$

Osserviamo che la differenza $\psi(t) = \overline{\varphi}(t) - \varphi(t)$ soddisfa

$$\begin{cases} \psi(0) > 0 \\ \psi'(0) \ge 0 \\ \psi''(t) \ge -\psi(t) \text{nel senso delle barriere} \end{cases}$$

Perturbando un poco l'angolo iniziale possiamo assumere $\psi'\left(0\right) > 0$.

Prendiamo

$$x\left(t\right) = \varepsilon \sin\left(t + \delta\right)$$

soluzione di

$$\begin{cases} \ddot{x}\left(t\right) = & -x\left(t\right) \\ x\left(0\right) = & \varepsilon \sin\delta \\ \dot{x}\left(0\right) = & \varepsilon\cos\delta \end{cases}$$

Notiamo che $x\left(t\right) > 0$ in $[0, \pi - \delta)$.

Prendendo $\varepsilon, \delta \to 0$, si ha $x\left(0\right) < \psi\left(0\right)$ e $x'\left(0\right) < \psi'\left(0\right)$.

Quindi, dal confronto con ψ, segue che $\psi > 0$ per $t \in [0, \pi - \delta)$, nel senso delle barriere. Poiché δ è arbitrario, si ha $\psi \ge 0$ con $t \in [0, \pi]$. $\square$