# Confronto del volume

Gabriele Viaggi

10 Settembre 2015

## 1 Introduzione

Il **teorema di Bishop-Gromov** è un risultato molto utile della geometria del confronto, permette di controllare la crescita del volume delle palle geodetiche a partire da vincoli sulla curvatura, precisamente:

TEOREMA 1.1 (Bishop-Gromov). *$(M, g)$ $n-$varietà riemanniana completa, $p \in M$, $k \in \mathbb{R}$, supponiamo*

$$Ric \geq (n-1)kg$$

*allora , detta $B^k(r)$ una palla di raggio $r$ nel modello $n-$dim a curvatura costante* $\sec = k$, *la funzione $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$*

$$F : r \longrightarrow \frac{vol\ B(p, r)}{vol\ B^k(r)}$$

*è debolmente decrescente e $\lim_{r \to 0} F(r) = 1$.*

Dopo aver fornito una dimostrazione dettagliata del risultato, illustreremo come applicazione alcune conseguenze sul gruppo fondamentale e sul primo gruppo di omologia.

## 2 Bishop-Gromov

### 2.1 preliminari sul volume

Fissiamo $p \in M$. Il **lemma di Gauss** fornisce un intorno bucato $U \setminus \{p\}$ isometrico a $(0, \epsilon) \times \mathbb{S}^{n-1}$ munito della metrica $dr^2 + g_r$ dove $g_r$ è una metrica sull'insieme di livello $U_r = \{r\} \times \mathbb{S}^{n-1}$; la forma di volume $\nu_g$ si lascia scrivere come in questo intorno come

$$\nu_g = f(r, u) dr \wedge \omega_{n-1}$$

dove $\omega_{n-1}$ è la forma di volume canonica su $\mathbb{S}^{n-1}$.
L'espressione esplicita per $f$ è data da $f(r, u) = \sqrt{\det g}$: $g_{ij}(r, u) = g\left(Y^i(r), Y^j(r)\right)$ dove $Y^i(r)$ è il campo di Jacobi lungo $\exp_p(tv)$ che soddisfa $Y^i(0) = 0$, $\frac{d}{dt} Y^i(0) = e_i$, tramite uno sviluppo di Taylor dei campi di Jacobi si ottiene un'approssimazione della forma di volume che mostra come la curvatura deforma il volume, in particolare valgono le formule

- $Y^i(r) = r\overline{u} - \frac{r^3}{6} \overline{R(v, e_i)v} + o\left(r^3\right)$
- $g_{ij} = g\left(Y^i(r), Y^j(r)\right) = \delta_{ij} r^2 + \frac{r^4}{3} R\left(v, e_i, v, e_j\right) + o\left(r^4\right)$
- $\phi^* \nu_g(r, v) = \left(1 - \mathrm{Ric}\left(v, v\right) r^2 + o\left(r^2\right)\right) \nu_{\mathbb{R}^n}$
- $\mathrm{vol}\ B(p, r) = r^n \left(1 - \frac{R(p)}{6(n+2)} r^2 + o\left(r^2\right)\right) \mathrm{vol}\ B^{\mathbb{R}^n}(1)$

- vol $S(p,r) = \int_{S(p,r)} |\nabla r|^2 \nu_g|_{S(p,r)} = \int_{B(p,r)} \Delta r \nu_g$

Nei modelli a curvatura sezionale costante i conti possono essere portati a conclusione esplicitamente

| | $k>0$ | $k=0$ | $k<0$ |
|---|---|---|---|
| $\nu_g = f_k dr \wedge \omega_{n-1}$ | $f_k = \left(\frac{\sin(\sqrt{k}r)}{\sqrt{k}}\right)^{n-1}$ | $f_0 = r^{n-1}$ | $f_k = \left(\frac{\sinh(\sqrt{-k}r)}{\sqrt{-k}}\right)^{n-1}$ |

Dal fatto che le geodetiche radiali sono ortogonali alle sfere geodetiche otteniamo subito

$$\nu_g|_{S(p,t)} = f(t,u)\omega_{n-1}$$

per $r < \operatorname{injrad}(p)$ il volume della palla geodetica $B(p,r)$ è dato da

$$\begin{aligned}
\text{vol } B(p,r) &= \int_{B(p,r)} \nu_g = \int_{(0,\epsilon)\times\mathbb{S}^{n-1}} f(t,u)dt \wedge \omega_{n-1} \\
&= \int_0^r \left(\int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(t,u)\omega_{n-1}\right) dt && \text{per Fubini} \\
&= \int_0^r \text{vol } S(p,t)dt && \text{perché } \nu_g|_{S(p,t)} = f(t,u)\omega_{n-1}
\end{aligned}$$

La densità $f(r,u)$ è collegata al laplaciano della distanza da $p$, infatti vale la seguente

PROPOSIZIONE 2.1. *Valgono le seguenti*

- $L_{\partial_r}\nu_g = (\Delta r)\,\nu_g$
- $\partial_r f = f\Delta r$

*Dimostrazione.* (proposizione)

- sia $E_1,\dots,E_n$ un riferimento locale ortonormale

$$\begin{aligned}
&L_{\partial_r}\nu_g(E_1,\dots,E_n) \\
&= \partial_r(\nu_g(E_1,\dots,E_n)) - \sum_{j=1}^n \nu_g(E_1,\dots,L_{\partial_r}E_j,\dots,E_n) \\
&= -\sum_{j=1}^n \nu_g(E_1,\dots,L_{\partial_r}E_j,\dots,E_n) && \nu_g(E_1,\dots,E_n)=1 \\
&= -\sum_{j=1}^n \nu_g(E_1,\dots,g(L_{\partial_r}E_j,E_j)E_j,\dots,E_n) && \nu_g \text{ è una } n\text{−forma} \\
&= -\left(\sum_{j=1}^n g(L_{\partial_r}E_j,E_j)\right)\nu_g(E_1,\dots,E_n) \\
&= \sum_{j=1}^n L_{\partial_r}g(E_j,E_j) && g(L_{\partial_r}E_j,E_j) = \partial_r g(E_j,E_j) - L_{\partial_r}g(E_j,E_j) \\
&= \sum_{j=1}^n \text{Hess}(r)(E_j,E_j) && L_{\partial_r}g = \text{Hess}(r) \\
&= \text{tr Hess}(r) = \Delta r
\end{aligned}$$

- utilizzando il primo punto otteniamo poi

$$f\Delta r dr\wedge\omega_{n-1} = L_{\partial_r}(fdr\wedge\omega_{n-1}) = \partial_r f dr\wedge\omega_{n-1} + fL_{\partial_r}(dr\wedge\omega_{n-1}) = \partial_r f dr\wedge\omega_{n-1}$$

□

## 2.2 risultato principale

TEOREMA 2.1 (Bishop-Gromov). *$(M,g)$ $n-$varietà riemanniana completa, $p \in M$, $k \in \mathbb{R}$, supponiamo*

$$Ric \geq (n-1)kg$$

*allora , detta $B^k(r)$ una palla di raggio $r$ nel modello $n-$dim a curvatura costante* $\sec = k$, *la funzione $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$*

$$F : r \longrightarrow \frac{vol\ B(p,r)}{vol\ B^k(r)}$$

*è debolmente decrescente e $\lim_{r\to 0} F(r) = 1$.*

Alcune osservazioni:

- il teorema vale per **tutti** i raggi $r > 0$, anche per quelli $r \geq \mathrm{injrad}\,(p)$, in questo caso intendiamo $B(p,r) = \exp_p\{|v| < r)\}$ (e anche $S(p,r) = \exp_p\{|v| = r\}$), questo grado di libertà sarà molto importante nelle applicazioni.
- se $k > 0$ per il **teorema di Myers** sia $M$ sia il modello $\mathbb{S}^n(k)$ hanno diametro limitato da $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$, in questo caso per $r > \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ il rapporto tra i volumi delle palle è dato da $\frac{\mathrm{vol}\ B(p,r)}{\mathrm{vol}\ B^k(r)} = \frac{\mathrm{vol}\ M}{\mathrm{vol}\ \mathbb{S}^n(k)}$, l'intervallo di raggi dove la conclusione del teorema non è banale è allora $r \in \left[0, \frac{\pi}{\sqrt{k}}\right]$.
- il comportamento per $r \to 0$ fornisce come corollario immediato la disuguaglianza $\mathrm{vol}\ B(p,r) \leq \mathrm{vol}\ B^k(r)$.
- caso $k > 0$: siccome $\mathrm{vol}\ B^k(r) = \mathrm{vol}\ \mathbb{S}^n(k) < \infty$ per ogni $r \geq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ per Bishop-Gromov anche $\mathrm{vol}\ B(p,r)$ deve essere *decrescente* per $r \geq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$, d'altra parte però $\mathrm{vol}\ B(p,r)$ è banalmente crescente dunque l'unica possibilità è $\mathrm{vol}\ B(p,r) < \infty$ costante, con poca fatica vediamo allora che questo è possibile solo se $M$ ha diametro finito (in particolare limitato da $\frac{2\pi}{\sqrt{k}}$) da cui deduciamo il **teorema di Myers**.

Procediamo adesso con la dimostrazione, essa si basa essenzialmente sull'importante risultato del **confronto del laplaciano** che al momento ci limitiamo ad enunciare

TEOREMA 2.2 (Confronto del laplaciano). *$(M,g)$ $n-$varietà riemanniana completa, $k \in \mathbb{R}$, supponiamo*

$$Ric \geq (n-1)kg$$

*allora*

$$\Delta r \leq \Delta_k r$$

Diamo dunque una dimostrazione del risultato principale

*Dimostrazione.* (Bishop-Gromov)

- *preliminari*: in coordinate polari, sull'apetro *stellato* $U = \{tv\ :\ t < \rho v\} \subseteq T_pM$ che parametrizza $M \setminus \{\mathrm{Cut}(p) \cup \{p\}\}$ la forma di volume si lascia scrivere come

  $$\nu_g = f(r,u)dr \wedge \omega_{n-1}$$

  per ogni $r < \mathrm{injrad}\,(p)$ valgono allora

  $$\mathrm{vol}\ B(p,r) = \int_0^r \mathrm{vol}\ S(p,t)dt = \int_0^r \left(\int_{S^{n-1}} f(t,u)d\omega_{n-1}\right) dt$$
  $$\mathrm{vol}\ S(p,r) = \int_{S^{n-1}} f(r,u)d\omega_{n-1}$$

usando il fatto che il cut-locus ha **misura nulla** possiamo estendere le formule precedenti a tutti gli insiemi $B(p,r) = \exp_p \{|u| < r\}, S(p,r) = \exp_p \{|u| = r\}$ con $r > 0$ semplicemente ponendo $f = 0$ al di fuori di $U = \{tv \ : \ t < \rho(v)\}$, la prima vol $B(p,r)$ rappresenta in ogni caso il volume della regione $B(p,r)$ (che è una palla geodetica solo per $r < \text{injrad}\,(p)$), la seconda invece perde il significato di "volume della regione $S(p,r)$" in quanto questa non sarà in generale nemmeno una sottovarietà per $r > \text{injrad}\,(p)$, continuiamo comunque a indicarla per comodità con vol $S(p,r)$, in questo modo abbiamo per **Fubini**

$$\text{vol } B(p,r) = \int_0^r \text{vol } S(p,t)dt$$

- *se il teorema vale per le "sfere" $S(p,r)$ allora vale per le "palle" $B(p,r)$*: infatti, in generale, siano $a, b$ funzioni $C^0(0,+\infty)$ con $b$ positiva e tali che $\frac{a}{b}$ sia decrescente, poste $A(r) = \int_0^r a(t)dt, B(r) = \int_0^r b(t)dt$ abbiamo

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}\frac{A}{B}(r) = \frac{a(r)B(r) - A(r)b(r)}{B^2(r)} \leq 0 \\
&\iff a(r)B(r) - A(r)b(r) \leq 0 && B^2 > 0 \\
&a(r)B(r) - A(r)b(r) = \int_0^r a(r)b(t) - a(t)b(r)dt \leq 0 && \frac{a}{b} \text{ è decrescente in } (0,r)
\end{aligned}$$

  Nel nostro caso basta allora porre $a(r) = \text{vol } S(p,r), b(r) = \text{vol } S^k(r)$.

- *caso delle "sfere"*: dobbiamo mostrare che la funzione

$$r \to \frac{\text{vol } S(p,r)}{\text{vol } S^k(r)}$$

  è decrescente, osserviamo che

$$\text{vol } S(p,r) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(r,u)\omega_{n-1}(du) \qquad \text{vol } S^k(r) = f_k(r)\text{vol } \mathbb{S}^{n-1}$$

  la funzione $r \to \frac{\text{vol } S(p,r)}{\text{vol } S^k(r)} = \frac{1}{\text{vol } \mathbb{S}^{n-1}} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{f(r,u)}{f_k(r)}\omega_{n-1}$ non è derivabile ovunque, il punto singolare (eventuale) è quello che soddisfa $r = \rho(u)$ ovvero $(r,v) \in \text{Cut}_p$, tuttavia per vedere che è decrescente basta limitarsi a $(0,\rho(u))$ perché la funzione è non-negativa su questo intervallo e nulla per $r \geq \rho(u)$ (per assunzione $f(r,u) = 0$ per $r > \rho(u)$). Calcoliamo allora per $r < \rho(u)$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dr}\left(\frac{\text{vol } S(p,r)}{\text{vol } S^k(r)}\right) \\
&= \frac{\text{vol } S^k(r)\frac{d}{dr}\text{vol } S(p,r) - \text{vol } S(p,r)\frac{d}{dr}\text{vol } S^k(r)}{\text{vol } S^k(r)^2}
\end{aligned}$$

  dunque $\frac{d}{dr}\left(\frac{\text{vol } S(p,r)}{\text{vol } S^k(r)}\right) \leq 0 \iff \text{vol } S^k(r)\frac{d}{dr}\text{vol } S(p,r) - \text{vol } S(p,r)\frac{d}{dr}\text{vol } S^k(r) \leq 0$. Infine

$$\begin{aligned}
&\text{vol } S^k(r)\frac{d}{dr}\text{vol } S(p,r) - \text{vol } S(p,r)\frac{d}{dr}\text{vol } S^k(r) \\
&= \text{vol } \mathbb{S}^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} [f_k(r)\partial_r f(r,u) - f(r,u)\partial_r f_k(r,v)]\, du \\
&= \text{vol } \mathbb{S}^{n-1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f_k(r)f(r,u)\,[\Delta r(r,u) - \Delta_k r(r,u)]\, du
\end{aligned}$$

  e vale $f_k(r)f(r,u)\,[\Delta r(r,u) - \Delta_k r(r,u)] \leq 0$ perché $\Delta r \leq \Delta_k r$ per il **confronto del laplaciano** (siamo all'interno di $U$, $r < \rho(u)$) e $f, f_k \geq 0$ (sono delle densità).

$\square$

## 2.3 confronto del laplaciano

Cominciamo studiando localmente hessiano e laplaciano della funzione distanza $r : M \to [0, +\infty)$, indichiamo con $\partial_r$ il suo gradiente

- vale la rappresentazione $\text{Hess}(r)(X,Y) = g(\nabla_X \partial_r, Y)$: infatti

$$\begin{aligned}
&\text{Hess}(r)(X,Y)\\
&= \nabla^2 r(X,Y)\\
&= X(dr(Y)) - dr(\nabla_X Y)\\
&= Xg(\partial_r, Y) - g(\partial_r, \nabla_X Y)\\
&= g(\nabla_X \partial_r, Y) + g(\partial_r, \nabla_X Y) - g(\partial_r, \nabla_X Y)\\
&= g(\nabla_X \partial_r, Y)
\end{aligned}$$

- $\nabla_{\partial_r} \partial_r = 0$: infatti per ogni $X$ campo vettoriale

$$\begin{aligned}
&g(\nabla_{\partial_r} \partial_r, X) = \text{Hess}(r)(\partial_r, X)\\
&= \text{Hess}(r)(X, \partial_r)\\
&= g(\nabla_X \partial_r, \partial_r)\\
&= \tfrac{1}{2} X |\partial_r|^2 = 0
\end{aligned}$$

- $\text{Hess}(r) = \frac{1}{2}\partial_r g_{ij} d\theta^i \otimes d\theta^j$: infatti per simmetria

$$\text{Hess}(r) = h_{rr} dr^2 + h_{rj} dr d\theta^j + h_{ij} d\theta^i d\theta^j$$

  valutiamo i coefficienti:

$$\begin{aligned}
h_{rr} &= \text{Hess}(r)(\partial_r, \partial_r) =< \nabla_{\partial_r} \partial_r, \partial_r >= 0\\
h_{rj} &= \text{Hess}(r)(\partial_r, \partial_{\theta^j}) =< \nabla_{\partial_r} \partial_r, \partial_{\theta^j} >= 0\\
h_{ij} &= \text{Hess}(r)(\partial_{\theta^i}, \partial_{\theta^j}) =< \nabla_{\partial_{\theta^i}} \partial_r, \partial_{\theta^j} >= \Gamma^j_{ir} = \partial_r g_{ij}
\end{aligned}$$

- tracciando l'identità precedente otteniamo $\Delta r = \frac{1}{2} g^{ij} \partial_r g_{ij}$ che può essere riscritta come $\Delta r = \frac{1}{2}\partial_r \log(\det(g_{ij}))$, questo ci conforta perché $f = \sqrt{\det(g_{ij})}$ e dalla sezione precedente $\Delta r = \frac{\partial_r f}{f}$. Osserviamo che $\Delta r = \frac{n-1}{r} + O(r)$.

La seguente proposizione fornisce la relazione fondamentale tra l'hessiano della distanza e il tensore di curvatura

Proposizione 2.2. *Valgono le seguenti*

- $L_{\partial_r} g = 2\mathit{Hess}(r)$
- $\nabla_{\partial_r} \mathit{Hess}(r) + \mathit{Hess}(r)^2 + R(\bullet, \partial_r, \partial_r, \bullet) = 0$ *equazione fondamentale.*
- $\partial_r \Delta r + |\mathit{Hess}(r)|^2 = -Ric(\partial_r, \partial_r)$ *equazione fondamentale tracciata.*

*Dimostrazione.* (proposizione)

- $L_{\partial_r} g = 2\text{Hess}(r)$: infatti presi $X, Y$ campi vettoriali

$$\begin{aligned}
&L_{\partial_r} g(X,Y)\\
&= \partial_r g(X,Y) - g([\partial_r, X], Y) - g(X, [\partial_r, Y])\\
&= g(\nabla_{\partial_r} X, Y) + g(X, \nabla_{\partial_r} Y) - g([\partial_r, X], Y) - g(X, [\partial_r, Y])\\
&= g(\nabla_{\partial_r} X - [\partial_r, X], Y) + g(X, \nabla_{\partial_r} Y - [\partial_r, Y])\\
&= g(\nabla_X \partial_r, Y) + g(X, \nabla_Y \partial_r)\\
&= 2\text{Hess}(r)(X,Y)
\end{aligned}$$

- Equazione fondamentale: presi $X, Y$ campi vettoriali

$$\begin{aligned}
&\nabla_{\partial_r}\mathrm{Hess}\,(r)\,(X,Y)\\
&= \partial_r\mathrm{Hess}\,(r)\,(X,Y) - \mathrm{Hess}\,(r)\,(\nabla_{\partial_r}X,Y) - \mathrm{Hess}\,(r)\,(X,\nabla_{\partial_r}Y)\\
&= \partial_r g\,(\nabla_X\partial_r,Y) - g\left(\nabla_{\nabla_{\partial_r}X}\partial_r,Y\right) - g\,(\nabla_X\partial_r,\nabla_{\partial_r}Y)\\
&= g\left(\nabla_{\partial_r}\nabla_X\partial_r - \nabla_{\nabla_{\partial_r}X}\partial_r,Y\right)\\
&= g\left(\nabla^2_{X,\partial_r}\partial_r,Y\right)\\
&= g\left(\nabla^2_{\partial_r,X}\partial_r - R\,(X,\partial_r)\,\partial_r,Y\right)\\
&= -R\,(X,\partial_r,\partial_r,Y) - g\,(\nabla_{\nabla_X\partial_r}\partial_r,Y)\\
&= -R\,(X,\partial_r,\partial_r,Y) - \mathrm{Hess}\,(r)^2\,(X,Y)
\end{aligned}$$

  negli ultimi tre passaggi abbiamo utilizzato in ordine: (1) $R(X,\partial_r)\partial_r = \left(\nabla^2_{\partial_r,X} - \nabla^2_{X,\partial_r}\right)\partial_r$, (2) $\nabla^2_{\partial_r,X}\partial_r = \nabla_X\nabla_{\partial_r}\partial_r - \nabla_{\nabla_X\partial_r}\partial_r = -\nabla_{\nabla_X\partial_r}\partial_r$ e $\nabla_{\partial_r}\partial_r = 0$, (3) $\mathrm{Hess}\,(r)^2\,(X,Y) = g\,(\nabla_{\nabla_X\partial_r}\partial_r,Y) = g\,(\nabla_X\partial_r,\nabla_Y\partial_r)$.

- per ottenere l'ultima equazione basta tracciare l'equazione fondamentale.

□

Alcune osservazioni:

- dalla disuguaglianza di **Cauchy-Schwarz** segue che possiamo stimare la norma euclidea di una matrice con la sua traccia: infatti considerato il prodotto scalare $< A,B >= \mathrm{tr}\left({}^tAB\right)$ su $M(n,\mathbb{R})$ abbiamo

$$\mathrm{tr}(A)^2 =< A,I >^2 \leq |A|^2\cdot|I|^2 = \mathrm{tr}\left({}^tAA\right)\mathrm{tr}\,(I) = n\|A\|^2$$

  con uguaglianza se e solo se $A=\lambda I$. Nel caso particolare $A = \left(\mathrm{Hess}\,(r)_{ij}\right)_{i,j=1,\dots,n-1} = (h_{ij})_{i,j=1,\dots,n-1}$, osservato che $\|A\|^2 = |\mathrm{Hess}\,(r)|^2$ e $\mathrm{tr}\,(A) = \Delta r$, otteniamo la disuguaglianza

$$\frac{1}{n-1}\,(\Delta r)^2 \leq |\mathrm{Hess}\,(r)|^2$$

  Vale l'uguaglianza solo se $\mathrm{Hess}\,(r) = \lambda Id$.

- Mettendo assieme all'equazione fondamentale tracciata:

$$\partial_r\Delta r + \frac{1}{n-1}\,(\Delta r)^2 \leq -\mathrm{Ric}\,(\partial_r,\partial_r)$$

  con uguaglianza se e solo se $\mathrm{Hess}\,(r) = \lambda Id$.

Nei casi in cui abbiamo un controllo sulla *curvatura di Ricci* del tipo $\mathrm{Ric} \geq (n-1)kg$ allora la precedente fornisce

$$\partial_r\frac{\Delta r}{n-1} + \left(\frac{\Delta r}{n-1}\right)^2 \leq -k$$

quest'ultima è un'**equazione di Riccati** (in generale le equazioni di Riccati hanno la forma $f' + f^2 \leq k$), per questo tipo di equazioni possiamo stimare una sotto-soluzione con le soluzioni dell'equazione associata sotto opportune ipotesi sulle condizioni iniziali, più precisamente

LEMMA 2.1. *consideriamo* $\frac{d}{dr}f + f^2 \le -k$, *se* $f(r) = \frac{\alpha}{r} + O(r)$ *per* $r \to 0$ *allora*

$$f \le \begin{cases} (n-1)\sqrt{k}\frac{\cos(\sqrt{k}r)}{\sin(\sqrt{k}r)} & se\ k > 0 \\ (n-1)\frac{1}{r} & se\ k = 0 \\ (n-1)\sqrt{-k}\frac{\cosh(\sqrt{-k}r)}{\sinh(\sqrt{-k}r)} & se\ k < 0 \end{cases}$$

*sull'intervallo* $(0, \epsilon)$ *su cui è definita.*

Nei modelli a curvatura sezionale costante vale l'uguaglianza nelle equazioni

$$\begin{gathered} \mathrm{Ric} = (n-1)kg \\ \frac{1}{n-1}(\Delta_k r)^2 = |\mathrm{Hess}\,(r)|^2 \\ \partial_r \Delta_k r + \frac{1}{n-1}(\Delta r)^2 = \partial_r \Delta_k r + |\mathrm{Hess}\,(r)|^2 = -\mathrm{Ric}\,(\partial_r, \partial_r) \end{gathered}$$

Esplicitamente

| | $k > 0$ | $k = 0$ | $k < 0$ |
|---|---|---|---|
| $\Delta_k r = \dfrac{\partial_r f_k}{f_k}$ | $\Delta_k r = \sqrt{k}(n-1)\frac{\cos(\sqrt{k}r)}{\sin(\sqrt{k}r)}$ | $\Delta_0 r = (n-1)\frac{1}{r}$ | $\Delta_k r = \sqrt{-k}(n-1)\frac{\cosh(\sqrt{-k}r)}{\sinh(\sqrt{-k}r)}$ |

La dimostrazione del teorema del confronto del laplaciano si riduce allora all'applicazione della proprietà delle equazioni di Riccati enunciata nel lemma all'equazione fondamentale tracciata (il laplaciano soddisfa l'ipotesi $\Delta r = \frac{n-1}{r} + O(r)$) e all'osservazione che il caso di uguaglianza è realizzato dal laplaciano nei modelli a curvatura sezionale costante

# 3 Applicazione: risultati di finitezza per $H_1$ e $\pi_1$

Come prima applicazione vediamo come si possa utilizzare la monotonia nel confronto del volume per ottenere da bound sulla curvatura di Ricci stime sul gruppo fondamentale e sul primo gruppo di omologia di una varietà compatta.

## 3.1 $\pi_1$ e rivestimenti

In quello che segue $(M, g)$ è cpt. di dim $M = n$ e fissiamo $p \in M$ pto. base.
$\pi_1(M)$ agisce come gruppo di automorfismi del rivestimento universale riemanniano $\left(\widetilde{M}, \widetilde{g}\right)$, enunciamo brevemente le caratteristiche topologiche di questa azione che ci saranno utili:

- $\pi_1(M)$ agisce in modo **libero** e **propriamente discontinuo**
- abbiamo una **corrispondenza** tra sottogruppi $\Gamma < \pi_1$ e rivestimenti riemanniani

| **sgr** $\Gamma < \pi_1$ | **rivestimenti** |
|---|---|
| $\Gamma < \pi_1$ | $M_\Gamma = \widetilde{M}/\Gamma \longrightarrow M$ |
| $\Gamma \triangleleft \pi_1$ | $\mathrm{Aut}\,(M_\Gamma \to M) = \frac{\pi_1}{\Gamma}$ |
| $[\pi_1 : \Gamma] < \infty$ | $M_\Gamma$ cpt. |

Vediamo poi alcuni fatti riemanniani

- se $\gamma = \pi\widetilde{\gamma}$ allora $L(\widetilde{\gamma}) = L(\gamma)$: segue banalmente dal fatto che $\pi$ è un'isometria locale.

- per ogni $q \in M$ esiste $\widetilde{q} \in \widetilde{M}$ t.c. $\pi(\widetilde{q}) = q$ e $d(\widetilde{p}, \widetilde{q}) = d(p, q)$: per completezza esiste una geodetica minimale $\gamma$ che congiunge $p$ a $q$, il suo sollevamento $\widetilde{\gamma}$ è una geodetica minimale tra $\widetilde{p}$ e $\widetilde{q} = \widetilde{\gamma}(1)$ di lunghezza $L(\widetilde{\gamma}) = L(\gamma) = d(p, q)$.

- per ogni $\widetilde{q} \in \widetilde{M}$ esiste $\gamma \in \pi_1$ t.c. $d(\widetilde{p}, \gamma\widetilde{q}) \leq \text{diam}\,(M)$: per il punto precedente troviamo $\widetilde{q}'$ t.c. $\pi(\widetilde{q}) = \pi(\widetilde{q}')$ e $d(\widetilde{p}, \widetilde{q}') = d(\pi(\widetilde{p}), \pi(\widetilde{q}) \leq \text{diam}\,(M)$, dalla prima condizione segue $\widetilde{q}' = \gamma\widetilde{q}$ per qualche $\gamma \in \pi_1$.

- l'insieme $F = \left\{\widetilde{x} \in \widetilde{M}\ :\ d(\widetilde{x}, \widetilde{p}) \leq d(\widetilde{x}, \gamma\widetilde{p}) \text{ per ogni } \gamma \in \pi_1\right\}$ è un *dominio fondamentale* (di *Dirichlet*) per l'azione di $\pi_1$, non è difficile mostrare che, se $M$ è cpt., (1) $F \subseteq B(\widetilde{p}, 2\text{diam}\,(M))$, (2) vol $F =$ vol $M$, (3) $\pi|_{\text{int}(F)}$ è un diffeomorfismo con $M \setminus \text{Cut}(p)$.

**Strategia**: preso un sottoinsieme finito $I$ di $\pi_1, H_1$ rappresentiamo i suoi elementi come punti $I = \{p_1, \ldots, p_m\}$ su un opportuno rivestimento di $M$, se $I \subseteq B(p, R)$ e $d(p_i, p_j) \geq 2r$ allora $|I| \leq \frac{\text{vol } B(p,R)}{\min\{\text{vol } B(p_i,r)\}}$ e stimiamo quest'ultimo utilizzando il confronto del volume dati $r, R$.

### 3.2 stime su $b_1$

TEOREMA 3.1 (Gromov-Gallot, 1980). *$(M, g)$ completa, dim $M = n$, $k \in \mathbb{R}$, supponiamo che*

$$Ric \geq k(n-1)g \qquad diam\ M = D$$

*allora*

$$b_1(M) \leq f\,(k, D)$$

*dove $f$ rispetta:*

1. *$f\,(k, D) \to n$ per $kD^2 \to 0$*
2. *$f(k, D) = 0$ per $k > 0$*

Alcune osservazioni:

- il comportamento di $f$ per $kD^2 \to 0$ è "ottimale", l'esempio limite è dato dal toro piatto $\mathbb{T}^n$ in cui Ric $= 0$.

- senza il vincolo sul diametro, ovvero assumendo solo la compattezza non possiamo concludere nulla: tutte le superfici di genere $g \geq 2$ sono iperboliche (dunque Ric $= -(n-1)g$), come pure la maggior parte delle 3−varietà; anzi il teorema dice che le superfici iperboliche di genere sufficientemente grande non possono avere diametro piccolo.

Per la dimostrazione del teorema sarà utile selezionare un opportuno utilizzare un opportuno sottogruppo di $H_1$:

LEMMA 3.1. *$(M, g)$ $n$−var. cpt., $p \in M_{H_1}$, esiste un sgr. $< \gamma_1, \ldots, \gamma_m >= \Gamma < H_1(M)$ tale che*

1. *$[H_1 : \Gamma] < \infty$ (indice finito)*
2. *$d(p, \gamma_j p) \leq 2diam\ M$ per ogni $j = 1, \ldots, m$*

*3.* $d(p, \gamma p) > diam\ M$ *per ogni* $\gamma \in \Gamma - \{0\}$

Assumiamo questo fatto e dimostriamo il teorema

*Dimostrazione.* (Gromov-Gallot)

- caso $k > 0$ : $\pi_1(M)$ è finito per il **teorema di Myers** $\Rightarrow b_1(M) = 0$.
- caso $k \leq 0$ : sia $< \gamma_1, \ldots, \gamma_m >= \Gamma < H_1$ il sottogruppo fornito dal **lemma**, consideriamo il rivestimento corrispondente $M_\Gamma \to M$ abbiamo che
  - per la **proprietà** ***(1)*** rank $\Gamma =$ rank $H_1(M)$
  - per la **proprietà** ***(2)*** $B\left(\gamma_i p, \frac{1}{2}\text{diam } M\right) \subseteq B\left(p, \frac{5}{2}\text{diam } M\right)$
  - per la **proprietà** ***(3)*** $B\left(\gamma_i p, \frac{1}{2}\text{diam } M\right) \cap B\left(\gamma_j p, \frac{1}{2}\text{diam } M\right) = \emptyset$ se $i \neq j$

  dal **confronto del volume** allora

  $$m \leq \frac{\text{vol } B\left(p, \frac{5}{2}\text{diam } M\right)}{\text{vol } B\left(p, \frac{1}{2}\text{diam } M\right)} \leq \frac{\text{vol } B^k\left(\frac{5}{2}D\right)}{\text{vol } B^k\left(\frac{1}{2}D\right)}$$

- raffinamento quando $\sqrt{-k}D \to 0$: consideriamo

  $$I_r = \left\{ \sum_{j=1}^{m} a_j \gamma_j \ : \ |a_j| \leq r \text{ per ogni } j = 1, \ldots, m \right\}$$

  banalmente $|I_r| = (2r+1)^m$. Sul rivestimento $M_\Gamma \to M$ abbiamo
  - per la **proprietà** ***(2)*** $B\left(\gamma p, \frac{1}{2}\text{diam } M\right) \subseteq B\left(p, \frac{4rm+1}{2}\text{diam } M\right)$ per ogni $\gamma \in I_r$
  - per la **proprietà** ***(3)*** $B\left(\gamma_1 p, \frac{1}{2}\text{diam } M\right) \cap B\left(\gamma_2 p, \frac{1}{2}\text{diam } M\right) = \emptyset$ per ogni $\gamma_1, \gamma_2 \in I_r$ con $\gamma_1 \neq \gamma_2$

  dal **confronto dei volumi** abbiamo

  $$\begin{aligned} & \frac{\text{vol } B\left(p, \frac{4rm+1}{2}\text{diam } M\right)}{\text{vol } B\left(p, \frac{1}{2}\text{diam } M\right)} \\ \leq & \frac{\text{vol } B\left(p, \frac{4rm+1}{2}D\right)}{\text{vol } B\left(p, \frac{1}{2}D\right)} \\ = & \frac{\int_0^{(2rm+\frac{1}{2})D\sqrt{-k}} \sinh^{n-1}(t)dt}{\int_0^{(2rm+\frac{1}{2})D\sqrt{-k}} \sinh^{n-1}(t)dt} \end{aligned}$$

  per ogni $r$ fissato riusciamo a trovare $\sqrt{-k}D$ sufficientemente piccolo in modo tale che valga

  $$\frac{\int_0^{(2rm+\frac{1}{2})D\sqrt{-k}} \sinh^{n-1}(t)dt}{\int_0^{(2rm+\frac{1}{2})D\sqrt{-k}} \sinh^{n-1}(t)dt} \leq 2^n \left(5mr\right)^n$$

  confrontando con la stima combinatoria

  $$\begin{aligned} & (2r+1)^m = |I_r| \leq 2^n \left(5mr\right)^n = c(n,m)r^n \\ & \Rightarrow m \leq \tfrac{\log(c(n,m)) + n\log(r)}{\log(2r+1)} \end{aligned}$$

dato che $\lim_{r\to+\infty}\frac{\log(c(n,m))+n\log(r)}{\log(2r+1)} = n$ allora per $r$ sufficientemente grande $m < n+1$. Formalmente: fissiamo $r$ abbastanza grande in modo che $\frac{\log(c(n,m))+n\log(r)}{\log(2r+1)} < n+1$ e troviamo di conseguenza $\sqrt{-k}D$ abbastanza piccolo in modo tale che valga il bound sull'integrale.

$\square$

Dimostriamo infine il lemma

*Dimostrazione.* (lemma)
Esibiamo innanzi tutto un sgr. che realizza le proprietà ***(1)*** e ***(2)***: fissato $\epsilon > 0$ consideriamo $\Gamma_\epsilon < H_1(M)$ generato da

$$I_\epsilon = \{\gamma \in H_1(M) \ : \ d(p,\gamma p) \le 2\mathrm{diam}\,(M) + \epsilon\}$$

sia $\pi_\epsilon : (M_{H_1}, p) \to (M_{\Gamma_\epsilon}, \pi_\epsilon(p))$ il rivestimento corrispondente

- *$I_\epsilon$ è finito per ogni $\epsilon > 0$, inoltre $I_\epsilon = I_0$ per $\epsilon$ sufficientemente piccolo*: dato che l'azione di $H_1$ su $M_{H_1}$ è **propriamente discontinua** l'orbita del punto $p$ è chiusa e discreta dunque interseca la palla $\overline{B(p, 2\mathrm{diam}\,(M)+\epsilon)}$ in finiti punti, siccome l'azione è anche **libera** abbiamo una corrispondenza biunivoca tra $I_\epsilon$ e questo insieme di pti.; per mostrare che $I_\epsilon = I_0$ per $\epsilon$ suff. piccolo consideriamo la palla $\overline{B(p, 2\mathrm{diam}\,(M)+1)}$, analogamente a prima l'orbita di $p$ intersecherà la palla in finiti pti. $\alpha_1 p, \ldots, \alpha_k p$ con $\alpha_i \in I_1$ basta allora scegliere $2\mathrm{diam}\,(M) + \epsilon < \min\{d(p,\alpha_i p) \mid d(p,\alpha_i p) > 2\mathrm{diam}\,(M)\}$. Poniamo $I_\epsilon = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$.

- *$d(\pi_\epsilon(p), \pi_\epsilon(q)) \le diam\,(M) + \epsilon$ per ogni $q \in M_{H_1} = M_{[\pi_1,\pi_1]}$*: infatti supponiamo per assurdo che esista $q \in M_{H_1}$ tale che $d(\pi_\epsilon(p), \pi_\epsilon(q)) > \mathrm{diam}\,(M) + \epsilon$, per continuità, sulla geodetica minimale che congiunge $\pi_\epsilon(p), \pi_\epsilon(q)$ di lunghezza $\mathrm{diam}\,(M)+\epsilon$ esiste un punto $\pi_\epsilon(q')$ tale che $d(\pi_\epsilon(p), \pi_\epsilon(q')) = \mathrm{diam}\,(M)+\epsilon$ che possiamo sollevare a $q' \in M_{H_1}$ che realizza $d(p,q') = \mathrm{diam}\,(M)+\epsilon$, troviamo $\gamma \in H_1$ tale che $d_{M_{H_1}}(p,\gamma q') = d_M(p, \pi_\epsilon(q')) \le \mathrm{diam}\,(M)$, allora: da una parte vale

$$\begin{aligned} & d(\pi_\epsilon(q'), \pi_\epsilon(\gamma q')) \ge d(\pi_\epsilon(p), \pi_\epsilon(q')) - d(\pi_\epsilon(p), \pi_\epsilon(\gamma q')) && \text{disuguaglianza triangolare} \\ & = \mathrm{diam}\,(M) + \epsilon - d(\pi_\epsilon(p), \pi_\epsilon(\gamma q')) && \\ & \ge \mathrm{diam}\,(M) + \epsilon - d(p, \gamma q') && \text{la proiezione diminuisce la distanza} \\ & \ge \mathrm{diam}\,(M) + \epsilon - \mathrm{diam}\,(M) = \epsilon && d(p,\gamma q') \le \mathrm{diam}\,(M) \end{aligned}$$

  dunque $\gamma \notin \Gamma_\epsilon$; dall'altra

$$\begin{aligned} & d(p,\gamma p) \le d(p,\gamma q') + d(\gamma q', \gamma p) && \text{disuguaglianza triangolare} \\ & = d(p,\gamma q') + d(p,q') && \gamma \text{ è un'isometria} \\ & \le 2\mathrm{diam}\,(M) + \epsilon && \text{perché } d(p,q') = \mathrm{diam}\,(M)+\epsilon \text{ e } d(p,\gamma q') \le \mathrm{diam}\,(M) \end{aligned}$$

  da cui $\gamma \in \Gamma_\epsilon$, contraddizione.
  In conclusione $\mathrm{diam}\,(M_{\Gamma_\epsilon} = M_{H_1}/\Gamma_\epsilon) \le 2\mathrm{diam}\,(M) + 2\epsilon \Rightarrow M_{\Gamma_\epsilon}$ è cpt. $\Rightarrow [H_1(M) : \Gamma_\epsilon] < \infty$

Raffiniamo la selezione in modo tale da ottenere la proprietà ***(3)***:

- a meno di passare ad un sottogruppo $\Gamma'_\epsilon < \Gamma_\epsilon$ di indice finito della forma $<\gamma_1, \ldots, \gamma_l>$ possiamo assumere che $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ siano *linearmente indipendenti*, $m = \mathrm{rank}\ \Gamma_\epsilon = \mathrm{rank}\ H_1$.

- ricorsivamente estraiamo da $\Gamma_\epsilon$ un sistema di generatori $\beta_1, \dots, \beta_m$ t.c.:

  1. $\beta_k \in I_0 \cap < \gamma_1, \dots, \gamma_k >$
  2. $\beta_1, \dots, \beta_k$ linearmente indipendenti
  3. se $\beta_k = a_1\gamma_1 + \dots + a_k\gamma_k$ allora $|a_k|$ è max tra tutti i $\beta_k$ che soddisfano $(1), (2)$

  la procedura è ben definita perché $I_0$ è un insieme finito e contiene $\gamma_k$ che è linearmente indipendente da $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$, osserviamo anche che se $\beta_k = a_1\gamma_1 + \dots + a_k\gamma_k$ allora $a_k \neq 0$ altrimenti $\beta_k$ sarebbe linearmente dipendente dai precedenti.
  Detto $\Gamma =< \beta_1, \dots, \beta_m >$ abbiamo:

  - (1) $\Rightarrow d(p, \beta_i p) \leq 2\text{diam}\,(M)$
  - (2) $\Rightarrow \text{rank}\ \Gamma = \text{rank}\ \Gamma_\epsilon \Rightarrow [\Gamma_\epsilon : \Gamma] < \infty$
  - (3) $\Rightarrow d(p, \beta p) > \text{diam}\,(M)$ per ogni $\beta \in \Gamma \setminus \{0\}$: infatti se per assurdo fosse $d(p, \beta p) \leq \text{diam}\,(M)$ per qualche $\beta \neq 0$ allora consideriamo l'elemento $2\beta$, banalmente $2\beta$ rispetta (2), inoltre $d(p, 2\beta p) \leq d(p, \beta p) + d(\beta p, 2\beta p) = 2d(p, \beta p) \leq 2\text{diam}\,(M)$ dunque $2\beta$ rispetta anche (1), ma allora $\beta$ non è massimale nel senso di (3), contraddizione.

□

**Un ultimo commento**: valgono due risultati di rigidità nel caso massimale di $n-$varietà cpt. $(M, g)$ con $b_1(M) = n$, precisamente

Teorema 3.2. *$(M, g)$ $n-$var. cpt. con Ric $\geq 0$, se $b_1(M) = n$ <u>allora</u> $M = \mathbb{T}^n$ è isometrica ad un toro piatto*

*Dimostrazione.* (teorema) diamo solo uno **sketch**:

- $b_1(M) = \dim H^1_{DR}(M)$, utilizzando il **teorema di decomposizione di Hodge** troviamo $n$ $1-$forme armoniche linearmente indipendenti.

- l'ipotesi Ric $\geq 0$ assieme alla **formula di Bochner** permette di mostrare che le $n$ $1-$forme armoniche sono parallele da cui si deduce che $M$ è **piatta**.

- si conclude utilizzando un **teorema di Bieberbach** che afferma che ogni $n-$varietà cpt. piatta è rivestita da $\mathbb{T}^n$.

□

Il secondo risultato assume ipotesi più deboli

Teorema 3.3. *$M$ $n-$var. cpt. con $b_1(M) = n$, esiste $\epsilon > 0$ tale che se $M$ ammette una metrica $g$ che rispetta*

$$\text{diam}\,(M)^2\ \text{Ric} \geq -\epsilon$$

*allora $M = \mathbb{T}^n$ è diffeomorfa ad un toro $n-$dim.*

## 3.3 stime su $\pi_1$

TEOREMA 3.4 (Anderson, 1990). *$(M, g)$ completa, dim $M = n$, supponiamo che*

$$Ric \geq k(n-1)g \qquad vol\ M \geq v \qquad diam\ M \leq D$$

*allora il numero minimo di generatori di $\pi_1(M)$ è limitato dall'alto da una costante $f(k, v, D)$.*

Analogamente a quanto fatto in precedenza selezioniamo un opportuno insieme di generatori di $\pi_1$

LEMMA 3.2. *$(M, g)$ $n-$var. cpt., $p \in M$, esistono $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \pi_1(M)$ t.c.*

1. *$\pi_1(M) =< \gamma_1, \ldots, \gamma_m | R >$ dove le relazioni $r \in R$ sono tutte della forma $r = \gamma_i \gamma_j \gamma_k^{-1}$*
2. *$d(p, \gamma_j p) \leq 2diam\ M$ per ogni $j = 1, \ldots, m$*

Assumiamo il lemma e dimostriamo il teorema

*Dimostrazione.* (Anderson)
siano $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ come nel **lemma**, sia $F \subseteq \widetilde{M}$ un *dominio di Dirichlet* con vol $F =$ vol $M$ e $F \subseteq B(p, 2\text{diam}(M))$, dalla **proprietà *(2)*** abbiamo $\gamma_j F \subseteq B(p, 4\text{diam}(M))$, dal **confronto del volume** concludiamo

$$m \leq \frac{\text{vol } B(p, 4\text{diam}(M))}{\text{vol } F} \leq \frac{\text{vol } B^k(4D)}{v}$$

□

Chiamiamo $\mathcal{M}(k, v, D)$ la classe delle $n-$var. che soddisfano Ric $\geq k$, vol $M \leq v$, diam $(M) \leq D$. Un immediato corollario è il seguente

COROLLARIO 3.1. *la classe $\mathcal{M}(k, v, D)$ contiene finiti tipi di gruppo fondamentale.*

*Dimostrazione.* (corollario)
sia $f = f(k, v, D)$ la costante del **teorema di Anderson**, per la **proprietà *(1)*** del **lemma** le possibili famiglie di relazioni $R$ tra i generatori $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ del gruppo fondamentale e dunque i possibili tipi sono al massimo $2^{m^3} \leq 2^{f^3}$. □

Prima di dimostrare il lemma premettiamo alcuni commenti:

- la distanza $d(\widetilde{p}, \gamma\widetilde{p})$ è la lunghezza di un loop geodetico, magari non chiuso in modo $C^\infty$, "minimale" omotopo a $\gamma$ (dove minimale significa che realizza inf $\{L(\gamma') : \gamma' \in [\gamma]\}$), lo stesso vale per $d(\widetilde{x}, \gamma\widetilde{x})$ (considerando i loop con punto base $\pi(\widetilde{x})$). La funzione $f_\gamma(x) = d(x, \gamma x)$ è dunque è controllata dalla lunghezza dei loop geodetici.
- possiamo scegliere generatori di $\pi_1$ in modo da controllarne la lunghezza, l'idea è semplice: fissato un insieme finito $I$ di generatori e $\epsilon > 0$ possiamo suddividere ogni $\gamma \in I$ in segmenti $\gamma_i$ di lunghezza al massimo $\epsilon$, congiungiamo poi gli estremi di $\gamma_i$ al punto base tramite geodetiche minimali ottenendo curve $\sigma_i$ di lunghezza $L(\sigma_i) \leq 2\text{diam}(M) + \epsilon$ tali che $\gamma = \prod \sigma_i$.
- $S^1$ mostra che la scelta del bound uniforme $d(p, \gamma p) \leq 2\text{diam}(M)$ è ottimale.

Finalmente

*Dimostrazione.* (lemma)
Triangoliamo $M$, successuvamente con una serie di suddivisioni facciamo in modo che i lati $e_{ij}$ siano tutti di lunghezza $l_{ij} < \epsilon < \text{injrad}\,(M)$, come nell'osservazione congiungiamo i vertici dei lati con il punto base con geodetiche minimali producendo loop $\gamma_{ij}$ di lunghezza $l_{ij} \leq 2\text{diam}\,(M) + \epsilon$

- per un fatto standard sulla topologia dei CW-complessi, per la cui dimostrazione è sufficiente far riferimento all'**approssimazione cellulare** e al teorema di **Van Kampen**, abbiamo che i loop $\{\gamma_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ generano $\pi_1(M)$ con relazioni della forma $\gamma_{ij}\gamma_{jk}\gamma_{ki}^{-1}$.
- $d\,(p, \gamma_{ij}p) \leq L(\gamma_{ij}) \leq 2\text{diam}\,(M) + \epsilon$.

□

**Commento**: nelle ipotesi del teorema di Anderson, se assumiamo come vincolo più forte un bound uniforme sulla curvatura sezionale, ovvero consideriamo la classe $\mathcal{C}(K, v, D)$ delle $n-$varietà che soddisfano

$$|\text{sec}| \leq K \qquad \text{vol}\, M \geq v \qquad \text{diam}\,(M) \leq D$$

riduciamo enormemente le possibilità per la topologia di $M$, infatti vale il seguente risultato dimostrato da Cheeger nella tesi di dottorato (Petersen ne ha data una dimostrazione che utilizza il confronto del volume)

Teorema 3.5 (Cheeger, 1967). *la classe $\mathcal{C}(K, v, D)$ contiene solo finiti tipi topologici a meno di diffeomorfismi.*

# 4 Sviluppi

Il confronto del volume è stato intensamente e diffusamente utilizzato da Gromov nello sviluppo della *teoria geometrica dei gruppi*, ad esempio: un concetto base è quello della crescita di un gruppo $G$: un gruppo si dice a *crescita polinomiale* se ammette un sistema finito simmetrico di generatori $S$ tale che la funzione $\phi_S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ che associa ad ogni naturale $n \in \mathbb{N}$ il numero di elementi distinti di $G$ che si possono scrivere come prodotto di al max $n$ generatori in $S$ cresce meno di un polinomio. Con tecniche del tutto simili a quelle illustrate in questo lavoro si può mostrare il seguente

Teorema 4.1 (Milnor-Wolf). *$(M, g)$ cpt., $n = \dim M$, se Ric $\geq 0$ allora $\pi_1(M)$ ha crescita polinomiale di grado al max $n$*

Un teorema profondo di Gromov caratterizza tutti i gruppi con crescita polinomiale e fornisce un teorema di struttura sulla topologia delle varietà con gruppo fondamentale a crescita polinomiale, diamo un enunciato della caratterizzazione:

Teorema 4.2 (Gromov). *Un gruppo discreto ha crescita polinomiale se e solo se è virtualmente nilpotente.*