Un teorema di classificazione per superfici minimali stabili

Stefano Gioffrè

Lo scopo del seguente seminario è dare un teorema di classificazione per le superfici minime su 3-varietà che hanno la proprietà di minimizzare il funzionale d'area anche al second'ordine. Tale proprietà viene detta stabilità della superficie, e può essere espressa analiticamente mediante una disuguaglianza variazionale che permette di trasportare lo studio della minimalità da un punto di vista geometrico ad uno più analitico, riducendo questo alla determinazione del segno degli autovalori di un operatore ellittico. Il seminario è diviso in quattro sezioni. Nella prima sezione sono fissate le notazioni e vengono richiamati alcuni fatti sulle ipersuperfici, focalizzando successivamente l'attenzione al caso di superfici su 3-varietà. La seconda sezione consiste nell'esprimere analiticamente le condizioni di minimalità e stabilità di una superficie, arrivando a definire l'operatore di stabilità di una superficie. La terza sezione consiste nello studio analitico di tale operatore, diagonalizzando lo stesso e dando una caratterizzazione variazionale del suo primo autovalore. Il teorema di classificazione viene quindi enunciato e dimostrato nella quarta sezione.

1 Notazioni e preliminari

1.1 Ipersuperfici

Siano (M^n, g) una varietà riemanniana, e Σ^{n-1} una varietà liscia. Supporremo nel seminario che entrambe le varietà siano connesse, e che Σ sia orientabile.

Definizione 1. Definiamo $\varphi_0 \colon \Sigma \longrightarrow M$ una ipersuperficie se φ è un embedding. Di tale ipersuperficie poniamo Σ_0 immagine di Σ, che risulta essere una sottovarietà immersa.

Nel seguito del seminario considereremo sempre lo spazio dei campi vettoriali $\Gamma(T\Sigma_0)$ come immerso nello spazio $\Gamma(TM)$. La metrica di M induce in maniera naturale delle metriche su Σ_0 e su Σ nel seguente modo: su Σ_0 si considera semplicemente la restrizione della metrica, definita da

$$g|_{\Sigma_0}(U,V)\big|_p := g(U,V)|_p \text{ per ogni } U,V \text{ in } T_p\Sigma_0$$

Su Σ consideriamo invece la metrica pullback, definita da

$$g^0(X,Y)\big|_p := g(d\varphi[X], d\varphi[Y])|_{\varphi(p)} \text{ per ogni } X,Y \text{ in } T_p\Sigma$$

Fissate su Σ delle coordinate $x^1, \ldots, x^{n-1}$ consideriamo i vettori $\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^{n-1}}$ e le loro immagini $\frac{\partial}{\partial \varphi_0^i} := d\varphi_0\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right]$. In queste notazioni, è immediato constatare che vale l'uguaglianza

$$g^0_{ij}\big|_p = g|_{\Sigma_0}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_0^i}, \frac{\partial}{\partial\varphi_0^j}\right)\Bigg|_{\varphi(p)} =: g_{ij}|_{\Sigma_0} \text{ per ogni } p\in\Sigma$$

che rende $\varphi_0\colon (\Sigma, g^0) \longrightarrow (\Sigma_0, g|_{\Sigma_0})$ un'isometria e permette l'abuso di notazione (costante del seminario) di identificare le metriche per semplificare i calcoli. Un altro abuso di notazione che sarà necessario nel seguito è l'identificare campi X in $\Gamma(\varphi_0^* TM)$ con i campi $X|_{\varphi_o^{-1}}$ in $\Gamma(TM)$.
Si può dimostrare che la connessione di Levi Civita di $(\Sigma_0, g\; g|_{\Sigma_0})$ ammette l'espressione

$$\nabla^0_X Y = \nabla_X Y - (\nabla_X Y, \nu)$$

dove ν indica la normale esterna all'ipersuperficie.

Definizione 2. Nelle notazioni precedenti, definiamo la seconda forma fondamentale (scalare) di Σ_0 come

$$h\colon \Gamma(T\Sigma_0)^2 \longrightarrow C^\infty(\Sigma_0),\; h(X,Y) := -(\nabla_X Y, \nu)$$

Notiamo che in base alla definizione, si hanno le espressioni $\nabla^0_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)\nu$, $h(X,Y) = (Y, \nabla_X \nu)$. La seconda forma fondamentale permette una più comoda scrittura del tensore di Riemann di Σ_0.

Teorema 3 (Equazione di Gauß)**.** Siano X, Y, Z, W in $T_p\Sigma_0$. Indicando con Riem^0 il tensore di Riemann di Σ_0, vale l'uguaglianza

$$\begin{aligned}\mathrm{Riem}^0(X,Y,Z,W) = \mathrm{Riem}(X,Y,Z,W) + h(X,Z)h(Y,W)+ \\ - h(X,W)h(Y,Z)\end{aligned} \tag{1}$$

Dimostrazione. È un semplice calcolo. Ricordando che (Z,ν) per ogni Z in $T_p\Sigma_0$ si ha:

$$\begin{aligned}\mathrm{Riem}^0(X,Y,Z,W) &= (\nabla^0_Y\nabla^0_X Z - \nabla^0_X\nabla^0_Y Z - \nabla_{[Y,X]}Z, W) \\ &= (\nabla_Y\nabla^0_X + h(\nabla^0_X Z, Y)\nu - \nabla_X\nabla^0_Y Z, W)+ \\ &+ (-h(\nabla^0_Y Z, X)\nu - \nabla_{[Y,X]}Z, W) \\ &= (\nabla_Y(\nabla_X Z + h(X,Z)\nu) - \nabla_X(\nabla_Y Z + h(Y,Z)\nu), W) \\ &= (R(X,Y)Z, W) + h(X,Z)h(Y,W) - h(X,W)h(Y,Z)\end{aligned}$$

e la tesi segue immediatamente. □

1.2 La teoria in dimensione 2

Lo studio delle ipersuperfici in dimensione 2 (o più semplicemente, superfici) è un argomento storico della geometria. Richiamiamo in questa sezione alcuni fatti sulle superfici in dimensione 2 che saranno necessari per la classificazione successiva. Proveremo in particolare che una superficie Riemanniana ha in realtà una struttura più ricca, che permette di avere informazioni sul suo rivestimento universale e sulla sua metrica.

Proposizione 4. Sia (Σ^2, g) una superficie Riemanniana, ossia una 2-varietà riemanniana. Allora Σ ammette un atlante (numerabile) isotermo, ossia un atlante $\mathcal{A} = ((U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ tale che la metrica in carta ammetta la scrittura $g = \mu_\alpha\delta$, con δ metrica piatta.

Dimostrazione. Per paracompattezza è sufficiente provare la tesi localmente. Fissato un punto p, in virtù del teorema d'uniformizzazione e della decomposizione ortogonale del tensore di Riemann in dimensione 2 è sufficente provare l'esistenza di una metrica conforme $\tilde{g} = e^{2\varphi} g$ tale che $\mathrm{R}_{\tilde{g}} = 0$. Dalle equazioni per i cambi conformi ricaviamo l'espressione del curvatura:

$$\mathrm{R}_{\tilde{g}} = e^{-2\varphi}(\mathrm{R} - 2\Delta_g \varphi)$$

e quindi cercare una curvatura conformalmente nulla è equivalente a chiedere la risolubilità dell'equazione $2\Delta_g \varphi = \mathrm{R}_g$, e la tesi segue banalmente. $\square$

Proviamo che la struttura Riemanniana di una superficie è più ricca in dimensione bassa.

Definizione 5. Sia Σ una 2-varietà. Diciamo che Σ è una superficie di Riemann se ammette un atlante $\mathcal{A} = (U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ i cui cambi di carta sono olomorfi.

Teorema 6. Sia (Σ, g) una superficie Riemanniana orientabile. Allora Σ ammette una struttura di superficie di Riemann compatibile con la struttura differenziabile.

Dimostrazione. Dalla proposizione precedente Σ ammette un atlante isotermo: proviamo che se l'atlante è anche orientato i suoi cambi di carta sono in realtà funzioni olomorfe. Fissati $(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ carte ad intersezione non vuota (altrimenti la tesi è banale) poniamo $\mathcal{V}_\alpha := \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$, $\mathcal{V}_\beta := \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$. Ci chiediamo quindi se $F_{\alpha\beta} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \colon \mathcal{V}_\alpha \longrightarrow \mathcal{V}_\beta$ sia olomorfa. Per ipotesi la metrica in $U_\alpha \cap U_\beta$ ammette le scritture $g_{\alpha,\beta} = \mu_{\alpha,\beta}\delta$ con $\mu_{\alpha,\beta}$ funzioni lisce e positive. Considerando le metriche pullback mediante $\varphi_{\alpha,\beta}^{-1}$ otteniamo delle metriche $(\varphi_\alpha^{-1})^* g$, $(\varphi_\beta^{-1})^* g$ che rendono le carte delle isometrie locali. In queste notazioni, si ottiene per composizione che $F_{\alpha\beta}$ è un'isometria che preserva l'orientazione ed in particolare soddisfa

$$g_\alpha(X, Y) = g_\beta(dF_{\alpha\beta}[X], dF_{\alpha\beta}[Y]) \text{ per ogni } X, Y \text{ campi in } \mathbb{R}^2$$

dove si è usata con abuso la stessa notazione per le metriche pullback. Dalle espressioni in carta, si evince quindi

$$(dF_{\alpha\beta}[X], dF_{\alpha\beta}[Y])_0 = \frac{\mu_\alpha}{\mu_\beta}(X, Y)_0$$

dove $(\cdot, \cdot)_0$ indica il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^2$. Questo significa che in ogni punto $dF_{\alpha\beta}|_p$ è un multiplo di una matrice ortogonale con determinante unitario, e quindi F soddisfa il sistema Cauchy-Riemann. $\square$

L'importanza della struttura complessa compatibile con quella Riemanniana per superfici orientabili è chiara dal seguente e profondissimo teorema, di cui ovviamente non riportiamo la dimostrazione.

Teorema 7 (Uniformizzazione)**.** Una superficie di Riemann connessa, orientata e metrizzabile è quoziente per l'azione libera di un sottogruppo discreto di isometrie di uno tre spazi modello ($\mathbb{S}^2$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{H}^2$) con le rispettive metriche canoniche.

2 Minimalità e stabilità

Siano (M, g) una varietà Riemanniana, $\varphi_0 \colon \Sigma \longrightarrow M$ un'ipersuperficie. Mantenendo le notazioni precedenti, siano $\Sigma_0 := \varphi_0(\Sigma)$, dove g^0 indica la metrica pullback. Indichiamo con dV e $d\sigma$ le misure canoniche associate a (M, g), (Σ, g_0) rispettivamente, e supponiamo che Σ abbia misura finita. In analogia con il caso delle curve, vogliamo dare una definizione di minimalità per le superfici: procediamo quindi allo stesso modo.

Definizione 8. Diciamo che Σ è un'ipersuperficie minimale se ha variazione prima dell'area nulla, ossia se per ogni mappa regolare $\varphi \colon \Sigma \times [0, T) \longrightarrow M$ soddisfacente le condizioni

1. $\varphi_t := \varphi(\cdot, t)$ è un embedding per ogni t.
2. $\varphi(\cdot, 0) = \varphi_0$.
3. $\varphi_t = \varphi_0$ fuori da un compatto indipendente da t

si ha l'uguaglianza

$$\frac{d}{dt} A(t)\bigg|_{t=0} = 0, \text{ dove } A(t) := \int_\Sigma d\sigma^t$$

con $d\sigma^t$ misura associata alla metrica $g^t := \varphi_t^* g$.
Diciamo che un'ipersuperficie minimale è stabile se la variazione seconda dell'area è non negativa, ossia per ogni mappa regolare φ come sopra si ha la disuguaglianza

$$\frac{d^2}{dt^2} A(t)\bigg|_{t=0} \geq 0$$

Vogliamo dare un'espressione esplicita della variazione prima e seconda del funzionale d'area. Prima di iniziare i calcoli, è utile ricordare una proposizione tecnica, cui non viene riportata la dimostrazione.

Proposizione 9. Siano (M, g) una varietà Riemanniana, N una varietà liscia con o senza bordo, e $H \colon N \longrightarrow M$ una mappa di classe C^∞. Allora H induce una mappa

$$D \colon \Gamma(TN) \times \Gamma(H^*TM) \longrightarrow \Gamma(H^*TM), \ D \colon (X, Y) \longrightarrow D_X Y$$

con le seguenti proprietà:

1. D è bilineare.
2. $D_{fX}(gY) = f[X(g)Y + gD_X Y]$ per ogni f, g in $C^\infty(N)$.
3. Se $\tilde{Y}$ è un campo in $\Gamma(TM)$ che estende localmente Y campo in $\Gamma(H^*TM)$ in un intorno di p in N ossia $\tilde{Y}\Big|_H = Y$ allora vale l'uguaglianza puntuale $D_X H|_p = \nabla_{dH[X]} \tilde{Y}\Big|_{H(p)}$.
   Detti X, Y campi vettoriali in $\Gamma(TN)$ e U, V campi in $\Gamma(H^*TM)$, valgono le identità:

4. $D_X dH[Y] - D_Y dH[X] = dH[X,Y]$.
5. $Xg(U,V) = g(D_X U, V) + g(U, D_X V)$.
6. $D_Y D_X U - D_Y D_X U - D_{[X,Y]} U = \mathrm{R}(dH[X], dH[Y])U$.

Per semplificare i conti, supporremo che la mappa di test φ soddisfi la condizione aggiuntiva

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right|_{(p,t)} = \beta\nu|_{\varphi(p,t)} \tag{2}$$

dove β è una funzione in $C^\infty(M)$, ν_t è la normale esterna all'ipersuperficie $\Sigma_t := \varphi_t(\Sigma)$. Ricordiamo che data (M,g) varietà Riemanniana, la sua forma di volume si esprime in carta come $dV_g = \sqrt{\det g} dx^1 \wedge \cdot \wedge dx^n$. Per poter calcolare la prima variazione è quindi necessario saper calcolare l'evoluzione temporale di g^t.

Lemma 10. Vale la formula:

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 2\beta h^t \tag{3}$$

dove h^t è la seconda forma fondamentale associata all'ipersuperficie Σ_t.

Dimostrazione. Fissiamo preliminarmente le notazioni. Assegnata una carta $x^1, \ldots, x^{n-1}$ in Σ, consideriamo il riferimento locale $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$ in $\Gamma(T\Sigma)$, e poniamo $\frac{\partial}{\partial \varphi^i} := d\varphi\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right]$. Notiamo che queste coordinate permettono la comoda scrittura della metrica g in Σ_t: si ha infatti la scrittura $g = g^t_{ij} d\varphi^i d\varphi^j + d\nu^2$, dove vale l'uguaglianza

$$g^t_{ij}\big|_p := g\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\right)\bigg|_{\varphi_t(p)} = \varphi_t^* g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\bigg|_p$$

Scriviamo infine $\frac{\partial}{\partial T} := d\varphi\left[\frac{\partial}{\partial t}\right]$, in modo tale che valga l'uguaglianza $\frac{\partial}{\partial T} = \beta\nu$. Calcoliamo quindi l'evoluzione in carta, omettendo le dipendenze spaziali e temporali per semplicità:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g_{ij} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\right) \\
&= \left(D_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, D_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\right) \\
&= \left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial T}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial T}\right) \\
&= \left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \beta\nu, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \beta\nu\right) \\
&= \beta\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nu, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\right) + \beta\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nu\right) \\
&= 2\beta h\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\right) =: 2\beta h_{ij}
\end{aligned}$$

□

Possiamo quindi dare un'espressione più esplicita della prima variazione.

Teorema 11. Nelle notazioni precedenti, vale l'uguaglianza

$$\frac{d}{dt}\int_\Sigma d\sigma^t = \int_\Sigma \beta H^t\, d\sigma^t \tag{4}$$

Dimostrazione. A questo punto è sufficiente derivare il determinante. Ponendo $dx := dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}$ si ha

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Sigma d\sigma^t &= \frac{d}{dt}\int_\Sigma \sqrt{\det g}\, dx = \int_\Sigma \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{\det g}\, dx \\
&= \int_\Sigma \frac{1}{2}\sqrt{\det g}\, \mathrm{tr}\Big(g^{-1}\frac{\partial}{\partial t}g\Big)\, dx = \int_\Sigma \frac{1}{2}\sqrt{\det g}\, \mathrm{tr}\big(2g^{-1}\beta h\big)\, dx \\
&= \int_\Sigma \beta g^{ij} h_{ij}\sqrt{\det g}\, dx = \int_\Sigma \beta H^t\, d\sigma^t
\end{aligned}$$

□

Ponendo $f = \beta \circ \varphi$, abbiamo osservato che imporre la minimalità di una superficie Σ equivale ad imporre che l'integrale $\int_\Sigma fH\, d\sigma$ sia nullo per ogni f regolare a supporto compatto: dal lemma fondamentale del calcolo delle variazioni otteniamo quindi che una superficie è minimale se e solo ha ha curvatura media H identicamente nulla. Esplicitiamo ora la variazione seconda. Dal teorema (**??**) si evince la necessità di dover calcolare l'evoluzione temporale della curvatura media. Enunciamo e dimostriamo il seguente lemma:

Lemma 12. La curvatura media evolve secondo la legge seguente:

$$\frac{\partial}{\partial t}H^t = -\Delta^t\beta - \beta(Ric_{\nu\nu} + |h|^2) \tag{5}$$

dove Δ^t denota l'operatore di Laplace associato all'ipersuperficie Σ_t.

Dimostrazione. Calcoliamo preliminarmente $\frac{\partial}{\partial t}h^t_{ij}$: la tesi seguirà subito dopo. Si ha pertanto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}h_{ij} &= -\frac{\partial}{\partial t}\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial\varphi^i}}\frac{\partial}{\partial\varphi^j}, \nu\Big) = -\frac{\partial}{\partial t}\Big(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial\varphi^j}, \nu\Big) \\
&= -\Big(D_{\frac{\partial}{\partial t}}D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial\varphi^j}, \nu\Big) - \Big(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial\varphi^j}, D_{\frac{\partial}{\partial t}}\nu\Big) \\
&= -\,\mathrm{Riem}\Big(\frac{\partial}{\partial\varphi^i}, \nu, \frac{\partial}{\partial\varphi^j}, \nu\Big) - \Big(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}D_{\frac{\partial}{\partial t}}\frac{\partial}{\partial\varphi^j}, \nu\Big) - \Big(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial\varphi^j}, D_{\frac{\partial}{\partial t}}\nu\Big) \\
&= -\,\mathrm{Riem}\Big(\frac{\partial}{\partial\varphi^i}, \nu, \frac{\partial}{\partial\varphi^j}, \nu\Big) - \Big(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}D_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial T}, \nu\Big) - \Big(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial\varphi^j}, D_{\frac{\partial}{\partial t}}\nu\Big)
\end{aligned}$$

Studiamo i termini separatamente.

$$\begin{aligned}
\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial T}, \nu\right) &= \left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \beta\nu, \nu\right) = \left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \varphi^j}\nu + \beta D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nu\right), \nu\right) \\
&= \frac{\partial^2 \beta}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} + \frac{\partial \beta}{\partial \varphi^j}\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nu, \nu\right) + \frac{\partial \beta}{\partial \varphi^i}\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nu, \nu\right) + \\
&+ \left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nu, \nu\right) \\
&= \frac{\partial^2 \beta}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} - \beta\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nu, D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nu\right) \\
&= \frac{\partial^2 \beta}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} - \beta\Gamma^k_{j\nu}\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nu, \frac{\partial}{\partial \varphi^k}\right) \\
&= \frac{\partial^2 \beta}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} - \beta\Gamma^k_{j\nu} h_{ik}
\end{aligned}$$

dove sono state utilizzate le utili identità

$$\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nu, \nu\right) = 0, \quad \left(D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nu, D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \nu\right) = -\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \nu, \nu\right)$$

Esplicitiamo ora $\Gamma^k_{j\nu}$: dalla formula di Levi Civita si evince

$$\Gamma^k_{j\nu} = \frac{g^{ks}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^j} g_{s\nu} + \frac{\partial}{\partial \nu} g_{js} - \frac{\partial}{\partial \varphi^s} g_{k\nu}\right) = \frac{g^{ks}}{2}\frac{\partial}{\partial \nu} g_{js} = g^{ks} h_{js}$$

dove abbiamo utilizzato la scrittura della metrica $g = g_{ij} d\varphi^i d\varphi^j + d\nu^2$. In sintesi abbiamo trovato la formula

$$\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial T}, \nu\right) = \frac{\partial^2 \beta}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} - \beta g^{ks} h_{ik} h_{js}$$

Scriviamo meglio il terzo elemento. Notiamo che se Y è tangente a ν si ha

$$\begin{aligned}
\left(Y, D_{\frac{\partial}{\partial t}} \nu\right) &= -\left(D_{\frac{\partial}{\partial t}} Y, \nu\right) = -\left(D_Y \frac{\partial}{\partial T}, \nu\right) = -(D_Y \beta\nu, \nu) \\
&= -(\nabla_Y \beta\nu, \nu) = -Y(\beta)
\end{aligned}$$

trovando quindi la scrittura $D_{\frac{\partial}{\partial t}\nu} = -\nabla^\Sigma \beta$, e quindi

$$\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j}, D_{\frac{\partial}{\partial t}} \nu\right) = -\Gamma^k_{ij}\frac{\partial \beta}{\partial \varphi^k}$$

Mettendo quanto visto assieme troviamo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} h_{ij} &= -\operatorname{Riem}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \nu, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}, \nu\right) - \left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} D_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial T}, \nu\right) - \left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial \varphi^j}, D_{\frac{\partial}{\partial t}} \nu\right) \\
&= -\operatorname{Riem}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \nu, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}, \nu\right) - \frac{\partial^2 \beta}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} + \beta g^{ks} h_{ik} h_{js} + \Gamma^k_{ij}\frac{\partial \beta}{\partial \varphi^k} \\
&= -\operatorname{Riem}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}, \nu, \frac{\partial}{\partial \varphi^j}, \nu\right) \underbrace{- \frac{\partial^2 \beta}{\partial \varphi^i \partial \varphi^j} + \Gamma^k_{ij}\frac{\partial \beta}{\partial \varphi^k}}_{-\nabla^t_i \nabla^t_j \beta} - \beta g^{ks} h_{ik} h_{js}
\end{aligned}$$

Possiamo quindi finalmente calcolare la derivata della curvatura media. Dall'uguaglianza $g^{ik}g_{kj} = \delta^i_j$ ricaviamo l'ultimo ingrediente necessario:

$$\frac{\partial}{\partial t} g^{ij} = -2\beta g^{il} g^{jk} h_{kl}$$

Calcoliamo l'evoluzione di H.

$$\frac{\partial}{\partial t} H = \frac{\partial}{\partial t} g^{ij} h_{ij} = \underbrace{g^{jk} g^{il} h_{jk} h_{ij}}_{-2\beta|h|^2} - \underbrace{g^{ij} \operatorname{Riem}_{i\nu j\nu}}_{\operatorname{Ric}_{\nu\nu}} - \underbrace{g^{ij} \nabla^t_i \nabla^t_j \beta}_{\Delta^t \beta} + \beta \underbrace{g^{ij} g^{kl} h_{ik} h_{jl}}_{|h|^2}$$

trovando infine la tesi. □

Calcoliamo infine la seconda variazione.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2} \int_\Sigma d\sigma^t &= \frac{d}{dt} \int_\Sigma \beta H^t \, d\sigma^t \\
&= \int_\Sigma \frac{\partial \beta}{\partial t} H^t \, d\sigma^t + \int_\Sigma \beta \frac{\partial}{\partial t} H^t \, d\sigma^t + \int_\Sigma \beta H^t (\beta H^t) \, d\sigma^t \\
&= \int_\Sigma \frac{\partial \beta}{\partial t} H^t \, d\sigma^t + \int_\Sigma \beta^2 H^{t2} \, d\sigma^t - \int_\Sigma \beta \Delta^t \beta + \beta^2 (\operatorname{Ric}_{\nu\nu} + |h|^2) \, d\sigma^t
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che si può dare una scrittura di $\operatorname{Ric}_{\nu\nu}$ in termini delle curvature di Σ e M: tracciando due volte l'equazione (**??**) troviamo la formula

$$\mathrm{R}^\Sigma = R^M - 2 \operatorname{Ric}_{\nu\nu} + H^2 - |h|^2$$

Se implementiamo quest'ultima formula nei calcoli fatti, possiamo riassumere quanto calcolato per dare la seguente definizione di ipersuperficie minimale stabile, equivalente alla precedente nel caso questa abbia area finita.

Definizione 13. Sia $\varphi_0 \colon \Sigma \longrightarrow M$ un'ipersuperficie in (M, g) varietà Riemanniana. Diciamo che Σ è un'ipersuperficie minimale se la curvatura media è nulla, ossia se

$$H = g^{ij} h_{ij} = 0 \tag{6}$$

Diciamo invece che Σ è minimale stabile se è minimale e soddisfa la seguente disuguaglianza:

$$\int_\Sigma |\nabla^\Sigma f|^2 + \frac{1}{2}(R^\Sigma - R^M - |h|^2) f^2 \, d\sigma \geq 0 \text{ per ogni } f \in C^\infty_0(D) \tag{7}$$

per ogni $D \subseteq \Sigma$ è un aperto regolare e limitato.

3 Analisi dell'operatore di stabilità

La seconda definizione permette di dare un significato analitico al concetto di stabilità per ipersuperfici. Se consideriamo infatti l'operatore ellittico $L := -\Delta^\Sigma + \frac{1}{2}(R^\Sigma - R^M - |h|^2)$, possiamo notare come la forma bilineare associata in $H^1_0(D)$ coincida con la quantità integrale che esprime la stabilità. In questa sezione studiamo le proprietà dell'operatore L, che saranno importanti ai fini del teorema di classificazione che vogliamo esporre. Riportiamo quindi senza dimostrazione alcuni risultati preliminari ai fini dello studio successivo.

Teorema 14 (Teoria dell'operatore di Laplace)**.** Sia $D \subseteq \Sigma$ aperto regolare e limitato. Consideriamo il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } D \\ u = 0 & \text{in } \partial D \end{cases}$$

con dato $f \in L^2(D)$. Allora il problema ammette un'unica soluzione $u \in H_0^1(D) \cap H^2(D)$ che soddisfa la stima

$$\|u\|_{2,2} \leq c\|f\|_2 \quad c = c(D)$$

Se inoltre $f \in C^{k,\alpha}(D)$ allora $u \in C^{k+2,\alpha}(D)$ e vale la stessa stima con le norme dei rispettivi spazi di Holder. Inoltre l'operatore $(-\Delta)^{-1} \colon L^2(D) \longrightarrow L^2(D)$ che associa ad una funzione f la soluzione u del problema è un operatore simmetrico, positivo e compatto, quindi diagonalizzabile.

Teorema 15 (Fredholm)**.** Sia X uno spazio di Banach, $T \colon X \longrightarrow X$ un operatore compatto. Allora l'operatore $I - T$ detto operatore di Fredholm ha dimensione del nucleo finita ed uguale alla codimensione dell'immagine. In particolare $I - T$ è iniettivo se e solo se è surgettivo.

Con questi due ingredienti, diagonalizziamo l'operatore di stabilità.

Proposizione 16. Sia $q \in C^\infty(\Sigma)$ una funzione liscia; allora l'operatore $-\Delta + q$ è localmente diagonalizzabile, ossia per ogni aperto limitato e regolare $D \subseteq \Sigma$ esistono una successione crescente $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ di numeri ed una successione di funzioni $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_0^\infty(D)$ che risolvono il problema

$$\begin{cases} -\Delta u + qu = \lambda u & \text{in } D \\ u = 0 & \text{in } \partial D \end{cases}$$

Inoltre $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un sistema Hilbertiano in $L^2(D)$.

Dimostrazione. Notiamo che l'operatore $(-\Delta)^{-1}q \colon f \in L^2(D) \longrightarrow (-\Delta)^{-1}(qf)$ è ben definito e compatto. Consideriamo dunque l'operatore di Fredholm $I + (-\Delta)^{-1}q$ e distinguiamo due casi:

1. $I + (-\Delta)^{-1}q$ è iniettivo
2. $\dim\ker I + (-\Delta)^{-1}q > 0$

Nel primo caso, segue dal teorema di Fredholm che l'operatore è anche surgettivo, e quindi possiamo invertirlo e studiare $(-\Delta + q)^{-1} \colon L^2 \longrightarrow L^2$. Notiamo pertanto come questo sia lineare e simmetrico, e quindi continuo perché definito su tutto lo spazio in virtù del teorema del grafico chiuso. È sufficiente provare esso che è compatto; la tesi segue combinando il teorema spettrale con la teoria di regolarità del laplaciano. Consideriamo quindi le successioni $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata in L^2, e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $H_0^1(D)$ che risolve $-\Delta u_n + qu_n = f_n$ in senso debole. Moltiplicando per u_n ed integrando troviamo la relazione

$$\int_D |\nabla u_n|^2 \, d\sigma = \int_D -qu_n^2 + u_n f_n \, d\sigma$$

Per continuità esiste una costante c per la quale $\|u_n\| \leq c\|f_n\|$. Combinando questo fatto con la disuguaglianza di Holder e la limitatezza di q in D si evince che $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata in $H_0^1(D)$ e la tesi segue dal teorema di Rellich.
Nel secondo caso basta provare che esiste un numero λ per il quale $-\Delta + q + \lambda$ è iniettivo e ricondursi quindi al caso precedente. Se per assurdo ogni λ avesse almeno un autofunzione allora a meno di normalizzazione avremmo trovato una famiglia $(u_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ di norma unitaria ed a due a due ortogonali per una banale verifica diretta: questo contraddice la separabilità di $L^2(D)$ e prova la tesi. □

In analogia con il caso del laplaciano vogliamo dare una caratterizzazione variazionale del primo autovalore di $-\Delta + q$. Richiamiamo quindi l'enunciato della disuguaglianza di Harnack.

Teorema 17 (Harnack)**.** Consideriamo u che soddisfa le condizioni

$$\begin{cases} -Lu \geq 0 & \text{in } D \\ u \geq 0, & u \in H^1_{\text{loc}} \end{cases}$$

con $L = a^{ij}\nabla_i\nabla_j + b^i\nabla_i + c$ operatore strettamente ellittico a coefficienti limitati. Allora per ogni palla B_{4r} contenuta in D vale la stima

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_r} u \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{B_r} u, \quad C = C(L, r) \tag{8}$$

Possiamo ora provare la seguente proposizione.

Proposizione 18. Sia $\lambda_1(D)$ il primo autovalore di $-\Delta + q$ nel dominio D. Vale dunque la seguente caratterizzazione variazionale

$$\lambda_1(D) = \inf\left\{ \int_D |\nabla u|^2 - qu^2 \, d\sigma \;\middle|\; u \in H_0^1(D),\ \int_D u^2 \, d\sigma = 1 \right\} \tag{9}$$

Inoltre $\dim\ker \lambda_1 - (-\Delta + q) = 1$ e l'autofunzione associata ha segno costante in D.

Dimostrazione. La dimostrazione della caratterizzazione è identica a quella della caratterizzazione del primo autovalore del laplaciano e non viene riportata. Notiamo ora che se e raggiunge l'estremo inferiore in (**??**) allora anche $|e|$ lo raggiunge e quindi possiamo supporre $e \geq 0$. Il teorema (**??**) rende la maggiorazione stretta, in quanto l'insieme $\{x \in D \mid e(x) = 0\}$ è aperto e chiuso, quindi deve essere necessariamente vuoto in quanto e soddisfa $\|e\|_2 = 1$. Proviamo ora che la dimensione dell'autospazio associato a λ_1 è 1. Dati dunque e, $\tilde{e}$ autofunzioni per λ_1, consideriamo la combinazione lineare $e + t\tilde{e}$ che al variare di t resta autofunzione: fissato x_0 in D, troviamo quindi un tempo t_0 per il quale si ha $e_1(x_0) + t_0\tilde{e}(x_0) = 0$ e ripetendo il ragionamento precedente $e_1 = -t_0\tilde{e}$, trovando quindi dipendenza lineare. □

Quanto provato sopra ci permette di dare una caratterizzazione alternativa della stabilità: possiamo anche dire che un'ipersuperficie è minimale stabile se ha curvatura media nulla e soddisfa la condizione $\lambda_1^L(D) \geq 0$ per ogni dominio limitato e regolare $D \in \Sigma$, dove $L = -\Delta + \frac{1}{2}(R^\Sigma - R^M - |h|^2)$. Concludiamo la sezione con un'importante proposizione, che verrà utilizzata nel capitolo successivo.

Proposizione 19. Sia Σ una varietà completa, illimitata. Mantenendo la notazione precedente, sono fatti equivalenti:

1. $\lambda_1(D) \geq 0$ per ogni D
2. $\lambda_1(D) > 0$ per ogni D
3. Esiste una funzione positiva $f \in C^\infty(\Sigma)$ che risolve $-\Delta f + qf = 0$

Dimostrazione. 1. $\Rightarrow$ 2. Per illimitatezza esiste una palla B_R per la quale vale l'inclusione $D \Subset B_R$. Banalmente si evince dunque $0 \leq \lambda_1(B_R) \leq \lambda_1(D)$, e per provare la tesi basta dire che la seconda maggiorazione è stretta. Questo è ovvio dopo quanto osservato, perché se valesse l'uguaglianza $e_1(D)$ sarebbe soluzione del problema

$$\begin{cases} -\Delta e_1(D) + qe_1(D) = \lambda_1(B_R)e_1(D) & \text{in } B_R \\ u = 0, & \text{in } \partial B_R \end{cases}$$

e quindi sarebbe di segno costante in B_R, ma per costruzione $e_1(D) = 0$ fuori da D, assurdo.
2. $\Rightarrow$ 3. Dalla positività di $\lambda_1(D)$ si evince che il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u + qu = 0 & \text{in } D \\ u = 0, & \text{in } \partial D \end{cases}$$

ammette solo la soluzione nulla. Ne consegue per Fredholm che $I + (-\lambda)^{-1}q$ è bigettivo. Consideriamo dunque la funzione u_R, unica soluzione (liscia) del problema

$$\begin{cases} -\Delta u_R + qu_R = 0 & \text{in } B_R \\ u = 1, & \text{in } \partial B_R \end{cases}$$

e notiamo che u_R deve essere non negativa, altrimenti ponendo $\Omega_R = \{u_R < 0\}$ avremmo trovato una soluzione non nulla per il problema

$$\begin{cases} -\Delta u_R + qu_R = 0 & \text{in } \Omega_R \\ u = 0, & \text{in } \partial \Omega_R \end{cases}$$

La disuguaglianza di Harnack rende la maggiorazione stretta. Fissiamo x_0 e poniamo $f_R := \frac{u_R}{u_R(x_0)}$, soluzione di $-\Delta u + qu = 0$ soddisfacente $f_R(x_0) = 1$. Fissato $\rho > 0$, osserviamo che per ogni $R > 0$ che soddisfa $4\rho < R$ troviamo la stima

$$\sup_{B_\rho} f_R \leq C \text{ con } C = C(q, n, \rho)$$

È cruciale osservare come la costante C sia indipendente da R. Unendo questo fatto con le stime di Schauder (che continuano a valere) troviamo per argomento diagonale l'esistenza di una funzione f liscia e positiva per la quale $f_R \longrightarrow f$ in $C^{k,\alpha}_{\text{loc}}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (0, 1)$ e quindi la tesi.
3. $\Rightarrow$ 1. Sia f una funzione liscia e positiva che realizza $-\Delta f + qf = 0$. Ponendo $w = \log f$ è immediato constatare che vale l'uguaglianza

$$-\Delta w = -q + |\nabla w|^2$$

Presa una generica $\varphi \in C_0^\infty(D)$, moltiplichiamo per φ^2 ed integriamo in D. Applicando la disuguaglianza di Young con $p = 2$, $q = 2$ troviamo

$$\begin{aligned}\int_D -q\varphi^2 \, d\sigma + \int_D \varphi^2 |\nabla w^2| \, d\sigma &= 2 \int_D \varphi (\nabla\varphi, \nabla w) \, d\sigma \\ &\leq \int_D \varphi^2 |\nabla w|^2 \, d\sigma + \int_D |\nabla\varphi|^2 \, d\sigma\end{aligned}$$

e l'arbitrarietà di φ e D conclude la proposizione. □

4 Il teorema di classificazione

Dopo lunghi preliminari, possiamo finalmente enunciare e dimostrare il teorema preannunciato.

Teorema 20 (Fischer-Colbrie, Schoen)**.** Siano (M^3, g) una 3-varietà completa con curvatura $R^M \geq 0$, e $\varphi_0 \colon \Sigma^2 \longrightarrow M^3$ un'ipersuperficie orientabile, senza bordo, completa e minimale stabile. Distinguiamo due casi:

1. Se Σ è compatta, allora è conformalmente equivalente alla sfera $\mathbb{S}^2$ oppure Σ è un toro piatto completamente geodetico.

2. Se Σ non è compatta, allora è conformalmente equivalente al piano $\mathbb{R}^2$ con la metrica standard o al cilindro piatto $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$

Ricordiamo che due superfici (Σ_1, g_1), (Σ_2, g_2) si dicono conformalmente equivalenti se esiste un diffeomorfismo $F \colon \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ tra le due e le metriche $F^* g_2$, g_1 sono conformi.

Dimostrazione. 1. Per compattezza possiamo considerare la funzione $f = 1$ come funzione test, trovando dalla disuguaglianza (**??**)

$$0 \leq \int_\Sigma R^M + |h|^2 \, d\sigma \leq \int_\Sigma R^\Sigma \, d\sigma = 2\pi\chi(\Sigma)$$

dove abbiamo utilizzato il teorema di Gauß-Bonnet per calcolare il secondo integrale. Qui χ indica ovviamente la caratteristica di Eulero della superficie. Dal teorema di classificazione per superfici di Riemann compatte troviamo quindi che può realizzarsi o $\chi = 2$ o $\chi = 0$. Nel primo caso dal teorema di uniformizzazione segue che Σ è conformalmente equivalente alla sfera. Nel secondo caso troviamo che deve valere l'esistenza di un toro in M va ad implicare che $h = 0$ e $R^M = 0$ in Σ. Dalla prima uguaglianza si evince che il toro è totalmente geodetico in quanto ∇^0 coincide con ∇ nei campi tangenti e le due connessioni inducono quindi le stesse equazioni del trasporto per curve $\gamma \colon I \longrightarrow \Sigma_0$. La seconda uguaglianza permette di scrivere l'operatore di stabilità come $L = -\Delta^\Sigma + \frac{1}{2} R^\Sigma$. Osserviamo pertanto che utilizzando $f = 1$ come test si evince dalla caratterizzazione variazionale del primo autovalore che $\lambda_1(\Sigma) = 0$ e f è un autofunzione, facendo degenerare l'equazione differenziale associata ad L in $R^\Sigma = 0$, che prova la piattezza di Σ.

2. La dimostrazione in questo caso è più ostica. A causa della proposizione (**??**) la stabilità della superficie è equivalente all'esistenza di una funzione liscia

e positiva per la quale si ha $-\Delta^{\Sigma} f + qf = 0$. Essendo Σ una superficie Riemanniana si evince che il suo rivestimento universale Riemanniano $\tilde{\Sigma}$ deve essere conformalmente equivalente a $\mathbb{R}^2$ con la metrica piatta o al disco $\mathbb{B}^2$ con la metrica iperbolica. Proviamo dunque che $\tilde{\Sigma}$ non può essere il disco. Supponiamo dunque che valga $\pi\colon \mathbb{B}^2 \longrightarrow \Sigma$. Essendo π un'isometria locale, l'esistenza di una funzione positiva che soddisfa $-\Delta f + qf = 0$ si solleva nel disco, che dunque soddisfa la condizione $\lambda_1(D) \geq 0$ in ogni dominio regolare e limitato. Proveremo l'esistenza di un raggio R per cui $\lambda_1(B_R) < 0$, trovando quindi l'assurdo. La metrica di Σ trasportata sul disco risulta essere conforme alla metrica standard: definendo tale metrica come g con abuso di notazione, si ha infatti $g_{ij} = \mu\delta_{ij}$ per $\mu > 0$. $(\mathbb{B}^2, g)$ risulta essere inoltre completa per la locale isometria con Σ. Ponendo $\mu = \frac{1}{w^2}$, dalle formule per i cambi conformi troviamo le uguaglianze

$$\Delta_g = w^2\Delta_0, \quad \mathrm{R}_g = 2\Delta_g \log w = \frac{2}{w}\Delta_g w - \frac{1}{w^2}|\nabla_g w|^2$$

Scriviamo in particolare la seconda uguaglianza come

$$-\Delta_g w = -\frac{w}{2}\,\mathrm{R}_g - \frac{1}{w}|\nabla_g w|^2$$

L'idea è di considerare come funzione test la funzione ζw, con ζ cut-off nella palla $B_R \Subset \mathbb{B}^2$; per far ciò è necessaria una considerazione preliminare. Detta $r(q) := d(0, q)$ la distanza dall'origine del disco, notiamo che r è liscia fuori dall'origine: la condizione $H = 0$ in Σ implica $R^{\Sigma} \leq 0$ e quindi $R_g \leq 0$. Siccome in dimensione 2 la curvatura scalare governa il tensore di Riemann, troviamo $\mathrm{Riem}^{\Sigma}, \mathrm{Riem}_g \leq 0$. Essendo il disco semplicemente connesso e la metrica completa dal teorema di Cartan-Hadamard troviamo che $\exp_0\colon T_0\mathbb{B}^2 \longrightarrow \mathbb{B}^2$ è un diffeomorfismo, da cui si evince la considerazione. Consideriamo quindi come cut-off $\zeta = \zeta(r)$, con ζ che soddisfa le seguenti proprietà:

$$\zeta\colon [0, +\infty) \longrightarrow [0, 1], \quad \zeta = \begin{cases} 1, & \text{in } B_r \\ 0, & \text{in } B_R \end{cases} \quad \zeta' \leq \frac{c}{R - r}$$

Utilizziamo ζw come funzione di test. Avendo noi assunto per ipotesi di assurdo $\lambda_1(D) \geq 0$ per ogni D, deve valere

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lambda_1(B_R) \int_{B_R} (\zeta w)^2 \, d\sigma_g \\ &\leq \int_{B_R} |\nabla_g(\zeta w)|^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{R}_g(\zeta w)^2 - \frac{1}{2}(R^M + |h^{\Sigma}|^2)(\zeta w)^2 \, d\sigma_g \\ &\leq \int_{B_R} |\nabla_g(\zeta w)|^2 + \frac{1}{2}\,\mathrm{R}_g(\zeta w)^2 \, d\sigma_g = \int_{B_R} -\zeta w \Delta_g(\zeta w) + \frac{1}{2}\,\mathrm{R}_g(\zeta w)^2 \, d\sigma_g \end{aligned}$$

Sviluppiamo il laplaciano tenendo a mente l'espressione per $\Delta_g w$:

$$\begin{aligned} -\Delta_g(\zeta w) &= -\operatorname{tr}(w\nabla_g^2\zeta + \zeta\nabla_g^2 w + 2\nabla_g w \otimes \nabla_g \zeta) \\ &= -w\Delta_g\zeta - \zeta\Delta_g w + 2(\nabla_g w, \nabla_g \zeta) \\ &= -w\Delta_g\zeta - -\frac{\zeta w}{2}\,\mathrm{R}_g - \frac{\zeta}{w}|\nabla_g w|^2 + \\ &+ 2(\nabla_g w, \nabla_g \zeta) \end{aligned}$$

ed implementandola nella precedente disuguaglianza integrale troviamo

$$
\begin{aligned}
0 &\le \lambda_1(B_R)\int_{B_R}(\zeta w)^2\,d\sigma_g \le \int_{B_R} -\zeta w\Delta_g(\zeta w)+\frac{1}{2}\,\mathrm{R}_g(\zeta w)^2\,d\sigma_g\\
&\le \int_{B_R}\zeta w(-w\Delta_g\zeta-2(\nabla_g\zeta,\nabla_g w)-\zeta\Delta_g w)+\frac{1}{2}(\zeta w)^2\,\mathrm{R}_g\,\,d\sigma_g\\
&= \int_{B_R} -\zeta w^2\Delta_g w-2\zeta w(\nabla_g\zeta,\nabla_g w)+\frac{1}{2}(\zeta w)^2 R_g\,d\sigma_g+\\
&+\int_{B_R}\zeta^2 w\Big(-\frac{1}{2}\,\mathrm{R}_g\,w-\frac{1}{w}|\nabla_g w|^2\Big)\,d\sigma_g\\
&= \int_{B_R}\underbrace{-\zeta w^2-2\zeta w(\nabla_g\zeta,\nabla_g w)}_{=w^2|\nabla_g\zeta|^2-\mathrm{div}(\zeta w^2\nabla_g\zeta)}-\zeta^2|\nabla_g w|^2\,d\sigma_g\\
&= \int_{B_R} w^2|\nabla_g\zeta|^2-\zeta|\nabla_g w|\,d\sigma_g
\end{aligned}
$$

Utilizziamo ora le proprietà di completezza e la cut-off scelta per concludere la dimostrazione. Poiché $(\mathbb{B}^2,\frac{1}{w^2}\delta)$ è completo w non può essere costante: deve dunque esistere un r per il quale $|\nabla_g w|\neq 0$ in B_r. Scelto tale r, è quindi valida la stima

$$0\le\lambda_1(B_R)\int_{B_r}w^2\,d\sigma_g\le\frac{c}{(R-r)^2}\int_{B_R}w^2\,d\sigma_g-\int_{B_r}|\nabla_g w|^2\,d\sigma_g$$

Concludiamo la stima osservando che per costruzione si ha $d\sigma_g=\frac{1}{w^2}dx$, che ci dà

$$0\le\lambda_1(B_R)\le\frac{cR}{r^2(R-r)^2}-\frac{1}{\pi r^2}\int_{B_r}\frac{|\nabla_g w|^2}{w^2}\,dx$$

Troviamo quindi l'assurdo per R sufficientemente grande. Ne consegue che il rivestimento universale di Σ è necessariamente $\mathbb{R}^2$. Più precisamente, dal teorema d'uniformizzazione segue che Σ è diffeomorfo al quoziente di $\mathbb{R}^2$ per un sottogruppo discreto di isometrie prive di punti fissi. Le uniche superfici di Riemann connesse, orientabili, senza bordo e non compatte che possono essere un tale quoziente di $\mathbb{R}^2$ sono il piano ed il cilindro, e questo conclude la dimostrazione. $\square$