Gruppo fondamentale in curvatura non positiva

1 Campi di Jacobi e teorema di Cartan-Hadamard

Sia (M, g) una varietà riemanniana completa. Fissiamo una geodetica $\gamma : [0,1] \to M$, con $p = \gamma(0), q = \gamma(1)$. Un *campo di Jacobi* lungo γ è un campo lungo la curva γ che soddisfa

$$\ddot{J} + R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma} = 0.$$

Come già visto, data una variazione geodetica $H(s,t) = \gamma_s(t)$ di $\gamma = \gamma_0(t)$, il campo

$$J(t) = \frac{\partial}{\partial s} H(s,t)\bigg|_{s=0}$$

è un campo di Jacobi lungo γ. Più in generale, poiché H è anche una variazione geodetica di ognuna delle geodetiche γ_s, il campo

$$J(s_0, t) = \frac{\partial}{\partial s} H(s,t)\bigg|_{s=s_0}$$

è di Jacobi lungo γ_{s_0}. D'ora in poi lavoreremo con variazioni geodetiche H tali che $H(s,0) = \gamma(0) = p$ per ogni s. Osserviamo che i campi di Jacobi indotti da questo tipo di variazioni soddisfano $J(s,0) = 0$ per ogni s.

Una prima utilità dei campi di Jacobi è che sono legati al differenziale della mappa esponenziale dalla seguente formula

$$(d\exp_p)_{\dot{\gamma}(0)}(\dot{J}(0)) = J(1),$$

da cui segue che il linearizzato della mappa esponenziale è invertibile in $\dot{\gamma}(0)$ se e solo se i punti p e q sono coniugati.

In particolare, se una varietà riemanniana non ha punti coniugati, la mappa esponenziale $\exp_p : T_pM \to M$ è non singolare e da questo segue, come visto nel corso, che $\exp_p$ è un rivestimento. Questa è l'idea alla base del teorema di Cartan-Hadamard:

Teorema 1. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa di dimensione n. Se* Sec ≤ 0*, allora il rivestimento universale di M è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Dimostriamo che la varietà M non ha punti coniugati, e dalle osservazioni precedenti segue la tesi. Scegliamo $p, q \in M$, sia $\gamma : [0,1] \to M$ una geodetica che li congiunge e J un campo di Jacobi lungo γ con $J(0) = 0$. Consideriamo la funzione $F(t) = \frac{1}{2}|J(t)|^2$ e deriviamola:

$$F'(t) = g(\dot{J}(t), J(t));$$

$$\begin{aligned} F''(t) &= \frac{d}{dt} g(\dot{J}(t), J(t)) = g(\ddot{J}(t), J(t)) + |\dot{J}(t)|^2 \\ &= g(-R(\dot{\gamma}(t), J(t))\dot{\gamma}(t), J(t)) + |\dot{J}(t)|^2 \geq |\dot{J}(t)|^2. \end{aligned}$$

Integrando da 0 a 1, e ricordando $J(0) = 0$:

$$g(\dot{J}(1), J(1)) = g(\dot{J}(0), J(0)) + \int_0^1 |\dot{J}(t)|^2 dt = \int_0^1 |\dot{J}(t)|^2 dt > 0.$$

Dunque, se J non è il campo identicamente nullo, abbiamo $J(1) \neq 0$, ovvero i punti p e q non sono coniugati. $\square$

Più in generale, integrando la disuguaglianza precedente da 0 a un generico valore t, otteniamo la relazione

$$g(\dot{J}(t), J(t)) > 0. \tag{1}$$

2 Campi di Jacobi e funzioni distanza

Sia (M, g) una varietà riemanniana completa semplicemente connessa con $\mathrm{Sec} \leq 0$. Da quanto detto in precedenza segue che la mappa esponenziale calcolata in un qualsiasi punto $p \in M$ è un diffeomorfismo; ovvero, dati due punti, esiste un'unica geodetica che li congiunge. Dunque la funzione distanza $d_p(x) = d(p, x)$ è differenziabile su $M \setminus \{p\}$, da cui segue che la funzione:

$$f_p(x) = \frac{1}{2}(d_p(x))^2$$

è differenziabile su tutto M.

Sia $\gamma : [0, 1] \to M$ una geodetica con $\gamma(0) = p, \gamma(1) = q$, sia $H(s, t) = \gamma_s(t)$ una variazione geodetica di γ, sia $\bar{\sigma}(s) = H(s, 1)$, sia $J(t)$ il campo di Jacobi lungo $\gamma(t)$ indotto da H e più in generale $J(s, t)$ il campo di Jacobi lungo $\gamma_s(t)$ indotto da H. Fissiamo un punto $p \in M$ e vediamo come i campi di Jacobi si legano alla funzione $f = f_p$.

Osservando che γ_s è la geodetica che realizza la distanza tra i punti p e $\gamma_s(1)$ abbiamo:

$$f(\bar{\sigma}(s)) = f(\gamma_s(1)) = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 |\dot{\gamma}_s(t)| dt\right)^2 = \frac{1}{2}\int_0^1 |\dot{\gamma}_s(t)|^2 dt = E(\gamma_s).$$

Adesso, utilizzando la prima formula di variazione per lunghezza d'arco (e ricordando che $J(s, 0) = 0$ e che γ_s è una geodetica per ogni s):

$$df(J(s_0, 1)) = \frac{\partial}{\partial s} f(\bar{\sigma}(s))\bigg|_{s=s_0} = \frac{\partial}{\partial s} E(\gamma_s)\bigg|_{s=s_0} = g(J(s_0, 1), \dot{\gamma}_{s_0}(1)).$$

Dalla relazione

$$df(X) = g(X, \nabla f), \quad \forall X \in \Gamma(TM),$$

segue, per l'arbitrarietà di $J(s_0, 1)$ (poiché p e $\bar{\sigma}(s_0)$ non sono coniugati), che

$$\nabla f(\bar{\sigma}(s)) = \dot{\gamma}_s(1).$$

Siamo ora pronti a calcolare l'hessiano di f, ovvero la quantità definita da

$$\nabla^2 f(X,Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(TM).$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(J(1),J(1)) = g(\nabla_{J(1)}\nabla f, J(1)) &= g(\overline{D}_{\frac{\partial}{\partial s}}\overline{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\gamma_s(t), J(s,t))\Big|_{s=0,t=1} \\
&= g(\overline{D}_{\frac{\partial}{\partial t}}\overline{D}_{\frac{\partial}{\partial s}}H(s,t), J(s,t))\Big|_{s=0,t=1} \\
&= g(\dot{J}(s,t), J(s,t))\Big|_{s=0,t=1},
\end{aligned}$$

ovvero

$$\nabla^2 f(J(1),J(1)) = g(\dot{J}(1), J(1)), \tag{2}$$

da cui, ricordando la disuguaglianza (1) e osservando che $J(1)$ è un vettore arbitrario di T_qM, abbiamo

$$\nabla^2 f(X,X) > 0, \quad \forall X \in \Gamma(TM). \tag{3}$$

3 Convessità di f e legge dei coseni

Sia ancora (M,g) una varietà riemanniana completa semplicemente connessa con $\mathrm{Sec} \leq 0$. Utilizziamo i conti precedenti per dimostrare due risultati che ci saranno utili in seguito.

Fissiamo un punto $p \in M$ e sia $f = f_p$ la funzione distanza modificata definita nella sezione precedente.

Proposizione 2. *f è strettamente convessa, i.e., per ogni geodetica σ di M, la funzione reale $\varphi = f \circ \sigma$ è strettamente convessa.*

Dimostrazione. Sia σ una geodetica e $\varphi = f \circ \sigma$.

$$\varphi'(t) = df(\dot{\sigma}(t)) = g\left(\dot{\sigma}(t), \nabla f(\sigma(t))\right)$$

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= g\big(\nabla_{\dot{\sigma}(t)}\dot{\sigma}(t), \nabla f(\sigma(t))\big) + g\big(\dot{\sigma}(t), \nabla_{\dot{\sigma}(t)}\nabla f(\sigma(t))\big) \\
&= g\big(\nabla_{\dot{\sigma}(t)}\nabla f(\sigma(t)), \dot{\sigma}(t)\big) = \nabla^2 f(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)).
\end{aligned}$$

Abbiamo ottenuto:

$$\varphi''(t) = \nabla^2 f(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) \tag{4}$$

e dalla proprietà (3) segue la tesi. □

Nota 3. Le funzioni convesse giocano un ruolo importante nello studio delle varietà in curvatura non positiva. Per un trattamento più approfondito si veda [1].

Prima di dimostrare il secondo risultato che ci interessa, abbiamo bisogno di raffinare la proposizione precedente:

Lemma 4. Per ogni geodetica σ parametrizzata in lunghezza d'arco di M, posto $\varphi = f \circ \sigma$, vale: $\varphi''(t) \geq 1$.

Dimostrazione. Ci basta dimostrare, con le notazioni della Sezione 2, che

$$g(\dot{J}(1), J(1)) \geq g(J(1), J(1)) \tag{5}$$

per ogni campo di Jacobi J non identicamente nullo con $J(0) = 0$. Infatti, combinando le formule (5) e (2) si ottiene

$$\nabla^2 f(X, X) \geq g(X, X), \quad \forall X \in \Gamma(TM)$$

da cui, utilizzando l'uguaglianza (4):

$$\varphi''(t) \geq g(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) = 1.$$

Per dimostrare la disuguaglianza (5), consideriamo la funzione

$$\lambda(t) = \frac{g(\dot{J}(t), J(t))}{|J(t)|^2},$$

che è ben definita e positiva per ogni $t > 0$, come segue facilmente dalla formula (1). Inoltre, ricordando il teorema di de l'Hôpital

$$\begin{aligned}\lim_{t \to 0^+} \frac{g(\dot{J}(t), J(t))}{|J(t)|^2} &= \lim_{t \to 0^+} \frac{g(\ddot{J}(t), J(t)) + |\dot{J}(t)|^2}{2g(\dot{J}(t), J(t))} \\ &\geq \lim_{t \to 0^+} \frac{|\dot{J}(t)|^2}{2g(\dot{J}(t), J(t))} = +\infty,\end{aligned}$$

dunque $\lambda(t) \to +\infty$ quando $t \to 0$. Derivando (e utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz):

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}(t) &= \frac{(g(\ddot{J}, J) + |\dot{J}|^2)|J|^2 - 2(g(\dot{J}, J))^2}{|J|^4} \geq \frac{|\dot{J}|^2|J|^2 - 2(g(\dot{J}, J))^2}{|J|^4} \\ &\geq \frac{(g(\dot{J}, J))^2 - 2(g(\dot{J}, J))^2}{|J|^4} = -\frac{(g(\dot{J}, J))^2}{|J|^4} = -(\lambda(t))^2.\end{aligned}$$

Dunque λ soddisfa:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} + 1 \geq 0.$$

Integrando da 0 a 1:

$$0 \leq -(\lambda(t))^{-1}\Big|_0^1 + 1 = -(\lambda(1))^{-1} + 1 = -\frac{|J(1)|^2}{g(\dot{J}(1), J(1))} + 1$$

da cui, ricordando che $g(\dot{J}(1), J(1)) > 0$ per la formula (1), segue la tesi. $\square$

Siamo ora pronti per dimostrare la seconda proprietà di cui avremo bisogno.

Proposizione 5 (Legge dei coseni)**.** *Dato un triangolo T di lati a, b, c e angoli opposti α, β, γ, vale:*

$$c^2 \geq a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

In particolare $\alpha + \beta + \gamma \leq \pi$.

Dimostrazione. Sia $\sigma : [0, a] \to M$ il lato di T di lunghezza a, e sia $p \in M$ il vertice di T da cui non passa σ. Posto $\varphi = f_p \circ \sigma$, abbiamo

$$\varphi(0) = \frac{b^2}{2}; \qquad \varphi(a) = \frac{c^2}{2}; \qquad \varphi'(0) = -b\cos\gamma.$$

Integrando la disequazione $\varphi''(t) \geq 1$ data dal lemma precedente, otteniamo $\varphi'(t) - \varphi'(0) \geq t$, ovvero $\varphi'(t) \geq t - b\cos\gamma$.

Integrando di nuovo da 0 ad a:

$$\frac{a^2}{2} - ab\cos\gamma \leq \varphi(a) - \varphi(0) = \frac{c^2}{2} - \frac{b^2}{2}$$

da cui la tesi.

Per dimostrare che la somma degli angoli interni è minore o uguale a π, consideriamo il triangolo T' di lati a, b, c e angoli α', β', γ' sul piano euclideo. Allora

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \leq c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma',$$

da cui $\cos\gamma' \leq \cos\gamma$, ovvero $\gamma \leq \gamma'$. Lo stesso vale per gli altri angoli, dunque

$$\alpha + \beta + \gamma \leq \alpha' + \beta' + \gamma' = \pi \qquad \square$$

In particolare, se la curvatura sezionale è strettamente negativa, la somma degli angoli interni di un triangolo è strettamente minore di π, da cui segue facilmente che *la somma degli angoli interni di un quadrilatero è strettamente minore di* 2π. Questa è in effetti l'unica proprietà di cui avremo bisogno in seguito.

4 Il teorema di Cartan

Osserviamo che il massimo di un insieme finito di funzioni (strettamente) convesse è ancora una funzione (strettamente) convessa (si deve dimostrare che la funzione ristretta alle geodetiche è convessa, ovvero basta dimostrare questa proprietà per funzioni di una variabile reale, e questo è un semplice esercizio).

Siano adesso $p_1, \ldots, p_k \in M$ e consideriamo la funzione strettamente convessa

$$F(x) = \max\{f_{p_1}(x), \ldots, f_{p_k}(x)\}.$$

Osserviamo che questa funzione ammette minimo: è chiaro che il minimo di F, calcolato in una palla (compatta) abbastanza grande da contenere tutti i punti $p_1, \dots, p_k$, è anche il minimo globale. Inoltre il minimo è unico: se per assurdo ci fossero due minimi, per via della stretta convessità di F, nei punti interni alla geodetica che li congiunge il valore della funzione sarebbe minore e questo sarebbe assurdo.

L'unico minimo della funzione F è detto *centro di massa* L^∞ dei punti $p_1, \dots, p_k$.

Teorema 6. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa semplicemente connessa con* $\mathrm{Sec} \leq 0$. *Ogni isometria di M di ordine finito ha un punto fisso.*

Dimostrazione. L'idea è quella di dimostrare che il centro di massa L^∞ di un'orbita è un punto fisso.

Sia α un'isometria di ordine $k < +\infty$ e sia p un punto di M. Sia q il centro di massa L^∞ dell'orbita $p, \alpha(p), \dots, \alpha^{k-1}(p)$, ovvero q è il minimo della funzione

$$F(x) = \max\{f_p(x), \dots, f_{\alpha^{k-1}(p)}(x)\} = \frac{1}{2}\Big(\max\{d(p, x), \dots, d(\alpha^{k-1}(p), x)\}\Big)^2$$

Vediamo adesso che $F(\alpha(q)) = F(q)$, da cui segue che anche $\alpha(q)$ è un minimo, da cui (per l'unicità del minimo) $q = \alpha(q)$:

$$\begin{aligned} F(\alpha(q)) &= \frac{1}{2}\Big(\max\{d(p, \alpha(q)), d(\alpha(p), \alpha(q)) \dots, d(\alpha^{k-1}(p), \alpha(q))\}\Big)^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big(\max\{d(\alpha^{k-1}(p), q), d(p, q) \dots, d(\alpha^{k-2}(p), q)\}\Big)^2 \\ &= \frac{1}{2}\Big(\max\{d(p, q), d(\alpha(p), q) \dots, d(\alpha^{k-1}(p), q)\}\Big)^2 = F(q). \end{aligned}$$

Nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato il fatto che α è un'isometria e dunque conserva le distanze; nella terza uguaglianza abbiamo semplicemente riordinato i termini. □

Corollario 7. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa con* $\mathrm{Sec} \leq 0$. *Il gruppo fondamentale $\pi_1(M)$ non ha elementi di ordine finito.*

Dimostrazione. Vediamo $\pi_1(M)$ come il gruppo degli automorfismi del rivestimento universale con l'operazione di composizione. Gli automorfismi (esclusa l'identità) non hanno punti fissi, dunque per il teorema di Cartan non possono avere ordine finito. □

5 Il teorema di Preissmann

Sia (M, g) una varietà riemanniana completa *compatta* con $\mathrm{Sec} \leq 0$. Un *asse* di un automorfismo α (non banale) del rivestimento universale di M è una geodetica σ invariante per α, ovvero tale che $\alpha(\sigma) = \sigma$. L'automorfismo α manda geodetiche in geodetiche, dunque se σ è un asse di α vale $\alpha(\sigma(t)) = \sigma(t + a)$ con $a \in \mathbb{R}$ costante diversa da zero (perché α non ha punti fissi). Osserviamo che non può essere $\alpha(\sigma(t)) = \sigma(-t + a)$, perché in questo modo il punto $\sigma(\frac{a}{2})$ sarebbe un punto fisso. La costante a è detta *periodo* dell'asse σ.

Proposizione 8. *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana completa compatta con* $\mathrm{Sec} \leq 0$. *Ogni automorfismo del rivestimento universale ha un asse.*

Dimostrazione. Sia α un automorfismo del rivestimento e definiamo la *funzione di spostamento*

$$\delta_\alpha : x \mapsto d(x, \alpha(x)) : \tilde{M} \to \mathbb{R}^+$$

dove abbiamo indicato con $\tilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ il rivestimento universale di M. Poiché $\tilde{M}$ è semplicemente connessa, c'è un'unica geodetica σ che connette i punti x e $\alpha(x)$. Questa si proietta ad un loop γ su M, lungo quanto σ e passante per il punto $y = \pi(x)$. Se scegliamo ora un altro punto x' con $\pi(x') = y$, la geodetica che connette i punti x' e $\alpha(x')$ si proietta ancora su γ, dunque $\delta_\alpha(x') = \delta_\alpha(x)$. Quindi la mappa δ_α si proietta ad una mappa continua

$$\bar{\delta}_\alpha : M \to \mathbb{R}^+.$$

Questa mappa ammette minimo perché M è compatta; inoltre

$$\bar{\delta}_\alpha(y) \geq 2\mathrm{inj}_y \geq 2\mathrm{inj}_M > 0,$$

dunque questo minimo è positivo e realizzato in un punto $q \in M$. Sia $p \in \tilde{M}$ un punto nella fibra di q, sia σ la geodetica parametrizzata per lunghezza d'arco da p ad $\alpha(p)$ e γ la proiezione di σ su M. Il loop γ è il più corto che rappresenta l'elemento $[\alpha] \in \pi_1(M)$: se ce ne fosse uno più corto, sui punti di quel loop la mappa $\bar{\delta}_\alpha$ assumerebbe valori più piccoli di $\bar{\delta}_\alpha(q)$, contro l'ipotesi che q realizzi il minimo. Inoltre il minimo di $\bar{\delta}_\alpha$ è realizzato da tutti i punti del loop γ: sia infatti $y = \gamma(s) = \pi(\sigma(s))$ e consideriamo la curva $\sigma' : [0, \bar{\delta}_\alpha(y)] \to \tilde{M}$

$$\sigma'(t) = \begin{cases} \sigma(t + s), & \text{se } t \in [0, \bar{\delta}_\alpha(y) - s] \\ \alpha(\sigma(t + s - \bar{\delta}_\alpha(y))), & \text{se } t \in [\bar{\delta}_\alpha(y) - s, \bar{\delta}_\alpha(y)] \end{cases}.$$

Poiché σ' è lunga $\bar{\delta}_\alpha(p)$ e va da y ad $\alpha(y)$, abbiamo

$$\bar{\delta}_\alpha(y) \leq \bar{\delta}_\alpha(p).$$

Ma p è il minimo, dunque vale l'uguaglianza e σ' è una geodetica. Inoltre, σ' prolunga σ. Da questo si conclude che la curva $\cup_{k \in \mathbb{Z}} \alpha^k(\sigma)$ è una geodetica, ed è chiaramente un asse di α (di periodo $\min \bar{\delta}_\alpha$). $\square$

In generale possono esistere più assi (ognuno con periodo in modulo $\geq \min \bar{\delta}_\alpha \geq 2\mathrm{inj}_M$). Vale questo forte risultato, che non dimostriamo, perché non ci servirà:

Teorema 9 (Prop. 5.1 e Prop. 6.7 di [3])**.** *Sia α una isometria di una varietà (M,g) completa semplicemente connessa con* $\mathrm{Sec} \leq 0$*, e supponiamo esistano due assi σ, σ' di α. A meno di invertire l'orientazione di σ', le geodetiche σ e σ' sono il bordo di una striscia piatta, ovvero esiste un embedding isometrico totalmente geodetico*

$$S : \mathbb{R} \times [0,1] \to M$$

con $S(t,0) = \sigma(t), S(t,1) = \sigma'(t)$. In particolare, tutte le geodetiche $\sigma_u(t) = S(t,u)$ sono assi di α e tutti gli assi hanno lo stesso periodo (a meno del segno).

Se assumiamo l'ipotesi di essere in curvatura strettamente negativa, abbiamo l'unicità dell'asse:

Proposizione 10. *Sia (M,g) una varietà riemanniana completa compatta con* $\mathrm{Sec} < 0$*. Allora ogni automorfismo del rivestimento universale ha un unico asse.*

Dimostrazione. La dimostrazione è immediata assumendo valido il Teorema 9. Vediamo una dimostrazione alternativa che sfrutta solo risultati già dimostrati in precedenza.

Siano per assurdo σ e σ' due assi di un automorfismo α. Se σ e σ' si incontrassero in un punto p, allora si incontrerebbero anche nel punto $\alpha(p)$ e dunque coinciderebbero (per via dell'unicità della geodetica che congiunge due punti).

Dunque σ e σ' devono essere disgiunti. Consideriamo due punti $p \in \sigma$ e $q \in \sigma'$, e consideriamo il quadrilatero Q di vertici $p, q, \alpha(p), \alpha(q)$. Sfruttando il fatto che α conserva gli angoli e lascia invariati σ e σ', è immediato verificare che la somma degli angoli interni del quadrilatero Q è 2π. Questo è assurdo, in quanto contraddice quanto detto al termine della Sezione 3. $\square$

Teorema 11 (Preissmann)**.** *Sia (M,g) una varietà riemanniana completa compatta con* $\mathrm{Sec} < 0$*. Allora ogni sottogruppo abeliano di $\pi_1(M)$ è ciclico.*

Dimostrazione. Siano $\alpha, \beta \in \pi_1(M)$ e supponiamo che il sottogruppo $A = \langle \alpha, \beta \rangle \subset \pi_1(M)$ sia abeliano. Se σ è l'asse di α, sfruttando il fatto che α e β commutano, otteniamo:

$$\alpha(\beta(\sigma)) = \beta(\alpha(\sigma)) = \beta(\sigma).$$

Dunque, dall'unicità dell'asse, segue $\beta(\sigma) = \sigma$; quindi tutti gli elementi del sottogruppo A hanno lo stesso asse.

Da questo segue che la mappa $f : A \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni elemento di A il suo periodo è un omomorfismo di gruppi. Inoltre f è iniettiva: dati due elementi $\rho, \theta \in A$, se $f(\rho) = f(\theta)$ allora $\rho\theta^{-1}$ ha periodo 0 e dunque è l'identità, da cui $\rho = \theta$.

Dunque $f(A)$ è un sottogruppo di $\mathbb{R}$ isomorfo ad A. Si osservi che i sottogruppi di $\mathbb{R}$ possono essere solo ciclici o densi, e $f(A)$ non può essere denso in quanto il periodo di ogni elemento di A (tranne l'identità) è in modulo maggiore o uguale a $2\mathrm{inj}_M > 0$. □

Corollario 12. *Nessun prodotto compatto $M \times N$ ammette una metrica con* $\mathrm{Sec} < 0$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $\mathrm{Sec} < 0$. Se M e N non sono semplicemente connesse, consideriamo elementi $\alpha \in \pi_1(M), \beta \in \pi_1(N)$. Per il teorema di Cartan, i sottogruppi generati da α e β sono isomorfi a $\mathbb{Z}$, dunque il sottogruppo $\langle \alpha, \beta \rangle \in \pi_1(M \times N)$ è isomorfo a $\mathbb{Z}^2$ e questo contraddice il teorema di Preissmann.

Dunque una delle due varietà, ad esempio M, è semplicemente connessa. Ma allora, per il teorema di Cartan-Hadamard, M è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$ e dunque non è compatta. □

La dimostrazione del teorema di Preissmann si basa su considerazioni esclusivamente geometriche. Con un maggiore lavoro algebrico, si può dimostrare la seguente generalizzazione, nota come *teorema del toro piatto.*

Teorema 13 (Teo. 10.3.1 di [2])**.** *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa compatta con* $\mathrm{Sec} \leq 0$. *Sia $A \subset \pi_1(M)$ un sottogruppo abeliano libero di rango $k \geq 2$. Allora il rivestimento universale $\tilde{M}$ contiene una sottovarietà N piatta totalmente geodetica invariante per A, e tale che N/A è compatta. In particolare, M ammette un'immersione isometrica di un k-toro $T^k \cong N/A$ piatto totalmente geodetico.*

Riferimenti bibliografici

[1] R. L. Bishop, B. O'Neill, *Manifolds of negative curvature.* Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 145, 1969.

[2] B. Eberlein, *Geometry of nonpositively curved manifolds.* Chicago Lectures in Mathematics, 1997.

[3] B. Eberlein, B. O'Neill, *Visibility manifolds.* Pacific Journal of Mathematics, Vol. 46, No. 1, 1973.