Il teorema della sfera

Lorenzo Guerra

22 dicembre 2014

Nel seguito M indicherà sempre una varietà riemanniana completa di dimensione n e la metrica su M verrà denotata con g. Denoteremo le coordinate polari riemanniane con $(r, \theta^1, \ldots, \theta^{n-1})$ o con $(r, \underline{\theta})$. In virtù del lemma di Gauss, rispetto ad esse g assume la forma $dr \otimes dr + g_r$, ove g_r è una metrica riemanniana sulla sfera $S(r) = \{x : r(x) = r\}$. Con d_M indicheremo la distanza riemanniana su M e con injrad il raggio di iniettività. La palla geodetica di raggio R centrata in p verrà indicata con $B_R(p)$. La notazione M_k verrà usata per la varietà riemanniana completa semplicemente connessa di dimensione n, con metrica g_k, avente curvature sezionali costanti pari a k, che è noto essere unica a meno di isometria. Con l'espressione $\mathrm{Sec}(M) \leq k$ (rispettivamente $\mathrm{Sec}(M) \geq k$) intenderemo che le possibili curvature sezionali di M sono limitate dal basso (rispettivamente dall'alto) da una costante k. Porremo inoltre, per $t \in \mathbb{R}$,

$$S_k(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\sqrt{k}t)}{\sqrt{k}} & \text{se } k > 0 \\ t & \text{se } k = 0 \\ \frac{\sinh \sqrt{k}t}{\sqrt{k}} & \text{se } k < 0 \end{cases}$$

1 Preliminari

1.1 Richiamo di alcuni risultati di confronto

Richiamiamo alcuni risultati che consentono di confrontare le proprietà geometriche di una varietà riemanniana M con quelle di M_k.

Teorema 1 (confronto dell'hessiano). *Si supponga che* $\mathrm{Sec}(M) \leq k$ *(rispettivamente* $\mathrm{Sec}(M) \geq k$*). Allora, in coordinate polari attorno ad un punto* $p \in M$*, vale che* $\mathrm{Hess}(r)\,|_{(\partial_r)^\perp} \leq \frac{S_k'(r)}{S_k(r)} g_r$ *(rispettivamente* $\mathrm{Hess}(r)\,|_{(\partial_r)^\perp} \geq \frac{S_k'(r)}{S_k(r)} g_r$*). In entrambi i casi l'uguaglianza vale se e solo se tutte le curvature sezionali di* M *sono pari a* k.

Dimostrazione. Si veda [6], Teorema 27 a pagina 175 o le note del corso. □

Ricordiamo che vale anche un teorema di confronto 'geometrico' per le distanze.

Teorema 2 (Toponogov)**.** *Si supponga* $\mathrm{Sec}(M) \geq k$. *Sia* T *un triangolo in* M *con vertici* p, q, r. *Siano* $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$ *i vertici di un triangolo* $\overline{T}$ *in* M_k *tale che i lati di* T *e* $\overline{T}$ *hanno la stessa lunghezza. Allora gli angoli interni di* T *hanno ampiezza maggiore o uguale di quella dei corrispondenti angoli in* $\overline{T}$.

Equivalentemente, se H *è una cerniera (hinge) in* M *determinata dai segmenti* σ_1, σ_2 *con angolo* α *e se* $\overline{\sigma}_1$, $\overline{\sigma}_2$ *determinano una cerniera* $\overline{H}$ *in* M_k *con lati della stessa lunghezza di* H *e angolo della stessa ampiezza, allora* $d_M(\sigma_1(\ell(\sigma_1)), \sigma_2(0)) \leq d_M(\overline{\sigma}_1(\ell(\sigma_1)), \overline{\sigma}_2(0))$.

Dimostrazione. Si veda [6], Teorema 70 a pagina 339 o le note del corso. □

1.2 Teoria di Morse

La teoria di Morse permette di descrivere la topologia di una varietà M in termini dei punti critici delle funzioni differenziabili su di essa. Richiamiamo qui i teoremi fondamentali. Nel seguito, fissata una funzione $f\colon M \to \mathbb{R}$, per ogni $c \in \mathbb{R}$ denoteremo con M^c il sottolivello $f^{-1}(-\infty, c]$.

Definizione 3. Sia $f\colon M \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. diremo che un punto critico p di f è *non degenere* se $\mathrm{Hess}(f)_p$ è una forma bilineare non degenere su $T_p(M)$. In tal caso chiameremo *indice* di f in p l'usuale indice di negatività di $\mathrm{Hess}(f)_p$. Diremo che f è una *funzione di Morse* se ogni suo punto critico è non degenere e punti critici distinti hanno valori distinti.

Teorema 4. *Sia* $f\colon M \to \mathbb{R}$ *differenziabile. Siano* $a < b \in \mathbb{R}$ *tali che* f *non ha critici nell'intervallo* $[a, b]$. *Allora* M^a *è diffeomorfo a* M^b *e ne è un retratto di deformazione forte.*

Dimostrazione. Si veda [5], Teorema 3.1 a pagina 12. □

Teorema 5. *Siano* M *e* f *come sopra. Sia* p *un punto critico non degenere di* f *di indice* λ, *sia* $c = f(p)$ *e sia* $\varepsilon > 0$ *tale che l'unico punto critico di* f *appartenente a* $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ *è* p. *Allora, se* $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ *è compatto,* $M^{c+\varepsilon}$ *si retrae per deformazione forte su un sottospazio* X *ottenuto da* $M^{c-\varepsilon}$ *per attaccamento di una* λ*-cella.*

Dimostrazione. Si veda [5], Teorema 3.2 a pagina 14. □

Conseguenza di questo teorema e di alcuni semplici fatti di topologia algebrica (enunciati alle pagine 20,21 e 22 di [5]) è il seguente

Corollario 6. *Sia* $f\colon M \to \mathbb{R}$ *una funzione di Morse. Siano* $a < b \in \mathbb{R}$ *valori regolari per* f. *Se* $f^{-1}[a, b]$, *allora* M^b *è omotopicamente equivalente, relativamente a* M^a, *ad uno spazio* X *ottenuto da* M^a *per attaccamento di tante celle di dimensione* λ *quanti sono i punti critici di* f *di indice* λ.

1.3 Approssimazioni finito-dimensionali di spazi di cammini

Riassumiamo qui alcuni risultati della Parte III del libro di Milnor [5], a cui facciamo riferimento per una trattazione esaustiva e per le dimostrazioni dettagliate dei fatti enunciati.

Definizione 7. Dati $p, q \in M$, denotiamo con $\Omega_M(p,q)$ o, quando è chiaro quale sia M, con $\Omega(p,q)$, l'insieme dei cammini $\mathcal{C}^\infty$ a pezzi $\gamma\colon [0,1] \to M$ tali che $\gamma(0) = p$ e $\gamma(1) = q$. Considereremo $\Omega(p,q)$ come uno spazio metrico (e quindi topologico) con la distanza $d = d_1 + d_2$, dove

$$d_1(\alpha, \beta) = \max_{t \in [0,1]} d_M(\alpha(t), \beta(t)) = \|\alpha - \beta\|_\infty$$

$$d_2(\alpha, \beta) = \sqrt{\int_0^1 (\|\alpha'(t)\| - \|\beta'(t)\|)^2}$$

In tal modo l'energia di un cammino $\gamma \in \Omega(p,q)$

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^1 \|\gamma'(t)\|^2$$

definisce una funzione continua $E\colon \Omega(p,q) \to \mathbb{R}$. Vorremmo poter applicare la teoria di Morse e studiare la topologia di $\Omega(p,q)$ mediante i 'punti critici' del funzionale E. Tuttavia, $\Omega(p,q)$ non è una varietà finito-dimensionale. Vogliamo quindi 'approssimare' questo spazio con sottospazi che abbiano una struttura di varietà differenziabile di dimensione m opportuna e che, in un senso che specificheremo tra poco, preservino i punti critici di E e la segnatura di $\mathrm{Hess}(E)$ in tali punti.

Definizione 8. Con riferimento alla notazione adottata sopra, per ogni $c \in \mathbb{R}$ denotiamo con $\Omega(p,q)^c$ l'insieme dei cammini in $\Omega(p,q)$ aventi energia minore o uguale a c. Data una partizione $\underline{t} = (t_0, \ldots, t_k)$, con $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$, definiamo

$$\Omega(p,q,\underline{t})^c = \left\{\gamma \in \Omega(p,q)^c : \gamma|_{[t_{i-1},t_i]} \text{ è geodetica minimale con velocità costante} \forall 1 \le i \le k\right\}$$

Poniamo $r = \inf_{x \in B_{2c}(p)} \mathrm{injrad}_x(M)$ (che è strettamente positivo in quanto $B_{2c}(p)$ è relativamente compatto in M). Indicando con L il funzionale lunghezza, se scegliamo $\underline{t}$ in modo tale che $t_i - t_{i-1} < \frac{r^2}{2c}$ per ogni $1 \le i \le k$, allora avremo per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

$$L\left(\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}\right)^2 \le 2E\left(\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}\right)(t_i - t_{i-1}) < r^2$$

Conseguentemente ogni $\gamma \in \Omega(p,q,\underline{t})$ è determinato dai valori che assume sui nodi della partizione. La funzione $\gamma \mapsto (\gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_{k-1})) \in M^{k-1}$ definisce quindi un omeomorfismo tra una sottovarietà a bordo di dimensione $n(k-1)$ di M^{k-1} e $\Omega(p,q,\underline{t})$. Quest'ultimo ha quindi una struttura di varietà differenziabile finito-dimensionale. Osserviamo inoltre che, per ogni $\gamma \in \Omega(p, q, \underline{t})$, lo spazio tangente $T_\gamma(\Omega(p, q, \underline{t}))$ può essere naturalmente identificato con lo spazio dei campi vettoriali X lungo γ nulli agli estremi e tali che $X|_{[t_{i-1}, t_i]}$ è un campo di Jacobi.

Indicheremo con $\tilde{E}$ la restrizione di E a $\Omega(p, q, \underline{t})^c$. $\tilde{E}$ è $\mathcal{C}^\infty$. Vogliamo ora stabilire quali relazioni ci sono tra $\Omega(p, q, \underline{t})^c$ e $\Omega(p, q)^c$ e tra E e $\tilde{E}$. Esse sono espresse dal seguente teorema:

Teorema 9. *Con riferimento alla notazione adottata sopra, sotto l'ipotesi che $t_{i+1} - t_i < \frac{r^2}{2c}$ per ogni i, vale che:*

1. *$\Omega(p, q, \underline{t})^c$ è un retratto per deformazione forte di $\Omega(p, q)^c$;*
2. *i punti critici di $\tilde{E}$ sono tutte e sole le geodetiche (non spezzate) parametrizzate a velocità costante;*
3. *se $\gamma \in \Omega(p, q, \underline{t})^c$ p un punto critico per $\tilde{E}$, lo spazio nullo di $\mathrm{Hess}_\gamma\left(\tilde{E}\right)$ consta di tutti e soli i campi di Jacobi (globali) lungo γ;*
4. *se $\gamma \in \Omega(p, q, \underline{t})^c$ p un punto critico per $\tilde{E}$, l'indice di $\tilde{E}$ in γ è uguale all'indice di negatività della forma quadratica $\frac{d^2E}{dt^2} : V \times V \to V$, dove $V = \{X \in \mathcal{T}(\gamma) : X(0) = 0, X(1) = 0\}$, data dalla seconda variazione dell'energia. Esplicitamente:*

$$\frac{d^2E}{dt^2}(X) = \int_0^1 \left(\|X\|^2 - R(\gamma', X, \gamma', X)\right)$$

Dimostrazione. Si veda [5], Teorema 16.2 a pagina 90. □

Nota 10. Solitamente in topologia algebrica si studia lo spazio $\Omega^*(p, q)$ di tutti i cammini *continui* da p a q, con la topologia della convergenza uniforme sui compatti. Nel nostro caso ci siamo ristretti al caso di curve $\mathcal{C}^\infty$ a pezzi e abbiamo aggiunto l'addendo d_2 nella definizione della distanza per garantire che l'energia E sia ben definita e continua. Si può tuttavia dimostrare che questi due spazi sono omotopicamente equivalenti, quindi dal punto di vista della teoria dell'omotopia essi sono sostanzialmente interscambiabili.

2 La stima di Klingenberg per il raggio di iniettività

L'obiettivo di questa sezione è la dimostrazione del seguente risultato, che sarà cruciale per la dimostrazione del teorema della sfera.

Teorema 11 (Klingenberg)**.** *Sia M una varietà riemanniana di dimensione $n \geq 3$ tale che $0 < \frac{k}{4} < \sec(M) \leq k$. Allora* $\mathrm{injrad}(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

La deduzione del Teorema procederà come segue:

1. Con metodi analitici si otterrà, grazie alle disuguaglianze per la curvatura, una stima dal basso uniforme per la distanza di una coppia di punti coniugati in M.

2. Per il punto 1, se due punti p, $q \in M$ realizzano il raggio di iniettività di M e quest'ultimo è abbastanza piccolo, allora non possono essere coniugati. Si dimostra che, sotto queste ipotesi, c'è una geodetica chiusa γ in M passante per p e q e avente lunghezza pari a $2\,\mathrm{injrad}\,(M)$.

3. Si applica la teoria di Morse a (un'approssimazione finito-dimensionale di) $\Omega_M\,(p,p)$ per ottenere una stima dal basso delle possibili lunghezze delle geodetiche chiuse omotopicamente banali in M.

Per chiarezza e convenienza, spezziamo la dimostrazione in lemmi.

Lemma 12. *Siano p, $q \in M$ due punti coniugati. Se $\sec(M) \le k$, con $k > 0$, vale che $d_M\,(p,q) \ge \frac{\pi}{\sqrt{k}}$.*

Dimostrazione. Abbiamo che $\mathrm{Hess}\,(r)\,|_{(\partial_r)^\perp} = \frac{1}{2}\partial_r\,(g_r)$ (di fatto è stato visto durante il corso). Infatti, usando il fatto che g è nella forma $g_r + dr \otimes dr$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hess}\,(r)\left(\partial_{\theta_i}, \partial_{\theta_j}\right) &= \partial_{\theta_i}\left(dr\left(\partial_{\theta_j}\right)\right) - dr\left(\nabla_{\partial_{\theta_i}}\left(\partial_{\theta_j}\right)\right) \\
&= 0 - g\left(\nabla_{\partial_{\theta_i}}\left(\partial_{\theta_j}\right), \partial_r\right) \\
&= -\Gamma^k_{i,j}\, g\left(\partial_{\theta_k}, \partial_r\right) - \Gamma^r_{i,j}\, g\left(\partial_r, \partial_r\right) \\
&= \frac{1}{2}\partial_r\left(g_{i,j}\right)
\end{aligned}$$

Pertanto il teorema del confronto dell'hessiano (1) assicura che g_r soddisfi

$$\begin{cases} \partial_r\,(g_r) \ge \frac{s_k'(r)}{s_k(r)} g_r \\ g_r = \mathcal{O}(r^2) \text{ per } r \to 0 \end{cases}$$

L'applicazione del teorema di confronto per le equazioni differenziali ordinarie garantisce che $g_r \ge \overline{g}_r$, ove $\overline{g}_r$ è la funzione che verifica l'uguaglianza nel problema sopra. Ma $\overline{g}_r = s_k\,(r)^2\, g_{\mathbb{S}^{n-1}}$.

Ora, sia $p \in M$ e sia R il massimo valore per cui $\exp_p \colon B_R\left(0_{T_p(M)}\right) \to B_R\,(p)$ non ha punti critici. Se per assurdo $R < \frac{\pi}{\sqrt{k}}$, allora, per la disuguaglianza precedente applicata alla metrica $\left(\exp_p\right)^*(g)$, per continuità avremmo, siccome $s_k\,(R) > 0$, che $\left(\exp_p\right)^*(g)$ è definita positiva anche in tutti i punti di $\partial\left(B_R\left(0_{T_p(M)}\right)\right)$, che non possono quindi essere punti critici. Ciò contraddice la massimalità di R. $\square$

Lemma 13. *Sia $p \in M$ e sia $\mathrm{Cut}_p(M)$ il cut locus di p. Sia $q \in \mathrm{Cut}_p(M)$ che realizza la distanza di p da $\mathrm{Cut}_p(M)$. Se p e q non sono coniugati lungo alcuna geodetica minimale che li congiunge, allora esistono esattamente due geodetiche minimali distinte $\gamma, \sigma \in \Omega(p, q)$ (a meno di riparametrizzazione). Inoltre i vettori tangenti ad esse nel punto q hanno stessa direzione e verso opposto.*

Dimostrazione. Siccome p e q non sono coniugati, per la caratterizzazione del raggio di iniettività devono esistere almeno due geodetiche minimali distinte γ e σ da p a q. Sia $l = d_M(p, q)$. Supponiamo γ e σ parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco. In tal caso, è sufficiente dimostrare che $\gamma'(l) = -\sigma'(l) \in T_q(M)$. Infatti, se esistesse una terza geodetica minimale $\delta \in \Omega(p, q)$, anch'essa parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, ciò darebbe $\delta'(l) = -\gamma'(l) = \sigma'(l)$, quindi $\delta = \sigma$.

Supponiamo che ciò non sia vero. Allora, posto $v = -\frac{\gamma'+\sigma'}{\|\gamma'+\sigma'\|}$, vale che $\|v\| = 1$, che $g(v, \gamma'(l)) < 0$ e che $g(v, \sigma'(l)) < 0$. Sia τ una curva differenziabile in M tale che $\tau(0) = q$ e $\tau'(0) = v$. Siccome p e q non sono coniugati, $\exp_p$ è un diffeomorfismo locale in $x = l\gamma'(0) \in T_p(M)$. In un intorno di x esiste quindi una curva liscia w tale che $\exp_p(w) = \tau$. Si definisca $\Gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, l] \to M$ ponendo

$$\Gamma(s, t) = \exp_p\left(\frac{t}{l} w(s)\right)$$

Chiaramente Γ è una variazione geodetica di γ tale che $\Gamma(s, 0) = p$ e $\Gamma(s, l) = \tau(s)$. In modo simile si costruisce una variazione geodetica Σ si σ tale che $\Sigma(s, 0) = p$ e $\Sigma(s, 1) = \tau(s)$. La formula della prima variazione della lunghezza d'arco dà quindi $\frac{dL(\Gamma(s,\cdot))}{ds}(0) = g(v, \gamma'(l)) < 0$ e similmente $\frac{dL(\Sigma(s,\cdot))}{ds}(0) < 0$. Ma allora, scelto un s positivo sufficientemente vicino a 0 e posto $q' = \tau(s)$, si avrà che $L(\Gamma(s, \cdot)) < l$ e, similmente, $L(\Sigma(s, \cdot)) < l$. Tuttavia, per costruzione $\mathrm{injrad}_p(M) = l$, quindi le geodetiche $\Gamma(s, \cdot)$ e $\Sigma(s, \cdot)$, uscendo da p e avendo lunghezza minore di l, sono minimali. Siccome hanno lo stesso punto di arrivo, devono coincidere. Ma allora, operando il limite per $s \to 0_+$, si avrebbe $\gamma = \sigma$, il che è contraddittorio. □

Corollario 14. *Si supponga M compatta. Sia $R = \inf\{d_m(p, q)\}$ al variare delle coppie (p, q) di punti coniugati lungo qualche geodetica minimale. Sia $R' = \inf\{L(\gamma)\}$ al variare di γ tra le geodetiche chiuse di M. Allora*

$$\mathrm{injrad}(M) = \min\left\{R, \frac{1}{2}R'\right\}$$

Dimostrazione. La disuguaglianza '$\leq$' è ovvia. Dimostriamo quella inversa. Dato che la funzione $x \in M \mapsto \mathrm{injrad}_x(M)$ è continua, per compattezza ha un minimo. Esiste quindi un punto $p \in M$ tale che $\mathrm{injrad}_p(M) =$

$\min_{x\in M}(\mathrm{injrad}_x(M)) = \mathrm{injrad}(M)$. Scegliendo $q \in \mathrm{Cut}_p(M)$ che minimizza la distanza da p, avremo allora che $d_M(p,q) = \mathrm{injrad}(M)$ e che o i punti p, q sono coniugati lungo una geodetica minimale (quindi $R \leq \mathrm{injrad}(M)$), oppure, se ciò non avviene, per il lemma precedente esistono esattamente due geodetiche minimali $\gamma, \sigma \in \Omega(p,1)$, che supponiamo parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco, e $\gamma'(d_M(p,q)) = -\sigma'(d_M(p,q))$. In questo caso, scambiando i ruoli di p e q abbiamo che $\gamma'(0) = -\sigma'(0)$. Pertanto $\gamma \cup \sigma$ è il supporto di una geodetica chiusa in M di lunghezza $2d_M(p,q) = 2\,\mathrm{injrad}_M(M)$. Segue la tesi. □

Lemma 15. *Sia γ una geodetica chiusa in M di lunghezza maggiore o uguale a $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, con $k > 0$. Sia $\mathcal{T}_0(\gamma)$ lo spazio dei campi di vettori lungo γ nulli agli estremi. Se $\sec(M) \geq k$, allora l'indice di negatività della forma $\frac{d^2E}{dt^2}\colon \mathcal{T}_0(\gamma) \times \mathcal{T}_0(\gamma) \to \mathbb{R}$ è almeno $n-1$.*

Dimostrazione. Per semplicità, indichiamo la seconda variazione di E su M con φ e quella su M_k con $\overline{\varphi}$. Sia $\overline{\gamma}$ una geodetica in M_k della stessa lunghezza l di γ. Supponiamo entrambe le curve parametrizzate rispetto alla lunghezza d'arco Per ogni curva α, indichiamo con P_α il trasporto parallelo lungo α. Sia $W \subseteq \mathcal{T}_0(\overline{\gamma})$ un sottospazio vettoriale su cui φ sia definita negativa. Per ogni $\overline{V} \in W$ definiamo un campo $V \in \mathcal{T}_0(\gamma)$ ponendo

$$V = P_{\gamma|_{[0,t]}} \circ f \circ P^{-1}_{\overline{\gamma}|_{[0,t]}} \circ \overline{V}$$

dove f è un'isometria fissata tra $T_{\overline{p}}(M_k)$ e $T_p(M)$. Chiaramente la mappa $\overline{V} \mapsto V$ è inettiva. Siccome il trasporto parallelo preserva i prodotti scalari, vale che

$$\begin{aligned}
\varphi(V,V) &= \int_0^l \left[\left\|V'\right\|^2 - R\left(\gamma', V, \gamma', V\right)\right] dt \\
&\leq \int_0^l \left[\left\|V'\right\|^2 - \frac{k}{\left\|V\right\|^2 - g\left(V, \gamma'\right)}\right] dt \\
&= \int_0^l \left[\left\|\overline{V}'\right\|^2 - \frac{k}{\left\|\overline{V}\right\|^2 - g\left(\overline{V}, \gamma'\right)}\right] dt \\
&= \overline{\varphi}\left(\overline{V}, \overline{V}\right)
\end{aligned}$$

Quindi l'indice di negatività della forma indice su M è maggiore o uguale di quello sulla sfera lungo $\overline{\gamma}$, che risulta essere almeno $n-1$.

Questa affermazione è un'immediata conseguenza del Teorema dell'indice di Morse (15.1 a pagina 83 di [5]). Alternativamente, si possono costruire 'a mano' $n-1$ campi di vettori $X_1, \ldots, X_{n-1}$ ortogonali rispetto a $\overline{\varphi}$ e tali che $\overline{\varphi}(X_i) < 0$ per ogni i. A tal fine, è sufficiente prendere $e_1, \ldots, e_{n-1}$ base ortonormale di $T_{\overline{\gamma}(0)}(M_k)$, e ortogonali a $\overline{\gamma'}(0)$, scegliere $0 < \varepsilon < l - \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ e porre

$$X_i(t) = \begin{cases} \frac{S_k(t)}{S_k\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}}-\varepsilon\right)} E_i(t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}} - \varepsilon \\ \frac{S_k\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}}-t\right)}{S_k(2\varepsilon)} E_i(t) & \text{se } \frac{\pi}{\sqrt{k}} - \varepsilon \leq t \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}} + \varepsilon \\ 0 & \text{se } \frac{\pi}{\sqrt{k}} + \varepsilon \leq t \leq l \end{cases}$$

dove E_i è l'estensione parallela di e_i lungo $\overline{\gamma}$. □

Dimostrazione del teorema 11. Supponiamo per assurdo che il raggio di iniettività di M sia inferiore a $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$. Allora per il lemma 12 e il corollario 14 deve esistere una geodetica chiusa γ di lunghezza $l < \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$. Sia $p = \gamma(0)$.

Per ipotesi M è semplicemente connessa, quindi deve esistere un'omotopia $H\colon [0,1]^2 \to M$ di γ con il cammino costante 1_p a estremi fissati. Per il Teorema di approssimazione di Whitney possiamo supporre che H sia $\mathcal{C}^\infty$, quindi H definisce una funzione continua $[0,1] \to \Omega(p,q)$, con la topologia definita nella sezione precedente. Per compattezza, $E \circ H$ ha un massimo c quindi H assume valori in $\Omega^c(p,q)$. A meno di comporre con una retrazione, possiamo supporre che H sia in realtà a valori in un'approssimazione finito-dimensionale $\Omega' = \Omega^c(p,q,\underline{t})$.

Sia $h = \min(\sec(M)) > \frac{k}{4}$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\max\left\{l+\varepsilon, \frac{\pi}{\sqrt{h}} + \varepsilon\right\} < \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$ e che non ci siano punti critici di $\tilde{E}$ nell'intervallo aperto $\left(\frac{\pi}{\sqrt{h}} + \varepsilon, \frac{2\pi}{\sqrt{k}}\right)$. Sia $A = \tilde{E}^{-1}\left(-\infty, 2^{-1}\left(\max\left\{l+\varepsilon, \frac{\pi}{\sqrt{h}}+\varepsilon\right\}\right)^2\right)$. Per il lemma 15 e il Teorema 9 ogni punto critico di $\tilde{E}$ ha indice maggiore o uguale a 2. Per la densità delle funzioni di Morse ([5], pagina 32) e la semicontinuità inferiore dell'indice, perturbando $\tilde{E}$, se necessario, otteniamo una funzione di Morse su Ω' che ha solo punti critici di indice maggiore di 1 su $\Omega' \setminus A$. Il corollario 6 garantisce allora che Ω' ha lo stesso tipo di omotopia relativamente ad A di uno spazio B ottenuto da A per attaccamento di celle di dimensione maggiore di 1. Un procedimento standard di approssimazione cellulare consente di dedurne che la coppia (Ω, A) è semplicemente connessa, quindi H è omotopo, ad estremi fissati, ad un cammino $H'\colon [0,1] \to A$ (si vedano, per esempio, i lemmi 4.6 e 4.10 alle pagine 346 e 350 di [3]). Possiamo quindi supporre, senza perdita di generalità, che per ogni $s \in [0,1]$ si abbia $E(H(\cdot,s)) < \frac{2\pi^2}{k}$.

Si consideri l'insieme X degli $s \in [0,1]$ tali che $H(\cdot,s)$ si solleva ad una curva chiusa in $B_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0) \subseteq T_p(M)$. Osserviamo che:

- $H(t,1) \equiv p$, quindi $1 \in X$, mentre $H(t,0) = \gamma(t)$, dunque $0 \notin X$, siccome ogni sollevamento di geodetiche uscenti da p è un raggio e non può essere una curva chiusa.
- X è aperto. Infatti, se $s_0 \in X$, allora sia $\tilde{H}_{s_0}$ un sollevamento chiuso di $H(\cdot,s_0)$. Siccome non ci sono coppie di punti coniugati a distanza

minore di $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, $\exp_p$ è un diffeomorfismo locale su $B_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0)$. Pertanto per ogni $t \in [0,1]$ esiste un intorno U_t di (t, s_0) tale che esiste un unico sollevamento $\tilde{H}_t$ di $H|_{U_t}$ per cui $\tilde{H}_t(t, s_0) = \tilde{H}_{s_0}(t, s_0)$. É immediato che, posto $U = \bigcup_t (U_t)$, le mappe $\tilde{H}_t$ si incollano ad un sollevamento $\tilde{H}$ di $H|_U$ che estende $\tilde{H}_{s_0}$. Per s appartenente ad un opportuno intorno di s_0 le curve (ovviamente chiuse) $\tilde{H}_s = \tilde{H}(\cdot, s)$ sono sollevamenti ben definiti di $H(\cdot, s)$, quindi $s \in X$.

- X è chiuso. Infatti, sia $\{s_n\}_n$ una successione in X convergente a $\overline{s}$. Sia $\tilde{H}_n$ una curva chiusa che solleva $H(\cdot, s_n)$ in $B_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0)$. Per il Teorema di Ascoli-Arzelà, a meno di passare ad una sottosuccessione, possiamo supporre che $\tilde{H}_n$ converga ad una funzione continua $\overline{H}$, che è per costruzione un sollevamento di $H(\cdot, \overline{s})$ in $\overline{B_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0)}$. Basta allora dimostrare che in realtà $\overline{H}$ assume valori nella palla *aperta* $B_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0)$. Se per assurdo così non fosse esisterebbe $t \in (0,1)$ tale che $g_p\left(\overline{H}(t), \overline{H}(t)\right) = \frac{\pi^2}{k}$. Ma allora per il lemma di Gauss si avrebbe che $L(H(\cdot, \overline{s})) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$. La disuguaglianza di Cauchy-Schwarz darebbe allora
$$E(H(\cdot, \overline{s})) \geq 2^{-1} L(H(\cdot, \overline{s}))^2 \geq \frac{2\pi^2}{k}$$
il che contraddice le nostre assunzioni su H.

Dalla connessione di $[0,1]$ si ottiene un assurdo. □

3 Deduzione del teorema della sfera

Una volta dimostrato il teorema di Klingenberg sul raggio di iniettività, il teorema della sfera segue facilmente. Ci serve solamente un utlimo lemma preliminare.

Lemma 16. *Sia M una varietà riemanniana compatta. Siano $p, q \in M$ tali che $d_M(p,q) = \operatorname{diam}(M)$. Allora per ogni $v \in T_q(M)$ esiste una geodetica minimale γ da q a p che forma un angolo minore o uguale di $\frac{\pi}{2}$ con v.*

Dimostrazione. Sia σ una geodetica uscente da q tale che $\sigma'(0) = v$. Per ogni t sia γ_t una geodetica minimale tra p e $\sigma(t)$. Se esiste una successione $t_n \to 0$ tale che l'angolo tra γ_n e σ in $\sigma(t)$ è minore o uguale a $\frac{\pi}{2}$, allora il lemma è dimostrato perché, a meno di passare ad una sottosuccessione, $\{\gamma_n\}_n$ convergerà ad una geodetica γ, minimale tra p e q, con la proprietà voluta.

In caso contrario, esiste $t_0 > 0$ tale che per ogni $t \in [0, t_0)$ e ogni geodetica minimale γ_t tra p e $\sigma(t)$, che supponiamo parametrizzata rispetto alla lunghezza d'arco, è tale che l'angolo tra γ_t e σ in $\sigma(t)$ è ottuso. Consideriamo la funzione $f\colon [0, t_0] \to \mathbb{R}$ data da $f(t) = d_M(p, \sigma(t))$. f è continua.

Inoltre, per ogni t tale che $\sigma(t)$ non è un valore critico di $\exp_p$, esiste una variazione geodetica Γ_t di γ_t tale che $\Gamma_t(0,s)=p$ e $\Gamma_t(l(\gamma_t),s)=\sigma(t-s)$, che può essere costruita come nella dimostrazione del lemma 13. Applicando la formula per la prima variazione della lunghezza d'arco a Γ_t otteniamo che

$$\frac{dL(\Gamma_t)}{ds}|_0 = g\left(\gamma_t', \sigma'\right) < 0$$

Ne consegue che f è una funzione crescente di t, il che contraddice l'assunzione che p e q massimizzano la distanza. □

Teorema 17 (della sfera)**.** *Sia M una varietà riemanniana le cui curvature sezionali soddisfano $\frac{k}{4} < \sec(M) \leq k$. Se M è semplicemente connessa, allora è omeomorfa ad una sfera.*

Dimostrazione. In dimensione 1 e 2 il teorema è ovvio dalla classificazione delle 1- e 2-varietà compatte, anche senza alcuna ipotesi sulla curvatura. Supponiamo quindi $\dim(M) \geq 3$. In tal caso, sotto le ipotesi sulle curvature sezionali, il teorema 11 garantisce che $\mathrm{injrad}(M) \geq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$. Quindi, scelti $p,q \in M$ come nel lemma precedente, le palle geodetiche $B_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}-\varepsilon}(p)$ e $B_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}-\varepsilon}(q)$ sono diffeomorfe a dischi aperti. Osserviamo che, per $\varepsilon > 0$ abbastanza piccolo, la loro unione è M. Supponiamo per assurdo che esista $x \in M$ tale che $d_M(x,q) \geq \frac{\pi}{\sqrt{k}}-\varepsilon$ e $d_M(x,p) \geq \frac{\pi}{\sqrt{k}}-\varepsilon$. Scelta σ_1 una geodetica minimale da x a q, per il lemma precedente esiste una geodetica minimale σ_2 da q a p che forma con σ_1 un angolo $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Il confronto della cerniera determinata da σ_1 e σ_2 con angolo α con la sfera di curvatura $\min(\sec(M)) > \frac{k}{4}$ tramite il Teorema di Toponogov dà un assurdo.

Si consideri ora l'insieme $N = \left\{x \in M : d_M(x,p) = \frac{\pi}{\sqrt{k}} - \varepsilon\right\}$. Siccome $\exp_p|_{B_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(0)}$ è un diffeomorfismo con l'immagine, N è una sottovarietà differenziabile di M diffeomorfa a S^{n-1}. Siccome $M = B_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}-\varepsilon}(p) \cup B_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}-\varepsilon}(q)$, vale che $N \subseteq B_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(q)$, che è diffeomorfo ad un disco aperto. Per il teorema di Schoenflies generalizzato (per embedding *differenziabili* di S^{n-1} in S^n) la componente connessa di $B_{\frac{\pi}{\sqrt{k}}}(q) \setminus N$ contenente q è diffeomorfa ad un disco. Pertanto M è ottenuta come unione di due dischi di dimensione n, incollati con un omeomorfismo tra i rispettivi bordi. Se ne deduce facilmente che M è omeomorfa a S^n. □

Riferimenti bibliografici

[1] Jeff Cheeger and David G. Ebin. *Comparison theorems in Riemannian geometry.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1975. North-Holland Mathematical Library, Vol. 9.

[2] Manfredo Perdigão do Carmo. *Riemannian geometry*. Mathematics: Theory & Applications. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1992. Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty.

[3] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[4] Wilhelm Klingenberg. Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung. *Comment. Math. Helv.*, 35:47–54, 1961.

[5] J. Milnor. *Morse theory*. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. Annals of Mathematics Studies, No. 51. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.

[6] Peter Petersen. *Riemannian geometry*, volume 171 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2006.