il teorema di Cheng

Filippo Mazzoli

13 dicembre 2019

Richiamiamo il teorema di Myers sulla stima del diametro

Teorema (Myers)**.** *Sia* (M, g) *una varietà Riemanniana completa. Se esiste* $k > 0$ *tale che* $\mathrm{Ric} \geq (n-1)kg$ *allora* $\mathrm{diam}(M, g) \leq \pi/\sqrt{k}$*.*

Il teorema di Cheng che ci proponiamo di dimostrare caratterizza il caso estremale della disuguaglianza, ovvero cosa accade se, nelle stesse ipotesi del teorema di Myers, il diametro è esattamente $\pi/\sqrt{k}$. In particolare, vedremo che se si realizza tale condizione la n-varietà (M, g) è isometrica alla sfera n-dimensionale standard di raggio $\pi/\sqrt{k}$. Prima di dimostrare tale risultato, introdurremo gli principali strumenti principali che ci condurranno alla conclusione, riguardanti il confronto del laplaciano della distanza e della crescita dei volumi, entrambi in ipotesi di limitatezza dal basso del tensore di Ricci.

Notazioni

Fissato $k \in \mathbb{R}$, denotiamo con $\mathrm{sn}_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la soluzione della seguente equazione differenziale

$$\begin{cases} \ddot{x} + kx = 0 \\ x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$$

ovvero l'applicazione

$$\mathrm{sn}_k(t) = \begin{cases} \frac{\sinh(\sqrt{-k}t)}{\sqrt{-k}} & \textit{se } k < 0 \\ t & \textit{se } k = 0 \\ \frac{\sin(\sqrt{k}t)}{\sqrt{k}} & \textit{se } k > 0 \end{cases}$$

Data (M, g) una varietà Riemanniana completa e preso $p \in M$, denoteremo con $r = r_p \colon M \to \mathbb{R}_+$ la funzione distanza dal punto p e con ∂_r il gradiente di r sull'insieme $M \setminus \mathrm{Cut}_p$. La mappa r in $M \setminus \mathrm{Cut}_p$ è della forma

$$|\exp_p^{-1}(\cdot)|_p^2$$

Supponiamo dunque che $q = \exp_p(v)$. Poniamo $\gamma(t) := \exp_p(tv)$, e calcoliamo

$$\begin{aligned} dr_q(w) &= g_p\left(\frac{v}{|v|}, d(\exp_p^{-1})_q(w)\right) \\ &= \frac{1}{|v|} g_q(d(\exp_p)_v(v), w) && \textit{per il lemma di Gauss} \\ &= g_q\left(\frac{\dot{\gamma}(1)}{|\dot{\gamma}(1)|}, w\right) \end{aligned}$$

per ogni $w \in T_qM$. Abbiamo mostrato quindi che, preso $q \in M \setminus \mathrm{Cut}_p$, $\partial_r|_q$ coincide con $\dot{\gamma}(1)/|\dot{\gamma}(1)|$, dove γ è la geodetica minimale che unisce p a q.

1 Fatti preliminari

Definizione 1.1. Data (M, g) varietà Riemanniana e $B \in \mathcal{T}_2(M)$ un tensore 2-covariante e simmetrico, indichiamo con $S_B \in \mathcal{T}_1^1(M)$ l'endomorfismo autoaggiunto indotto definito dalla relazione

$$B(X, Y) = g(S_B(X), Y)$$

per ogni $X, Y \in \mathcal{T}(M)$. Denotiamo inoltre con $B^2 \in \mathcal{T}_2(M)$ il tensore simmetrico definito da

$$B^2(X, Y) = g(S_B^2(X), Y) = g(S_B(X), S_B(Y))$$

Lemma 1.2. *Data (M, g) una varietà Riemanniana completa, sia $p \in M$ e $r = r_p$. Valgono le seguenti relazioni in $M \setminus \mathrm{Cut}_p$:*

- $\operatorname{Hess} r(X, Y) = g(\nabla_X \partial_r, Y)$
- $(\nabla_{\partial_r} \operatorname{Hess} r)(X, Y) + \operatorname{Hess}^2 r(X, Y) = -\operatorname{Rm}(X, \partial_r, Y, \partial_r)$

Dimostrazione. Osserviamo innanzitutto che, per compatibilità della metrica vale

$$(\nabla_X \operatorname{grad} f)^\flat = \nabla_X(\nabla f) \tag{1}$$

Infatti

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \operatorname{grad} f)^\flat(Y) &= g(\nabla_X \operatorname{grad} f, Y) \\
&= X(g(\operatorname{grad} f, Y)) - g(\operatorname{grad} f, \nabla_X Y) \\
&= X((\nabla f)(Y)) - (\nabla f)(\nabla_X Y) \\
&= (\nabla_X(\nabla f))(Y)
\end{aligned}$$

Ne deduciamo quindi facilmente la prima relazione

$$\operatorname{Hess} r(X, Y) = (\nabla_X(\nabla r))(Y) = g(\nabla_X \partial_r, Y)$$

che ci individua quindi l'endomorfismo autoaggiunto corrispondente a $\operatorname{Hess} r$. Ora mostriamo la seconda:

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\partial_r} \operatorname{Hess} r)(X, Y) &= \partial_r(\operatorname{Hess} r(X, Y)) - \operatorname{Hess} r(\nabla_{\partial_r} X, Y) - \operatorname{Hess} r(X, \nabla_{\partial_r} Y) \\
&= \partial_r(g(\nabla_X \partial_r, Y)) - g(\nabla_{\nabla_{\partial_r} X} \partial_r, Y) - g(\nabla_X \partial_r, \nabla_{\partial_r} Y) \\
&= g(\nabla_{\partial_r} \nabla_X \partial_r, Y) - g(\nabla_{\nabla_{\partial_r} X} \partial_r, Y) \\
&= g((\nabla^2 \partial_r)(\partial_r, X), Y) \\
&= g(\operatorname{Rm}(X, \partial_r)\partial_r + (\nabla^2 \partial_r)(X, \partial_r), Y) \\
&= \operatorname{Rm}(X, \partial_r, \partial_r, Y) + g(\nabla_X \nabla_{\partial_r} \partial_r - \nabla_{\nabla_X \partial_r} \partial_r, Y) \\
&= -\operatorname{Rm}(X, \partial_r, Y, \partial_r) - \operatorname{Hess}^2 r(X, Y)
\end{aligned}$$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che $\nabla_{\partial_r} \partial_r \equiv 0$ e la definizione di Hess^2 tramite l'endomorfismo autoaggiunto espresso nella prima relazione. □

Data (M, g) una varietà Riemanniana orientata, denotiamo con $d\mathrm{vol}$ la forma di volume Riemanniano associata. Condizione necessaria e sufficiente affinché $d\mathrm{vol}$ sia ben definita su tutto M è l'orientabilità. Per dimostrare i prossimi risultati tuttavia non servirà avere una forma di volume globale, bensì sarà sufficiente poterla definire su $M \setminus \mathrm{Cut}_p$, e a tal scopo è sufficiente avere la completezza di M, perché in tal caso $M \setminus \mathrm{Cut}_p$ è il dominio di una carta, ovvero di $\exp_p^{-1}$, per cui su di essa possiamo definire un'orientazione e una conseguente forma di volume. Anche la mancanza di una scelta privilegiata per l'orientazione su $M \setminus \mathrm{Cut}_p$ non risulterà un problema perché di fatto noi dovremo calcolare solo volumi tramite $d\mathrm{vol}$.

Ciò spiega perché nei seguenti risultati non richiederemo l'orientabilità anche se coinvolgono la forma di volume Riemanniano.

Proposizione 1.3. *Data (M, g) varietà Riemanniana completa, sia $p \in M$ e $r = r_p$. Valgono le seguenti relazioni in $M \setminus \mathrm{Cut}_p$:*

- $\mathcal{L}_{\partial_r}\, d\mathrm{vol} = \Delta r\, d\mathrm{vol}$
- $\partial_r \Delta r + \frac{(\Delta r)^2}{n-1} \leq \partial_r \Delta r + |\mathrm{Hess}\, r|^2 = -\operatorname{Ric}(\partial_r, \partial_r)$

Dimostrazione. Sia $\vartheta^1, \dots, \vartheta^n \in \mathcal{T}_1(M)$ un riferimento locale ortonormale tale che $d\mathrm{vol} = \vartheta^1 \wedge \cdots \wedge \vartheta^n$. Osserviamo innanzitutto la seguente relazione

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{\partial_r}\vartheta^i)(X) &= \partial_r(\vartheta^i(X)) - \vartheta^i([\partial_r, X]) \\
&= (\nabla_{\partial_r}\vartheta^i)(X) + \vartheta^i(\nabla_{\partial_r}X - [\partial_r, X]) \\
&= (\nabla_{\partial_r}\vartheta^i)(X) + \vartheta^i(\nabla_X \partial_r)
\end{aligned}
$$

Indichiamo con $\nabla.\partial_r$ il tensore di tipo $(1,1)$ $X \mapsto \nabla_X \partial_r$. Calcoliamo dunque $\mathcal{L}_{\partial_r}\, d\mathrm{vol}$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\partial_r}\, d\mathrm{vol} &= \mathcal{L}_{\partial_r}(\vartheta^1 \wedge \cdots \wedge \vartheta^n) \\
&= \sum_{i=1}^n \vartheta^1 \wedge \cdots \wedge \mathcal{L}_{\partial_r}\vartheta^i \wedge \cdots \wedge \vartheta^n \\
&= \sum_{i=1}^n \vartheta^1 \wedge \cdots \wedge (\nabla_{\partial_r}\vartheta^i + \vartheta^i \circ \nabla.\partial_r) \wedge \cdots \wedge \vartheta^n \\
&= \nabla_{\partial_r}\, d\mathrm{vol} + \sum_{i=1}^n \vartheta^1 \wedge \cdots \wedge (\vartheta^i \circ \nabla.\partial_r) \wedge \cdots \wedge \vartheta^n
\end{aligned}
$$

La mappa $X \mapsto \vartheta^i(\nabla_X \partial_r)$ definisce una 1-forma. Gli elementi $\vartheta^1, \dots, \vartheta^n$ saranno la base duale associata via prodotto scalare di un qualche riferimento locale ortonormale $E_1, \dots, E_n$. Allora la forma $\vartheta^i(\nabla.\partial_r)$ si esprime in termini del riferimento come segue

$$
\vartheta^i(\nabla.\partial_r) = \vartheta^i(\nabla_{E_j}\partial_r)\vartheta^j
$$

Riprendendo da dove eravamo rimasti, otteniamo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\partial_r}\, d\mathrm{vol} &= \nabla_{\partial_r}\, d\mathrm{vol} + \sum_{i=1}^n \vartheta^1 \wedge \cdots \wedge (\vartheta^i(\nabla_{E_j}\partial_r)\vartheta^j) \wedge \cdots \wedge \vartheta^n \\
&= \nabla_{\partial_r}\, d\mathrm{vol} + \sum_{i=1}^n \vartheta^i(\nabla_{E_i}\partial_r)\vartheta^1 \wedge \cdots \wedge \vartheta^n \\
&= \nabla_{\partial_r}\, d\mathrm{vol} + \operatorname{tr}(\nabla.\partial_r)\, d\mathrm{vol} \\
&= \nabla_{\partial_r}\, d\mathrm{vol} + \Delta r\, d\mathrm{vol}
\end{aligned}
$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che $\nabla.\partial_r$ è l'endomorfismo autoaggiunto associato a $\mathrm{Hess}\, r$. Per dimostrare la prima relazione resta da verificare che $\nabla_{\partial_r}\, d\mathrm{vol} \equiv 0$. Di fatto mostreremo che $\nabla\, d\mathrm{vol} \equiv 0$.

A tal scopo osserviamo innanzitutto la seguente relazione:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^i_{ik} &= \frac{g^{ij}}{2}\{\partial_i g_{jk} + \partial_k g_{ji} - \partial_j g_{ik}\} \\
&= \frac{g^{ij}}{2}\partial_k g_{ij} \\
&= \frac{1}{2\det((g_{pq})_{p,q})}(-1)^{l+m}\det((g_{pq})^{(l,m)}_{p,q})\partial_k g_{lm}{}^1
\end{aligned}
$$

dove $(g_{pq})_{p,q}^{(i,j)}$ indica la matrice ottenuta rimuovendo da $(g_{pq})_{p,q}$ la riga i-esima. A questo punto calcoliamo:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\partial_h} d\mathrm{vol} &= \nabla_{\partial_h}\left(\sqrt{\det((g_{pq})_{p,q})}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\right)\\
&= \partial_h\left(\sqrt{\det((g_{pq})_{p,q})}\right)+\sqrt{\det((g_{pq})_{p,q})}\sum_{i=1}^n dx^1\wedge\cdots\wedge\nabla_{\partial_h}dx^i\wedge\cdots\wedge dx^n\\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{\det((g_{pq})_{p,q})}}(-1)^{l+m}\sqrt{\det((g_{pq})_{p,q}^{(l,m)})}\partial_h g_{lm}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n+\\
&\quad -\Gamma^i_{ih}\sqrt{\det((g_{pq})_{p,q})}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\\
&= \left(\frac{1}{2\sqrt{\det((g_{pq})_{p,q})}}(-1)^{l+m}\sqrt{\det((g_{pq})_{p,q}^{(l,m)})}\partial_h g_{lm}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n+\\
&\quad -\left(\frac{1}{2\sqrt{\det((g_{pq})_{p,q})}}(-1)^{l+m}\sqrt{\det((g_{pq})_{p,q}^{(l,m)})}\partial_h g_{lm}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\\
&= 0
\end{aligned}$$

e questo vale per ogni h, come voluto.

Dedichiamoci adesso alla seconda relazione: partiamo dalla seconda uguaglianza del lemma 1.2 e contraiamo, ottenendo

$$-\operatorname{Ric}(\partial_r,\partial_r)=\operatorname{tr}(\nabla_{\partial_r}\operatorname{Hess} r)+\operatorname{tr}(\operatorname{Hess}^2 r)$$

Analizziamo il primo addendo

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(\nabla_{\partial_r}\operatorname{Hess} r) &= \mathcal{C}^1_1\mathcal{C}^1_1(g^*\otimes\nabla_{\partial_r}\operatorname{Hess} r)\\
&= \mathcal{C}^1_1\mathcal{C}^1_1(\nabla_{\partial_r}(g^*\otimes\operatorname{Hess} r))\\
&= \nabla_{\partial_r}(\mathcal{C}^1_1\mathcal{C}^1_1(g^*\otimes\operatorname{Hess} r))\\
&= \partial_r\Delta r
\end{aligned}$$

e ci siamo. Per il secondo addendo, osserviamo che $\operatorname{tr}(\operatorname{Hess}^2 r)$ puntualmente coincide con $\sum\lambda_i^2$, dove i λ_i sono gli autovalori dell'endomorfismo autoaggiunto S associato a $\operatorname{Hess} r$ sommati con molteplicità. Sappiamo inoltre che tale endomorfismo ha Ker non banale, poiché

$$g(S(\partial_r),X)=g(\nabla_{\partial_r}\partial_r,X)\equiv 0 \quad \textit{per ogni } X\in\mathcal{T}(M)$$

Abbiamo dunque la somma $\sum\lambda_i^2$ è fatta su al più $n-1$ elementi non nulli. Abbiamo quindi per Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum\lambda_i\right)^2\le(n-1)\left(\sum\lambda_i^2\right)$$

La quantità $\sum\lambda_i$ coincide d'altra parte con Δr, essendo la traccia di $\operatorname{Hess} r$, e $\sum\lambda_i^2$ è uguale anche a $|\operatorname{Hess} r|^2$, per cui abbiamo dimostrato che

$$\operatorname{tr}(\operatorname{Hess}^2 r)=|\operatorname{Hess} r|^2\ge\frac{(\Delta r)^2}{n-1}$$

Mettendo tutto insieme, otteniamo

$$\begin{aligned}
-\operatorname{Ric}(\partial_r,\partial_r) &= \operatorname{tr}(\nabla_{\partial_r}\operatorname{Hess} r)+\operatorname{tr}(\operatorname{Hess}^2 r)\\
&= \partial_r\Delta r+|\operatorname{Hess} r|^2\\
&\ge \partial\Delta r+\frac{(\Delta r)^2}{n-1}
\end{aligned}$$

che è quanto ci restava da dimostrare. □

[1] notazione di Einstein sugli indici l e m

Data (M,g) una varietà Riemanniana completa, indichiamo con S_pM la sfera unitaria in T_pM e $\rho\colon S_pM \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ l'applicazione definita da

$$\rho(v) := \sup\{t > 0 \mid \gamma_v \textit{ è minimizzante in } [0,t]\}$$

dove γ_v indica la geodetica uscente da p con velocità v. Definiamo inoltre

$$\Sigma(p) := \{tv \in T_pM \mid v \in S_pM,\ t \in [0, \rho(v))\}$$

$\Sigma(p)$ è l'aperto massimale su cui la mappa $\exp_p$ è un diffeomorfismo con l'immagine. Poniamo infine

$$U(p) := \{(v,t) \in S_pM \times \mathbb{R}_+ \mid tv \in \Sigma(p)\}$$

La mappa

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & U(p) & \longrightarrow & M \setminus \mathrm{Cut}_p \\ & (t,v) & \longmapsto & \exp_p(tv) \end{array}$$

e un diffeomorfismo e la sua inversa definisce una carta su $M \setminus \mathrm{Cut}_p$, dette coordinate polari Riemanniane in p. Osserviamo inoltre che, indicando con $(\vartheta, r) \in S_pM \times \mathbb{R}$ le componenti delle coordinate polari, il campo coordinato $\frac{\partial}{\partial r}$ coincide con il gradiente della distanza ∂_r. Infatti entrambi coincidono in $q \in M \setminus \mathrm{Cut}_p$ con il vettore tangente alla geodetica minimizzante di velocità 1 da p a q.

In tali coordinate la metrica di esprime nella forma

$$g = dr^2 + ds_r^2 \tag{2}$$

dove ds_r^2 indica la metrica indotta sulla sfera geodetica di centro p e raggio r, che denotiamo con $S_r(p)$.

Indichiamo $d\mathrm{vol}_{n-1}$ il pushforward tramite Φ della forma di volume standard su S_pM. Esisterà una funzione $\lambda\colon U(p) \to \mathbb{R}^*$ che verifichi

$$d\mathrm{vol} = \lambda\, dr \wedge d\mathrm{vol}_{n-1}$$

Lemma 1.4. *Vale la relazione*

$$\Delta r = \frac{\partial_r \lambda}{\lambda}$$

Dimostrazione. Calcoliamo la derivata di Lie di $d\mathrm{vol}$ lungo la direzione ∂_r

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\partial_r} d\mathrm{vol} &= \partial_r \lambda\, dr \wedge d\mathrm{vol}_{n-1} + \lambda\, (\mathcal{L}_{\partial_r} dr) \wedge d\mathrm{vol}_{n-1} + \lambda\, dr \wedge (\mathcal{L}_{\partial_r} d\mathrm{vol}_{n-1}) \\ &= \frac{\partial_r \lambda}{\lambda}\, d\mathrm{vol} + \lambda\, (\mathcal{L}_{\partial_r} dr) \wedge d\mathrm{vol}_{n-1} + \lambda\, dr \wedge (\mathcal{L}_{\partial_r} d\mathrm{vol}_{n-1}) \end{aligned}$$

Osserviamo ora che gli ultimi due addendi sono nulli, infatti $\mathcal{L}_{\partial_r} d\mathrm{vol}_{n-1} \equiv 0$ perché $d\mathrm{vol}_{n-1}$ è per costruzione indipendente dal parametro r. D'altra parte abbiamo

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\partial_r} dr)(X) &= \partial_r(dr(X)) - dr([\partial_r, X]) \\ &= \partial_r(g(\partial_r, X)) - g(\partial_r, [\partial_r, X]) \\ &= g(\nabla_{\partial_r} \partial_r, X) + g(\partial_r, \nabla_{\partial_r} X) - g(\partial_r, [\partial_r, X]) \\ &= g(\partial_r, \nabla_{\partial_r} X - [\partial_r, X]) \\ &= g(\partial_r, \nabla_X \partial_r) \\ &= \frac{X(|\partial_r|^2)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Utilizzando la prima relazione dimostrata nella proposizione 1.3, abbiamo quindi

$$\Delta r\, d\mathrm{vol} = \mathcal{L}_{\partial_r} d\mathrm{vol} = \frac{\partial_r \lambda}{\lambda}\, d\mathrm{vol}$$

che conclude la dimostrazione. $\square$

Se ci mettiamo nel contesto a curvatura sezionale costante si osserva che la scrittura della metrica in coordinate polari assume la forma

$$g = dr_k^2 + \mathrm{sn}_k^2(r_k) g_{\mathbb{S}_1^{n-1}}$$

dove ds_{n-1}^2 indica la metrica standard della sfera unitaria. Ne deduciamo quindi

$$\begin{aligned} d\mathrm{vol}_k &= \mathrm{sn}_k^{n-1}(r_k)\, dr_k \wedge d\mathrm{vol}_{n-1} \\ &= \lambda_k\, dr_k \wedge d\mathrm{vol}_{n-1} \end{aligned}$$

Dunque abbiamo

$$\Delta r_k = \frac{\partial_r \lambda_k}{\lambda_k} = (n-1)\frac{\mathrm{sn}_k^{n-2}(r_k)\, \mathrm{sn}_k'(r_k)}{\mathrm{sn}_k^{n-1}(r)} = (n-1)\frac{\mathrm{sn}_k'(r_k)}{\mathrm{sn}_k(r_k)}$$

1.1 Confronto del Laplaciano della distanza

Siamo ora pronti per dimostrare il seguente risultato:

Proposizione 1.5 (Confronto del Laplaciano). *Sia (M, g) una varietà Riemanniana completa, $p \in M$ e $r = r_p$. Supponiamo che esista $k \in \mathbb{R}$ per cui valga $\mathrm{Ric} \geq (n-1)kg$, allora in $M \setminus \mathrm{Cut}_p$ vale*

$$\Delta r \leq (n-1)\frac{\mathrm{sn}_k'(r)}{\mathrm{sn}_k(r)}$$

Dimostrazione. Siano $q \in M \setminus \mathrm{Cut}_p$ e $(v, \bar{r}) \in U(p)$ tali che $\exp_p(\bar{r}v) = q$. Abbiamo dunque che $\bar{r} = r(q)$ e $\gamma = \gamma_v \colon [0, \bar{r}] \to M$ è l'unica geodetica minimizzante da p a q. Fissiamo $e_1, \ldots, e_n$ una base ortonormale di T_pM, con $e_1 = v$, e indichiamo con $E_i \colon [0, \bar{r}] \to TM$ i campi paralleli lungo γ tali che $E_i(0) = e_i$ (in particolare osserviamo che $E_1 = \dot{\gamma}$). Poiché $q \in M \setminus \mathrm{Cut}_p$, p e q non sono coniugati, da cui segue che esistono dei campi di Jacobi V_i lungo γ tali che $V_i(0) = 0$ e $V_i(\bar{r}) = E_i(\bar{r})$. Poniamo inoltre

$$H_i(s) := \frac{\mathrm{sn}_k(s)}{\mathrm{sn}_k(\bar{r})} E_i(s)$$

Se $k \leq 0$ questa è banalmente una buona definizione, per il caso $k > 0$ c'è da fare una precisazione, dal momento che sn_k ha zeri: se $k > 0$ siamo nelle ipotesi del teorema di Myers, per cui possiamo dire che M è compatta e ha diametro $\leq \pi/\sqrt{k}$, per cui affinché q non appartenga al Cut_p si ha necessariamente $\bar{r} < \pi/\sqrt{k}$, e quindi $\mathrm{sn}_k(\bar{r}) \neq 0$.

Per costruzione abbiamo che i campi H_i e V_i assumono gli stessi valori agli estremi, per cui, per la proprietà di minimizzazione della forma d'indice dei campi di Jacobi abbiamo

$$\int_0^{\bar{r}} \left(|DV_i|^2 - \mathrm{Rm}(\dot{\gamma}, V_i, \dot{\gamma}, V_i)\right) ds \leq \int_0^{\bar{r}} \left(|DH_i|^2 - \mathrm{Rm}(\dot{\gamma}, H_i, \dot{\gamma}, H_i)\right) ds \qquad (3)$$

Per prima cosa vogliamo dimostrare che vale $I(V_i, V_i) = (\mathrm{Hess}\, r)_q(V_i(\bar{r}), V_i(\bar{r}))$. Consideriamo una variazione di γ $K_i = K_i(s,t) \colon [0, \bar{r}] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ con variazione infinitesimale V_i. Denotiamo con $\tilde{\nabla}$ il pullback della connessione di M tramite K_i e con $\tilde{\partial}_s, \tilde{\partial}_t$ i pushforward dei campi coordinati su $[0, \bar{r}] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Ora calcoliamo, utilizzando l'identità 1:

$$\begin{aligned} (\mathrm{Hess}\, r)_q(V_i(\bar{r}), V_i(\bar{r})) &= \nabla_{V_i(\bar{r})}(\nabla r)\big|_q (V_i(\bar{r})) \\ &= g(\nabla_{V_i(\bar{r})}\partial_r\big|_q, V_i(\bar{r})) \\ &= g(\tilde{\nabla}_{\partial_t}\tilde{\partial}_s, \tilde{\partial}_t)\Big|_{t=0, s=\bar{r}} \\ &= g(\tilde{\nabla}_{\partial_s}\tilde{\partial}_t, \tilde{\partial}_t)\Big|_{t=0, s=\bar{r}} \\ &= g(DV_i(\bar{r}), V_i(\bar{r})) \end{aligned}$$

Ora osserviamo che, essendo V_i di Jacobi, vale

$$\begin{aligned}
I(V_i, V_i) &= \int_0^{\bar{r}} \left(|DV_i|^2 - \mathrm{Rm}(\dot{\gamma}, V_i, \dot{\gamma}, V_i) \right) ds \\
&= \int_0^{\bar{r}} \left(\frac{d}{ds} g(DV_i, V_i) - g(\mathrm{Rm}(\dot{\gamma}, V_i)\dot{\gamma} + D^2 V_i, V_i) \right) ds \\
&= g(DV_i, V_i)|_0^{\bar{r}} \\
&= g(DV_i(\bar{r}), V_i(\bar{r})) \\
&= (\mathrm{Hess}\, r)_q (V_i(\bar{r}), V_i(\bar{r}))
\end{aligned}$$

e ci siamo. L'ultimo conto preliminare che ci resta da fare è calcolare $I(H_i, H_i)$ come segue, ricordando che $\mathrm{sn}_k'' = -k\,\mathrm{sn}_k$ e che E_i è un campo parallelo:

$$\begin{aligned}
I(H_i, H_i) &= \int_0^{\bar{r}} \left(\frac{d}{ds} g(DH_i, H_i) - g(\mathrm{Rm}(\dot{\gamma}, H_i)\dot{\gamma} + D^2 H_i, H_i) \right) ds \\
&= g(DH_i(\bar{r}), H_i(\bar{r})) + \\
&\qquad - \int_0^{\bar{r}} g \left(\frac{\mathrm{sn}_k}{\mathrm{sn}_k(\bar{r})} E_i, -k \frac{\mathrm{sn}_k}{\mathrm{sn}_k(\bar{r})} E_i + \frac{\mathrm{sn}_k}{\mathrm{sn}_k(\bar{r})} \mathrm{Rm}(\dot{\gamma}, E_i)\dot{\gamma} \right) ds \\
&= g \left(\frac{\mathrm{sn}_k'(\bar{r})}{\mathrm{sn}_k(\bar{r})} E_i(\bar{r}), E_i(\bar{r}) \right) + \int_0^{\bar{r}} \frac{\mathrm{sn}_k^2}{\mathrm{sn}_k^2(\bar{r})} \left(k - \sec(\dot{\gamma}, E_i) \right) ds \\
&= \frac{\mathrm{sn}_k'(\bar{r})}{\mathrm{sn}_k(\bar{r})} + \int_0^{\bar{r}} \frac{\mathrm{sn}_k^2}{\mathrm{sn}_k^2(\bar{r})} \left(k - \sec(\dot{\gamma}, E_i) \right) ds
\end{aligned}$$

Abbiamo ora tutti gli elementi necessari per dimostrare la disuguaglianza cercata:

$$\begin{aligned}
\Delta r\big|_q &= \sum_{i=2}^n (\mathrm{Hess}\, r)_q (E_i(\bar{r}), E_i(\bar{r})) = \sum_{i=2}^n (\mathrm{Hess}\, r)_q (V_i(\bar{r}), V_i(\bar{r})) \\
&= \sum_{i=2}^n I(V_i, V_i) \le \sum_{i=2}^n I(H_i, H_i) \\
&= (n-1) \frac{\mathrm{sn}_k'(\bar{r})}{\mathrm{sn}_k(\bar{r})} + \int_0^{\bar{r}} \frac{\mathrm{sn}_k^2}{\mathrm{sn}_k^2(\bar{r})} \left((n-1)k - \sum_{i=2}^n \sec(\dot{\gamma}, E_i) \right) ds \\
&= (n-1) \frac{\mathrm{sn}_k'(\bar{r})}{\mathrm{sn}_k(\bar{r})} + \int_0^{\bar{r}} \frac{\mathrm{sn}_k^2}{\mathrm{sn}_k^2(\bar{r})} \left((n-1)k - \mathrm{Ric}(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) \right) ds \\
&\le (n-1) \frac{\mathrm{sn}_k'(r(q))}{\mathrm{sn}_k(r(q))}
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato l'ipotesi $\mathrm{Ric} \ge (n-1)kg$. □

Corollario 1.6. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana completa con $\mathrm{Ric} \ge (n-1)kg$ per qualche $k \in \mathbb{R}$. Allora, preso $p \in M$, per ogni $(r, \vartheta) \in U(p)$ si ha*

$$\frac{\partial_r \lambda(r, \vartheta)}{\lambda(r, \vartheta)} \le \frac{\lambda_k'(r)}{\lambda(r)}$$

Dimostrazione. Dal lemma 1.4, dalla proposizione 1.5 e dalle osservazioni fatte nel caso a curvatura sezionale costante segue immediatamente la tesi. □

1.2 Teorema di Bishop-Gromov

Siamo ora pronti per dimostrare lo strumento principale che ci occorrerà nella dimostrazione del teorema di Cheng:

Teorema 1.7 (Bishop-Gromov). *Sia (M,g) una varietà Riemanniana completa per cui esiste $k \in \mathbb{R}$ tale che $\mathrm{Ric} \geq k(n-1)g$. Allora, preso $p \in M$, l'applicazione*

$$r \longrightarrow \frac{\mathrm{Vol}(B_r(p))}{\mathrm{Vol}_k(B_r^k)}$$

è non crescente, dove $B_r(p)$ e B_r^k indicano le palle metriche di raggio r rispettivamente in M e nella varietà Riemanniana completa e semplicemente connessa con $\sec \equiv k$.

Tale mappa inoltre ha limite 1 *al tendere di r a* 0, *per cui in particolare per ogni $r > 0$ vale*

$$\mathrm{Vol}(B_r(p)) \leq \mathrm{Vol}_k(B_r^k)$$

Dimostrazione. Estendiamo λ ad applicazione definita su tutto $S_pM \times \mathbb{R}_+$ ponendola $\equiv 0$ al di fuori di $U(p)$. Definiamo

$$a(r) := \int_{S_pM} \lambda(r,\cdot)\ d\mathrm{vol}_{n-1}$$
$$b(r) := \int_{S_pM} \lambda_k(r)\ d\mathrm{vol}_{n-1} = \omega_{n-1}\lambda_k(r)$$

dove indichiamo con ω_{n-1} il volume della sfera unitaria standard. Osserviamo che vale

$$\int_0^r a(t)\,dt = \int_0^r \int_{S_pM} \lambda\, d\mathrm{vol}_{n-1}\,dr = \mathrm{Vol}(B_r(p))$$

e analogamente $\int_0^r b(t)\,dt = \mathrm{Vol}_k(B_r^k)$ poiché abbiamo $B_r(p) = \exp_p(\overline{\Sigma(p)} \cap B(O_p,r))$. Si ha allora

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}\left(\log\frac{\mathrm{Vol}(B_r(p))}{\mathrm{Vol}_k(B_r^k)}\right) &= \frac{a(r)}{\int_0^r a(t)\,dt} - \frac{b(r)}{\int_0^r b(t)\,dt}\\ &= \frac{\int_0^r (a(r)b(t) - a(t)b(r))\,dt}{\left(\int_0^r a(t)\,dt\right)\left(\int_0^r b(t)\,dt\right)}\end{aligned}$$

Vogliamo dimostrare che tale derivata è ≤ 0, per cui è sufficiente far vedere che per ogni $t \leq s$ si ha

$$\frac{a(s)}{b(s)} \leq \frac{a(t)}{b(t)}$$

Osserviamo ora che

$$\frac{a(r)}{b(r)} = \frac{\int_{S_pM} \lambda(r,\cdot)\ d\mathrm{vol}_{n-1}}{\int_{S_pM} \lambda_k(r)\ d\mathrm{vol}_{n-1}} = \frac{1}{\omega_{n-1}} \int_{S_pM} \frac{\lambda(r,\cdot)}{\lambda_k(r)}\ d\mathrm{vol}_{n-1}$$

Quindi è sufficiente mostrare che, fissato $\vartheta \in S_pM$, la mappa $r \mapsto \frac{\lambda(r,\vartheta)}{\lambda_k(r)}$ è debolmente decrescente. Supponiamo $r\vartheta \in \Sigma(p)$ e calcoliamo

$$\frac{d}{dr}\left(\log\frac{\lambda(r,\vartheta)}{\lambda_k(r)}\right) = \frac{\partial_r \lambda(r,\vartheta)}{\lambda(r,\vartheta)} - \frac{\lambda_k'(r)}{\lambda_k(r)}$$

Tale quantità è ≤ 0 per il corollario 1.6. Ciò non conclude immediatamente poiché se $r\vartheta$ non appartiene a $U(p)$ l'applicazione sopra non è necessariamente derivabile. Tuttavia abbiamo imposto inizialmente che λ sia nulla fuori da $U(p)$, e siccome $\frac{\lambda(r,\vartheta)}{\lambda_k(r)} > 0$ per $r \in [0, \rho(\vartheta))$ ed è $= 0$ se $r \geq \rho(\vartheta)$, abbiamo comunque garantita la non crescenza della mappa.

Resta solo da dimostrare la condizione sul limite. Sappiamo che in coordinate normali (U,x) centrate in p la metrica è della forma

$$g_{ij} = \delta_{ij} + O(|x|^2)$$

che implica in particolare

$$\sqrt{\det((g_{pq})_{p,q})} = \sqrt{1 + O(|x|^2)} = 1 + O(|x|^2)$$

Da questo ne deduciamo la seguente stima

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(B_r(p)) &= \int_{B(O_p,r)} \sqrt{\det((g_{pq})_{p,q})}\, dx = \int_{B(O_p,r)} (1 + O(|x|^2))\, dx \\
&= \frac{\omega_{n-1} r^n}{n} + \int_{B(O_p,r)} (|x|^2)\, dx = \frac{\omega_{n-1} r^n}{n} + O(r^{n+2}) \\
&= r^n \left(\frac{\omega_{n-1}}{n} + O(r^2) \right)
\end{aligned}$$

Tale andamento è indipendente dalla metrica g, per cui per $r \to 0$ si ha

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_r(p))}{\mathrm{Vol}_k(B_r^k)} = \frac{r^n \left(\frac{\omega_{n-1}}{n} + O(r^2) \right)}{r^n \left(\frac{\omega_{n-1}}{n} + O(r^2) \right)} \longrightarrow 1$$

□

Corollario 1.8. *Sia (M,g) una varietà Riemanniana completa con* Ric $\geq k(n-1)$ *per qualche $k \in \mathbb{R}$. Allora, preso $p \in M$, per ogni $r < r'$ vale*

$$\frac{\mathrm{Vol}(B_r(p))}{\mathrm{Vol}(B_{r'}(p))} \geq \frac{\mathrm{Vol}(B_r^k)}{\mathrm{Vol}(B_{r'}^k)}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{Vol}(B_r(p))}{\mathrm{Vol}(B_{r'}(p))} &= \frac{\mathrm{Vol}(B_r(p))}{\mathrm{Vol}(B_r^k)} \frac{\mathrm{Vol}(B_r^k)}{\mathrm{Vol}(B_{r'}(p))} \\
&\geq \frac{\mathrm{Vol}(B_{r'}(p))}{\mathrm{Vol}(B_{r'}^k)} \frac{\mathrm{Vol}(B_r^k)}{\mathrm{Vol}(B_{r'}(p))} \\
&= \frac{\mathrm{Vol}(B_r^k)}{\mathrm{Vol}(B_{r'}^k)}
\end{aligned}$$

□

L'ultimo elemento che ci servirà è il seguente lemma:

Lemma 1.9. *Sia (M,g) una varietà Riemanniana e $p \in M$. Per $r > 0$ abbastanza piccolo, definiamo l'applicazione*

$$\begin{array}{cccc}
\varphi_r : & S_pM & \longrightarrow & M \\
& v & \longmapsto & \exp_p(rv)
\end{array}$$

e indichiamo con g_r la metrica pullback di g tramite φ_r. Allora

$$\lim_{r \to 0} \frac{g_r}{r^2} = g_p|_{S_pM}$$

cioè le metriche sulle sfere geodetiche, opportunamente riscalate e viste in S_pM, tendono alla metrica standard della sfera unitaria.

Dimostrazione. Sia $x \in S_pM$ e $v, w \in x^\perp \cong T_x(T_pM)$, allora

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\, g_r|_x (v,w) &= \frac{1}{r^2} g(d(\varphi_r)_x(v), d(\varphi_r)_x(w)) \\
&= \frac{1}{r^2} g(d(\exp_p)_{rx}(rv), d(\exp_p)_{rx}(rw)) \\
&= g(d(\exp_p)_{rx}(v), d(\exp_p)_{rx}(w)) \to g_p(v,w)
\end{aligned}$$

□

2 Il teorema di Cheng

Abbiamo ora introdotto gli strumenti che ci saranno utili per affrontare la dimostrazione del risultato principale che siamo promessi di esporre:

Teorema 2.1 (Cheng)**.** *Sia (M,g) una n-varietà Riemanniana completa per cui esiste $k>0$ tale che $\mathrm{Ric} \geq (n-1)kg$, e supponiamo che $\mathrm{diam}(M,g) = \pi/\sqrt{k}$. Allora (M,g) è isometrica alla n-sfera standard di raggio $1/\sqrt{k}$.*

Per la stima del diametro di Myers abbiamo che M è compatta, per cui possiamo trovare due punti p e q la cui distanza realizzi il diametro $\pi/\sqrt{k}$. Indichiamo allora con r la funzione distanza dal punto p e con $\tilde{r}$ la distanza dal punto q.

La dimostrazione che proponiamo sarà divisa in quattro passi: per prima cosa mostreremo, attraverso il teorema di Bishop-Gromov che vale

$$r + \tilde{r} \equiv \frac{\pi}{\sqrt{k}}$$

su tutta M.

Secondariamente osserveremo che le funzioni r e $\tilde{r}$ sono lisce su $M \setminus \{p,q\}$.

Il terzo passo consisterà nel dimostrare che $(0, \pi/\sqrt{k})$ è un insieme di valori regolari per r, da cui dedurremo che $M \setminus \{p,q\}$ è diffeomorfa tramite Φ alla varietà prodotto

$$r^{-1}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{k}}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)$$

e che $r^{-1}(\frac{\pi}{2\sqrt{k}})$ è diffeomorfa a S^{n-1}. Attraverso Φ^{-1}, osserveremo che in $M \setminus \{p,q\}$ vale

$$\mathrm{Hess}\, r = \frac{\mathrm{sn}_k'(r)}{\mathrm{sn}_k(r)} ds^2_{n-1}$$

dove $ds^2_{n-1}\big|_{\Phi^{-1}(\cdot,\bar{r})}$ é la metrica indotta sulla sottovarietà $\Phi^{-1}(r^{-1}(\frac{\pi}{2\sqrt{k}}) \times \{\bar{r}\})$, la quale coincide con la sfera geodetica di centro p e raggio $\bar{r}$.

Nel passo finale vedremo che dall'ultima identità segue che la metrica su $M\setminus\{p,q\}$ nelle coordinate indotte da Φ è della forma

$$g = dr^2 + \sin^2(\sqrt{k}r) g_{\mathbb{S}^{n-1}_{1/\sqrt{k}}}$$

Ciò ci dirà che $M \setminus \{p,q\}$ è isometrico a $\mathbb{S}^n_{1/\sqrt{k}}$ meno due punti antipodali, per cui esiste un'isometria metrica tra M e $\mathbb{S}^n_{1/\sqrt{k}}$. Non è difficile dimostrare che un'isometria metrica tra varietà Riemanniane è anche un diffeomorfismo, da cui se ne deduce la tesi.

Siamo adesso pronti per affrontare la dimostrazione:

Dimostrazione (Cheng). Ai fini di dimostrare il primo passo, osserviamo che per disuguaglianza triangolare vale la disuguaglianza $r + \tilde{r} \geq \pi/\sqrt{k}$. Supponiamo per assurdo che esista un punto $x \in M$ in cui si abbia la disuguaglianza stretta. Sia $\varepsilon > 0$ tale che

$$r(x) + \tilde{r}(x) = d(p,x) + d(q,x) = \frac{\pi}{\sqrt{k}} + 2\varepsilon$$

Abbiamo

$$0 < \varepsilon = \frac{1}{2}\left(d(p,x) + d(q,x) - \frac{\pi}{\sqrt{k}}\right) \leq \frac{d(p,x)}{2}, \frac{d(q,x)}{2}$$

Poniamo ora

$$r_1 := d(p,x) - \varepsilon \geq \frac{d(p,x)}{2} > 0$$

$$r_2 := d(q,x) - \varepsilon \geq \frac{d(q,x)}{2} > 0$$

che verificano $r_1 + r_2 = \pi/\sqrt{k}$. Vogliamo dimostrare che le palle metriche $B_{r_1}(p)$, $B_{r_2}(q)$, $B_\varepsilon(x)$ sono disgiunte. Le prime due non possono intersecarsi perché altrimenti avrei $\operatorname{diam}(M,g) < \pi/\sqrt{k}$. Supponiamo che esista $y \in B_{r_1}(p) \cap B_\varepsilon(x)$, allora avremmo

$$r_1 + \varepsilon = d(p,x) \leq d(p,y) + d(y,x) < r_1 + \varepsilon$$

che è assurdo. Analogamente si mostra che $B_{r_2}(q) \cap B_\varepsilon(q) = \emptyset$. Ne deduciamo allora la seguente disuguaglianza

$$\begin{aligned}
1 = \frac{\operatorname{Vol}(M)}{\operatorname{Vol}(M)} &\geq \frac{\operatorname{Vol}(B_{r_1}(p)) + \operatorname{Vol}(B_{r_2}(q)) + \operatorname{Vol}(B_\varepsilon(x))}{\operatorname{Vol}(M)} \\
&= \frac{\operatorname{Vol}(B_{r_1}(p))}{\operatorname{Vol}(B_{\pi/\sqrt{k}}(p))} + \frac{\operatorname{Vol}(B_{r_2}(q))}{\operatorname{Vol}(B_{\pi/\sqrt{k}}(q))} + \frac{\operatorname{Vol}(B_\varepsilon(x))}{\operatorname{Vol}(B_{\pi/\sqrt{k}}(x))} \\
&\geq \frac{\operatorname{Vol}(B^k_{r_1}) + \operatorname{Vol}(B^k_{r_2}) + \operatorname{Vol}(B^k_\varepsilon)}{\operatorname{Vol}(B^k_{\pi/\sqrt{k}})} \qquad \textit{per il corollario 1.8}
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che, se $r_1 + r_2 = \pi/\sqrt{k}$, la somma dei volumi di due palle di raggi r_1 e r_2 nella sfera standard di raggio $1/\sqrt{k}$ è il volume complessivo della sfera. Deduciamo quindi

$$1 \geq 1 + \frac{\operatorname{Vol}(B^k_\varepsilon)}{\operatorname{Vol}(B^k_{\pi/\sqrt{k}})}$$

che è assurdo. Ne deduciamo quindi che non può esistere un $x \in M$ in cui $r(x) + \tilde{r}(x) > \pi/\sqrt{k}$, ovvero $r(x) + \tilde{r}(x) \equiv \pi/\sqrt{k}$, concludendo il primo passo della dimostrazione.

Vogliamo ora dimostrare che r e $\tilde{r}$ sono lisce su $M \setminus \{p,q\}$. Ci basta mostrare che $M \setminus \{p,q\}$ è contenuto in $M \setminus \operatorname{Cut}_p$ e $M \setminus \operatorname{Cut}_q$. Sia quindi $x \neq p, q$ e siano σ, τ due geodetiche minimizzanti rispettivamente da p a x e da x a q. Se $\sigma * \tau$ è la curva ottenuta giungendo i due cammini, osserviamo

$$L(\sigma * \tau) = L(\sigma) + L(\tau) = r(x) + \tilde{r}(x) = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$$

Quindi $\sigma * \tau$ è una curva regolare a tratti e minimizzante, ma allora è una geodetica liscia, ovvero τ è il prolungamento della geodetica σ, che continua a essere minimizzante sino a q. Abbiamo dimostrato quindi che, per ogni $x \in M \setminus \{p,q\}$ la continuazione di una qualsiasi geodetica minimizzante da p a x passa per q e rimane minimizzante sino a q. Di conseguenza esiste un'unica geodetica minimizzante da p a x ed essa continua a essere minimizzante una volta attraversato x per qualche intervallo di tempo, per cui x non appartiene al Cut_p. Sostituendo p a q nel ragionamento sopra si conclude che $x \notin \operatorname{Cut}_q$, come voluto. Siccome la distanza tra p e q realizza il diametro, ogni geodetica minimizzante che li unisce smette di essere minimizzante una volta attraversato uno dei due punti, per cui vale

$$\operatorname{Cut}_p = \{q\} \qquad\qquad \operatorname{Cut}_q = \{p\}$$

Inoltre quanto detto ci dice anche che q è l'unico punto di M che dista da p $\pi/\sqrt{k}$. Si conclude così la dimostrazione della seconda parte.

La mappa r è quindi liscia su $M \setminus \{p,q\}$ e in tale insieme il suo gradiente ∂_r ha norma costantemente 1. Per quanto detto sopra abbiamo che

$$r(M \setminus \{p,q\}) = \left(0, \frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)$$

e $r(p) = 0$, $r(q) = \pi/\sqrt{k}$. Abbiamo quindi che ogni valore in $(0, \pi/\sqrt{k})$ è regolare. In particolare $\Sigma_0 := r^{-1}(\pi/2\sqrt{k})$ è una sottovarietà di codimensione 1 in M. Definiamo a questo punto la seguente mappa

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \Sigma_0 \times (0, \pi/\sqrt{k}) & \longrightarrow & M \setminus \{p, q\} \\ & (x, t) & \longmapsto & \Theta(x, t - \pi/2\sqrt{k}) \end{array}$$

dove Θ è il flusso associato al campo ∂_r. Vogliamo mostrare che tale applicazione è ben definita ed è un diffeomorfismo. Dato $x \in M \setminus \{p, q\}$, la curva integrale di ∂_r uscente da x non è altro che l'unica geodetica minimale che unisce p a x. Vale inoltre

$$\frac{d}{dt} r(\Theta(x, t)) = g\left(\partial_r|_{\Theta(x,t)} \, , \partial_r|_{\Theta(x,t)} \right) \equiv 1$$

quindi $r(\Theta(x, t)) = t + r(x)$. Questo ci dice in particolare che, se $r(x) = \pi/2\sqrt{k}$, la curva $t \mapsto \Theta(x, t)$ ha $(-\pi/2\sqrt{k}, \pi/2\sqrt{k})$ come intervallo massimale di definizione, ed è contenuta in $M \setminus \{p, q\}$. Abbiamo quindi che Φ è ben definita. Esibiamo ora un'inversa:

$$\begin{array}{rccc} \Psi : & M \setminus \{p, q\} & \longrightarrow & \Sigma_0 \times (0, \pi/\sqrt{k}) \\ & y & \longmapsto & (\Theta(y, \pi/2\sqrt{k} - r(y)), r(y)) \end{array}$$

Per quanto detto $r(\Theta(y, \pi/2\sqrt{k} - r(y))) = r(y) + \pi/2\sqrt{k} - r(y) = \pi/2\sqrt{k}$, quindi Ψ è ben definita. Verifichiamo che è l'inversa di Φ:

$$\begin{aligned} (\Phi \circ \Psi)(y) &= \Phi\left(\Theta\left(y, \pi/2\sqrt{k} - r(y) \right), r(y) \right) \\ &= \Theta(\Theta(y, \pi/2\sqrt{k} - r(y)), r(y) - \pi/2\sqrt{k}) \\ &= \Theta(y, 0) = y \\ (\Psi \circ \Phi)(x, t) &= \Psi(\Theta(x, t - \pi/2\sqrt{k})) \\ &= (\Theta(x, t - \pi/2\sqrt{k} + \pi/2\sqrt{k} - r(x) - t + \pi/2\sqrt{k}), r(x) + t - \pi/2\sqrt{k}) \\ &= (\Theta(x, 0), t) = (x, t) \end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto quindi che tramite Φ $M \setminus \{p, q\}$ è diffeomorfa a $\Sigma_0 \times (0, \pi/\sqrt{k})$. Osserviamo come si traduce r sulla scrittura prodotto:

$$r(\Phi(x, t)) = r(\Theta(x, t - \pi/2\sqrt{k})) = r(x) + t - \pi/2\sqrt{k} = t$$

Quindi $\Phi(\Sigma_0 \times \{t\}) = r^{-1}(t)$ per ogni $t \in (0, \pi/\sqrt{k})$. Siccome per t sufficientemente piccolo $r^{-1}(t)$ è diffeomorfo a S^{n-1}, essendo la sfera geodetica di raggio t e centro p, abbiamo scoperto che $\Sigma_0 \times \{t\} = r^{-1}(t)$ è diffeomorfo a S^{n-1} per ogni $t \in (0, \pi/\sqrt{k})$. In particolare questo ci dice che ∂_r è un campo normale per le sottovarietà $\Phi(\Sigma_0 \times \{t\})$. Con quanto detto sinora siamo in grado di dire che topologicamente M è una sfera n-dimensionale. Il nostro obbiettivo è adesso di ottenere informazioni sulla metrica. Ricordiamo che vale $r + \tilde{r} \equiv \pi/\sqrt{k}$. Abbiamo allora, grazie alla proposizione 1.5:

$$\begin{aligned} (n-1)\frac{\mathrm{sn}_k'(r)}{\mathrm{sn}_k(r)} &\geq \Delta r = -\Delta \tilde{r} \\ &\geq -(n-1)\frac{\mathrm{sn}_k'(\tilde{r})}{\mathrm{sn}_k(\tilde{r})} \\ &= -(n-1)\frac{\mathrm{sn}_k'(\pi/\sqrt{k} - r)}{\mathrm{sn}_k(\pi/\sqrt{k} - r)} \\ &= (n-1)\frac{\mathrm{sn}_k'(r)}{\mathrm{sn}_k(r)} \end{aligned}$$

Dunque sono di fatto tutte uguaglianze, in particolare abbiamo dedotto che

$$\Delta r = (n-1)\frac{\mathrm{sn}_k'(r)}{\mathrm{sn}_k(r)}$$

Osserviamo dunque

$$\begin{aligned}\partial_r\Delta r + \frac{(\Delta r)^2}{n-1} &= (n-1)\frac{\mathrm{sn}_k''(r)\,\mathrm{sn}_k(r) - (\mathrm{sn}_k'(r))^2}{\mathrm{sn}_k^2(r)} + (n-1)\frac{(\mathrm{sn}_k'(r))^2}{\mathrm{sn}_k^2(r)} \\ &= -(n-1)k\end{aligned}$$

Ricordando la disuguaglianza del lemma 1.2, otteniamo allora

$$-(n-1)k = \partial_r\Delta r + \frac{(\Delta r)^2}{n-1} \leq \partial_r\Delta r + |\mathrm{Hess}\, r|^2 = -\mathrm{Ric}(\partial_r, \partial_r) \leq -(n-1)k$$

Dunque anche qui deve valere l'uguaglianza, in particolare abbiamo

$$|\mathrm{Hess}\, r|^2 = \frac{(\Delta r)^2}{n-1}$$

Tale uguaglianza vale, per Cauchy-Schwarz, se e solo se

$$\mathrm{Hess}\, r|_{\partial_r^\perp} = \frac{\Delta r}{n-1}\, g|_{\partial_r^\perp}$$

da cui deduciamo come promesso l'identità

$$\mathrm{Hess}\, r = \frac{\mathrm{sn}_k'(r)}{\mathrm{sn}_k(r)} ds_{n-1}^2$$

A questo punto resta da dimostrare l'ultima parte. Fissiamo ora (V, ψ) una carta su Σ_0 e consideriamo per M la seguente carta indotta

$$(\psi \times id) \circ \Phi^{-1} : \Phi(V \times (0, \pi/\sqrt{k})) \longrightarrow \psi(V) \times (0, \pi/\sqrt{k}) \subset \mathbb{R}^n$$

Indichiamo le componenti di tale carta con $(\vartheta^1, \dots, \vartheta^{n-1}, r)$ (la notazione è coerente perché l'ultima componente per costruzione coincide con la funzione r). Osserviamo alcune proprietà di tali coordinate:

- il campo coordinato $\frac{\partial}{\partial r}$ e ∂_r coincidono puntualmente, perché per costruzione sono vettori tangenti alle curve integrali di ∂_r;
- indicando con ∂_i il campo coordinato $\frac{\partial}{\partial \vartheta^i}$, abbiamo

  $$\begin{aligned} g_{ri} = g(\partial_r, \partial_i) = dr(\partial_i) \equiv 0 \\ g_{rr} = g(\partial_r, \partial_i) \equiv 1 \end{aligned}$$

  Inoltre i ∂_i sono campi coordinati per le ipersuperfici di livello di r.

La relazione del punto precedente ci dice

$$(\mathrm{Hess}\, r)(\partial_i, \partial_j) = \frac{\mathrm{sn}_k'(r)}{\mathrm{sn}_k(r)} g_{ij}(\vartheta, r)$$

D'altra parte vale

$$\begin{aligned}(\mathrm{Hess}\, r)(\partial_i, \partial_j) &= \partial_i\partial_j r - (\nabla_{\partial_i}\partial_j)(r) \\ &= -(\nabla_{\partial_i}\partial_j)(r) && \textit{perché } \partial_i \textit{ lungo sup di liv di } r \\ &= -\Gamma_{ij}^\alpha \partial_\alpha r = -\Gamma_{ij}^r \\ &= -\frac{g^{r\alpha}}{2}(\partial_i g_{\alpha j} + \partial_j g_{\alpha i} - \partial_\alpha g_{ij}) \\ &= \frac{1}{2}\partial_r g_{ij} && \textit{perché } g_{ri} \equiv 0 \textit{ per ogni } i\end{aligned}$$

Abbiamo dunque che i g_{ij} verificano l'equazione

$$2\frac{\mathrm{sn}'_k(r)}{\mathrm{sn}_k(r)} = \frac{\partial_r g_{ij}(\vartheta, r)}{g_{ij}(\vartheta, r)}$$

da cui si deduce facilmente

$$g_{ij}(\vartheta, r) = k\,\mathrm{sn}_k^2(r) g_{ij}(\vartheta, \pi/2\sqrt{k}) = \sin^2(\sqrt{k}r) g_{ij}(\vartheta, \pi/2\sqrt{k})$$

Abbiamo quindi ottenuto la seguente scrittura della metrica su $M \setminus \{p, q\}$

$$g = dr^2 + \sin^2(\sqrt{k}r)\; g|_{\Sigma_0}$$

L'ultima cosa che ci resta da dimostrare è

$$g|_{\Sigma_0} = g_{\mathbb{S}^{n-1}_{1/\sqrt{k}}}$$

Ricordiamo che, per costruzione, $\sin^2(\sqrt{k}r)\; g|_{\Sigma_0}$ è la metrica indotta sulla sfera geodetica di raggio r. Ci viene a questo punto in aiuto il lemma 1.9, per il quale si deve avere

$$k\; g|_{\Sigma_0} = \lim_{r\to 0} \frac{\sin^2(\sqrt{k}r)}{r^2}\; g|_{\Sigma_0} = g_{\mathbb{S}^{n-1}_1}$$

cioè $g|_{\Sigma_0} = g_{\mathbb{S}^{n-1}_{1/\sqrt{k}}}$. $\square$