Osserviamo che la differenza $\psi(t) = \overline{\varphi}(t) - \varphi(t)$ soddisfa

$$\begin{cases} \psi(0) > 0 \\ \psi'(0) \geq 0 \\ \psi''(t) \geq -\psi(t) \text{nel senso delle barriere} \end{cases}$$

Perturbando un poco l'angolo iniziale possiamo assumere $\psi'(0) > 0$.

Prendiamo

$$x(t) = \varepsilon \sin(t + \delta)$$

soluzione di

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = & -x(t) \\ x(0) = & \varepsilon \sin \delta \\ \dot{x}(0) = & \varepsilon \cos \delta \end{cases}$$

Notiamo che $x(t) > 0$ in $[0, \pi - \delta)$.

Prendendo $\varepsilon, \delta \to 0$, si ha $x(0) < \psi(0)$ e $x'(0) < \psi'(0)$.

Quindi, dal confronto con ψ, segue che $\psi > 0$ per $t \in [0, \pi - \delta)$, nel senso delle barriere.???...??? Poiché δ è arbitrario, si ha $\psi \geq 0$ con $t \in [0, \pi]$. □

11.7. Il teorema di splitting

DEFINIZIONE 11.7.1. Una geodetica $\gamma : I \to M$ parametrizzata per lunghezza d'arco e minimale rispetto ogni coppia di suoi punti, cioè tale che $\gamma|_{[t,s]}$ è minimale per ogni $[t, s] \subseteq I$, si dice ***linea*** se $I = \mathbb{R}$, si dice ***raggio*** se $I = [0, +\infty)$ e si dice ***segmento*** se $I = [a, b]$ è un intervallo chiuso.

Le linee, così come i raggi e i segmenti, soddisfano

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) = t - s \quad \text{per} \quad s < t,$$

essendo percorsi a velocità unitaria.

In questa sezione proveremo il seguente teorema, dovuto a J. Cheeger e D. Gromoll:

TEOREMA 11.7.2 (Teorema di splitting). *Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n con $\mathrm{Ric} \geq 0$. Se M contiene una linea, allora (M, g) è isometrica a un prodotto cartesiano $(\mathbb{R} \times N, dt \otimes dt + h)$. Più precisamente*

$$g = dt \otimes dt + h,$$

dove (N, h) è una varietà riemanniana di dimensione $n - 1$ con tensore di Ricci non negativo.

Prima di dimostrare questo teorema, facciamo alcune osservazioni:

OSSERVAZIONE 11.7.3. Il teorema di splitting si presta a essere iterato, nel senso che la varietà (N, h) potrebbe a sua volta contenere una linea e, essendo $\mathrm{Ric}^N \geq 0$ per il teorema di splitting, M sarebbe isometrica a $\mathbb{R}^2 \times N'$ e così via. Notiamo che M non può essere compatta, dovendo contenere una linea.

Lo strumento che permette di dimostrare il teorema di splitting è lo studio delle *funzioni di Busemann*, che in un certo senso *misurano la distanza dall'infinito*. Da qui in avanti (M, g) sarà una varietà riemanniana di dimensione n con $\mathrm{Ric} \geq 0$. Ci saranno utili le seguenti definizioni:

DEFINIZIONE 11.7.4. Sia $\gamma : [0, +\infty) \to M$ un raggio in M uscente da $p = \gamma(0)$, definiamo per $t \geq 0$ la funzione $b_t^\gamma : M \to \mathbb{R}$ tramite

$$b_t^\gamma(x) = d(x, \gamma(t)) - t \quad \forall x \in M.$$

DEFINIZIONE 11.7.5. Per una funzione $f : M \to \mathbb{R}$ non necessariamente C^2, diremo che $\Delta f \leq h$ *vale in* $q \in M$ ***nel senso delle barriere***, dove $h : M \to \mathbb{R}$ è una funzione, se per ogni $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo esistono un intorno U di q e una funzione $\varphi_\varepsilon : U \to \mathbb{R}$ liscia (detta *barriera*) tali che:

- $\varphi_\varepsilon(q) = f(q)$;
- $\varphi_\varepsilon \geq f$ in U;
- $\Delta\varphi_\varepsilon(q) \leq h(q) + \varepsilon$.

La disuguaglianza nel senso delle barriere è più forte della stessa disuguaglianza dal punto di vista delle distribuzioni dell'Analisi.
Enunciamo senza dimostrare il seguente lemma

LEMMA 11.7.6 (E. Calabi, 1958). *Sia* $r(x) = d(x, p)$ *per* $p \in M$, *se* $R(M, g) \geq 0$, *allora*

$$\Delta r(x) \leq \frac{n-1}{r(x)} \quad \forall x \in M$$

nel senso delle barriere.

LEMMA 11.7.7. *Le funzioni* b_t^γ *soddisfano:*

(i) $t \mapsto b_t^\gamma(x)$ *è decrescente per ogni* $x \in M$ *fissato;*
(ii) $|b_t^\gamma(x)| \leq d(x, p)$;
(iii) $x \mapsto b_t^\gamma(x)$ *è lipschitziana di costante di Lipschitz* 1, *per* $t \geq 0$ *fissato;*
(iv) *per ogni* $t \geq 0$ *fissato,* $\Delta b_t^\gamma(x) \leq \frac{n-1}{b_t^\gamma(x)+t}$ *nel senso delle barriere.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo che

$$|b_t^\gamma(x)| = |d(x, \gamma(t)) - d(\gamma(t), p)|,$$

quindi per la disuguaglianza triangolare si ha $|b_t^\gamma(x)| \leq d(x, p)$, che prova la (ii).
Preso $s < t$, si ha nuovamente per la disuguaglianza triangolare che

$$\begin{aligned} b_t^\gamma(x) - b_s^\gamma(x) &= d(\gamma(t), x) - d(\gamma(s), x) + s - t \\ &= d(\gamma(t), x) - d(\gamma(s), x) - d(\gamma(s), \gamma(t)) \\ &\leq d(\gamma(t), x) - d(x, \gamma(t)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

da cui la (i). La (iii) è immediata: per $x, y \in M$,

$$|b_t^\gamma(x) - b_t^\gamma(y)| = |d(x, \gamma(t)) - d(y, \gamma(t))| \leq d(x, y),$$

sempre per la disuguaglianza triangolare.
Per quanto riguarda il punto (iv) è sufficiente notare che $\Delta b_t^\gamma(\cdot) = \Delta d(\cdot\,, \gamma(t))$ e che $b_t^\gamma(\cdot) + t = d(\cdot\,, \gamma(t))$, perci? la tesi segue dal lemma di Calabi.

□

Riassumendo, abbiamo una famiglia $\{b_t^\gamma\}_{t\geq 0}$ di funzioni su M puntualmente decrescente e limitata, possiamo perci? considerare la funzione

$$b^\gamma(x) = \lim_{t\to+\infty} b_t^\gamma(x)$$

Una tale funzione limite $b^\gamma : M \to \mathbb{R}$ è detta ***funzione di Busemann*** *relativa a* γ *e uscente da* $p = \gamma(0)$. Per il passaggio al limite, essa soddisfa

- $|b_t^\gamma(x) - b_t^\gamma(y)| \leq d(x, y)$ (lipschitzianità);
- $|b_t^\gamma(x)| \leq d(x, p)$ (limitatezza).

Inoltre, è facile determinare il suo valore lungo il raggio γ:

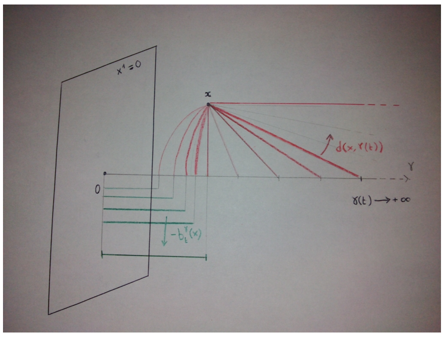
- $b^\gamma(\gamma(t)) = -t$,

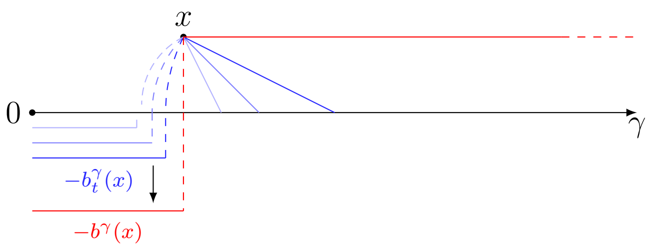
infatti $b_t^\gamma(\gamma(t_0)) = d(\gamma(t), \gamma(t_0)) - t = |t - t_0| - t$ tende a $-t_0$ per $t \to +\infty$.

OSSERVAZIONE 11.7.8. Avevamo anticipato che *in un certo senso le funzioni di Busemann misurano la distanza dall'infinito*. Per capire cosa si intende, pensiamo a $\mathbb{R}^n$ con la metrica euclidea e fissiamo un raggio γ, ossia una semiretta. Possiamo scegliere delle coordinate ortonormali in modo tale che $\gamma(t) = (t, 0, \ldots, 0)$. In questo modo

$$b_t^\gamma(x^1, \ldots, x^n) = \sqrt{(x^1 - t)^2 + (x^2)^2 + \cdots + (x^n)^2} - t \xrightarrow{t\to+\infty} -x^1 = b^\gamma(x),$$

essendo una quantità asintotica a $|x^1 - t| - t$. La figura mostra il comportamento geometrico della funzione di Busemann in $\mathbb{R}^n$ come limite delle b_t^γ.





Gli insiemi di livello della funzione di Busemann sono iperpiani, cioè ipersuperfici totalmente geodetiche in $\mathbb{R}^n$, tra qualche pagina vedremo che questo fatto risulterà vero in generale. Infine, consideriamo adesso un punto $q \in \mathbb{R}^n$ non appartenente a γ e, per $t > 0$, sia $l_t = d(q, \gamma(t))$. I segmenti $\sigma_t : [0, l_t] \to M$ che congiungono q a $\gamma(t)$ *tendono* a un raggio $\widetilde{\gamma}$ asintotico (parallelo) a γ e uscente da q al crescere di t. Questo fatto suggerisce la seguente costruzione.

Dato un raggio γ uscente da $p \in M$ e un punto $q \in M$ non giacente su γ, poniamo $l_t = d(q, \gamma(t))$ per $t > 0$. Siano $\sigma_t : [0, l_t] \to M$ segmenti con $\sigma_t(0) = q$ e $\sigma_t(l_t) = \gamma(t)$. Dai versori $v_t \in T_qM$ che individuano i segmenti $\sigma_t(s) = \exp_q(sv_t)$ estraiamo una sottosuccessione $(v_{t_k})_{k\in\mathbb{N}}$ che converge a un certo vettore limite $v \in T_qM$. La curva limite $\widetilde{\gamma}(s) = \exp_q(sv)$ è un raggio poiché le σ_{t_k} convergono ad essa uniformemente sui compatti e la mappa esponenziale è continua. Perciò

$$d(\widetilde{\gamma}(s), \widetilde{\gamma}(s')) = \lim_k d(\sigma_{t_k}(s), \sigma_{t_k}(s')) = |s - s'|,$$

che equivale a dire che $\widetilde{\gamma}$ è un raggio. Tale raggio $\widetilde{\gamma}$ è detto ***asintoto*** *di γ uscente da q.*

OSSERVAZIONE 11.7.9. Possono esistere più asintoti di un raggio γ uscenti da uno stesso punto q, come nel paraboloide illustrato in figura [NON HO IDEA DI COME FARE QUESTA FIGURA].

Un paraboloide contiene raggi, ma non può contenere linee. Infatti non è isometrico al prodotto di $\mathbb{R}$ per una varietà riemanniana unidimensionale.

Stiamo lavorando su un raggio γ uscente da $p \in M$, il prossimo obiettivo sarà produrre una stima nel senso delle barriere della funzione di Busemann b^γ. Per farlo studieremo le proprietà delle funzioni di Busemann $b^{\widetilde{\gamma}}$ relative agli asintoti $\widetilde{\gamma}$ di γ.

LEMMA 11.7.10. *Sia γ un raggio uscente da $p \in M$ e sia $\widetilde{\gamma}$ un suo asintoto uscente da $q \in M$. Allora $\widetilde{\gamma}$ ammette una funzione di Busemann $b^{\widetilde{\gamma}}$ tale che:*

(i) $b^\gamma \leq b^\gamma(q) + b^{\widetilde{\gamma}}$;
(ii) $b^\gamma(\widetilde{\gamma}(t)) = b^\gamma(q) + b^{\widetilde{\gamma}}(\widetilde{\gamma}(t)) = b^\gamma(q) - t$.

Inoltre $\Delta b^\gamma \leq 0$ nel senso delle barriere.

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di asintoto, $\widetilde{\gamma}$ è il limite di opportuni segmenti σ_k da q a $\gamma(t_k)$. Essendo segmenti,

$$d(q,\gamma(t_k)) = d(q,\sigma_k(s)) + d(\sigma_k(s),\gamma(t_k))$$

per ogni $0 \leq s \leq t_k$. Quindi a meno di estrarre sottosuccessioni si ha

$$\begin{aligned}
b^\gamma(q) &= \lim_{t\to+\infty} d(q,\gamma(t_k)) - t_k = \lim_{k\to+\infty} d(q,\sigma_k(s)) + d(\sigma_k(s),\gamma(t_k)) - t_k \\
&= d(q,\widetilde{\gamma}(s)) + \lim_{k\to+\infty} d(\sigma_k(s),\gamma(t_k)) - t_k \\
&= s + \lim_k d(\sigma_k(s),\gamma(t_k)) - d(\widetilde{\gamma}(s),\gamma(t_k)) + d(\widetilde{\gamma}(s),\gamma(t_k)) - t_k \\
&= s + \lim_k d(\sigma_k(s),\gamma(t_k)) - d(\widetilde{\gamma}(s),\gamma(t_k)) + b^\gamma_{t_k}(\widetilde{\gamma}(s)) \\
&= s + b^\gamma(\widetilde{\gamma}(s)) + \lim_k d(\sigma_k(s),\gamma(t_k)) - d(\widetilde{\gamma}(s),\gamma(t_k)) \\
&= s + b^\gamma(\widetilde{\gamma}(s)),
\end{aligned}$$

che è la (ii). Per ottenere la (i), osserviamo che

$$\begin{aligned}
b^\gamma_s(\cdot) = d(x,\gamma(s)) - s &\leq d(\cdot,\widetilde{\gamma}(t)) + d(\widetilde{\gamma}(t),\gamma(s)) - s \\
&= d(\cdot,\widetilde{\gamma}(t)) + b^\gamma_s(\widetilde{\gamma}(t)) + t - t \\
&= b^{\widetilde{\gamma}}_t(\cdot) + b^\gamma_s(\widetilde{\gamma}(t)) + t,
\end{aligned}$$

quindi passando al limite per $s \to +\infty$ e usando la (ii), si ha

$$b^\gamma(\cdot) \leq b^{\widetilde{\gamma}}_t(\cdot) + b^\gamma(\widetilde{\gamma}(t)) + t = b^{\widetilde{\gamma}}_t(\cdot) + b^\gamma(q).$$

Passando al limite per $t \to +\infty$ ricaviamo la (i).
Produciamo le barriere ai fini di dimostrare l'ultimo punto. Poniamo $f = b^\gamma(q) + b^{\widetilde{\gamma}}$, per i punti (i) e (ii) tale funzione coincide con b^γ su q e la maggiora altrove, perciò la tesi segue provando che $\Delta f(q) \leq 0$ nel senso delle barriere, sfruttando poi l'arbitrarietà di $q \in M$.
Sia $t > 0$ tale che $d(q,\widetilde{\gamma}(t)) > \frac{n-1}{\varepsilon}$ e scegliamo $f_\varepsilon = b^\gamma(q) + b^{\widetilde{\gamma}}_t$. Poiché $\widetilde{\gamma}$ è minimale da q a $\widetilde{\gamma}(t)$, la funzione f_ε è liscia in un intorno di q, inoltre $f_\varepsilon(q) = b^\gamma(q) = f(q)$. Sfruttando la (iv) del lemma 11.7.7 abbiamo

$$\Delta f_\varepsilon = \Delta b^{\widetilde{\gamma}}_t \leq \frac{n-1}{b^{\widetilde{\gamma}}_t + t} = \frac{n-1}{d(\cdot,\widetilde{\gamma}(t))},$$

perciò in q abbiamo $\Delta f_\varepsilon(q) \leq \varepsilon$. Resta solo più da verificare che $f_\varepsilon \geq f$, che è una conseguenza diretta della crescita monotona delle $b^{\widetilde{\gamma}}_t$ in t. In conclusione, abbiamo provato che $\Delta b^\gamma \leq 0$ nel senso delle barriere in ogni $q \in M$ che non giace su γ, tuttavia per i punti su γ il risultato è ancora più immediato, usando la curva stessa invece dei suoi asintoti e procedendo come sopra. □

Richiamiamo infine un noto risultato, detto il *Principio del minimo forte*:

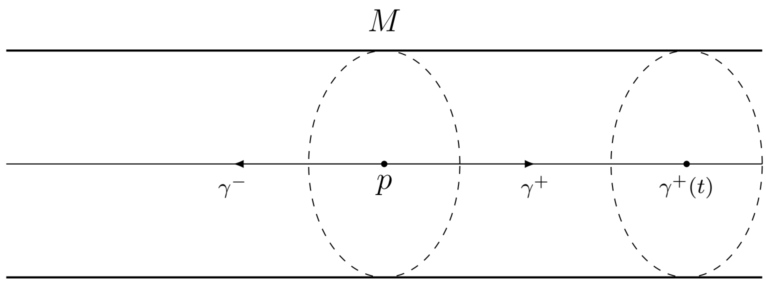
TEOREMA 11.7.11 (Principio del minimo forte). *Sia (M, g) una varietà riemanniana connessa ed $f : M \to \mathbb{R}$ una funzione per cui $\Delta f \leq 0$ nel senso delle barriere. Se f ammette un punto di minimo in $p \in M$, allora f è identicamente costante a $f(p)$.*

Questo risultato è ben noto per $f \in C^2$ superarmonica e si adatta al caso non regolare in cui la superarmonicità è richiesta nel senso delle barriere. Possiamo finalmente passare alla dimostrazione del teorema di splitting:

DIMOSTRAZIONE. Per ipotesi, è data una linea γ in M. Poniamo $p = \gamma(0)$ e spezziamo la linea in due raggi:

$$\gamma^+(t) = \gamma(t) \quad \text{e} \quad \gamma^-(t) = \gamma(-t) \quad \text{per } t \geq 0.$$

Sia b^+ una funzione di Busemann relativa a γ^+ e, analogamente, sia b^- una funzione di Busemann relativa a γ^-; nel disegno le circonferenze sono gli insiemi di livello di b^+ poich? $b^+(\gamma(t)) = -t$.



Per costruzione, a meno di sottosuccessioni,

$$\begin{aligned} b^+(x) + b^-(x) &= \lim_{t\to+\infty} d(x, \gamma(t)) - t + d(x, \gamma(-t)) - t \\ &\geq \lim_{t\to+\infty} d(\gamma(-t), \gamma(t)) - 2t = 0 \end{aligned}$$

per ogni $x \in M$, inoltre $b^+ + b^-$ è nulla in p. Si ha anche che

$$\Delta(b^+ + b^-) = \Delta b^+ + \Delta b^- \leq 0$$

nel senso delle barriere. Riassumendo, la funzione $g = b^+ + b^-$ è continua, soddisfa $\Delta g \leq 0$ nel senso delle barriere e raggiunge il suo minimo in p, di conseguenza il Principio del minimo afferma che g è costante a $g(p)$, ovvero $b^+ = -b^-$. Dal Lemma precedente sappiamo anche

$$0 \leq -\Delta b^- = \Delta b^+ \leq 0$$

perciò le funzioni b^+ e b^- sono armoniche nel senso delle barriere e, per ellitticità dell'operatore di Laplace–Beltrami, risultano essere funzioni lisce e armoniche nel senso forte. Inoltre hanno gradiente unitario, infatti

$$|\nabla b_t^\pm| = |\nabla d(\cdot, \gamma(t))| = 1$$

vale quasi ovunque, perciò anche $|\nabla b^\pm| = 1$ vale quasi ovunque. Essendo $b^\pm$ una funzione liscia, $|\nabla b^\pm| = 1$ è vera su tutto M.

Sia $s = b^+ \in C^\infty(M)$. Poiché s ha gradiente unitario (in particolare ha rango massimo), la varietà M è diffeomorfa al prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ per un insieme di livello di s e in ogni punto possiamo considerare delle coordinate (s, y^α) per le quali la metrica si scrive come

$$g = ds \otimes ds + g_{\alpha\beta}\, dy^\alpha \otimes dy^\beta,$$

dove le $g_{\alpha\beta}$ dipendono a priori sia da s sia dalle y^α. Quindi M è diffeomorfa a $\mathbb{R} \times N$, dove N è un insieme di livello di s. Data l'espressione in coordinate di g, per provare la tesi, cioè che tale diffeomorfismo è un'isometria locale, dobbiamo provare che le $g_{\alpha\beta}$ non dipendono da s. Si deve dunque provare

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial s} = 0.$$

La seconda forma fondamentale h di N in M è data da

$$h\left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta}\right) = \langle \partial_\alpha, \nabla_\beta \frac{\partial}{\partial s}\rangle.$$

Per la compatibilità con la metrica e per l'espressione di quest'ultima in coordinate otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial s} g(\partial_\alpha, \partial_\beta)\\ &= g(\nabla_{\partial_s}\partial_\alpha, \partial_\beta) + g(\partial_\alpha, \nabla_{\partial_s}\partial_\beta)\\ &= g(\nabla_{\partial_\alpha}\partial_s, \partial_\beta) + g(\partial_\alpha, \nabla_{\partial_s}\partial_\beta) = 2h_{\alpha\beta}\end{aligned}$$

poich? $[\partial_s, \partial_\alpha] = [\partial_s, \partial_\beta]0$.
Ciò significa che per provare $\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial s} = 0$ è sufficiente verificare che la seconda forma fondamentale di N è nulla. Poiché N è un insieme di livello della funzione s, è sufficiente controllare che s ha hessiano nullo. Applichiamo alla Formula di Bochner l'armonicità di $b^\pm$ e la non negatività del Ricci, si ha

$$0 = \frac{1}{2}\Delta|\nabla b^+|^2 = |\nabla^2 b^+|^2 + R(\nabla b^+, \nabla b^+) + \langle 0, \nabla b^+\rangle \geq |\nabla^2 b^+|^2 \geq 0$$

cioè $\nabla^2 s = 0$.
Infine $\mathrm{Ric}^N \geq 0$ siccome N è una sottovarietà di M, il che conclude la dimostrazione. $\square$

Bibliografia

1. M. Abate and F. Tovena, *Curve e superfici*, Springer–Verlag, 2006.
2. ______, *Geometria differenziale*, Springer–Verlag, 2011.
3. F. Angrisani, G. Ascione, C. Leone, and C. Mantegazza, *Appunti di calcolo delle variazioni*, Amazon, 2019.
4. R. Benedetti and P. Lisca, *Framing 3–manifolds with bare hands*, ArXiv Preprint Server – http://arxiv.org, 2018.
5. J. Berndt, S. Console, and C. Olmos, *Submanifolds and holonomy*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, vol. 434, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2003.
6. A. L. Besse, *Einstein manifolds*, Springer–Verlag, Berlin, 2008.
7. L. Bieberbach, *Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume*, Math. Ann. **70** (1911), no. 3, 297–336.
8. ______, *Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume (Zweite Abhandlung.) Die Gruppen mit einem endlichen Fundamentalbereich*, Math. Ann. **72** (1912), no. 3, 400–412.
9. P. O. Bonnet, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*, J. de l'École Polytechnique, Paris **24** (1865), 209–230.
10. ______, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée*, J. de l'École Polytechnique, Paris **25** (1867), 1–151.
11. W. M. Boothby, *An introduction to differential manifolds and Riemannian geometry*, Academic Press, London, 1975.
12. F. Borceux, *A differential approach to geometry–geometric trilogy. III*, Springer, Cham, 2014.
13. R. Bott and J. Milnor, *On the parallelizability of the spheres*, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 87–89.
14. I. Chavel, *Riemannian geometry*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 98, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, A modern introduction.
15. R. A. Chouikha, *Existence of metrics with harmonic curvature and non parallel Ricci tensor*, Balkan J. Geom. Appl. **8** (2003), no. 2, 21–30.
16. D. Codazzi, *Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio. I, II, III*, 1867–1871.
17. A. Derdzinski, *Classification of certain compact Riemannian manifolds with harmonic curvature and non parallel Ricci tensor*, Math. Z. **172** (1980), 277–280.
18. A. Derdzinski, F. Mercuri, and M. H. Noronha, *Manifolds with nonnegative pure curvature operator*, Bol. Soc. Bras. Mat. **18** (1987), 13–22.
19. M. P. Do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.
20. J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, Boston, 1966.
21. G. F. R. Ellis and S. W. Hawking, *The large scale structure of space–time*, Cambridge University Press, London–New York, 1973, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, No. 1.
22. L. C. Evans, *Weak convergence methods for nonlinear partial differential equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 74, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC, 1990.
23. H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer–Verlag, 1969.

24. S. Gallot, D. Hulin, and J. Lafontaine, *Riemannian geometry*, third ed., Universitext, Springer–Verlag, Berlin, 2004.
25. D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer–Verlag, 1983.
26. A. Grigor'yan, *Heat kernel and analysis on manifolds*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 47, American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2009.
27. J. Harper and M. J. Greenberg, *Algebraic Topology: A First Course*, Mathematics Lecture Note Series, vol. 58, The Benjaming/Cummings Publishing Company, 1981.
28. J. Hong, *Some new developments of realization of surfaces into* $\mathbb{R}^3$, Proc. Int. Cong. Math., vol. III, 2002, pp. 155–165.
29. S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry. Vol. I*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1996.
30. ———, *Foundations of differential geometry. Vol. II*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1996.
31. U. Lang, *Length Spaces*, https://people.math.ethz.ch/~lang/LengthSpaces.pdf, 2013.
32. E. L. Lima, *Fundamental groups and covering spaces*, A K Peters, Ltd., Natick, MA, 2003, Translated from the Portuguese by Jonas Gomes.
33. J. Lohkamp, *Metrics of negative Ricci curvature*, Ann. of Math. (2) **140** (1994), no. 3, 655–683.
34. G. Mainardi, *Su la teoria generale delle superfici*, Giornale dell'I. R. Lombardo di Scienze, Lettere ed Arti **9** (1856), 385–399.
35. C. Mantegazza, *Notes on the distance function from a submanifold*, CvGmt Preprint Server – http://cvgmt.sns.it, 2010.
36. ———, *Lecture notes on mean curvature flow*, Progress in Mathematics, vol. 290, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.
37. C. Mantegazza and A. C. Mennucci, *Hamilton–Jacobi equations and distance functions on Riemannian manifolds*, Appl. Math. Opt. **47** (2003), no. 1, 1–25.
38. W. S. Massey, *Algebraic topology: an introduction*, Springer–Verlag, New York–Heidelberg, 1977, Reprint of the 1967 edition, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56.
39. F. Mercuri and P. Piccione, *On the closed geodesic problem*, São Paolo J. Math. Sci. **2** (2008), no. 1, 223–237.
40. J. W. Milnor, *Morse theory*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1963.
41. S. B. Myers and N. E. Steenrod, *The group of isometries of a Riemannian manifold*, Ann. of Math. (2) **40** (1939), no. 2, 400–416.
42. M. Obata, *Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere*, J. Math. Soc. Japan **14** (1962), 333–340.
43. G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, ArXiv Preprint Server – http://arxiv.org, 2002.
44. ———, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three–manifolds*, ArXiv Preprint Server – http://arxiv.org, 2003.
45. ———, *Ricci flow with surgery on three–manifolds*, ArXiv Preprint Server – http://arxiv.org, 2003.
46. P. Petersen, *Riemannian geometry*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 171, Springer, New York, 2016.
47. K. M. Peterson, *Über die Biegung der Flächen*, Ph.D. thesis, Doctoral Thesis, Dorpat Univ., 1853.
48. L. C. Piccinini, G. Stampacchia, and G. Vidossich, *Equazioni differenziali ordinarie in* $\mathbf{R}^n$ *(problemi e metodi)*, Serie di Matematica e Fisica, Liguori Editore, Napoli, 1979.
49. W. Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw Hill, New York, 1966.

50. L. Simon, *Lectures on geometric measure theory*, Proc. Center Math. Anal., vol. 3, Australian National University, Canberra, 1983.
51. J. Simons, *Minimal varieties in Riemannian manifolds*, Ann. of Math. (2) **88** (1968), 62–105.
52. M. Spivak, *Differential geometry (5 volumes)*, Publish or Perish, Berkeley, 1979.
53. F. W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Springer, 1983.
54. Wikipedia, *Spazio lenticolare*, http://it.wikipedia.org/wiki/Spazio_lenticolare, 2018.
55. ______, *Tullio Levi–Civita*, http://it.wikipedia.org/wiki/Tullio_Levi–Civita, 2018.
56. ______, *Bernhard Riemann*, http://it.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann, 2019.
57. ______, *Congettura di geometrizzazione di Thurston*, https://it.wikipedia.org/wiki/Congettura_di_geometrizzazione_di_Thurston, 2019.
58. ______, *Einstein tensor*, http://it.wikipedia.org/wiki/Einstein_tensor, 2019.
59. ______, *Gregorio Ricci Curbastro*, http://it.wikipedia.org/wiki/Gregorio_Ricci_Curbastro, 2019.
60. ______, *Hermann Weyl*, http://it.wikipedia.org/wiki/Hermann_Weyl, 2019.
61. ______, *Jean–Louis Koszul*, http://it.wikipedia.org/wiki/Jean–Louis_Koszul, 2019.
62. ______, *Luigi Bianchi*, http://it.wikipedia.org/wiki/Luigi_Bianchi, 2019.
63. ______, *Metrica intrinseca*, https://it.wikipedia.org/wiki/Metrica_intrinseca, 2019.
64. ______, *Nash embedding theorem*, http://en.wikipedia.org/wiki/Nash_embedding_theorem, 2019.
65. ______, *Theorem of the three geodesics*, https://en.wikipedia.org/wiki/Theorem_of_the_three_geodesics, 2019.
66. ______, *Whitney embedding theorem*, http://en.wikipedia.org/wiki/Whitney_embedding_theorem, 2019.
67. ______, *Pullback bundle*, https://en.wikipedia.org/wiki/Pullback_bundle, 2020.
68. J. A. Wolf, *Spaces of constant curvature*, sixth ed., AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2011.