

# Richiami sulle varietà (curve, superfici, ipersuperfici)

## φ 1. Curve in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ( $\mathbb{R}^n$ )

si Veda • ABATE - TOVENA - "CURVE e SUPERFICI"  
• DO CARMO - "DIFF. GEOM. OF CURVES AND SURFACES"

## φ 2. Ipersuperfici e II Forme fondamentali

\* Tutto si estende a codimensione  $> 1$   
e ambiente varietà riemanniana  $(M, g)$ .  
Noi ci occupiamo di ipersuperfici in  $\mathbb{R}^{N+1}$   
(Superfici in  $\mathbb{R}^3$ )

$S \xrightarrow[\varphi]{} \mathbb{R}^{N+1}$  dim  $S = N$       Metriano su  $S =$  restrizione p. sezione di  $\mathbb{R}^{N+1}$   
 $\Rightarrow \exists!$  (a meno di segno) locamente  $\mathbb{R}^{N+1}$   
 $\nu: S \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$  campo NORMALE UNITARIO

cioè  $g(\nu_p, \nu_p) = 0 \quad \forall \nu_p \in T_p S$

basi del tangente di  $S: \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$   
in certe locali  $\mathbb{R}^{N+1}$

$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} e_\alpha \quad \{e_\alpha\}$  base ortonormale canonica di  $\mathbb{R}^{N+1}$

OSS:  $\forall p \in S \quad \nu(p) \in S^N \subset \mathbb{R}^{N+1}$

$G(p) = \nu(p) \in S^N \quad G: S \rightarrow S^N$   
MAPPA di GAUSS

$$dG_p(v) = \frac{\partial \psi}{\partial x^i} v^i \quad \text{differenziale} \quad \text{Mappa Gauss} \quad (2)$$

$$dG_p: T_p S \rightarrow T_{v(p)} S^N = \{w \in \mathbb{R}^{N+1} \mid \langle v(p), w \rangle = 0\} \approx T_p S$$

Perché si ha  $\langle v(p), v(p) \rangle = 1$

$$v \in T_p M \quad 0 = v \langle v(p), v(p) \rangle = 2 \langle dG_p(v), v(p) \rangle = 0$$

\*)  $dG_p$  si può vedere allora come una mappa lineare da  $T_p S \rightarrow T_p S$

OPERATORE FORMA (SHAPE OPERATOR):

$$S'_p = -dG_p: T_p S \rightarrow T_p S$$

Definiamo:

## II Forme Fondamentale di S

$$\Pi_p(v, w) = -\langle dG_p(v), w \rangle \quad \forall v, w \in T_p S$$

( $\Pi$  talvolta A, talvolta B)  
in coordinate  $h_{ij}$

$$h_{ij} = \Pi_{ij} = \Pi(\partial_i, \partial_j) = -\langle dG(\partial_i), \frac{\partial \psi}{\partial x^j} \rangle$$

$$\text{Deriviamo} \quad \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \mid v \right\rangle = 0 \quad \forall i$$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \mid v \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \mid v \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \mid dG(\partial_j) \right\rangle$$

$$= \left\langle \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} \mid v \right\rangle - \Pi_{ij}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Pi_{ij} = h_{ij} = \left\langle v \mid \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle} \quad (1)$$

# Equazioni di Gauss-Weingarten

(3)

$$\begin{aligned} \text{Si ha } \nabla_{\partial_i} \partial_j &= \Pi_{ij}^k \partial_k = \Pi_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = \\ &= \left[ \nabla_{\partial_i}^{\mathbb{R}^N} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right]^\pi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} - \langle \nu | \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \rangle \nu \end{aligned}$$

Da cui segue: (componente  $\times$  componente di  $\varphi$ )

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} = \Pi_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + h_{ij} \nu} \quad \textcircled{2}_{\text{GWS}}$$

OSS ①:  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_i}^{\mathbb{R}^N} \partial_j - h_{ij} \nu$

cui  $\Pi = (\nabla_{\partial_i}^{\mathbb{R}^N} \partial_j)^\perp \leftarrow$  Componente NORMALE

OSS ②: Dalla eq. ① segue che  $\Pi$  è simmetrico (2-forma bilineare)

Poiché  $\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} | \nu \rangle = 0$  derivando in  $\frac{\partial}{\partial x^j}$

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} | \nu \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} | \frac{\partial \nu}{\partial x^j} \right\rangle = 0 \quad \forall ij$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x^j} | \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right\rangle = -h_{ij}, \text{ allora}$$

$$A = \frac{\partial \nu}{\partial x^j} + h_{jk} g^{kp} \frac{\partial \varphi}{\partial x^p} \quad \frac{\partial \nu}{\partial x^j} \text{ è tangente}$$

$$\begin{aligned} \langle A | \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \rangle &= -h_{ij} + h_{jk} g^{kp} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^p} | \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right\rangle = -h_{ij} + h_{jk} g^{kp} g_{ip} \\ &= 0 \Rightarrow A = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x^i} = - h_{ij} g^{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$$

3  
902

Eq. (2) - (3) si dicono equazioni di Gauß-Weingarten

(Se ambiente è varietà  $(M, g)$  ci sono altri tensori in più)

$$\Pi(v, w) = g(S'(v), w)$$

• operatore femmo  $S'$  è autoaggiunto, con femmo quadratico associato  $\Pi$  simmetrico

oss:  $|\Pi| = |S'|$   
(metrico nei tensori)

\* Teo Spettrale si diagonalizziamo in una base ortogonale  $v_1, \dots, v_N$  di  $T_p M$  autovettori

$v_i$ : direzioni principali

$\lambda_i$ : curvature associate a  $v_i$

CURVATURE PRINCIPALI

\*) Si Vedo ABATE-TOVENA  
x interpretazione di  $\Pi, v_i, \lambda_i$   
in termini di curve su  $S$

$$G = \det S' \quad (\text{a meno di segno se } n \text{ dispari})$$

CURVATURA di GAUSS

$$G = \lambda_1 \dots \lambda_N$$

$$H = \text{tr } S' = h_{ij} g^{ij}$$

CURVATURA MEDIA

$$H = \lambda_1 + \dots + \lambda_N$$

$S$  superficie in  $\mathbb{R}^3$ ,  $v=2$

$$q = \lambda_1 \lambda_2 \quad H = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\begin{aligned} |\Pi|^2 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \\ &= H^2 - 2q \end{aligned}$$

$$\boxed{|\Pi|^2 = H^2 - 2q} \quad (N=2)$$

OSS :  $\delta_i = \delta(\partial_i) = -\frac{\partial v}{\partial x_i}$   
EX:

OSS : Dallo eq. (2) si ha

$$\text{Hess } \varphi^\alpha = \frac{\partial^2 \varphi^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^k} = \Delta_j^\alpha$$

cioè tracciando

$$\Delta \varphi^\alpha = H v^\alpha \quad \text{cioè} \quad \Delta \varphi^\alpha = H v^\alpha$$

( $Hv$  si dice curvatura media vettoriale)

EX

OSS: (5)  
Interpretazione  
geometrica  
curvatura  
di Gauss  
in termini  
di curvatura  
locale  
vedendo  $S$   
come grafico  
nel suo  
tangentiale  
in un  
punto

Calcoliamo ora Riccio di  $S$ :

(6)

$$R_{ijk\epsilon} = g(R_{ijk\epsilon} \partial_{\kappa} \partial_{\epsilon}) = g(\nabla_j^s \nabla_i^s \partial_{\kappa} - \nabla_i^s \nabla_j^s \partial_{\kappa}, \partial_{\epsilon})$$

$$\nabla_j^s \nabla_i^s \partial_{\kappa} = \nabla_j^s \left[ \Gamma_{ik}^p \frac{\partial}{\partial x^p} \right] = \quad (\Gamma_{ii}^j = 0)$$

$$= \left\{ \nabla_j^{R^N} \left( \Gamma_{ik}^p \frac{\partial \varphi}{\partial x^p} \right) \right\}^{\pi} = \left\{ \nabla_j^{R^N} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} - h_{ik}^s \right) \right\}^{\pi}$$

↳ per l'equazione di Gauss

$$= \left\{ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} - \left( \nabla_j^{R^N} h_{ik}^s \right) \nu - h_{ik} \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \right\}^{\pi}$$

$$= \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} e_{\alpha}^{\pi} - h_{ik} \left( -h_{jp} g^{ps} \frac{\partial \varphi}{\partial x^s} \right)$$

↳ per l'equazione di Gauss

$$\Rightarrow g(\nabla_j^s \nabla_i^s \partial_{\kappa}, \partial_{\epsilon}) = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\epsilon}} + h_{ik} h_{jp} g^{ps} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^s} \middle| \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\epsilon}} \right\rangle$$

$$= \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\epsilon}} + h_{ik} h_{jp} g^{ps} g_{s\epsilon}$$

$$= \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\epsilon}} + h_{ik} h_{j\epsilon}, \text{ da cui}$$

~~WABA~~  
KULAKARNI  
NOMIZU

$$(*) R_{ijk\epsilon} = h_{ik} h_{j\epsilon} - h_{jk} h_{i\epsilon} = \left( \frac{h \otimes h}{2} \right)_{ijk\epsilon}$$

$$\text{Ricc} = \frac{h \otimes h}{2}$$

(4) KN

EQUAZIONE di GAUSS

OSS:  $N=2$ , re  $e_1, e_2$  e loro orbite di  $T_p S$

$$\text{Ricci} = \frac{R}{2} g \otimes g = \frac{h \otimes h}{2} \quad \text{Sec}_p = \frac{R_p}{2} \quad (7)$$

$$\frac{R}{2} = R(e_1, e_2, e_1, e_2) = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = \det S = G$$

$$\Rightarrow R = 2G$$

CURVATURA  
GAUSSIANA  
di S

(Teorema "Egregium" di Gauss

- la curvatura Gaussiana di una  
superficie in  $\mathbb{R}^3$  dipende  
solo dalle metriche (COME R!)

in qualunque ipersuperficie

$$\text{Ricci} = \frac{h \otimes h}{2}$$

$$\text{Ric}_{ik} = g^{je} (h_{ie} h_{jk} - h_{ie} h_{jk})$$

$$= H h_{ik} - h_{ik}^2 \quad \left( h_{ik}^2 = h_{ij}^2 h_{ek}^2 \right)$$

$$R = \text{tr Ricci} = H^2 - |h|^2 \quad \hookrightarrow \text{C.M.E.P.A}$$

$$= (\sum \lambda_i)^2 - \sum \lambda_i^2$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \text{COERENTE} \\ \text{CON} \\ |h|^2 = H^2 - 2G \\ \text{re } N=2 \end{cases}$$

$h^2$  associata  
al quadrato  
dell'operatore  
SHAPE  $S^2 = S \circ S$

$$= \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j$$

$\lambda_i$  autovalori  $\Pi$  - "autovalori principali"

Se  $P = \langle v, w \rangle$   $v, w$  base ortogonale P

$$\text{Sec}(v, w) = R(v, w, v, w) = h(v, v)h(w, w)$$

$$R(e_i, e_j, e_i, e_j) = h(e_i, e_i)h(e_j, e_j)$$

In particolare, se  $\{e_i\}$  ha come base (8)  
diagonalmente  $h$ , con autovalori associati

$e_i$  diagonalmente Ricci

$$R_{ii} = Ric(e_i, e_i) = H h_{ii} - h_{ii}^2 = H \lambda_i - \lambda_i^2 = \sum_{j \neq i} \lambda_i \lambda_j$$

$$Sec(e_i, e_j) = R(e_i, e_j, e_i, e_j) = h_{ii} h_{jj} = \lambda_i \lambda_j$$

$$R = 2 \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j$$

$\{e_i, e_j\}$  è base di  $\Lambda^2 M$

$$R(e_i, e_j, e_i, e_j) = R(e_i, e_j, e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j = Sec(e_i, e_j)$$

$$R(e_i, e_j, e_k, e_l) = R(e_i, e_j, e_k, e_l) = h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{jk} = 0$$

e meno che  $(i=k \text{ e } j=l)$  oppure  $(i=l \text{ e } j=k)$

$\Rightarrow \{e_i, e_j\}$  DIAGONALIZZA  $R$  (R è PURO)  
DEF 5.27

OSS: "h" è lo scalare quadrato

(per il Suokoni-Nenim di Ricci  $R$ )



Tomando e SW1 ri ho

(2)

$$\left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} \right]^T = \left( \prod_{ij}^P \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_p} \right)^T + \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k}$$

↓ SW1 di nuovo

$$\left[ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j} \right]^T = \prod_{ij}^P h_{pk} + \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k}$$

⇒ scambiando i e k e ribatteando

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k} + \prod_{ij}^P h_{pk} = \frac{\partial h_{kj}}{\partial x_i} + \prod_{kj}^P h_{pi} \quad (**)$$

No otteniamo, volendo

$$\nabla_k h_{ij} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k} - \prod_{ik}^P h_{pj} - \prod_{jk}^P h_{pi}$$

$$\nabla_i h_{kj} = \frac{\partial h_{kj}}{\partial x_i} - \prod_{ik}^P h_{pj} - \prod_{ij}^P h_{pk}$$

$$\nabla_k h_{ij} - \nabla_i h_{kj} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial h_{kj}}{\partial x_i} - \prod_{jk}^P h_{pi} + \prod_{ij}^P h_{pk} = 0$$

per le (\*\*\*) ⇒  $\nabla h$  è 3-forma SIMMETRICA

EQUAZIONI DI CODAZZI-MAINARDI

$$\nabla_k h_{ij} = \nabla_i h_{kj}$$

(5) CM

Cioè  $h$  è TENSORE di CODAZZI

# Teoremi importanti (Geometrici)

(10)

1) Teo Hadamard I:  $M^N$  cpt  $N \geq 1$   $\pi^N \hookrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$

① ~~questo teorema~~  
 $\Pi$  definito positivo  $\implies \pi^N$  diffeom  $S^N$

2) Teo Hadamard II:  $M^N$  cpt  $n \geq 2$   $\pi^N \hookrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$   
sono equivalenti:

- Sec  $\neq 0$
- Sec  $> 0$
- $M$  orientabile,  $\nabla$  normale globale

$$\nabla: M^N \rightarrow S^N \text{ DIFFEOM}$$

$\implies M^N$  è STRETTAMENTE CONVESSA

3) Ripetuto OVALOIDI:  $M_1, M_2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$  compatte  
euclidi Sec  $> 0$  ( $Q > 0$ )

$$M_1 \xrightarrow{\neq} M_2$$

ISOMETRIA

$$\implies \exists \text{ iso } F \text{ di } \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$F(M_1) = M_2$$

## 4) Teo Fondamentale delle ipersuperfici

Se  $(M^N, g)$  ha tensore simmetrico tipo  $(1,1)$   $S$   
che soddisfa equazioni di GAUSS e di  
CODAZZI-MAINARDI  $\implies \forall p \in M \exists U$  intorno di  $p$   
e isometria  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$  di cui  $S$  è  
l'operatore forme -

## ⑤ VARIAZIONI del funzionale AREA

11

$$\varphi: M^N \hookrightarrow \mathbb{R}^{N+1} \quad A(\varphi) = \int_{M^N} d\mu^M$$

$$\varphi_s: M^N \times (-\xi, \xi) \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$$

$$\frac{d}{ds} A(\varphi_s) \Big|_{s=0} = - \int_{M^N} H \langle X | \nu \rangle d\mu^M$$

$$\text{dove } X(p) = \frac{\partial \varphi_s(p)}{\partial s} \Big|_{s=0}$$

"  $H \nu$  è Eq. Eulero - Lagrangiana di  $\beta$ -Area"

• Se  $M^N$  soddisfa  $H \equiv 0$  si dice  
SUPERFICIE MINIMA

## ⑥ Teorema di Gauss-Bonnet

$$M^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$$

$M^2$  compatta,  $G$  c. Gauss di  $M$

$$\int_{M^2} G d\mu = 2\pi \chi(M^2)$$

$\hookrightarrow$  Caratteristica Eulero

$$\chi(S^2) = 2 \quad \chi(T^2) = 0$$

$$\text{genere}(M^2) = \frac{2 - \chi(M^2)}{2}$$

## CAPITOLO 7

### Sottovarietà

Proseguiamo in questo capitolo l'analisi della geometria delle sottovarietà di una varietà riemanniana, ricollegandoci alle Sezioni 2.2 (se ne ricordi la parte finale a commento del teorema di immersione di Nash 2.2.4) e 3.3. Ciò che rende più ricca ed estremamente interessante la geometria delle sottovarietà (o delle immersioni isometriche di una varietà riemanniana in un'altra varietà riemanniana "ambiente") è che non solo è rilevante la loro struttura/curvatura "intrinseca" (invariante per isometria) legata alla metrica indotta su di esse dallo spazio ambiente, ma anche la loro "giacitura" (o immersione) in quest'ultimo e le conseguenti relazioni tra le due geometrie/curvature e proprietà "estrinseche" (possibilmente indipendenti dalla struttura riemanniana della sottovarietà e dovute "all'interazione" con l'ambiente), in quanto non ve ne è una "canonica" invariante per isometria, in generale, dunque tali proprietà possono variare con essa. Per esempio, come accennato nell'Esempio 5.1.4, la geometria "intrinseca" delle curve è banale, mentre la geometria delle curve negli spazi euclidei è molto interessante, come vedremo nella Sezione 7.5.

Molto del materiale di questo capitolo viene dai libri di Spivak [187], Do Carmo [73, 74], Abate–Tovena [1] e Petersen [167, 168] e Kobayashi–Nomizu [130].

#### 7.1. Le equazioni fondamentali

Il riferimento principale per questa sezione è [187, Volume 4, Capitolo 7, Sezione C] (si veda anche [130, Capitolo 7, Sezioni 3–4]).

Ricordiamo alcune definizioni e fatti dalla Sezione 3.3. Data una sottovarietà riemanniana  $n$ -dimensionale  $S$  di  $(M, g)$  di dimensione  $m$ , con la metrica indotta  $i^*g$ , dove  $\iota : S \hookrightarrow M$  è la mappa di inclusione, possiamo decomporre  $T_p M$  come somma diretta ortogonale dello spazio tangente  $T_p S$  e dello spazio normale  $N_p S$  di  $S$ , per ogni punto  $p \in S$ , dunque ogni vettore  $v \in T_p M$  può essere decomposto ortogonalmente rispetto a  $g_p$  in modo unico come  $v = v^\top + v^\perp$ , con  $v^\top \in T_p S$  e  $v^\perp \in N_p S$ .

Indicando con  $\nabla^M$  e  $\nabla^S$  le connessioni di Levi–Civita rispettivamente di  $M$  e  $S$ , se  $X, Y \in \Gamma(TS)$ , sappiamo dalla formula (3.9), che per ogni  $p \in S$ ,

$$(\nabla_X^S Y)_p = (\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{Y})_p^\top$$

dove  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  sono delle estensioni locali dei campi  $X$  e  $Y$  (visti come mappe da  $S$  in  $TM$ ) in un intorno di  $p \in M$ .

Abbiamo inoltre definito (Definizione 3.3.5) la connessione normale  $\nabla^\perp$  sul fibrato normale  $NS$  di  $S$  (che è compatibile con la metrica  $g$ , ristretta a  $NS$ ), per ogni  $p \in S$ , come

$$(\nabla_{\tilde{X}}^\perp \nu)_p = (\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{\nu})_p^\perp$$

dove  $\tilde{X}$  e  $\tilde{\nu}$  sono delle estensioni locali dei campi  $X \in \Gamma(TS)$  e  $\nu \in \Gamma(NS)$ , in un intorno di  $p \in M$ .

*Per semplicità e comodità di notazione, spesso nel seguito del capitolo (in special modo nei calcoli), eviteremo di segnalare e denotare diversamente i campi o i tensori che formalmente, per essere rigorosi, dovrebbero essere estesi localmente, in quanto il risultato delle loro derivazioni covarianti (usuali o normali) è indipendente dall'estensione.*

**OSSERVAZIONE 7.1.1.** Si noti che se  $\{X_1, \dots, X_n\}$  è un riferimento locale per lo spazio tangente di  $S$  e  $\{\xi_{n+1}, \dots, \xi_m\}$  è una base ortonormale locale del fibrato normale, si ha che i simboli di Christoffel  ${}^\perp\Gamma_{i\alpha}^\beta$  della connessione normale  $\nabla^\perp$  sono dati da  ${}^\perp\Gamma_{i\alpha}^\beta = g(\nabla_{X_i}^\perp \xi_\alpha, \xi_\beta)$  e soddisfano

$${}^\perp\Gamma_{i\alpha}^\beta = -{}^\perp\Gamma_{i\beta}^\alpha$$

per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $\alpha, \beta \in \{n+1, \dots, m\}$ , essendo  $g(\xi_\alpha, \xi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ .

Argomentando come nella Sezione 3.7, questa connessione normale si può estendere a tutta l'algebra tensoriale generata da  $NS$  e "unita" a  $\nabla^S$  definisce una connessione  $\tilde{\nabla}^S$  sui "tensori misti", cioè "agenti" sia sul fibrato tangente che normale di  $S$ . Per esempio, se  $T$  agisce sulle  $(k+l)$ -uple di campi vettoriali lungo  $S$  di cui i primi  $k$  sono tangenti e gli altri  $l$  sono normali, si ha

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X^S T(X_1, \dots, X_k, \nu_1, \dots, \nu_l) &= \tilde{\nabla}_X^S (T(X_1, \dots, X_k, \nu_1, \dots, \nu_l)) \\ &- T(\nabla_X^S X_1, \dots, X_k, \nu_1, \dots, \nu_l) - \dots - T(X_1, \dots, \nabla_X^S X_k, \nu_1, \dots, \nu_l) \\ &- T(X_1, \dots, X_k, \nabla_X^\perp \nu_1, \dots, \nu_l) - \dots - T(X_1, \dots, X_k, \nu_1, \dots, \nabla_X^\perp \nu_l) \end{aligned}$$

dove  $\tilde{\nabla}_X^S$  immediatamente dopo il segno di uguaglianza "opera" secondo il "target" di  $T$ . Volendo essere più formali, definendo i fibrati vettoriali

$$F_{s,q}^{r,p} S = T_s^r S \otimes N_q^p S = \bigotimes^s T S^* \otimes^r T S \otimes^q N S^* \otimes^p T S$$

ed estendendo ad essi la metrica indotta su  $S$ , come nella Sezione 2.4, l'operatore  $\tilde{\nabla}^S$  definito sopra è una connessione su tutti questi fibrati, ottenuta estendendo in modo naturale le due connessioni  $\nabla^S$  e  $\nabla^\perp$ , analogamente alla Sezione 3.7 per  $\nabla^S$  e a quanto detto sopra per  $\nabla^\perp$ . Inoltre, tale connessione è compatibile con la metrica.

Associata alla connessione normale  $\nabla^\perp$  abbiamo una nozione di curvatura, detta *curvatura normale*, come segue: per ogni coppia di campi tangenti  $X, Y$  e di un campo normale  $\nu$ , definiamo l'*operatore di Riemann normale* come

$$R^\perp(X, Y)\nu = \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \nu - \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \nu - \nabla_{[Y, X]}^\perp \nu$$

e l'associato *tensore di curvatura normale*

$$R^\perp(X, Y, \nu, \xi) = g(R^\perp(X, Y)\nu, \xi),$$

per ogni  $\xi \in \Gamma(NS)$ , che gioca lo stesso ruolo del tensore di Riemann nello scambio di derivate covarianti sul fibrato normale, cioè, in una carta coordinata, se  $\{\xi_\alpha\}$  è una base locale del fibrato normale e  $\nu = \nu^\alpha \xi_\alpha$ , si ha (lo si mostri per esercizio)

$$(\nabla^\perp)_{ij}^2 \nu^\alpha - (\nabla^\perp)_{ji}^2 \nu^\alpha = R_{ji\beta\gamma}^\perp g^{\gamma\alpha} \nu^\beta.$$

**ESERCIZIO 7.1.2.** Si espliciti il tensore di curvatura normale  $R^\perp$  in termini dei simboli di Christoffel  ${}^\perp\Gamma_{i\alpha}^\beta$  della connessione normale  $\nabla^\perp$ , in una base locale dello spazio normale  $\{\xi_\alpha\}$  e si studino le sue proprietà di simmetria, come fatto per il tensore di curvatura nella Sezione 5.2.

Introduciamo ora la *seconda forma fondamentale*  $\text{II}$  di  $S$ , talvolta denotata anche con  $A$  o  $B$  in letteratura.

**DEFINIZIONE 7.1.3.** La *seconda forma fondamentale*  $\text{II}$  di  $S$  in  $M$  è la 2-forma simmetrica su  $TS$  a valori in  $NS$ , definita da

$$\text{II}_p(X, Y) = (\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{Y})_p^\perp$$

per ogni  $p \in S$ , dove  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  sono delle estensioni locali dei campi  $X, Y \in \Gamma(TS)$ , in un intorno di  $p$ .

Si vede facilmente (lo si provi per esercizio) che  $\text{II}_p(X, Y)$  è indipendente dalle estensioni locali di  $X$  e  $Y$ , inoltre è  $C^\infty$ -lineare (dunque, con un abuso di terminologia, un 2-tensore covariante a valori in  $NS$ ). Chiaramente, si ha la seguente uguaglianza, talvolta chiamata *formula di Gauss*

$$\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{Y} = \nabla_X^S Y + \text{II}(X, Y) \quad (7.1)$$

da cui segue la simmetria di  $\text{II}$ , infatti

$$\text{II}(X, Y) - \text{II}(Y, X) = (\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{Y} - \nabla_{\tilde{Y}}^M \tilde{X}) - (\nabla_X^S Y - \nabla_Y^S X) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]^M - [X, Y]^S = 0,$$

per l'Esercizio 1.6.12.

Vale la seguente formula, detta *equazione di Gauss* che lega la curvatura di  $S$  alla curvatura dell'ambiente  $M$  e alla seconda forma fondamentale,

$$R^S(X, Y, Z, W) = R^M(X, Y, Z, W) + g(\text{II}(X, Z), \text{II}(Y, W)) - g(\text{II}(X, W), \text{II}(Y, Z)) \quad (7.2)$$

per ogni  $X, Y, Z, W \in \Gamma(TS)$  (si noti come il termine extra “assomigli” alla metà di un prodotto di Kulkarni–Nomizu di  $\Pi$  con se stessa, si veda la Definizione 5.3.3). Infatti, si ha

$$\begin{aligned}
R^S(X, Y, Z, W) &= g(\nabla_Y^S \nabla_X^S Z - \nabla_X^S \nabla_Y^S Z - \nabla_{[Y, X]}^S Z, W) \\
&= g(\nabla_Y^M \nabla_X^S Z - \nabla_X^M \nabla_Y^S Z - \nabla_{[Y, X]}^M Z, W) \\
&= g(\nabla_Y^M \nabla_X^M Z - \nabla_X^M \nabla_Y^M Z - \nabla_{[Y, X]}^M Z, W) \\
&\quad - g(\nabla_Y^M (\Pi(X, Z)) - \nabla_X^M (\Pi(Y, Z)), W) \\
&= R^M(X, Y, Z, W) - Yg(\Pi(X, Z), W) + Xg(\Pi(Y, Z), W) \\
&\quad + g(\Pi(X, Z), \nabla_Y^M W) - g(\Pi(Y, Z), \nabla_X^M W) \\
&= R^M(X, Y, Z, W) + g(\Pi(X, Z), \Pi(Y, W)) - g(\Pi(X, W), \Pi(Y, Z))
\end{aligned}$$

dove per semplicità, abbiamo indicato con la stessa lettera i campi estesi localmente, come detto sopra.

Segue che in una carta coordinata adattata per  $S$ , abbiamo

$$\begin{aligned}
\nabla_i^M \frac{\partial}{\partial x^j} &= \Pi_{ij} + {}^S \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\
R_{ijkl}^S &= R_{ijkl}^M + g(\Pi_{ik}, \Pi_{jl}) - g(\Pi_{il}, \Pi_{jk}) \\
R_{ik}^S &= g^{jl} R_{ijkl}^S = R_{ik}^M + g(\Pi_{ik}, H) - g^{jl} g(\Pi_{il}, \Pi_{jk}) \\
R^S &= g^{ik} R_{ik}^S = R^M + |H|^2 - |\Pi|^2
\end{aligned}$$

dove tutti gli indici liberi e nelle somme variano solo da 1 a  $n$ , inoltre abbiamo usato il simbolo  $H$  per la *curvatura media*, definita come il campo normale  $H : S \rightarrow NS$  lungo  $S$  dato dalla traccia della seconda forma fondamentale

$$H = g^{ij} \Pi_{ij}.$$

**OSSERVAZIONE 7.1.4.** Il nome “equazione di Gauss” è dovuto alla connessione della formula (7.2) con il suo *Theorema Egregium*, che vedremo nella Sezione 7.5, riguardo all’invarianza per isometria della *curvatura di Gauss*  $G$  di una superficie  $S$  in  $\mathbb{R}^3$ . Ciò è in effetti espresso dalla quarta equazione sopra, una volta che la si riscriva come  $R^S = |H|^2 - |\Pi|^2 = 2G$  (Osservazione 7.4.5), infatti  $G$  è definita come il prodotto dei due autovalori della seconda forma fondamentale  $\Pi$  che, in tale caso di codimensione uno, può essere considerata come una forma bilineare simmetrica a valori reali, come vedremo nella sezione 7.3.

**OSSERVAZIONE 7.1.5.** La formula di Gauss (7.1) esprime il fatto che la seconda forma fondamentale misura in un certo senso la “differenza” tra le derivate covarianti dell’ambiente  $M$  e di una sottovarietà  $S$ . Se dunque è nulla in ogni punto, le due derivate coincidono sui campi tangenti alla sottovarietà. In particolare, le geodetiche di  $S$  sono anche geodetiche di  $M$ , da cui segue che  $S$

è totalmente geodetica (si veda la Definizione 4.3.21 e si mostri che vale anche il viceversa, per esercizio). Inoltre, dall'equazione di Gauss (7.2), si ha che  $\text{Sec}^S(\pi) = \text{Sec}^M(\pi)$  per ogni piano tangente  $\pi$  a  $S$ .

**PROPOSIZIONE 7.1.6 (Disuguaglianza di Synge).** *Sia  $S$  una sottovarietà riemanniana di  $(M, g)$  con la metrica indotta e  $\gamma : I \rightarrow S \subseteq M$  una geodetica di  $M$  (dunque anche di  $S$ ). Allora, per tutti i 2-piani  $\pi \subseteq T_{\gamma(t)}S$  tali che  $\dot{\gamma}(t) \in \pi$ , si ha*

$$\text{Sec}^S(\pi) \leq \text{Sec}^M(\pi).$$

Se  $S$  è una superficie, per ogni  $p = \gamma(t)$ , si ha

$$R_p^S/2 = \text{Sec}^S(T_pS) \leq \text{Sec}^M(T_pS),$$

con uguaglianza se e solo se  $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}^M Y = 0$ , dove  $Y$  è un campo unitario lungo  $\gamma$ , tangente a  $S$  e puntualmente ortogonale a  $\dot{\gamma}$ , dunque  $T_pS = \langle X_p, Y_p \rangle$  per ogni punto  $p$  della curva  $\gamma$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $p = \gamma(t)$ . Possiamo assumere che  $\gamma$  sia parametrizzata in lunghezza d'arco, dunque  $\dot{\gamma}(t) = X_p \in T_pM$  è un vettore unitario e sia  $Y_p \in T_pM$  un altro vettore unitario, ortogonale a  $X_p$  e tale che  $\pi = \langle X_p, Y_p \rangle$ . Per l'equazione di Gauss (7.2), abbiamo

$$\begin{aligned} \text{Sec}^S(\pi) &= R^S(X_p, Y_p, X_p, Y_p) \\ &= R^M(X_p, Y_p, X_p, Y_p) + g(\text{II}(X_p, X_p), \text{II}(Y_p, Y_p)) - g(\text{II}(X_p, Y_p), \text{II}(X_p, Y_p)) \\ &\leq \text{Sec}^M(\pi) + g(\text{II}(X_p, X_p), \text{II}(Y_p, Y_p)). \end{aligned}$$

Essendo  $X = \dot{\gamma}$  parallelo lungo  $\gamma$ , si ha  $\nabla_X^M X = 0$ , dunque  $\text{II}(X_p, X_p) = 0$  e la tesi segue.

Nel caso che  $S$  sia una superficie, la disuguaglianza segue dal caso generale e sempre per l'equazione di Gauss (7.2), essendo  $\text{II}(X_p, X_p) = 0$ , abbiamo

$$\text{Sec}^S(T_pS) = \text{Sec}^M(T_pS) - g(\text{II}(X_p, Y_p), \text{II}(X_p, Y_p))$$

dove il campo  $Y$  lungo  $\gamma$  è definito in ogni punto della curva dall'essere tangente a  $S$ , unitario e ortogonale a  $X = \dot{\gamma}$ , come sopra. Dunque, si ha l'uguaglianza se e solo se  $\text{II}(X_p, Y_p) = (\nabla_X^M Y)_p^\perp = 0$ . Notando che  $g(X, Y) = 0$  in tutti i punti della curva implica

$$0 = Xg(X, Y) = g(\nabla_X^M X, Y) + g(X, \nabla_X^M Y) = g(X, \nabla_X^M Y)$$

e si ha  $g(\nabla_X^M Y, Y) = 0$ , essendo  $Y$  unitario, segue che  $\nabla_X^S Y = (\nabla_X^M Y)^\top = 0$ , poiché  $T_{\gamma(t)}S$  è generato da  $X(t)$  e  $Y(t)$ , per ogni  $t \in I$ . La condizione necessaria e sufficiente di uguaglianza in  $p = \gamma(t)$  è allora  $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}^M Y = 0$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE 7.1.7.** L'uguaglianza vale allora su un tratto della geodetica  $\gamma$  se e solo se anche il campo  $Y$  è parallelo (in  $M$ ), cioè il piano  $T_{\gamma(t)}S = \langle X(t), Y(t) \rangle$  è "parallelo lungo  $\gamma$ ", nel senso che ogni campo  $Z$  lungo  $\gamma$  tangente



a  $S$  soddisfa  $\nabla_{\dot{\gamma}(t)}Z(t) \in T_{\gamma(t)}S$  e ogni campo parallelo (in  $M$ ) lungo  $\gamma$  che in un punto appartiene a  $T_{\gamma(t)}S$ , è tangente a  $S$  in tutto tale tratto.

OSSERVAZIONE 7.1.8. Se  $S$  è una superficie *rigata* di  $\mathbb{R}^3$ , cioè per ogni suo punto passa un segmento di retta di  $\mathbb{R}^3$  contenuta in  $S$ , allora, la sua curvatura scalare/sezionale (e quella gaussiana, che vedremo nella Definizione 7.3.3, per l'Osservazione 7.4.5) è nonpositiva (si veda l'esempio dell'elicoide 2.3.15). Tale curvatura è inoltre nulla lungo una di queste rette se e solo se il piano tangente alla superficie, visto come un 2-piano di  $\mathbb{R}^3$ , è costante lungo tale retta (si veda il cono nell'Esempio 3.6.9).

Come detto sopra, la seconda forma fondamentale misura in un certo senso la "differenza" tra le derivate covarianti dell'ambiente e della sottovarietà, studiamo ora invece la "differenza" tra la derivata covariante di  $M$  operante sui campi normali e la derivata covariante normale di  $S$ , cioè, siamo interessati a

$$\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{\nu} - \nabla_X^\perp \nu = (\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{\nu})^\top,$$

dove  $\tilde{X}$  e  $\tilde{\nu}$  sono delle estensioni locali dei campi  $X \in \Gamma(TS)$  e  $\nu \in \Gamma(NS)$ . Come la connessione di Levi-Civita di  $S$ , la connessione normale *non* è  $C^\infty$ -lineare nel campo derivato  $\nu$ , mentre la mappa

$$(X, \nu) \mapsto (\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{\nu})^\top$$

lo è (come la seconda forma fondamentale). Infatti, si ha

$$0 = Xg(\tilde{\nu}, \tilde{Y}) = g(\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{\nu}, \tilde{Y}) + g(\tilde{\nu}, \nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{Y}) = g((\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{\nu})^\top, Y) + g(\nu, \text{II}(X, Y)), \quad (7.3)$$

dove  $\tilde{Y}$  è un'estensione locale di un campo  $Y \in \Gamma(TS)$ , da cui tale fatto chiaramente segue.

DEFINIZIONE 7.1.9. Dato un campo normale  $\nu \in \Gamma(NS)$ , l'operatore di Weingarten  $A^\nu$  di  $S$  in  $M$  è definito come

$$A_p^\nu(X) = A_p(X, \nu) = -(\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{\nu})_p^\top$$

per ogni  $p \in S$ , dove  $\tilde{X}$  e  $\tilde{\nu}$  sono delle estensioni locali dei campi  $X \in \Gamma(TS)$  e  $\nu \in \Gamma(NS)$ , in un intorno di  $p$ .

Per quanto visto sopra, per ogni campo normale  $\nu$ , si ha che  $A^\nu$  è un tensore di tipo  $(1, 1)$  su  $S$ .

Per la formula (7.3), si ha allora la seguente *formula di Weingarten*

$$g(A^\nu(X), Y) = -g(\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{\nu}, Y) = g(\nu, \nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{Y}) = g(\nu, \text{II}(X, Y)) \quad (7.4)$$

per ogni coppia di campi  $X, Y \in \Gamma(TS)$  e per ogni campo normale  $\nu$  fissato, dunque l'operatore di Weingarten  $A_p^\nu : T_p S \rightarrow T_p S$  è l'operatore autoaggiunto

associato alla forma bilineare simmetrica

$$(v, w) \mapsto g_p(\nu_p, \Pi_p(v, w))$$

su  $T_p S$ , per ogni  $p \in S$ . Definiamo allora, per ogni campo normale  $\nu$ , la forma bilineare simmetrica  $\Pi^\nu$  data da

$$\Pi^\nu(X, Y) = g(\nu, \Pi(X, Y)) = g(A^\nu(X), Y),$$

segue che, in una carta coordinata, si ha  $g_{ik}(A^\nu)^k_j = \Pi^\nu_{ij}$ , cioè  $\Pi^\nu = (A^\nu)^b$ .

**ESERCIZIO 7.1.10.** Si mostri che indicando con  $\bar{\nabla}$  la derivata covariante lungo  $S$ , per ogni  $X \in \Gamma(TS)$  e  $Y$  campo vettoriale lungo  $S$  si ha la formula

$$\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X Y^\top + \bar{\nabla}_X Y^\perp = \nabla_X^M Y^\top + \nabla_X^M Y^\perp = \nabla_X^S Y^\top + \nabla_X^\perp Y^\perp + \Pi(X, Y^\top) - A^{Y^\perp}(X). \quad (7.5)$$

**ESERCIZIO 7.1.11.** Si mostri che  $|A^\nu| = |\Pi^\nu|$ , per ogni  $\nu \in \Gamma(NS)$  e che  $|A| = |\Pi|$ , vedendo  $A$  come un tensore che opera sul fibrato prodotto  $NS \times TS$  a valori in  $TS$ .

**OSSERVAZIONE 7.1.12.** Talvolta può essere utile estendere la seconda forma fondamentale  $\Pi$  e l'operatore di Weingarten  $A$  a tutti i campi vettoriali tangenti a  $M$  come segue,

$$\Pi(X, Y) = \Pi(X^\top, Y^\top) \quad (7.6)$$

$$A(X, Y) = A^Y(X) = A^{Y^\perp}(X^\top) \quad (7.7)$$

e definire, per ogni campo  $Z \in \Gamma(TM)$ ,

$$\Pi^Z(X, Y) = g(Z, \Pi(X, Y)) = g(Z, \Pi(X^\top, Y^\top))$$

$$A^Z(X) = A(X, Z) = A(X^\top, Z^\perp) = A^{Z^\perp}(X^\top)$$

per ogni coppia di campi  $X, Y \in \Gamma(TM)$ . Si noti che continua a valere che  $A^Z$  è l'operatore autoaggiunto associato a  $\Pi^Z$  e si ha  $g(A^Z(X), Y) = g(Z, \Pi(X, Y))$ , per ogni terna di campi  $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ .

Con questa convenzione, la formula (7.5) si scrive semplicemente

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X^S Y^\top + \nabla_X^\perp Y^\perp + \Pi(X, Y) - A^Y(X).$$

Scegliendo una base ortonormale locale  $\{\xi_{n+1}, \dots, \xi_m\}$  dello spazio normale a  $S$ , abbiamo  $m - n$  forme bilineari simmetriche, definite da

$$\Pi^\alpha(X, Y) = \Pi^{\xi_\alpha}(X, Y) = g(\xi_\alpha, \Pi(X, Y)) = g(A^{\xi_\alpha}(X), Y),$$

dunque

$$\Pi(X, Y) = \sum_{\alpha=n+1}^m \Pi^\alpha(X, Y) \xi_\alpha$$

e possiamo riscrivere l'equazione di Gauss (7.2) come

$$\begin{aligned} R^S(X, Y, Z, W) &= R^M(X, Y, Z, W) \\ &+ \sum_{\alpha=n+1}^m [\text{II}^\alpha(X, Z)\text{II}^\alpha(Y, W) - \text{II}^\alpha(X, W)\text{II}^\alpha(Y, Z)] \\ &= R^M(X, Y, Z, W) + \sum_{\alpha=n+1}^m (\text{II}^\alpha \otimes \text{II}^\alpha)(X, Y, Z, W)/2. \end{aligned} \quad (7.8)$$

ESERCIZIO 7.1.13. Si mostri che se  $\{\xi_\alpha\}$  è una base locale del fibrato normale, si ha

$$R_{ij\alpha\beta}^\perp = g([A^\alpha, A^\beta]\partial_{x_i}, \partial_{x_j})$$

dove  $A^\alpha$  e  $A^\beta$  sono rispettivamente gli operatori  $A^{\xi_\alpha}$ ,  $A^{\xi_\beta}$  e  $[A^\alpha, A^\beta]$  denota l'operatore di commutazione  $A^\alpha A^\beta - A^\beta A^\alpha : TS \rightarrow TS$ . Segue che la formula di interscambio di derivate covarianti sul fibrato normale si può scrivere

$$(\nabla^\perp)_{ij}^2 \nu^\alpha - (\nabla^\perp)_{ji}^2 \nu^\alpha = R_{ji\beta\gamma}^\perp g^{\gamma\alpha} \nu^\beta = g([A^\gamma, A^\beta]\partial_{x_i}, \partial_{x_j}) g^{\gamma\alpha} \nu^\beta,$$

per ogni campo vettoriale normale  $\nu = \nu^\alpha \xi_\alpha$ .

L'analogo dell'equazione di Gauss per la curvatura normale sono le equazioni di Ricci (o di Ricci-Kuhne),

$$R^M(X, Y, \nu, \xi) = R^\perp(X, Y, \nu, \xi) + g(A^\nu(Y), A^\xi(X)) - g(A^\nu(X), A^\xi(Y)) \quad (7.9)$$

per ogni  $X, Y \in \Gamma(TS)$  e  $\nu, \xi \in \Gamma(NS)$ . Infatti, si ha

$$\begin{aligned} R^M(X, Y, \nu, \xi) &= g(\nabla_Y^M \nabla_X^M \nu - \nabla_X^M \nabla_Y^M \nu - \nabla_{[Y, X]}^M \nu, \xi) \\ &= g(\nabla_Y^M \nabla_X^\perp \nu - \nabla_X^M \nabla_Y^\perp \nu - \nabla_{[Y, X]}^\perp \nu, \xi) \\ &\quad - g(\nabla_Y^M (A^\nu(X)) - \nabla_X^M (A^\nu(Y)), \xi) \\ &= R^\perp(X, Y, \nu, \xi) - g(\text{II}(A^\nu(X), Y) - \text{II}(A^\nu(Y), X), \xi) \\ &= R^\perp(X, Y, \nu, \xi) + g(A^\nu(Y), A^\xi(X)) - g(A^\nu(X), A^\xi(Y)) \end{aligned}$$

dove per semplicità, come sopra, abbiamo indicato con la stessa lettera i campi estesi localmente. Poiché abbiamo

$$g(A^\nu(X), A^\xi(Y)) = g_{ij} (A^\nu)^j_k X^k (A^\xi)^i_s Y^s = \text{II}^\nu_{ik} g^{il} \text{II}^\xi_{ls} X^k Y^s,$$

definendo la 2-forma  $\text{II}^\nu \star \text{II}^\xi$  come

$$(\text{II}^\nu \star \text{II}^\xi)(X, Y) = \sum_{i=1}^n \text{II}^\nu(X, e_i) \text{II}^\xi(Y, e_i)$$

dove  $\{e_i\}$  è una base ortonormale locale dello spazio tangente a  $S$  (si mostri per esercizio l'indipendenza della definizione di  $\text{II}^\nu \star \text{II}^\xi$  dalla scelta della base ortonormale), in coordinate locali si ha

$$(\text{II}^\nu \star \text{II}^\xi)(X, Y) = (\text{II}^\nu \star \text{II}^\xi)_{ks} X^k Y^s = \text{II}^\nu_{ik} g^{il} \text{II}^\xi_{ls} X^k Y^s = g(A^\nu(X), A^\xi(Y)),$$

da cui possiamo riscrivere le equazioni di Ricci (7.9) come

$$R^M(X, Y, \nu, \xi) = R^\perp(X, Y, \nu, \xi) + (\text{II}^\nu \star \text{II}^\xi)(Y, X) - (\text{II}^\nu \star \text{II}^\xi)(X, Y).$$

Vediamo ora come esprimere  $R^M(X, Y, Z, \xi)$  in termini della derivata covariante normale e della seconda forma fondamentale di  $S$ . Si hanno le cosiddette equazioni di Codazzi–Mainardi

$$\begin{aligned} R^M(X, Y, Z, \xi) &= g(\nabla_Y^\perp(\text{II}(X, Z)) - \nabla_X^\perp(\text{II}(Y, Z)), \xi) \\ &\quad - g(\text{II}(\nabla_Y^S X, Z), \xi) - g(\text{II}(X, \nabla_Y^S Z), \xi) \\ &\quad + g(\text{II}(\nabla_X^S Y, Z), \xi) + g(\text{II}(Y, \nabla_X^S Z), \xi). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Infatti,

$$\begin{aligned} R^M(X, Y, Z, \xi) &= g(\nabla_Y^M \nabla_X^M Z - \nabla_X^M \nabla_Y^M Z - \nabla_{[Y, X]}^M Z, \xi) \\ &= g(\nabla_Y^M \nabla_X^S Z - \nabla_X^M \nabla_Y^S Z - \nabla_{[Y, X]}^M Z, \xi) \\ &\quad + g(\nabla_Y^M(\text{II}(X, Z)) - \nabla_X^M(\text{II}(Y, Z)), \xi) \\ &= g(\text{II}(Y, \nabla_X^S Z), \xi) - g(\text{II}(X, \nabla_Y^S Z), \xi) + g(\text{II}([X, Y], Z), \xi) \\ &\quad + g(\nabla_Y^\perp(\text{II}(X, Z)) - \nabla_X^\perp(\text{II}(Y, Z)), \xi) \\ &= g(\text{II}(Y, \nabla_X^S Z), \xi) - g(\text{II}(X, \nabla_Y^S Z), \xi) \\ &\quad + g(\text{II}(\nabla_X^S Y, Z), \xi) - g(\text{II}(\nabla_Y^S X, Z), \xi) \\ &\quad + g(\nabla_Y^\perp(\text{II}(X, Z)) - \nabla_X^\perp(\text{II}(Y, Z)), \xi) \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} [R^M(X, Y)Z]^\perp &= \nabla_Y^\perp(\text{II}(X, Z)) - \nabla_X^\perp(\text{II}(Y, Z)) \\ &\quad - \text{II}(\nabla_Y^S X, Z) - \text{II}(X, \nabla_Y^S Z) \\ &\quad + \text{II}(\nabla_X^S Y, Z) + \text{II}(Y, \nabla_X^S Z) \end{aligned}$$

dove, sempre per semplicità, abbiamo indicato con la stessa lettera i campi estesi localmente.

**ESERCIZIO 7.1.14.** Fissata una base locale  $\{\xi_\alpha\}$  del fibrato normale di  $S$ , si esprima  $R^M(X, Y, Z, \nu)$ , con  $X, Y, Z \in \Gamma(TS)$  e  $\nu \in \Gamma(NS)$ , in termini delle forme bilineari  $\text{II}^\alpha = \text{II}^{\xi_\alpha}$  e dei simboli di Christoffel  ${}^\perp\Gamma_{i\alpha}^\beta$  della connessione normale  $\nabla^\perp$ .

Per mezzo della derivata covariante “estesa”  $\widetilde{\nabla}^S$ , le equazioni di Codazzi–Mainardi (7.10) si possono esprimere nella forma “compatta”

$$[R^M(X, Y)Z]^\perp = \widetilde{\nabla}_Y^S \text{II}(X, Z) - \widetilde{\nabla}_X^S \text{II}(Y, Z). \quad (7.11)$$

**OSSERVAZIONE 7.1.15.** Delfino Codazzi [60] e Gaspare Mainardi [142] provarono indipendentemente queste equazioni per una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , a metà

dell'ottocento (in realtà furono dimostrate qualche anno prima da Karl M. Peterson [169], ma il suo lavoro fu conosciuto solo molto tempo dopo), da cui il loro nome.

Come la seconda identità di Bianchi, le equazioni di Codazzi–Mainardi riguardano la derivata covariante della curvatura di  $S$  (che è codificata in  $\text{II}$ , per mezzo dell'equazione di Gauss), ma sono in realtà più forti in quanto la implicano (si veda il commento immediatamente dopo l'Esercizio 7.4.14).

Le tre equazioni

- *Gauss*:

$$R^M(X, Y, Z, W) = R^S(X, Y, Z, W) - g(\text{II}(X, Z), \text{II}(Y, W)) + g(\text{II}(X, W), \text{II}(Y, Z))$$

- *Codazzi–Mainardi*:

$$R^M(X, Y, Z, \xi) = g(\tilde{\nabla}_Y^S \text{II}(X, Z) - \tilde{\nabla}_X^S \text{II}(Y, Z), \xi)$$

- *Ricci*:

$$R^M(X, Y, \nu, \xi) = R^\perp(X, Y, \nu, \xi) + (\text{II}^\nu \star \text{II}^\xi)(Y, X) - (\text{II}^\nu \star \text{II}^\xi)(X, Y)$$

per ogni  $X, Y, Z, W \in \Gamma(TS)$  e  $\nu, \xi \in \Gamma(NS)$ , vengono dette *equazioni fondamentali delle sottovarietà* e esprimono la relazione tra i tensori di Riemann dell'ambiente e di  $S$ . Descrivono  $\text{Riem}^M$  quando nessuno, uno o due dei campi su cui opera sono normali a  $S$ , con l'eccezione di quando i due campi normali (e i due tangenti) appartengono uno alla prima e uno alla seconda coppia. Non sarebbe invece ragionevole aspettarsi relazioni tra  $R^M(X, \sigma, \nu, \xi)$  o  $R^M(\zeta, \sigma, \nu, \xi)$  e  $S$  in quanto (portando, per le simmetrie di  $\text{Riem}^M$ , il campo  $X$  o  $\zeta$  al quarto "posto") l'operatore di Riemann  $R^M(\sigma, \nu)\xi$  non ha nulla a che vedere con  $S$ . Si noti che se  $S$  è un'ipersuperficie, dunque tutti i campi normali sono proporzionali, il tensore di Riemann è nullo se opera su più di due campi normali, segue che queste equazioni lo determinano nei punti di  $S$  per mezzo di  $R^S$  e di  $\text{II}$ , con l'eccezione di  $R^M(X, \nu, Y, \nu)$ . Vedremo nell'Osservazione 10.6.8 una situazione in cui anch'esso si può determinare, avendo un'appropriata fibrazione locale di  $M$  in ipersuperfici.

Si può mostrare (ed era "classicamente" noto, in realtà il motivo per cui queste equazioni sono emerse) che esse sono le *condizioni di integrabilità* per il problema dell'esistenza (e unicità a meno di isometrie dell'ambiente euclideo) di un'immersione isometrica locale di una varietà riemanniana in  $\mathbb{R}^m$ , con assegnate seconda forma fondamentale e derivata covariante normale (oppure di una varietà differenziabile, assegnati il tensore metrico – talvolta detto *prima forma fondamentale* e denotata con  $\text{I}$  – la seconda forma fondamentale  $\text{II}$  e la derivata covariante normale – talvolta detta *forma fondamentale normale*). Discuteremo questo problema in dettaglio nella Sezione 7.6 per il caso delle ipersuperfici nello spazio euclideo, il lettore interessato può approfondire il caso generale in [187, Volume 4, Capitolo 7, Sezione C].

OSSERVAZIONE 7.1.16. Talvolta viene definita anche la *terza forma fondamentale* III, come

$$\text{III}(X, Y) = g(\text{II}(X), \text{II}(Y)),$$

che è una sorta di “quadrato” della seconda forma fondamentale. Infatti, per un’ipersuperficie, si ha

$$\text{III}(X, Y) = \text{B}^2(X, Y) = g(\text{S}^2(X), Y) = g(\text{S}(X), \text{S}(Y)),$$

nelle notazioni che adotteremo nella Sezione 7.3, cioè

$$\text{B}(X, Y) = \text{II}^\nu(X, Y) = g(\text{II}(X, Y), \nu) \quad \text{e} \quad g(\text{S}(X), Y) = \text{B}(X, Y),$$

dove  $\nu$  è un campo normale unitario locale, che è dunque univocamente definito a meno del segno, per l’unidimensionalità dello spazio normale (si noti che mentre B è definita a meno di segno, III è indipendente dalla scelta di  $\nu$ ).

Segnaliamo infine che alcuni autori chiamano invece *terza forma fondamentale*, il tensore  $\widetilde{\nabla}^S \text{II}$  e *k-esime forme fondamentali*, le sue successive  $\widetilde{\nabla}^S$ -derivate (rispettivamente, di ordine  $k - 3$ ).

OSSERVAZIONE 7.1.17. Tutto il materiale discusso nella sezione è di carattere locale, dunque se  $\varphi : S \rightarrow M$  è un’immersione isometrica tra le due varietà riemanniane  $(S, h)$  e  $(M, g)$ , avendo ogni punto  $p \in S$  un intorno  $U$  dove tale immersione è un embedding, possiamo considerare la sottovarietà  $\varphi(U) \subseteq M$  ed estendere in modo naturale tutte le definizioni, considerazioni e risultati visti (e quelli che seguiranno) a  $S$  con le usuali identificazioni degli spazi tangenti e normali, come nelle Sezioni 1.6, 2.2, 3.3 (si veda anche l’Osservazione 3.3.2). Per esempio, parleremo della seconda forma fondamentale di  $S$  o dell’immersione  $\varphi$ , in un punto  $p \in S$  intendendo la seconda forma fondamentale dell’ipersuperficie  $\varphi(U)$  in  $\varphi(p)$  ( $U$  è un intorno di  $p$  come sopra, dove  $\varphi|_U$  è un embedding). La situazione più comune in concreto, è proprio infatti un’immersione  $\varphi : S \rightarrow M$  di una varietà differenziabile  $S$  in una varietà riemanniana  $(M, g)$ , che diventa isometrica considerando su  $S$  la metrica indotta  $h = \varphi^*g$ .

## 7.2. Il caso $M = \mathbb{R}^m$

Le equazioni fondamentali si semplificano se lo spazio “ambiente” è lo spazio euclideo  $\mathbb{R}^m$ , avendo curvatura nulla e la derivata covariante che coincide con la derivazione componente per componente dei campi/tensori (i simboli di Christoffel sono nulli nelle coordinate standard).

In una carta coordinata di  $S$  e scelta una base ortonormale standard  $\{e_\alpha\}$  di  $\mathbb{R}^m$ , si ha allora

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^\alpha \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^\alpha e_\alpha = \text{II}_{ij} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

da cui

$$\text{II}_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^\alpha e_\alpha^\perp$$

dove  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^m$  e  $\Gamma_{ij}^k$  sono i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita  $\nabla$  di  $S$ . Inoltre, per un campo normale  $\nu$  lungo  $S$ , poiché

$$A^\nu(X) = -(\nabla_{\tilde{X}}^{\mathbb{R}^m} \tilde{\nu})^\top = -(\nabla_X^{\mathbb{R}^m} (\nu^\alpha e_\alpha))^\top = -X\nu^\alpha e_\alpha^\top,$$

per ogni  $x \in \Gamma(TS)$ , abbiamo

$$\left(\frac{\partial \nu}{\partial x^i}\right)^\top = -A^\nu\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = -(A^\nu)_i^k \frac{\partial}{\partial x^k} = -\Pi_{ij}^\nu g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

La coppia di equazioni

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^\alpha e_\alpha = \Pi_{ij} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial \nu}{\partial x^i}\right)^\top = -\Pi_{ij}^\nu g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} \quad (7.12)$$

si dicono *equazioni di Gauss-Weingarten*.

Scegliendo una base ortonormale locale  $\{\xi_{n+1}, \dots, \xi_m\}$  dello spazio normale a  $S$ , abbiamo  $m - n$  forme bilineari simmetriche, definite da  $\Pi^\alpha = \Pi^{\xi_\alpha}$  e le tre equazioni fondamentali diventano

- *Gauss*:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, W) &= \langle \Pi(X, Z), \Pi(Y, W) \rangle - \langle \Pi(X, W), \Pi(Y, Z) \rangle \\ &= \sum_{\alpha=n+1}^m (\Pi^\alpha \otimes \Pi^\alpha)(X, Y, Z, W)/2 \end{aligned}$$

- *Codazzi-Mainardi*:

$$\tilde{\nabla}_Y \Pi(X, Z) = \tilde{\nabla}_X \Pi(Y, Z)$$

cioè,

$$\sum_{\alpha=n+1}^m \nabla_Y \Pi^\alpha(X, Z) \xi_\alpha + \Pi^\alpha(X, Z) \nabla_Y^\perp \xi_\alpha = \sum_{\alpha=n+1}^m \nabla_X \Pi^\alpha(Y, Z) \xi_\alpha + \Pi^\alpha(Y, Z) \nabla_X^\perp \xi_\alpha$$

- *Ricci*:

$$R^\perp(X, Y, \nu, \xi) = (\Pi^\nu \star \Pi^\xi)(X, Y) - (\Pi^\nu \star \Pi^\xi)(Y, X)$$

per ogni  $X, Y, Z, W \in \Gamma(TS)$  e  $\nu, \xi \in \Gamma(NS)$ .

**ESERCIZIO 7.2.1.** Si mostri che un qualunque sottospazio affine di  $\mathbb{R}^m$  ha seconda forma fondamentale nulla. Si esprima inoltre la derivata covariante normale e si veda che la curvatura normale è nulla.

**ESERCIZIO 7.2.2.** Si scriva la seconda forma fondamentale di una sfera  $n$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^m$ .

Consideriamo ora un'immersione  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^m$  di una varietà differenziabile  $S$ , la metrica indotta  $h = \varphi^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m}$  rende  $S$  una varietà riemanniana e  $\varphi$  un'immersione isometrica. Allora, in linea con l'Osservazione 7.1.17, in una carta coordinata abbiamo che i campi  $\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \in \mathbb{R}^m$ , per  $i \in \{1, \dots, n\}$ , formano una base

locale del fibrato tangente di  $S$  (con l'usuale identificazione di  $T_p S$  con un sottospazio di  $T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m$ ), dunque la metrica e la connessione di Levi-Civita di  $S$  sono date da

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right\rangle$$

e

$$\Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = \nabla_i \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = \left( \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right)^\top = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right)^\top = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right)^\top.$$

Segue dunque che

$$\Pi_{ij} = \left( \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right)^\perp = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right)^\perp$$

e

$$\Pi_{ij}^\nu = \left\langle \nu, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle, \quad A^\nu \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) = (A^\nu)_i^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = \Pi_{ij}^\nu g^{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k},$$

per ogni campo normale  $\nu \in \Gamma(NS)$ , da cui le equazioni di Gauss-Weingarten (7.15) si scrivono

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + \Pi_{ij}, \quad \left( \frac{\partial \nu}{\partial x^i} \right)^\top = -\Pi_{ij}^\nu g^{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}.$$

Notiamo che la prima relazione implica

$$\nabla_{ij}^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = \Pi_{ij},$$

dunque

$$\Delta \varphi = g^{ij} \nabla_{ij}^2 \varphi = g^{ij} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right) = g^{ij} \Pi_{ij} = H,$$

componente per componente.

**ESEMPIO 7.2.3 (Curve in  $\mathbb{R}^m$ ).** Sia  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$  una curva regolare (cioè  $|\dot{\gamma}| \neq 0$ ), la metrica è allora data da  $g = |\dot{\gamma}|^2 dt^2$  e  $\tau = \dot{\gamma}/|\dot{\gamma}|$  è un vettore tangente unitario che chiamiamo la *tangente* di  $\gamma$ .

La seconda forma fondamentale è allora determinata da

$$\Pi_{tt} = \Pi(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \left( \nabla_{\dot{\gamma}}^{\mathbb{R}^m} \dot{\gamma} \right)^\perp = \ddot{\gamma}^\perp = \ddot{\gamma} - \frac{\langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|^2} = \ddot{\gamma} - \langle \ddot{\gamma}, \tau \rangle \tau$$

e la curvatura (media) è

$$H = g^{tt} \Pi_{tt} = \frac{1}{|\dot{\gamma}|^2} \left( \ddot{\gamma} - \frac{\langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|^2} \right) = \frac{\ddot{\gamma}^\perp}{|\dot{\gamma}|^2} = \frac{\ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|^2} - \frac{\langle \ddot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle \dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|^4} = \frac{\ddot{\gamma} - \langle \ddot{\gamma}, \tau \rangle \tau}{|\dot{\gamma}|^2}.$$

Essendo  $H$  un vettore normale, se  $k = |H| \neq 0$ , possiamo definire il campo vettoriale unitario normale  $\nu = H/|H|$ , che chiamiamo la *normale* di  $\gamma$ . Segue che  $H = k\nu$  e chiamiamo  $k = |H|$  la *curvatura* di  $\gamma$ .

Notiamo che

$$k\nu = H = g^{tt} \Pi_{tt} = \Pi(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})/|\dot{\gamma}|^2 = \Pi(\tau, \tau) = \left( \nabla_{\tau}^{\mathbb{R}^m} \tau \right)^\perp = \nabla_{\tau}^{\mathbb{R}^m} \tau,$$



cioè  $H$  si ottiene derivando in lunghezza d'arco la tangente lungo la curva.

Se la curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  è parametrizzata in lunghezza d'arco  $s$ , la metrica è semplicemente  $ds^2$  e la tangente è  $\tau = \dot{\gamma}$ . La seconda forma fondamentale è dunque data da

$$\Pi_{ss} = \Pi(\tau, \tau) = (\nabla_{\tau}^{\mathbb{R}^m} \tau)^{\perp} = (\partial_s \dot{\gamma})^{\perp} = \ddot{\gamma}^{\perp} = \ddot{\gamma},$$

essendo  $\ddot{\gamma}$  un vettore normale a  $\gamma$  e  $k\nu = H = \ddot{\gamma}$ , con  $k = |\ddot{\gamma}|$  e  $\nu = \ddot{\gamma}/|\ddot{\gamma}|$ , se  $\ddot{\gamma} \neq 0$ .

Se la curva è planare,  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , scegliamo/definiamo come *normale* il campo unitario normale  $\nu$  dato dalla rotazione antioraria di 90 gradi della tangente  $\tau = \dot{\gamma}/|\dot{\gamma}|$ , cioè  $\nu = R\tau$  ( $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  è tale rotazione). Si noti che tale campo potrebbe essere diverso da quello definito in generale sopra.

Se allora scriviamo  $k\nu = H$  abbiamo che la curvatura  $k$  di  $\gamma$  (talvolta chiamata *curvatura orientata*) può assumere anche valori negativi (mentre sopra era sempre nonnegativa). Si controlli, per esercizio, che con questa scelta la curvatura del cerchio unitario nel piano percorso in senso antiorario è costantemente uguale a uno.

### 7.3. Ipersuperfici

Un possibile riferimento generale per il materiale di questa sezione è [187, Volume 3, Capitolo 1].

Supponiamo che  $S$  sia un'ipersuperficie di  $(M, g)$ , cioè abbia codimensione uno,  $m = n + 1$ , dunque ogni spazio normale  $N_p S$  è unidimensionale, per ogni  $p \in S$ . Esiste allora localmente un unico campo normale unitario  $\nu$ , a meno di segno e il vettore  $\nu_p$  è in genere detto "la normale" a  $S$  in  $p$  (sebbene sia definita solo a meno di segno). Si noti che se l'ipersuperficie  $S$  e la varietà ambiente  $M$  sono orientabili, tale scelta può essere fatta globalmente considerando il campo  $\nu = \star dV^S$ , dove  $dV^S$  è la forma di volume canonica di  $S$  con la metrica indotta e  $\star$  è l'operatore di Hodge di  $M$ . Viceversa, se il fibrato normale a  $S$ , ipersuperficie di  $M$  orientabile, è banale, cioè esiste un campo unitario normale globale  $\nu$ , la  $n$ -forma  $\star\nu$  è una forma di volume che orienta  $S$ . Analogamente, per un'immersione isometrica  $\varphi : S \rightarrow M$ , si ha che  $\nu = \star\varphi_*(dV^S)$  è un campo normale globale e viceversa, dato  $\nu$  campo normale, si ha che  $\varphi^*(\star\nu)$  è una forma di volume per  $S$ .

Abbiamo quindi che per ogni  $p \in S$  e  $v \in T_p M$ ,

$$v^{\perp} = g_p(v, \nu_p)\nu_p \quad v^{\top} = v - g_p(v, \nu_p)\nu_p$$

e che ogni campo normale  $X$  su  $S$  ha localmente la forma  $X = s\nu$ , per una funzione  $s$  funzione a valori reali di classe  $C^{\infty}$ .

Per quanto visto nell'Osservazione 3.3.6, si ha che  $\nabla_X^M \nu$  è un campo tangente a  $S$  per ogni  $X \in \Gamma(TS)$ , da cui  $(\nabla_X^M \tilde{\nu})^{\perp} = \nabla_X^{\perp} \nu = 0$  e in una carta coordinata locale di  $M$  adattata a  $S$  tale che  $\frac{\partial}{\partial x^{n+1}} = \nu$ , i simboli di Christoffel  ${}^{\perp}\Gamma_{in+1}^{n+1}$  sono tutti

nulli. Segue allora facilmente che l'operatore e il tensore di curvatura normale  $R^\perp$  di  $S$  sono identicamente nulli e le equazioni di Ricci (7.9) si banalizzano.

Per l'unidimensionalità dello spazio normale a  $S$ , scelto allora localmente un campo normale unitario  $\nu$ , possiamo dunque considerare la 2-forma bilineare simmetrica (a valori reali) definita, a meno di segno, su ogni coppia di campi  $X, Y \in \Gamma(TS)$  (con estensioni locali  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$ ), da

$$B(X, Y) = \text{II}^\nu(X, Y) = g(\text{II}(X, Y), \nu) = g(\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{Y}, \nu),$$

che continueremo a chiamare, con un abuso di terminologia, *seconda forma fondamentale (scalare)* di  $S$  in  $M$  e la sua traccia  $H = \text{tr } B$  *curvatura media (scalare)* di  $S$  (si noti che  $B\nu = \text{II}$  è invece indipendente dalla scelta locale di  $\nu$ , così come la curvatura media vettoriale  $H\nu = \text{tr } B\nu = \text{tr } \text{II}$ ).

La formula e l'equazione di Gauss (7.8) diventano allora

$$\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{Y} = \nabla_X^S Y + B(X, Y)\nu$$

e

$$\begin{aligned} R^S(X, Y, Z, W) &= R^M(X, Y, Z, W) + B(X, Z)B(Y, W) - B(X, W)B(Y, Z) \\ &= R^M(X, Y, Z, W) + (B \otimes B)(X, Y, Z, W)/2. \end{aligned}$$

Segue che in una carta adattata per  $S$  tale che  $\frac{\partial}{\partial x^{n+1}} = \nu$ , in cui definiamo  $h_{ij} = B(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$ , per  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , si ha

$$\begin{aligned} \nabla_i^M \frac{\partial}{\partial x^j} &= h_{ij}\nu + {}^S\Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \\ R_{ijkl}^S &= R_{ijkl}^M + h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk} \\ R_{ik}^S &= g^{jl}R_{ijkl}^M + Hh_{ik} - g^{jl}h_{il}h_{jk} = R_{ik}^M - R_{in+1kn+1}^M + Hh_{ik} - g^{jl}h_{il}h_{jk} \\ R^S &= R^M - 2R_{n+1n+1}^M + H^2 - |B|^2 = R^M - 2R^M(\nu, \nu) + H^2 - |B|^2 \quad (7.13) \end{aligned}$$

dove tutti gli indici liberi e nelle somme variano solo da 1 a  $n$  (tenendo presente che  $g^{in+1} = 0$ , per ogni  $i \neq n+1$  e  $g^{n+1n+1} = 1$ ).

L'operatore di Weingarten  $A^\nu$ , che in questo contesto viene anche chiamato *operatore shape* (o *forma*) e denotato con  $S$ , soddisfa l'equazione di Weingarten

$$g(S(X), Y) = B(X, Y)$$

per ogni coppia di campi  $X, Y \in \Gamma(TS)$  (si noti che, come  $B$ , anche l'operatore  $S$  è definito a meno del segno). Inoltre, essendo la derivata covariante normale banale, si ha  $(\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{\nu})^\top = \nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{\nu}$  (che non vale necessariamente se la codimensione di  $S$  è maggiore di uno) da cui

$$S(X) = -\nabla_{\tilde{X}}^M \tilde{\nu}.$$

Segue che in una carta coordinata, si ha

$$h_{ij} = g_{ik} S_j^k \quad \text{e} \quad S_j^k = g^{ki} h_{ij} = -(\nabla_j^M \tilde{\nu})^k$$

dove gli indici variano da 1 a  $n$ .

OSSERVAZIONE 7.3.1. Si noti che l'ultimo termine  $g^{jl} h_{il} h_{jk}$  nell'espressione sopra del tensore di Ricci sono i coefficienti in coordinate della forma bilineare  $B^2$ , associata all'operatore lineare autoaggiunto  $S^2 = S \circ S$ .

Sempre per l'unidimensionalità dello spazio normale e la banalità della connessione normale, anche le equazioni di Codazzi–Mainardi si semplificano e si ottiene facilmente, dalla formula (7.11),

$$R^M(X, Y, Z, \nu) = \nabla_Y^S B(X, Z) - \nabla_X^S B(Y, Z), \quad (7.14)$$

dunque, in una carta coordinata adattata a  $S$  tale che  $\frac{\partial}{\partial x^{n+1}} = \nu$ , si ha

$$R_{ijkn+1}^M = \nabla^S B_{jik} - \nabla^S B_{ijk},$$

dove gli indici  $i, j, k$  variano da 1 a  $n$ .

Le equazioni fondamentali si riducono allora a

- Gauss:  $R^M = R^S - B \otimes B/2$
- Codazzi–Mainardi:  $R^M(X, Y, Z, \nu) = \nabla_Y^S B(X, Z) - \nabla_X^S B(Y, Z)$

per ogni  $X, Y, Z \in \Gamma(TS)$  e  $\nu \in \Gamma(NS)$ .

OSSERVAZIONE 7.3.2. Si noti che se la varietà ambiente  $(M, g)$  ha curvatura costante, si ha  $R^M(X, Y, Z, \nu) = 0$  per ogni  $X, Y, Z \in \Gamma(TS)$  e  $\nu \in \Gamma(NS)$ , dunque le equazioni di Codazzi–Mainardi diventano semplicemente

$$\nabla_Y^S B(X, Z) = \nabla_X^S B(Y, Z)$$

cioè il tensore  $\nabla B$  di tipo  $(0, 3)$  è simmetrico. Segue che  $B$  è armonico (si veda la discussione dopo l'Esercizio 5.7.14) se e solo se la curvatura media  $H$  è costante, in quanto tracciando, si ha la formula "di tipo Schur"

$$\nabla H = \operatorname{div} B$$

(si confronti con l'equazione (5.24)).

DEFINIZIONE 7.3.3. Per ogni punto  $p$  dell'ipersuperficie  $S \subseteq M$ , gli autovalori  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  dell'operatore  $S_p : T_p S \rightarrow T_p S$  sono detti *curvature principali* di  $S$  in  $p$  (anch'esse definite a meno del segno, come  $S$ ). Essendo  $S_p$  autoaggiunto, tali autovalori sono dati da  $n$  numeri reali e gli autovettori relativi si dicono *direzioni principali*. Inoltre, per il teorema spettrale esiste sempre una base ortonormale di autovettori di  $S_p$  per  $T_p S$ , che ovviamente diagonalizzano la seconda forma fondamentale  $B_p$ .

Il determinante dell'operatore  $S$  in ogni punto di  $S$ , cioè il prodotto dei suoi autovalori (con molteplicità), che denoteremo con  $G$ , si dice *curvatura di Gauss* (o *gaussiana*). Si noti che se  $n$  è pari,  $G$  è univocamente definita. Chiaramente, la

somma di tali autovalori è la curvatura media  $H$  e la somma dei loro quadrati è il quadrato della norma della seconda forma fondamentale  $B$ , in formule

$$G = \prod_{i=1}^n \lambda_i, \quad H = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad \text{e} \quad |B|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2.$$

Segue che

$$\lambda_{\min} g_p \leq B_p \leq \lambda_{\max} g_p$$

come forme bilineari, dove  $\lambda_{\min}$  e  $\lambda_{\max}$  sono rispettivamente le curvatures principali minima e massima nel punto  $p \in S$ . In particolare, per una superficie in una varietà tridimensionale, le due curvatures principali sono date dal massimo e dal minimo di  $B_p(v, v)$  al variare di  $v \in \mathbb{S}_p^2 \subseteq T_p S$ .

**OSSERVAZIONE 7.3.4.** Si può mostrare (si veda [186]) che le curvatures principali sono funzioni continue su  $M$  e  $C^\infty$  in un aperto denso. In tale aperto si possono inoltre scegliere delle direzioni principali in modo che siano anch'esse di classe  $C^\infty$ .

**OSSERVAZIONE 7.3.5.** In dimensione  $n = 2$  si ha l'uguaglianza

$$2G = H^2 - |B|^2.$$

**ESERCIZIO 7.3.6.** Usando l'equazione di Gauss, si mostri che se la varietà ambiente  $(M, g)$  ha curvatura costante, data una base ortonormale  $\{e_i\}$  di  $T_p S$  che diagonalizza  $B_p$ , la base  $\{e_i \wedge e_j\}$  di  $\Lambda^2 T_p S$  diagonalizza la forma bilineare simmetrica  $\mathcal{R}_p$ , nella Definizione 5.3.11, cioè è una base (ortogonale) di autovettori dell'operatore di curvatura  $\mathcal{R}_p$  di  $S$ . Segue che un'ipersuperficie di una varietà a curvatura costante ha operatore di curvatura puro (si veda la Sezione 5.3). In particolare, se una varietà riemanniana  $n$ -dimensionale *non* ha operatore di curvatura puro, *non* può essere immersa isometricamente in  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

#### 7.4. Ipersuperfici in $\mathbb{R}^{n+1}$

Un possibile riferimento generale per il materiale di questa sezione è [187, Volume 4, Capitolo 7, Sezione D] (si tengano presenti anche [187, Volume 3, Capitolo 1,] e [130, Capitolo 7, Sezione 5]).

Le equazioni fondamentali si semplificano ancora di più se consideriamo un'ipersuperficie  $S$  dello spazio euclideo  $\mathbb{R}^{n+1}$  con la sua metrica canonica, che induce la metrica  $g$  su  $S$ . Se l'ipersuperficie  $S$  è compatta, è ben noto (teorema di Jordan–Brouwer, si veda [25, Proposition 12.2] ad esempio, o [1, Proposizione 4.8.14], nel caso  $n = 2$ ) che “separa”  $\mathbb{R}^{n+1}$  in due componenti connesse, di cui una limitata detta “interna” e della quale è bordo (dunque  $S$  è orientabile, per la Proposizione 1.8.4), per convenzione sceglieremo allora (globalmente, si vedano le osservazioni all'inizio della sezione precedente) sempre  $\nu$  come la

normale (unitaria) “interna”. Con questa scelta si verifica che la seconda seconda forma fondamentale di un’ipersuperficie “convessa” (cioè bordo di un convesso di  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) è definita nonnegativa (lo si provi per la sfera  $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ).

**DEFINIZIONE 7.4.1.** La mappa  $\nu : U \rightarrow \mathbb{S}^n$ , data da  $p \mapsto \nu_p$  a valori in  $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  (identificando  $\nu_p$  con un vettore unitario di  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) per ogni  $p \in U$ , definita localmente in un aperto  $U \subseteq S$  o globalmente su  $S$ , viene detta *mappa di Gauss* (talvolta indicata con  $G : U \rightarrow \mathbb{S}^n$ ).

Notando che  $T_p S = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle v, \nu_p \rangle = 0\}$  coincide con  $T_{\nu_p} \mathbb{S}^n$ , possiamo identificare quest’ultimo iperpiano con  $T_p S$ , dunque considereremo il differenziale della mappa di Gauss come l’applicazione lineare  $d\nu_p : T_p S \rightarrow T_p S$ , per ogni  $p \in S$ .

In una carta coordinata di  $S$ , scelto un campo unitario normale locale  $\nu$  con seconda forma fondamentale (scalare)  $B$  associata e una base ortonormale standard  $\{e_\alpha\}$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , si ha allora

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^\alpha \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^\alpha e_\alpha = h_{ij} \nu + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k},$$

da cui

$$h_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^\alpha e_\alpha, \nu \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^\alpha \langle e_\alpha, \nu \rangle,$$

dove  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota il prodotto scalare in  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $\Gamma_{ij}^k$  sono i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita  $\nabla$  di  $S$ , inoltre l’operatore shape  $S_p : T_p S \rightarrow T_p S$ , per ogni  $p \in S$ , soddisfa

$$S(X) = -\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{\nu} = -\nabla_X^{\mathbb{R}^{n+1}} (\nu^\alpha e_\alpha) = -X \nu^\alpha e_\alpha = -\frac{\partial \nu^\alpha}{\partial x^i} X^i e_\alpha = -d\nu(X)$$

(dove, nell’ultima uguaglianza, abbiamo utilizzato l’identificazione detta sopra  $T_{\nu_p} \mathbb{S}^n \simeq T_p S$ , per ogni  $p \in S$ ) da cui segue

$$\frac{\partial \nu^\alpha}{\partial x^i} = -S_i^k \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^\alpha = -h_{ij} g^{jk} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^\alpha \quad \text{cioè} \quad \frac{\partial \nu}{\partial x^i} = -h_{ij} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Le equazioni di Gauss-Weingarten sono dunque date da

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^\alpha e_\alpha = h_{ij} \nu + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \nu}{\partial x^i} = -h_{ij} g^{jk} \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (7.15)$$

**ESERCIZIO 7.4.2.** Si calcolino esplicitamente seconda forma fondamentale, curvatura media e di Gauss di un iperpiano e di una sfera  $n$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Il tensore di curvatura di  $(S, g)$  è  $\text{Riem} = B \otimes B/2$  da cui, ricordando l'Osservazione 7.3.1, si ha

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}, \\ R_{ij} &= Hh_{ij} - g^{lk}h_{il}h_{kj} \quad \text{cioè} \quad \text{Ric} = HB - B^2, \\ R &= H^2 - |B|^2 \end{aligned}$$

(si noti che l'ambiguità data dalla definizione di  $B$  a meno del segno non influisce) e le formule di interscambio di derivate covarianti di un campo o di una 1-forma sono allora

$$\begin{aligned} \nabla_i \nabla_j X^s - \nabla_j \nabla_i X^s &= R_{ijkl} g^{ks} X^l = (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}) g^{ks} X^l, \\ \nabla_i \nabla_j \omega_k - \nabla_j \nabla_i \omega_k &= R_{ijkl} g^{ls} \omega_s = (h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}) g^{ls} \omega_s. \end{aligned}$$

Fissato un punto  $p \in S$ , se  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$  sono le curvatures principali, con base ortonormale  $\{e_i\}$  di  $T_p S$  di autovettori di  $B_p$ , si ha che la stessa base diagonalizza il tensore di Ricci e

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= \lambda_i \lambda_j (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) = \lambda_i \lambda_j R_{ijkl}^0 \\ R_{ij} &= \left[ \lambda_i \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k \right) - \lambda_i^2 \right] \delta_{ij} = \delta_{ij} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \lambda_i \lambda_k \\ R &= \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right)^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \lambda_i \lambda_j \end{aligned} \quad (7.16)$$

nel punto  $p \in S$ , da cui segue

$$\text{Sec}_p(\langle e_i, e_j \rangle) = \lambda_i \lambda_j \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_p(e_i \wedge e_j) = \lambda_i \lambda_j (e_i \wedge e_j) = \text{Sec}_p(\langle e_i, e_j \rangle) (e_i \wedge e_j) \quad (7.17)$$

cioè la base ortonormale  $\{(e_i \wedge e_j)/\sqrt{2}\}$  di  $\Lambda^2 T_p S$  diagonalizza la forma  $\mathcal{R}_p$  associata all'operatore di curvatura  $\mathcal{R}_p$ , con autovalori  $\lambda_i \lambda_j$ . Dunque  $\mathcal{R}_p$  è puro (si veda la Sezione 5.3).

Inoltre, segue che gli autovalori del tensore di Ricci e la curvatura scalare in  $p \in S$  sono dati da

$$R_{ii} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \lambda_i \lambda_k = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \text{Sec}_p(\langle e_i, e_k \rangle) \quad \text{e} \quad R = 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \text{Sec}_p(\langle e_i, e_j \rangle).$$

**ESERCIZIO 7.4.3.** Si scrivano le formule analoghe per un'ipersuperficie di una varietà a curvatura costante.

**OSSERVAZIONE 7.4.4.** Si noti che se  $n \geq 3$ , dalla formula (7.17) segue che in ogni punto di  $S$  non è possibile che tutte le curvatures sezionali siano negative, in quanto non esistono  $n$  numeri reali (gli autovalori della seconda forma fondamentale) i cui prodotti a due a due siano tutti negativi. Come conseguenza,

una varietà  $n$ -dimensionale  $(M, g)$  con  $\text{Sec} < 0$  non si può immergere isometricamente nemmeno localmente in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , se  $n \geq 3$ . Più in generale, se in  $p \in M$  si ha  $\text{Sec}_p(\pi) < 0$  per ogni 2-piano  $\pi \subseteq T_p M$ , nessun intorno di  $p$  può essere immerso isometricamente in  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**OSSERVAZIONE 7.4.5.** Malgrado le curvatures principali siano definite solo a meno di segno, se  $S$  è una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , cioè  $n = 2$ , si ha

$$R(p)/2 = \text{Sec}_p(T_p S) = \lambda_1 \lambda_2 = \det S_p = G_p,$$

dove  $G_p$  è la curvatura di Gauss in  $p \in S$ , che dunque è una quantità *intrinseca* di  $S$  (*Teorema Egregium* di Gauss 7.5.1), invariante per isometria. Lo stesso vale ovviamente in ogni dimensione  $n$  pari, essendo  $G_p = \det S_p = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ , mentre in dimensione dispari soltanto  $|G_p| = |\det S_p| = \left| \prod_{i=1}^n \lambda_i \right|$  è intrinseco a  $S$ . Inoltre, abbiamo la relazione

$$\det \mathcal{R}_p = \prod_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \lambda_i \lambda_j = \left( \prod_{i=1}^n \lambda_i \right)^{n-1} = (\det S_p)^{n-1}$$

che è chiaramente sempre intrinseco.

Sottolineiamo qui che invece la curvatura media  $H_p = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  non è una quantità intrinseca di  $S$ , così come la norma al quadrato della seconda forma fondamentale  $|B|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2$ .

**ESERCIZIO 7.4.6.** Tenendo presente l'Esercizio 2.3.5, si calcolino seconda forma fondamentale, curvatura media e di Gauss di una superficie di rotazione  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ .

Malgrado il tensore di Riemann di  $S$  sia ovviamente intrinseco, invariante per isometria e si abbia  $\text{Riem} = B \otimes B/2$ , si sarebbe tentati di pensare che anche la seconda forma fondamentale  $B$  (o l'operatore shape  $S$ ) lo sia. Questo è "quasi" vero in dimensione  $n \geq 3$ , come vedremo nella Sezione 7.6, mentre è falso in dimensione due, come mostrato dal seguente esercizio (ovviamente, anche nel caso di ambiente e codimensione generali, la seconda forma fondamentale non è intrinseca della sottovarietà).

**ESERCIZIO 7.4.7.** Si consideri la superficie rotazionalmente simmetrica  $(I \times \mathbb{S}^1, g_\alpha)$ , prodotto warped di  $\mathbb{S}^1$  sull'intervallo  $I = (0, \pi/2)$  con la metrica

$$g_\alpha = dr^2 + \alpha^2 \sin^2 r d\theta^2,$$

per  $\alpha \in (0, 1]$  e si veda che ha curvatura costante uguale a uno. Si concluda che localmente è isometrica a un aperto della sfera unitaria  $\mathbb{S}^2$  con la sua metrica canonica (o si veda la dimostrazione del Teorema 9.1.1, nel caso  $K = 1$ ).

Si provi che la mappa

$$(r, \theta) \mapsto \varphi_\alpha(r, \theta) = (x(r), y(r) \cos \theta, y(r) \sin \theta) \in \mathbb{R}^3$$

con

$$\begin{aligned} x(r) &= \int_0^r \sqrt{1 - \alpha^2 \cos^2 t} \, dt \\ y(r) &= \alpha \sin r \end{aligned}$$

è un'immersione isometrica di  $(I \times \mathbb{S}^1, g_\alpha)$  in  $\mathbb{R}^3$ , dunque di un aperto della sfera unitaria. Segue che la curvatura gaussiana (uguale al determinante dell'operatore shape  $S$ ) di tutte queste immersioni è identicamente uno, per l'Osservazione 7.4.5 e che tutte le superfici immagine al variare di  $\alpha$  sono localmente isometriche.

Si mostri infine che se  $a = 1$  si ha  $S = \text{Id}$  (Esercizio 2.3.7), mentre per  $a < 1$  l'operatore  $S$  ha due autovalori distinti (con prodotto uguale a uno), concludendo che  $S$  (dunque la seconda forma fondamentale  $B$  e anche la curvatura media  $H$ ) non è un invariante per isometria di una sottovarietà (se la sottovarietà è data da un'immersione isometrica di una varietà riemanniana,  $S$  e  $B$  dipendono dall'immersione).

Questo esercizio mostra che le superfici con curvatura costante (dunque curvatura gaussiana costante) in  $\mathbb{R}^3$  possono essere molteplici, mentre se  $n \geq 3$  e  $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  è un'ipersuperficie con curvatura costante  $K$ , tale curvatura deve essere maggiore o uguale a zero, per l'Osservazione 7.4.4. Per la formula (7.17), se  $K > 0$  segue facilmente che  $B = \sqrt{Kg}$  e se  $S$  è connessa, allora  $S$  è un aperto di una sfera di  $\mathbb{R}^{n+1}$  (lo si provi per esercizio, usando la mappa di Gauss e seguendo [130, Capitolo 7, Teorema 5.1]), se è anche completa, allora è proprio una sfera di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Se  $K = 0$ , cioè  $S$  è flat, si ha che in ogni punto al massimo una curvatura principale è non nulla e si può mostrare che  $S$  è un aperto di un "cilindro generalizzato"  $\gamma \times \mathbb{R}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^{n+1}$ , dove  $\gamma$  è una curva regolare embedded in  $\mathbb{R}^2$  (si veda [187, Volume 4, Capitolo 7, Sezione G] e [178]). Le conclusioni per un'ipersuperficie soltanto immersa in  $\mathbb{R}^{n+1}$  sono analoghe.

**OSSERVAZIONE 7.4.8.** Si noti che questa discussione implica che se  $n \geq 3$  non si può immergere isometricamente in  $\mathbb{R}^{n+1}$  né  $\mathbb{H}^n$  (cosa che già avevamo visto), né il prodotto di un toro 2-dimensionale piatto  $\mathbb{T}^2$  con una varietà flat  $(n-2)$ -dimensionale.

Se  $n \geq 3$  e il tensore di Ricci è proporzionale alla metrica,  $\text{Ric}_p = cg_p$ , cioè  $S$  è una varietà di Einstein, per le formule (7.16), in ogni punto  $p \in S$  si deve avere

$$\text{Ric}_{ii} = H\lambda_i - \lambda_i^2 = c,$$

per ogni curvatura principale  $\lambda_i$  di  $S$  in  $p$ . Segue allora che tutte le curvature principali sono uguali e  $B_p = \lambda_p g$ , oppure possono assumere solo due valori  $\lambda$  e  $\mu$ , soluzioni dell'equazione  $x^2 - Hx + c = 0$ , supponiamo allora  $\lambda$  autovalore di  $B_p$  di molteplicità  $s$  e  $\mu$  di molteplicità  $n-s$ , se  $\lambda \neq \mu$ , con  $s \leq n-s$ . Inoltre, si vede facilmente (sempre per le formule (7.16), scrivendo il tensore di Ricci è come



somma di curvatures sezionali) che  $H$  è costante ( $S$  è connessa), dunque anche  $\lambda_p$ , nel primo caso, o  $\lambda$  e  $\mu$  nel secondo. Nel primo caso  $S$  è allora a curvatura costante, dunque ricadiamo nella discussione precedente. Nel secondo caso, essendo  $\lambda$  e  $\mu$  le due soluzioni distinte dell'equazione di secondo grado sopra, soddisfano  $\lambda + \mu = H$  e  $\lambda\mu = c$ , da cui

$$H = s\lambda + (n - s)\mu = \lambda + \mu$$

cioè

$$(s - 1)\lambda + (n - s - 1)\mu = 0.$$

Se  $c > 0$ , abbiamo che  $\lambda$  e  $\mu$  hanno lo stesso segno (e non sono nulle), dunque perché si possa verificare questa equazione, si deve avere  $s = 1$  e  $n = s + 1 = 2$ , che è una contraddizione, da cui  $c \leq 0$ .

Se  $c = 0$ , abbiamo che una delle due tra  $\lambda$  e  $\mu$  deve essere nulla. Segue allora sempre dall'equazione che deve essere  $\mu = 0$  e  $s = 1$  (avendo scelto  $s \leq n - s$  e  $n \geq 3$ ). Quindi abbiamo  $\lambda \neq 0$  e  $\mu = 0$  di molteplicità  $n - 1$ , ma ciò implica, per le formule (7.16), che  $S$  ha curvatura costante zero.

Infine, se  $c < 0$ , essendo  $\lambda$  e  $\mu$  costanti, si può mostrare (si veda [178, Teorema 2.5] e [129, Pagina 182]) che  $S$  è localmente il prodotto di due spazi con curvatura costante  $\lambda^2$  e  $\mu^2$ , dunque con tensore di Ricci maggiore o uguale a zero, che è una contraddizione.

Concludiamo dunque che le ipersuperfici di  $\mathbb{R}^{n+1}$  che sono varietà di Einstein, hanno curvatura costante e dunque si classificano come nella discussione sopra (sottolineiamo che questa conclusione, ottenuta in [89], è peculiare dello spazio ambiente euclideo, in  $\mathbb{S}^{n+1}$  non vale per esempio, si veda [178]).

**OSSERVAZIONE 7.4.9.** Discuteremo le ipersuperfici localmente conformalmente piatte di  $\mathbb{R}^{n+1}$  nella parte finale della Sezione 9.3.

**OSSERVAZIONE 7.4.10.** Un punto  $p$  di un'ipersuperficie  $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  dove tutte le curvatures principali sono uguali, cioè  $B_p = \lambda_p g_p$  e  $S_p = \lambda_p \text{Id}_p : T_p S \rightarrow T_p S$ , si dice *punto umbilicale*. Se ciò vale per ogni punto  $p \in S$ , si dice che l'ipersuperficie è *totalmente umbilicale*. Dalle formule (7.16), segue che  $S$  ha curvatura costante  $\lambda_p^2$  in  $p$ , se dunque la dimensione di  $S$  è almeno tre, la funzione  $p \mapsto \lambda_p$  è una funzione costante, per il Teorema 5.7.6 e  $S$  ha curvatura costante. Per la discussione sopra, se  $S$  è connessa, è allora un pezzo di sfera o di un iperpiano, in quanto la curva  $\gamma$  in  $\mathbb{R}^2$  che descrive  $S \subseteq \gamma \times \mathbb{R}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-1} = \mathbb{R}^{n+1}$ , in questo caso deve avere anch'essa curvatura (estrinseca) nulla in  $\mathbb{R}^2$ , dunque è contenuta in una retta.

La stessa conclusione vale in realtà anche in dimensione due, Esercizio 7.4.13.

Vediamo ora alcune relazioni tra il segno delle curvatures principali e dei tensori di curvatura. Se  $B_p$  è definita positiva (o negativa), dunque tutte le curvatures principali hanno lo stesso segno, chiaramente anche  $\text{Ric}_p$  e  $\mathcal{R}_p$  sono definite

positive, dunque  $R(p)$  e  $\text{Sec}_p(\pi)$  sono positive, per ogni 2-piano  $\pi \subseteq T_p S$ . Viceversa, se  $\mathcal{R}_p$  è definita positiva, si ha che tutti i prodotti  $\lambda_i \lambda_j$  sono positivi, il che implica che tutte le curvatures principali hanno lo stesso segno. Analogamente,  $B_p$  è semidefinita positiva (o negativa) se e solo se lo è  $\mathcal{R}_p$  (o se tutte le curvatures sezionali sono nonnegative in  $p \in S$ ). Segue che per le ipersuperfici  $\text{Sec}_p > 0$  implica  $\mathcal{R}_p > 0$ , cosa che non vale in generale se  $n \geq 4$  (si veda l'Esempio 5.8.12 di  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , con  $n \geq 2$ , che dunque non è immergibile isometricamente nemmeno localmente in  $\mathbb{R}^{2n+1}$ ). Ricordiamo che abbiamo visto nell'Osservazione 7.4.4 che una qualunque varietà riemanniana di dimensione  $n \geq 3$  con curvatura negativa, come ad esempio  $\mathbb{H}^n$ , non si immerge localmente in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Il piano iperbolico  $\mathbb{H}^2$  si può invece immergere localmente in  $\mathbb{R}^3$ , si ricordi infatti l'Esempio 2.3.16 della pseudosfera (un altro esempio è dato dalla *superficie del Dini* [236]), sebbene non globalmente, per un teorema di Hilbert [119] (si vedano [83, 221]), successivamente generalizzato alle superfici complete con curvatura gaussiana/scalare/sezionale minore di una costante negativa [79] (si veda [154]), cosa che ha giocato un ruolo nella discussione sulle geometrie non euclidee (si veda la nota storica nell'Esempio 2.3.2). Notiamo che la catenoide e l'elicoide (che inoltre è semplicemente connessa e diffeomorfa a  $\mathbb{R}^2$ ), viste nell'Esercizio 2.3.15, forniscono invece degli esempi di superfici complete, embedded in  $\mathbb{R}^3$ , con curvatura negativa (se ne calcoli la seconda forma fondamentale e la curvatura per esercizio).

**ESERCIZIO 7.4.11.** Si mostri che per un'ipersuperficie,  $\text{Sec}_p \geq \varepsilon^2$  se e solo se  $\mathcal{R}_p \geq \varepsilon g_p$ , per ogni  $\varepsilon \geq 0$ .

Consideriamo ora una curva  $\gamma : I \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  parametrizzata in lunghezza d'arco  $s$  sull'ipersuperficie  $S$ , con seconda forma fondamentale  $\text{II}$ . Abbiamo visto che la sua curvatura  $k$  è data da

$$k\nu = \nabla_{\tau}^{\mathbb{R}^m} \tau = \nabla_{\tau} \tau + \text{II}(\tau, \tau)$$

dunque  $k = \frac{\sqrt{|\nabla_{\tau} \tau|^2 + [\text{B}(\tau, \tau)]^2}}{|\nabla_{\tau} \tau|}$ . In particolare, se  $\gamma$  è una geodetica si ha  $\nabla_{\tau} \tau = (\nabla_{\tau}^{\mathbb{R}^m} \tau)^{\top} = 0$ , da cui

$$k\nu = \text{II}(\tau, \tau) \quad \text{e} \quad k = |\text{B}(\tau, \tau)|,$$

cioè la curvatura  $k$  di  $\gamma$  coincide con  $\text{B}(\tau, \tau)$ , a meno del segno. Nell'intorno di un punto dove la curvatura di  $\gamma$  è non nulla, si ha che  $\nu$  è ben definito, inoltre è un campo lungo  $\gamma$  normale a  $S$ , poiché  $(\nabla_{\tau}^{\mathbb{R}^m} \tau)^{\top} = 0$ , se allora lo estendiamo localmente a un campo su  $S$  e consideriamo come  $\text{B}$  la seconda forma associata, si ha  $k\nu = \text{B}(\tau, \tau)\nu$ , da cui  $k = \text{B}(\tau, \tau)$ . Dunque, la curvatura (in  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) di una geodetica di  $S$  con velocità unitaria in un punto  $p \in S$  appartiene all'intervallo di valori tra le curvatures principali massima e minima. In particolare, per una superficie nello spazio euclideo, le due curvatures principali in  $p \in S$  sono date dal massimo e dal minimo della curvatura delle geodetiche con velocità unitaria passanti in tale punto.

Le equazioni di Ricci sono banali, come visto nella sezione precedente a causa della codimensione uno mentre, essendo nullo il membro sinistro delle equazioni di Codazzi–Mainardi (7.14), si ha che il tensore  $\nabla B$  è una 3–forma simmetrica (la simmetria nei secondi due indici segue dalla simmetria di  $B$ ), dunque

$$\nabla_i h_{jk} = \nabla_j h_{ik} \quad (7.18)$$

per ogni terna di indici  $i, j, k$ . Segue dunque la formula “di tipo Schur” (analogamente all’equazione (5.24))

$$\operatorname{div} B = \nabla H$$

e la seconda forma fondamentale  $B$  è armonica (si veda la discussione dopo l’Esercizio 5.7.14) se e solo se la curvatura media  $H$  è costante.

OSSERVAZIONE 7.4.12. Segue che in questo caso di un’ipersuperficie dello spazio euclideo, la seconda forma fondamentale è un tensore di Codazzi (si veda la Definizione 5.7.12) e in realtà le equazioni di Codazzi–Mainardi (in questa situazione) sono il motivo storico per la scelta di tale denominazione.

ESERCIZIO 7.4.13. Si mostri per ogni  $n \geq 2$ , che se  $B_p = \lambda(p)g_p$  per ogni  $p \in S$ , con  $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$ , cioè l’ipersuperficie è totalmente umbilicale, allora la funzione  $\lambda$  è costante,  $S$  ha curvatura costante e se è connessa, è allora un pezzo di sfera o di un iperpiano (si veda l’Osservazione 7.4.10 e si confronti coi Teoremi 5.7.6 e 5.7.8).

In particolare, se  $B = 0$  e  $S$  è completa e connessa, è un iperpiano di  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

ESERCIZIO 7.4.14. Si classifichino le ipersuperfici (connesse e complete) tali che  $B = \alpha \operatorname{Ric}$  per una costante  $\alpha \in \mathbb{R}$  (si tenga presente la precedente discussione sulle ipersuperfici Einstein e il Teorema 2.5 in [178]).

La seconda identità di Bianchi per il tensore di Riemann di  $S$  non produce nuove informazioni in quanto, per l’Esercizio 5.7.14, segue dal fatto che  $B$  è un tensore di Codazzi (dunque è conseguenza delle equazioni di Codazzi–Mainardi). Si mostri per esercizio che lo stesso vale nel caso generale di una sottovarietà di una varietà riemanniana (in ogni codimensione), discusso nella Sezione 7.1. Vedremo, nella Sezione 7.6 (dopo l’Osservazione 7.6.14), che in certi casi la seconda identità di Bianchi è proprio equivalente alle equazioni di Codazzi–Mainardi.

Una conseguenza delle equazioni di Codazzi–Mainardi è la seguente *identità di Simons* [185]

$$\Delta h_{ij} = \nabla_{ij}^2 H + H h_{il} g^{ls} h_{sj} - |B|^2 h_{ij}.$$

Infatti, si ha (sfruttando la simmetria di  $\nabla B$  nel primo passaggio)

$$\begin{aligned}\Delta h_{ij} - \nabla_{ij}^2 H &= g^{pq} \{ \nabla_{pq}^2 h_{ij} - \nabla_{ij}^2 h_{pq} \} \\ &= g^{pq} \{ \nabla_{pi}^2 h_{qj} - \nabla_{ij}^2 h_{pq} \} \\ &= g^{pq} \{ \nabla_{ip}^2 h_{qj} - \nabla_{ij}^2 h_{pq} \} \\ &\quad + g^{pq} (h_{pq} h_{il} - h_{pl} h_{iq}) g^{ls} h_{sj} + g^{pq} (h_{pj} h_{il} - h_{pl} h_{ij}) g^{ls} h_{sq} \\ &= H h_{il} g^{ls} h_{sj} - g^{pq} h_{pl} h_{iq} g^{ls} h_{sj} + g^{pq} h_{pj} h_{il} g^{ls} h_{sq} - |B|^2 h_{ij} \\ &= H h_{il} g^{ls} h_{sj} - |B|^2 h_{ij}.\end{aligned}$$

ESERCIZIO 7.4.15. Si classifichino le ipersuperfici (in particolare, se connesse e complete) tali che  $\nabla B = 0$ , utilizzando l'identità di Simons e il Teorema 2.5 in [178] (si veda anche [133]).

OSSERVAZIONE 7.4.16. Per l'Osservazione 5.7.15, vale la disuguaglianza

$$|\nabla B|^2 \geq \frac{3}{n+2} |\nabla H|^2$$

(si veda [125], per un'applicazione).

Nel caso di un'immersione  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  di una varietà differenziabile  $n$ -dimensionale  $S$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , come nella Sezione 7.2, in una carta coordinata abbiamo

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right\rangle$$

e

$$\Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = \nabla_i \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = \left( \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right)^\top = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right)^\top = \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right)^\top,$$

componente per componente.

Segue dunque che, scelto un campo unitario normale locale  $\nu$ , si ha  $B = \Pi^\nu$ ,  $S(X) = \nabla_X \nu$ , cioè

$$h_{ij} = \left\langle \nu, \nabla_{\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right\rangle = \left\langle \nu, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle \quad \text{e} \quad S \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right) = S_i^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = h_{ij} g^{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k},$$

da cui le equazioni di Gauss–Weingarten (7.15) si scrivono

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + h_{ij} \nu, \quad \frac{\partial \nu}{\partial x^i} = -h_{ij} g^{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}. \quad (7.19)$$

Ricordiamo che

$$\nabla_{ij}^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = h_{ij} \nu \quad \text{e} \quad \Delta \varphi = g^{ij} h_{ij} = H \nu,$$

componente per componente, inoltre abbiamo le formule

$$\operatorname{div} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = 0, \quad \operatorname{div}^\top \nu = -H \quad \text{e} \quad \Delta \nu = -\nabla H - |B|^2 \nu$$

dove  $\operatorname{div}^\top$  denota l'operatore *divergenza tangenziale* che opera sui campi  $X$  lungo  $S$  come segue,

$$\operatorname{div}^\top X = \operatorname{tr}(\bar{\nabla} X)^\top \quad (7.20)$$

dove  $\bar{\nabla}$  è la derivata covariante lungo  $S$  (ovviamente, se  $X$  è un campo tangente a  $S$  si ha  $\operatorname{div}^\top X = \operatorname{div} X$ ).

Infatti, calcolando in coordinate normali centrate in  $p \in S$ , si ha (nel punto  $p$ )

$$\operatorname{div} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^i} \right)^\top \right]^j = \Gamma_{ij}^j = 0,$$

$$\operatorname{div}^\top \nu = \operatorname{tr}(\bar{\nabla} \nu)^\top = \operatorname{tr} \bar{\nabla} \nu = \left( \frac{\partial \nu}{\partial x^i} \right)^i = - \left( h_{ij} g^{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right)^i = -h_{ij} g^{ji} = -H$$

e

$$\begin{aligned} \Delta \nu &= g^{ij} \left( \frac{\partial^2 \nu}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \nu}{\partial x^k} \right) \\ &= -g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( h_{jl} g^{ls} \frac{\partial \varphi}{\partial x^s} \right) \\ &= -g^{ij} \nabla_i h_{jl} g^{ls} \frac{\partial \varphi}{\partial x^s} - g^{ij} h_{jl} g^{ls} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^s} \\ &= -g^{ij} \nabla_i h_{ij} g^{ls} \frac{\partial \varphi}{\partial x^s} - g^{ij} h_{jl} g^{ls} h_{is} \nu \\ &= -\nabla H - |B|^2 \nu \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo applicato le equazioni di Codazzi–Mainardi (7.18).

**OSSERVAZIONE 7.4.17.** Per spirito di semplicità e per il lettore interessato solo al caso speciale di un'ipersuperficie immersa dello spazio euclideo data da  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , diamo una dimostrazione alternativa e diretta delle equazioni di Codazzi–Mainardi (7.18). In coordinate normali centrate in un punto  $p \in S$ , si ha (in tale punto), sfruttando le equazioni di Gauss–Weingarten (7.19),

$$\begin{aligned} \nabla_i h_{jk} &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left\langle \nu, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^k} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial \nu}{\partial x^i}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^k} \right\rangle + \left\langle \nu, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} \right\rangle \\ &= -h_{il} g^{ls} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^s}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^k} \right\rangle + \left\langle \nu, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} \right\rangle \\ &= \left\langle \nu, \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k} \right\rangle \end{aligned}$$

che è chiaramente simmetrico nei tre indici (nell'ultimo passaggio abbiamo usato il fatto che il vettore  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^k}$  è normale all'ipersuperficie).

Si provi per esercizio, in modo analogo diretto, l'equazione di Gauss

$$R_{ijkl} = h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{jk}.$$

**ESERCIZIO 7.4.18.** Si mostri che se l'ipersuperficie  $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  è localmente il grafico di una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , cioè  $S$  è data dall'embedding  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , con  $\varphi(x) = (x, f(x))$ , si ha

$$g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j, \quad \nu = -\frac{(\nabla f, -1)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}$$

$$h_{ij} = \frac{\text{Hess}_{ij} f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}}$$

$$H = \frac{\Delta f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} - \frac{\text{Hess} f(\nabla f, \nabla f)}{(\sqrt{1 + |\nabla f|^2})^3} = \text{div} \left( \frac{\nabla f}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} \right)$$

dove  $f_i = \partial_i f$  e  $\text{Hess} f$  è l'hessiano di  $f$ .

**ESERCIZIO 7.4.19.** Si mostri che se l'ipersuperficie  $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  è localmente l'insieme di livello  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : f(x) = c\}$  di una funzione  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  con  $\nabla f \neq 0$  su tale insieme di livello, si ha

$$H = \frac{\Delta f}{|\nabla f|} - \frac{\text{Hess} f(\nabla f, \nabla f)}{|\nabla f|^3} = \text{div} \left( \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \right)$$

e si determini la seconda forma fondamentale di  $S$  in termini di  $f$  e delle sue derivate.

Scelto un punto  $p \in S$  e descrivendo localmente l'ipersuperficie come grafico sul tangente  $T_p S \simeq \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , modificando la base di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , possiamo sempre portarci nella situazione dell'Esercizio 7.4.18. Si nota allora che nel punto  $p$  si ha  $\nabla f(p) = 0$ , dunque la seconda forma fondamentale coincide con l'hessiano della funzione  $f$  in  $p$ , mentre in un intorno è uguale a tale hessiano per un fattore positivo. In ogni caso, localmente le loro *signature* coincidono, da cui possiamo avere una descrizione locale di tipo convessità/concavità o "sella" guardando la segnatura della seconda forma fondamentale nel punto  $p \in S$ . Per esempio, se tutte le curvatures principali in  $p$  hanno lo stesso segno l'ipersuperficie è localmente convessa/concava (si ricordi che questo implica curvatura positiva).

I seguenti risultati estendono globalmente queste considerazioni.

**TEOREMA 7.4.20** (Teorema di Hadamard [112]). *Sia  $n \geq 2$  e sia  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  un'immersione, con  $S$  compatta e connessa. Allora, considerando su  $S$  la metrica indotta, sono equivalenti:*

- $S$  ha curvatura positiva,
- nessuna curvatura sezionale di  $S$  si annulla,
- la seconda forma fondamentale dell'immersione è definita positiva o negativa in ogni punto di  $S$ ,
- $S$  è orientabile, dunque ha una normale  $\nu$  globalmente definita e la mappa di Gauss  $\nu : S \rightarrow \mathbb{S}^n$  è un diffeomorfismo

e tutte implicano che  $S$  è diffeomorfa a  $\mathbb{S}^n$  e che  $\varphi(S)$  è strettamente convessa, cioè borda un dominio compatto, strettamente convesso. In particolare, la mappa  $\varphi$  è un embedding e  $\varphi(S)$  è un'ipersuperficie di  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Abbiamo visto sopra nell'Osservazione 7.4.4 che se  $n > 2$ , non è possibile che tutte le curvatures sezionali dell'immagine locale dell'immersione (che coincidono con quelle di  $S$ , si ricordi l'Osservazione 7.1.17) siano negative, dunque almeno una è nonnegativa. Se  $S$  è compatta, questo vale anche in dimensione  $n = 2$ , infatti (e questo vale in ogni dimensione), considerando uno dei punti  $x \in \varphi(S)$  più lontano dall'origine di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , è facile vedere che la retta per l'origine e tale punto è parallela alla normale nel punto, dunque ortogonale all'iperpiano tangente e  $\varphi(S)$  sta tutta nella palla chiusa di  $\mathbb{R}^{n+1}$  di raggio  $|x| > 0$ , centrata nell'origine. Dall'Esercizio 7.4.18 segue allora che tutte le curvatures principali in  $p$  hanno lo stesso segno e sono maggiori o uguali in modulo di  $1/|x|$ , dunque tutte le curvatures sezionali in tale punto sono positive, maggiori o uguali di  $1/|x|^2$ . Di conseguenza, se nessuna curvatura sezionale di  $S$  si annulla, per continuità tutte tali curvatures sono positive e ciò prova l'equivalenza dei primi due punti.

Il secondo e il terzo punto sono chiaramente equivalenti per le relazioni tra le curvatures principali e la curvatura sezionale.

Se (come segue da ognuno dei tre primi punti equivalenti) in ogni punto tutte le curvatures principali hanno lo stesso segno, eventualmente cambiandogli segno, possiamo scegliere localmente il vettore unitario normale  $\nu$  in modo che queste siano tutte sempre positive, ciò definisce globalmente un campo  $\nu$  unitario normale di classe  $C^\infty$  (si mostrino i dettagli per esercizio). Segue che  $S$  è orientabile (ricordando le considerazioni all'inizio della Sezione 7.3), inoltre, non avendo autovalori nulli, l'operatore shape  $S$  è invertibile in ogni punto, da cui la mappa di Gauss  $\nu : S \rightarrow \mathbb{S}^n$  è un diffeomorfismo locale (ricordiamo che  $S = -d\nu$ ). Essendo sia  $S$  che  $\mathbb{S}^n$  compatte e connesse, segue che allora è un rivestimento, dunque un diffeomorfismo, poiché  $\mathbb{S}^n$  è semplicemente connessa, per  $n \geq 2$ .

Che il quarto punto implichi il secondo (equivalente al primo e al terzo) segue dal fatto che  $S = -d\nu$  invertibile implica che le curvatures principali, che sono i suoi autovalori, non si annullano mai, dunque lo stesso vale per tutte le curvatures sezionali.

Vediamo ora l'ultima implicazione. Se la mappa di Gauss (che è ben definita) è un diffeomorfismo, dunque è iniettiva, per ogni  $x = \varphi(p) \in \varphi(S)$ , tutta l'immagine  $\varphi(S)$  è contenuta nel semispazio

$$\{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle y - x, \nu_p \rangle \geq 0\}$$

altrimenti (essendo  $\varphi(S)$  compatta) ci sarebbe un altro punto  $\bar{x} = \varphi(q)$  dove la normale  $\nu_q$  sarebbe uguale a  $\nu_p$ , considerando un punto  $\bar{x} \in \varphi(S)$  che minimizza  $y \mapsto \langle y - x, \nu_p \rangle$ . Se allora  $\varphi$  non fosse iniettiva, cioè esistessero  $p_1, p_2 \in S$  con  $\varphi(p_1) = \varphi(p_2) = z$ , si dovrebbe avere  $d\varphi(T_{p_1}S) = d\varphi(T_{p_2}S)$  e  $\nu_{p_1} = \nu_{p_2}$ ,

altrimenti la proprietà sopra sarebbe contraddetta nell'intorno di  $z \in \mathbb{R}^{n+1}$  (ricordiamo che  $\nu$  è scelto in modo che tutte le curvatures principali siano positive). Ma questo non è possibile per l'iniettività della mappa di Gauss. Dunque  $\varphi$  è iniettiva quindi un embedding, essendo  $S$  compatta, cioè  $\varphi(S)$  è un'ipersuperficie di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Allora,  $\varphi(S)$  che è diffeomorfa a una sfera, "separa"  $\mathbb{R}^{n+1}$  (si veda la discussione all'inizio della sezione) in due componenti connesse (dunque ne è il bordo) di cui una "interna" limitata. Il fatto che localmente attorno ad ogni suo punto di  $\varphi(S)$  sia strettamente convessa implica facilmente che tale "interno" è un insieme strettamente convesso di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , concludendo la dimostrazione.  $\square$

OSSERVAZIONE 7.4.21. In dimensione  $n = 1$ , cioè nel caso di una curva chiusa nel piano, il quarto punto continua a implicare il terzo (i primi due non hanno senso) e implica la conclusione finale, ma il terzo non implica necessariamente il quarto e il motivo è la *non* semplice connessione di  $\mathbb{S}^1$ . Sapendo che la mappa di Gauss è un diffeomorfismo, oppure che  $\varphi$  è iniettiva (dunque un embedding) tale conclusione segue. In generale, possiamo solo concludere che l'immagine dell'immersione è una curva nel piano con curvatura che non cambia mai segno (localmente strettamente convessa).

OSSERVAZIONE 7.4.22. Si noti che dalla parte iniziale della dimostrazione segue che per ogni  $n \geq 2$ , non si può immergere isometricamente in  $\mathbb{R}^{n+1}$  una qualunque varietà riemanniana compatta con curvatura minore o uguale a zero, in particolare i tori piatti, in quanto esiste sempre un punto con tutte le curvatures sezionali positive (si veda anche l'Osservazione 7.4.8). La compattezza è qui chiaramente fondamentale per la conclusione, pensando agli esempi della pseudosfera, della catenoide e dell'elicoide (Esempio 2.3.16 ed Esercizio 2.3.15).



Si ha la seguente estensione del teorema di Hadamard al caso non compatto (si veda [1, Teorema 7.4.11], per una dimostrazione nel caso  $n = 2$ ).

**TEOREMA 7.4.23** (Teorema di Stoker [189]). *Sia  $n \geq 2$  e sia  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  un'immersione, con  $S$  completa, connessa e non compatta. Allora, considerando su  $S$  la metrica indotta, sono equivalenti:*

- $S$  ha curvatura positiva,
- nessuna curvatura sezionale di  $S$  si annulla,
- la seconda forma fondamentale dell'immersione è definita positiva o negativa in ogni punto di  $S$ ,
- $S$  è orientabile, dunque ha una normale  $\nu$  globalmente definita e la mappa di Gauss  $\nu : S \rightarrow \mathbb{S}^n$  è iniettiva e un diffeomorfismo con la sua immagine in  $\mathbb{S}^n$

e tutte implicano che la mappa  $\varphi$  è un embedding e  $\varphi(S)$  un'ipersuperficie che è grafico di una funzione strettamente convessa su un aperto convesso di un piano di  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Valgono le stesse considerazioni nel caso delle curve (non chiuse) nel piano dell'Osservazione 7.4.21.

**OSSERVAZIONE 7.4.24.** Una conseguenza ovvia del teorema di Stoker è che  $\varphi(S)$  è diffeomorfa a un iperpiano. Questo vale anche per una superficie in  $\mathbb{R}^3$  con curvatura negativa, se è semplicemente connessa, per il teorema di Cartan-Hadamard, che vedremo nella Sezione 8.3, ma non in generale, per esempio la catenoide (Esercizio 2.3.15) non è semplicemente connessa. La proprietà di essere grafico, in curvatura negativa, invece non vale nemmeno assumendo la semplice connessione, infatti l'elicoide (sempre Esercizio 2.3.15) non è grafico su nessun piano di  $\mathbb{R}^3$  (si veda [1, Osservazione 7.6.6] o lo si provi per esercizio).

## 7.5. Curve e superfici

La geometria delle curve in  $\mathbb{R}^n$  e delle superfici in  $\mathbb{R}^3$  è molto ricca e la letteratura estesissima. Rimandiamo il lettore ai libri [1] e [73], per quanto riguarda la teoria delle curve in  $\mathbb{R}^n$  (ricordiamo che la curvatura estrinseca di una curva non è necessariamente nulla, a differenza della curvatura riemanniana, intrinseca), mentre per quanto riguarda le superfici, ci limiteremo qui a discutere alcuni teoremi fondamentali e tra i più eleganti e significativi della matematica, dovuti. Per maggiori dettagli e approfondire il soggetto, suggeriamo sempre i due libri precedenti [1] e [73] (anche [187, Volume 2, Capitolo 3, Sezione B] e [187, Volume 3] contengono molto materiale interessante). Il lettore interessato può inoltre consultare [187, Volume 2, Capitolo 2] e [187, Volume 2, Capitolo 3, Sezione A], per un'analisi storico/scientifica (e filologica) dell'eccezionale e fondamentale contributo di Gauss alla teoria delle superfici.



Carl Friedrich Gauss, 1777 – 1855

Dall'Osservazione 7.4.5 si ha il seguente famosissimo risultato dovuto a Gauss (che lo ha ovviamente dimostrato diversamente, si vedano [1, Capitolo 3] e [187, Volume 2, Capitolo 3]).

**TEOREMA 7.5.1** (Teorema Egregium – Gauss 1827). *La curvatura di Gauss di una superficie  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  dipende soltanto dalla metrica (indotta), cioè  $G$  è intrinseca, invariante per isometria locale.*

**OSSERVAZIONE 7.5.2.** Esistono applicazioni tra due superfici  $f : S \rightarrow S'$  che mantengono la curvatura di Gauss, ma non sono isometrie locali. Per esempio, si considerino le due immersioni  $\varphi, \psi : \mathbb{R}^+ \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^3$  date da

$$\begin{aligned}\varphi(t, \theta) &= (\log t, t \cos \theta, t \sin \theta) \\ \psi(t, \theta) &= (\theta, t \cos \theta, t \sin \theta).\end{aligned}$$

L'immagine  $S$  di  $\varphi$  è la superficie di rotazione generata dalla curva  $t \mapsto (\log t, t)$ , mentre l'immagine  $S'$  di  $\psi$  è un pezzo di elicoide (si veda l'Esercizio 2.3.15). È facile calcolare le curvature gaussiane  $G$  e  $G'$ , rispettivamente, delle due immersioni e vedere che  $G_{\varphi(t, \theta)} = G'_{\psi(t, \theta)}$  ma la mappa  $\psi \circ \varphi^{-1} : S \rightarrow S'$  non è un'isometria locale (lo si provi per esercizio).

Vedremo nella prossima sezione, delle condizioni necessarie e sufficienti per stabilire quando un'applicazione è un'isometria locale, legate alla curvatura di Gauss e alla seconda forma fondamentale.

Il seguente corollario è immediato.

**COROLLARIO 7.5.3.** *Sia  $(S, g)$  una superficie e  $\varphi, \psi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  due immersioni isometriche di  $S$ , allora  $G_{\varphi(p)} = G'_{\psi(p)}$  per ogni  $p \in S$ .*

Una conseguenza del Teorema 7.5.1 è che se una superficie  $S$  è localmente isometrica a un aperto del piano euclideo, allora la sua curvatura gaussiana deve essere identicamente zero. Segue che non vi sono isometrie locali tra un pezzo di sfera e un pezzo di piano, in quanto ogni sfera ha curvatura gaussiana costante positiva. Dunque, sfortunatamente per i cartografi, non si può avere una carta geografica della superficie terrestre che conservi le distanze, neppure in scala.

Il seguente *teorema di Gauss–Bonnet* (Gauss lo dimostrò ma non lo pubblicò, mentre Pierre Ossian Bonnet [232] successivamente ne diede la formulazione attuale, in contemporanea con Jacques Binet), per la cui dimostrazione rimandiamo il lettore a [1, Capitolo 6] (o anche [167, Capitolo 4, Sezione 3]), è forse il risultato più importante ed elegante della geometria differenziale delle superfici. Mostra una spettacolare connessione tra la curvatura di una superficie, che è un concetto locale (differenziale) e la sua topologia globale, si veda [102, Sezione 5.6], per approfondire.

**TEOREMA 7.5.4** (Teorema di Gauss–Bonnet – Gauss  $\approx$  1827, Bonnet 1848). *Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie compatta con la metrica indotta e misura canonica  $\mu$  associata. Allora si ha*

$$\int_S G \, d\mu = 2\pi\chi(S)$$

dove  $\chi(S)$  è la caratteristica di Eulero–Poincaré di  $S$  (si veda l'Osservazione 1.4.24).

Valendo  $\chi(S) = 2 - 2g(S)$ , dove  $g(S)$  è il genere di  $S$  (il numero di “buchi” della superficie), abbiamo allora che ogni immersione di una sfera in  $\mathbb{R}^3$  ha integrale della curvatura di Gauss uguale a  $4\pi$ , mentre qualunque immersione di un toro ha tale integrale nullo (la sfera ha genere zero e il toro uno).

**OSSERVAZIONE 7.5.5.** Il teorema di Gauss–Bonnet ha anche una versione “locale” in cui l'integrale è calcolato su un dominio di  $S$  con bordo  $C^2$  a tratti (il risultato in tal caso dipende anche da un contributo del bordo), inoltre, vale anche per un'immersione isometrica  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  di una superficie compatta, connessa e orientabile  $(S, g)$ , anche non iniettiva. Infine, per una tale superficie (anche se non fosse immergibile isometricamente in  $\mathbb{R}^3$ ), integrando la sua curvatura scalare nella misura canonica  $\mu$  associata a  $g$ , si ha

$$\int_S R \, d\mu = 4\pi\chi(S)$$

(si veda [1, Capitolo 6], per approfondire questi risultati e per degli esempi di applicazione).

Si noti che quest'ultimo integrale è il funzionale di azione di Einstein–Hilbert (o curvatura scalare totale) per la metrica  $g$  su  $S$  (Osservazione 5.7.5), che dunque in dimensione due è costante, indipendente dalla scelta della metrica e dipendente solo dalla topologia della superficie  $S$ .

**ESERCIZIO 7.5.6.** Si mostri che una superficie compatta orientabile con curvatura nonnegativa e positiva in almeno un punto è diffeomorfa a una sfera.

Abbiamo detto sopra che il genere di una superficie  $S$ , legato alla caratteristica di Eulero–Poincaré dalla relazione  $\chi(S) = 2 - 2g(S)$ , in maniera un po' intuitiva “conta i buchi” di  $S$ . Il lettore attento potrebbe allora chiedersi se ogni superficie connessa e compatta sia in effetti omeomorfa/diffeomorfa a una sfera o a una delle superfici della Figura 1.1, che riportiamo qui per comodità del lettore, immaginando che la lista in tale figura intuitivamente “prosegua” indefinitamente con superfici simili ma con sempre più “buchi”.



FIGURA 7.1 Superfici di genere 0, 1, 2 e 3.

Precisiamo dunque un poco questi concetti, menzionando un altro famoso e fondamentale risultato (topologico/differenziale) sulle superfici. Vediamo che possiamo ottenere una superficie con due "buchi" unendo due tori come nella figura seguente, cioè "tagliando" da ogni toro un dischetto e connettendo le due circonferenze di bordo (in modo  $C^\infty$ ) con un cilindro.



FIGURA 7.2 Somma connessa di due tori.

Si vede facilmente che il risultato dell'operazione, che viene detta *somma connessa* e che si può fare con qualunque coppia di superfici, come nella seguente figura, è una superficie con due "buchi", omeomorfa (diffeomorfa se l'incollamento è fatto in modo  $C^\infty$ ) alla terza superficie nella Figura 7.1. Cioè il genere (il numero di "buchi") è aumentato di uno.

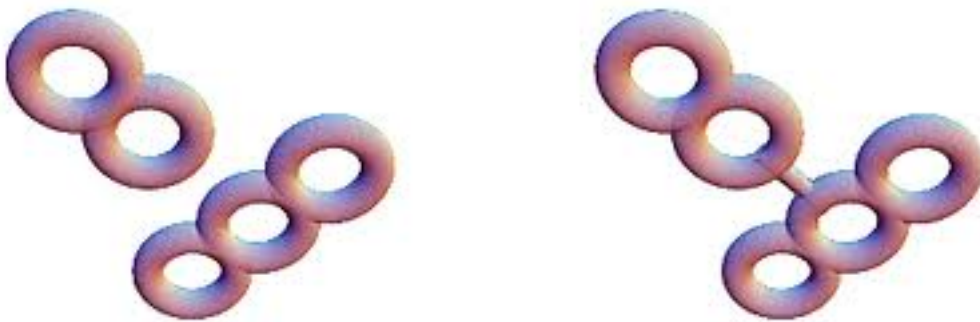


FIGURA 7.3 Somma connessa di due superfici.

Unendo un altro toro alla somma connessa di due tori, si ottiene una superficie omeomorfa/diffeomorfa all'ultima superficie nella Figura 7.1, di genere tre e così via, iterando l'operazione di fare la somma connessa con un toro possiamo esibire una superficie di genere  $g$ , dunque caratteristica di Eulero–Poincaré  $2 - 2g$ , per ogni  $g \in \mathbb{N}$ .

Il seguente teorema asserisce che in questo modo otteniamo tutte le superfici compatte e orientabili, a meno di omeomorfismo/diffeomorfismo.

**TEOREMA 7.5.7** (Teorema di classificazione delle superfici compatte  $\approx 1860$ ). *Ogni superficie compatta e orientabile è omeomorfa/diffeomorfa alla sfera oppure alla somma connessa di un numero finito di tori. Inoltre,*

- *due superfici compatte e orientabili sono omeomorfe/diffeomorfe se e solo se hanno lo stesso genere/caratteristica di Eulero–Poincaré,*
- *la sfera è l'unica superficie compatta e orientabile con caratteristica di Eulero–Poincaré positiva, uguale a due (genere zero),*
- *il toro è l'unica superficie compatta e orientabile con caratteristica di Eulero–Poincaré nulla (genere uno).*

*In particolare, le superfici compatte e orientabili hanno tutte caratteristica di Eulero–Poincaré pari e minore o uguale di due.*

*Ogni superficie compatta e non orientabile è omeomorfa/diffeomorfa alla somma connessa di un numero finito di piani proiettivi  $\mathbb{R}P^2$ .*

Si veda per esempio [150] (anche [91] e [197]), per una dimostrazione.

Concludiamo questa sezione con un altro importante e famoso teorema, mostrato da Henri Poincaré e Paul Koebe indipendentemente, nel 1907 (si veda [67, 104]), nella sua “versione riemanniana” da cui si può anche dedurre il teorema di classificazione (si veda [240] per la “versione complessa” del teorema e per approfondire l'argomento). Si consulti [67, 104], per una dimostrazione.

**TEOREMA 7.5.8** (Teorema di uniformizzazione – Poincaré & Koebe 1907). *Ogni superficie riemanniana compatta  $(S, g)$  ammette una metrica conforme a  $g$  con curvatura costante 0, 1 o  $-1$ .*

In combinazione con il teorema di Gauss–Bonnet e il teorema di classificazione, otteniamo che tra le superfici compatte e orientate, la sfera è l'unica che ammetta una metrica a curvatura costante uguale a 1, il toro è l'unica che ammetta una metrica flat e le altre, di genere maggiore di uno, sono tutte e sole quelle che ammettono una metrica di curvatura costante  $-1$  (in tal caso vengono dette *superfici iperboliche*). Vedremo allora nella Sezione 9.1 che il rivestimento universale riemanniano di quest'ultime è il piano iperbolico, dunque sono tutte quozienti di  $\mathbb{H}^2$  per un suo gruppo di isometrie (la sfera stessa è il proprio rivestimento universale riemanniano e il piano euclideo con la metrica canonica lo è per ogni toro flat). Ovviamente, questo implica che  $\mathbb{R}^2$  è il rivestimento

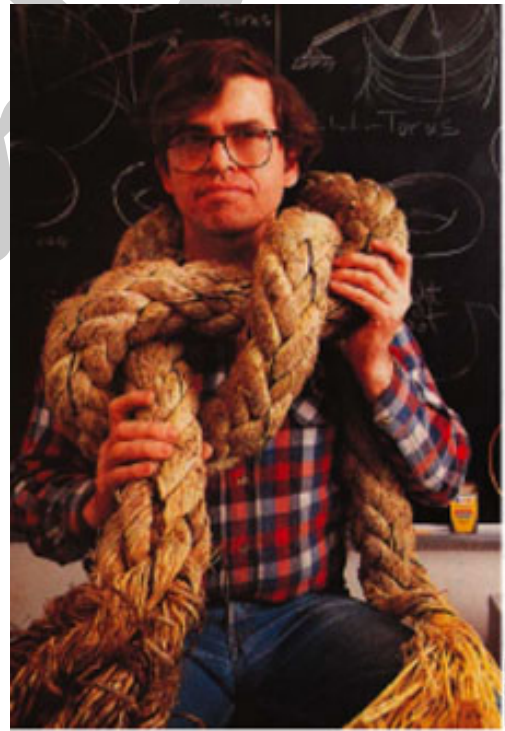
universale (topologico/differenziale) di tutte le superfici compatte e orientate di genere maggiore di zero, di cui quindi sono un quoziente.

**OSSERVAZIONE 7.5.9.** Per provare il teorema dobbiamo mostrare che esiste un cambio conforme  $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$  della metrica  $g$  sulla superficie  $S$  tale che  $\tilde{R}$ , la curvatura scalare associata a  $\tilde{g}$ , sia costante. Vedremo dai calcoli nella Sezione 9.2, in particolare la formula (9.5), che si ha  $\tilde{R} = e^{-2\varphi} (R - 2\Delta\varphi)$ , quindi una possibile linea dimostrativa è trovare una soluzione (globale)  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$  della PDE  $\Delta\varphi = R/2 - \lambda e^{2\varphi}$  su  $S$ , per un qualche  $\lambda \in \mathbb{R}$  e mostrare che è unica, a meno di costante. Ciò può essere effettivamente ottenuto, usando i metodi diretti del calcolo delle variazioni (si vedano [20, 190], per esempio).

Menzioniamo che questo è il caso bidimensionale del cosiddetto *problema di Yamabe* (in ogni dimensione), che consiste nel trovare una metrica conforme a quella di una varietà riemanniana, avente curvatura scalare costante (che in dimensione maggiore di due *non* implica curvatura costante), si vedano [20, 242]. Ricordiamo che ogni superficie è LCF (come detto immediatamente prima dell'Osservazione 5.7.19 – risultato che dimostreremo nella Proposizione 9.2.7), dunque tale problema è chiaramente risolvibile *localmente* (con  $\lambda = 0$ ), l'interesse è nella sua risoluzione *globale*, per  $\lambda \in \mathbb{R}$ , il cui segno è determinato a priori dalla topologia di  $S$ , per il teorema di Gauss–Bonnet.

In dimensione tre, l'analogo dei teoremi di classificazione/uniformizzazione delle superfici compatte è una “caratterizzazione” (ma non una vera e propria classificazione), data dalla *congettura di geometrizzazione di Thurston* [198, 212] (ora un teorema grazie al lavoro di Richard Hamilton e Grisha Perelman sul flusso di Ricci [234] – si veda [27]) che “descrive” la struttura delle 3-varietà.

In dimensione  $n \geq 4$ , risultati di logica matematica escludono *a priori* la possibilità di avere un teorema di classificazione generale delle varietà compatte. Precisamente, si sa che non può esistere alcun algoritmo che partendo da due varietà compatte (descritte in qualche modo effettivo, per esempio mediante una triangolazione esplicitamente data), “decida in tempo finito” se siano o no diffeomorfe. Un eventuale teorema di classificazione implicherebbe l'esistenza di un



William P. Thurston, 1946 – 2012

tale algoritmo.

## 7.6. Immergibilità e rigidità

In questa sezione vogliamo occuparci del problema dell'immergibilità isometrica locale di una sottovarietà in un'altra varietà riemanniana, nonché della "rigidità" di tale immersione a meno di isometrie dello spazio ambiente. Per semplicità, ci limiteremo al caso delle ipersuperfici in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , si può approfondire il caso generale in [187, Volume 4, Capitolo 7, Sezione C].

Prima di discutere tale problema, vediamo brevemente il caso estremamente speciale delle curve nel piano o in  $\mathbb{R}^n$ , facendo riferimento a [1, Capitolo 1]. Ovviamente, ogni curva ha banalmente infinite immersioni isometriche locali in  $\mathbb{R}^2$ , dunque ci chiediamo, fissata una funzione curvatura  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$ , se esiste una curva regolare  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , parametrizzata in lunghezza d'arco tale che per ogni  $s \in I$ , la curvatura in  $\gamma(s)$  sia  $k(s)$  (la curvatura orientata, si veda l'Esempio 7.2.3). Il seguente teorema ([1, Teorema 1.3.37]) risponde positivamente a tale domanda, inoltre afferma che due curve che soddisfino tale proprietà sono ottenibili una dall'altra con un moto rigido nel piano.

**TEOREMA 7.6.1** (Teorema fondamentale delle curve planari). *Data una funzione  $k : I \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$ , esiste un'unica (a meno di movimenti rigidi del piano) curva regolare  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizzata in lunghezza d'arco di cui  $k$  è la curvatura (orientata).*

Invitiamo il lettore ad approfondire l'argomento delle curve in  $\mathbb{R}^n$ , in particolare nello spazio tridimensionale ([1, Sezione 1.3]) per l'ovvia importanza applicativa, in special modo le formule di Frenet–Serret che descrivono le derivate in lunghezza d'arco di una base ortonormale dello spazio ambiente lungo una curva regolare.

Considerando ora ipersuperfici in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , abbiamo già visto vari esempi nella Sezione 7.4 in cui l'immergibilità isometrica (locale o globale) di una varietà riemanniana  $n$ -dimensionale  $(S, g)$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  non è possibile (per esempio, nell'Osservazione 7.4.4), in quanto prevede come condizione necessaria che esista a priori una forma bilineare simmetrica  $B$  (seconda forma fondamentale dell'immersione, a posteriori) tale che  $\text{Riem} = B \otimes B/2$  (equazione di Gauss) e che soddisfi le equazioni di Codazzi–Mainardi, cioè che  $\nabla B$  sia una 3-forma simmetrica. Vediamo nel teorema seguente (dovuto a Bonnet [37, 38], nel caso speciale delle superfici in  $\mathbb{R}^3$ ) che queste condizioni sono anche sufficienti per l'immergibilità locale di  $S$ .

Nel seguente teorema e nel seguito di questa sezione, per semplicità negli enunciati e nella trattazione, consideriamo ipersuperfici  $n$ -dimensionali  $S$  orientabili (o immersioni di varietà orientabili  $S$ ) e scriviamo la seconda forma fondamentale di  $S$ , intenderemo quella relativa alla scelta come campo normale unitario globale di  $\nu = \star dV^S$ , dove  $dV^S$  è la forma di volume canonica di  $S$

con la metrica indotta e  $\star$  è l'operatore di Hodge di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Dunque, in tal caso la seconda forma fondamentale sarà univocamente determinata, *non* a meno del segno (potrebbe non valere, con questa scelta di  $\nu$ , che la seconda seconda forma fondamentale di un'ipersuperficie bordo di un convesso sia definita nonnegativa, come detto all'inizio della Sezione 7.4).

**TEOREMA 7.6.2** (Teorema fondamentale delle ipersuperfici). *Sia  $(S, g)$  una varietà riemanniana  $n$ -dimensionale e  $B$  una forma bilineare simmetrica che soddisfi le equazioni di Gauss e di Codazzi–Mainardi. Allora, per ogni punto  $p \in S$  esiste un suo intorno  $U \subseteq S$  e un'immersione isometrica  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , unica a meno di moti rigidi in  $\mathbb{R}^{n+1}$  (cioè la composizione di un elemento di  $SO(n+1)$  con una traslazione), tale che  $B$  coincida con la seconda forma fondamentale dell'immersione. In generale, se due immersioni locali di una varietà riemanniana  $(S, g)$  hanno la stessa seconda forma fondamentale, coincidono a meno di moti rigidi in  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

**OSSERVAZIONE 7.6.3.** Si notino le differenze tra il caso delle curve e quello di dimensione più alta: per le curve si ha una soluzione globale senza assunzioni, in dimensione maggiore di uno invece l'immersione che si trova è solo locale e per ottenerla delle condizioni devono essere soddisfatte. Ciò riflette il fatto che la dimostrazione del teorema 7.6.1 è basata sul teorema di esistenza e unicità per i sistemi di ODE, mentre come vedremo la dimostrazione di questo teorema utilizza il teorema di Frobenius (che riguarda sistemi di PDE del prim'ordine e richiede delle condizioni di integrabilità). Si veda [167, Theorem 7, Capitolo 4, Sezione 2] per una dimostrazione alternativa.

**DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 7.6.2.** Fissate delle coordinate normali centrate in  $p \in S$  in un intorno  $U$ , tale che la carta risultante sia compatibile con l'atlante orientato di  $S$ , cerchiamo  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  che soddisfi, in un intorno di  $p$ ,

$$\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right\rangle = g_{ij}, \quad \left\langle \nu, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} \right\rangle = h_{ij}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}(p) = e_k$$

per ogni  $k \in \{1, \dots, n\}$ , dove  $\{e_k\}$  è una fissata base ortonormale di  $\mathbb{R}^{n+1}$  tale che  $e_1 \wedge \dots \wedge e_{n+1}$  dia la sua orientazione canonica e  $\nu$  denota il campo unitario  $C^\infty$  ortogonale a tutti i campi  $\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$  e coincidente con  $e_{n+1}$  in  $p$ , dunque univocamente determinato da  $\varphi$ . Si noti che la prima equazione implica che  $\varphi$  è un'immersione e che la scelta di  $\nu$  è coerente con la convenzione detta sopra.

Cominciamo allora col cercare  $n+1$  funzioni  $u_k : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  che "a posteriori" saranno i campi coordinati  $u_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$ , se  $k \in \{1, \dots, n\}$  e normale  $u_{n+1} = \nu$ . Per



le equazioni di Gauss–Weingarten (7.19), si dovrà dunque avere

$$\begin{cases} \frac{\partial u_k}{\partial x^i} = \Gamma_{ik}^\ell u_\ell + h_{ik} u_{n+1} & \text{per ogni } i, k \in \{1, \dots, n\} \\ \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x^i} = -h_{il} g^{\ell s} u_s & \text{per ogni } i \in \{1, \dots, n\}. \end{cases} \quad (7.21)$$

Vogliamo allora usare il teorema di Frobenius, nella forma della Proposizione 1.7.12, per avere delle soluzioni locali, quindi dobbiamo verificare le condizioni di integrabilità per questo sistema di PDE. Devono dunque valere, per ogni  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \Gamma_{ik}^\ell}{\partial x^j} u_\ell + \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} u_{n+1} + \Gamma_{ik}^\ell (\Gamma_{j\ell}^p u_p + h_{j\ell} u_{n+1}) - h_{ik} h_{j\ell} g^{\ell s} u_s \\ &\quad - \frac{\partial \Gamma_{jk}^\ell}{\partial x^i} u_\ell - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} u_{n+1} - \Gamma_{jk}^\ell (\Gamma_{i\ell}^p u_p + h_{i\ell} u_{n+1}) + h_{jk} h_{i\ell} g^{\ell s} u_s \\ &= R_{ijk\ell} g^{\ell s} u_s - (h_{ik} h_{j\ell} - h_{jk} h_{i\ell}) g^{\ell s} u_s + \left( \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^j} - \Gamma_{jk}^\ell h_{i\ell} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^\ell h_{j\ell} \right) u_{n+1} \\ &= R_{ijk\ell} g^{\ell s} u_s - (h_{ik} h_{j\ell} - h_{jk} h_{i\ell}) g^{\ell s} u_s + (\nabla_j h_{ik} - \nabla_i h_{jk}) u_{n+1} \end{aligned}$$

(dove abbiamo usato le formule (5.3), (5.5)) e

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h_{il}}{\partial x^j} g^{\ell s} u_s + h_{il} \frac{\partial g^{\ell s}}{\partial x^j} u_s + h_{il} g^{\ell s} (\Gamma_{js}^\ell u_\ell + h_{js} u_{n+1}) \\ &\quad - \frac{\partial h_{jl}}{\partial x^i} g^{\ell s} u_s - h_{jl} \frac{\partial g^{\ell s}}{\partial x^i} u_s - h_{jl} g^{\ell s} (\Gamma_{is}^\ell u_\ell + h_{is} u_{n+1}) \\ &= (\nabla_j h_{il} - \nabla_i h_{jl}) g^{\ell s} u_s \end{aligned}$$

(usando le formule (3.3)).

Vediamo allora che, poiché  $B$ , di componenti  $h_{ij}$  in coordinate, soddisfa le equazioni di Gauss  $R_{ijk\ell} = h_{ik} h_{j\ell} - h_{jk} h_{i\ell}$  e di Codazzi–Mainardi  $\nabla_j h_{i\ell} - \nabla_i h_{j\ell}$  le condizioni di integrabilità del sistema sono soddisfatte.

Trovate dunque localmente (eventualmente restringendo  $U$ ) in un intorno di  $p \in S$  queste funzioni (uniche), vogliamo ora vedere che esiste  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tale che  $\frac{\partial \varphi}{\partial x^k} = u_k$ , per ogni  $k \in \{1, \dots, n\}$ . Usando di nuovo la Proposizione 1.7.12 (teorema di Frobenius), le condizioni di integrabilità di questo secondo problema sono immediatamente verificate, in quanto dalle equazioni del sistema (7.21), abbiamo

$$\frac{\partial u_k}{\partial x^i} = \Gamma_{ik}^\ell u_\ell + h_{ik} u_{n+1} = \frac{\partial u_i}{\partial x^k}$$

per la simmetria dei simboli di Christoffel e della seconda forma fondamentale. Dunque, abbiamo una mappa  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  (unica) da un intorno di  $p \in S$  in

$\mathbb{R}^{n+1}$  tale che  $\varphi(p) = 0$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}(p) = e_k$  e

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} + h_{ij} u_{n+1} \quad \text{per ogni } i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (7.22)$$

$$\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x^i} = -h_{ij} g^{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \quad \text{per ogni } i \in \{1, \dots, n\}. \quad (7.23)$$

Restringendo ulteriormente  $U$  se necessario, le condizioni su  $\varphi$  e le sue derivate in  $p$  assicurano che  $\varphi$  è un embedding, dunque abbiamo un campo normale unitario  $\nu$  ben definito, imponendo che  $\nu(p) = e_{n+1}$ . Per le equazioni di Gauss–Weingarten (7.19), sia  $\{u_1, \dots, u_n, u_{n+1}\}$  che  $\{u_1, \dots, u_n, \nu\}$  risolvono il sistema (7.21) e coincidono in  $p \in U$ , dunque per l'unicità della soluzione detta sopra si deve avere  $u_{n+1} = \nu$ . Segue allora dall'equazione (7.22) che  $B$  è la seconda forma dell'immersione  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , relativa a  $\nu$ .

Rimane da controllare che l'immersione sia isometrica, cioè che  $\tilde{g}_{ij} = \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \rangle = g_{ij}$  in  $U$ , per ogni  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , dove  $\tilde{g}$  è la metrica su  $S$  localmente indotta dall'immersione  $\varphi$ . Notiamo che per costruzione  $\tilde{g}_{ij}(p) = g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ , avendo scelto delle coordinate normali centrate in  $p \in U$  e consideriamo il sistema di PDE nelle funzioni  $\alpha_{km}$ ,  $\beta_k$  e  $\tau$ ,

$$\begin{cases} \frac{\partial \alpha_{km}}{\partial x^i} = \Gamma_{ik}^\ell \alpha_{\ell m} + h_{ik} \beta_m + \Gamma_{im}^\ell \alpha_{\ell k} + h_{im} \beta_k & \text{per ogni } i, k, m \in \{1, \dots, n\} \\ \frac{\partial \beta_k}{\partial x^i} = \Gamma_{ik}^\ell \beta_\ell + h_{ik} \tau - h_{i\ell} g^{\ell s} \alpha_{ks} & \text{per ogni } i, k \in \{1, \dots, n\} \\ \frac{\partial \tau}{\partial x^i} = -2h_{i\ell} g^{\ell s} \beta_s & \text{per ogni } i \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (7.24)$$

e vediamo che con calcoli analoghi a quelli del sistema (7.21), anch'esso soddisfa le condizioni di integrabilità (lo si provi per esercizio).

Derivando i prodotti scalari abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \right\rangle &= \Gamma_{ik}^\ell \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^\ell}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \right\rangle + h_{ik} \left\langle \nu, \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \right\rangle + \Gamma_{im}^\ell \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^\ell}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right\rangle + h_{im} \left\langle \nu, \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right\rangle \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \nu, \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right\rangle &= \Gamma_{ik}^\ell \left\langle \nu, \frac{\partial \varphi}{\partial x^\ell} \right\rangle + h_{ik} - h_{i\ell} g^{\ell s} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^s}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right\rangle \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \nu, \nu \rangle &= -2h_{i\ell} g^{\ell s} \left\langle \nu, \frac{\partial \varphi}{\partial x^s} \right\rangle \end{aligned}$$

per le equazioni (7.22), (7.23) e il fatto che  $u_{n+1} = \nu$ , dunque ponendo

$$\alpha_{km} = \tilde{g}_{km} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}, \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \right\rangle, \quad \beta_k = \left\langle \nu, \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \tau = \langle \nu, \nu \rangle = 1,$$

abbiamo una soluzione del sistema (7.24). Poiché anche  $\alpha_{km} = g_{km}$ ,  $\beta_k = 0$  e  $\tau = 1$  è una soluzione, per le relazioni (3.3) e le equazioni di Gauss–Weingarten (7.19),

che coincide con la precedente in  $p \in U$ , esse devono coincidere in  $U$  per la Proposizione 1.7.12.

Modificando  $\varphi(p) \in \mathbb{R}^{n+1}$  e vettori  $u_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}(p)$  che con  $\nu$  formano una base ortonormale orientata di  $\mathbb{R}^{n+1}$  nelle condizioni iniziali, otteniamo un'altra immersione isometrica con la stessa seconda forma fondamentale e analogamente se componiamo  $\varphi$  con un moto rigido di  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Se ora abbiamo un'altra immersione isometrica locale  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  in un intorno di  $p \in S$ , con stessa seconda forma fondamentale, che manda  $p$  in  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ , i vettori  $\frac{\partial \psi}{\partial x^k}$  e  $\tilde{\nu}$  (il campo unitario normale relativo a  $\psi$ , ottenuto come sopra, in  $p$ ) sono una base ortonormale orientata  $\{\tilde{e}_k\}$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e poiché  $SO(n+1)$  agisce transitivamente sulle basi orientate di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , possiamo trovare un moto rigido  $T$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$  tale che  $T(x) = \varphi(p)$  e  $T(\tilde{e}_k) = e_k$ . Componendo dunque la mappa  $\psi$  col moto rigido  $T$ , abbiamo un'immersione isometrica  $T \circ \psi$  che coincide con  $\varphi$  in  $p$  e tale che i campi  $v_k = \frac{\partial(T \circ \psi)}{\partial x^k}$  risolvono il sistema (7.21) e coincidono in  $p \in U$  con i campi  $u_k = \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$  relativi alla mappa  $\varphi$  ottenuta con la precedente procedura. Ancora per l'unicità delle soluzioni espressa nella Proposizione 1.7.12, si deve allora avere  $v_k = u_k$ , per ogni  $k \in \{1, \dots, n+1\}$ , di conseguenza,  $T \circ \psi = \varphi$  e questo argomento chiaramente prova anche l'asserzione finale del teorema.  $\square$

**OSSERVAZIONE 7.6.4.** Se non si sceglie per convenzione la normale all'ipersuperficie o all'immersione come fatto immediatamente prima del teorema, dunque la seconda forma fondamentale è definita solo a meno del segno, la conclusione è solo di unicità a meno di isometrie di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Per esempio una superficie in  $\mathbb{R}^3$  è chiaramente isometrica a una sua immagine speculare, data da una "riflessione", ma non necessariamente tale immagine si può ottenere con un moto rigido (si noti che, usando la convenzione di cui sopra, prendendo l'immagine speculare la seconda forma fondamentale cambia segno).

**OSSERVAZIONE 7.6.5.** Nel caso generale, le equazioni di Gauss, Ricci e Codazzi–Mainardi sono l'analogo in dimensione più alta delle equazioni di Frenet–Serret per curve nello spazio o in  $\mathbb{R}^n$  (si veda [1, Sezione 1.3]). Abbiamo visto nella dimostrazione sopra che, per un'ipersuperficie, le equazioni di Gauss e di Codazzi–Mainardi sono le condizioni di integrabilità delle equazioni di Gauss–Weingarten (più precisamente Gauss e Codazzi–Mainardi per la formula di Gauss (7.1) e Codazzi–Mainardi per la formula di Weingarten (7.4), rispettivamente la prima e la seconda relazione nelle equazioni di Gauss–Weingarten (7.19)). In codimensione più alta tali condizioni di integrabilità coinvolgono anche le equazioni di Ricci, che sono banali in codimensione uno (si ricordi la discussione all'inizio della Sezione 7.3). Si veda [187, Volume 2, Capitolo 4], per approfondire tali questioni e per l'analogo del Teorema 7.6.2 in codimensione generale.

Se dunque abbiamo due immersioni isometriche della stessaipersuperficie in

$\mathbb{R}^{n+1}$  con stessa seconda forma fondamentale, le immagini sono “sovrapponibili” con un moto rigido di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e chiaramente vale il viceversa. Abbiamo però visto nell’Esercizio 2.3.15 (catenoide e elicoide che sono localmente isometrici) e 7.4.7 (immersioni isometriche di aperti della sfera) che potrebbero esserci immersioni isometriche della stessa ipersuperficie (quindi con la stessa curvatura di Gauss) con seconde forme fondamentali diverse, dunque con immagini in  $\mathbb{R}^{n+1}$  non “sovrapponibili”, non ottenibili l’una l’altra con un moto rigido. Ciò è legato al fatto che solo la curvatura di Gauss, in dimensione pari o il suo modulo, in dimensione dispari (come abbiamo visto nell’Osservazione 7.4.5), è intrinseca (invariante per isometria) mentre ciò non vale per la seconda forma fondamentale. In realtà non tutte le ipersuperfici ammettono questa possibilità (non considerando le “riflessioni” in  $\mathbb{R}^{n+1}$ ) e quando ciò non avviene, si parla di “rigidità” (locale, se tale proprietà riguarda intorno di punti dell’ipersuperficie), dunque un’ipersuperficie è *rigida* se tutte le sue immagini isometriche si ottengono l’una dall’altra per mezzo di un’isometria di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Per esempio vedremo che se un’ipersuperficie compatta ha curvatura positiva, allora è globalmente *rigida*, di conseguenza la seconda forma fondamentale di una qualunque sua immagine isometrica (globale) è unica, intrinseca (a meno di segno). Notiamo che banalmente, nessuna curva nel piano (o in  $\mathbb{R}^n$ ) è rigida. Diciamo poi che un’ipersuperficie  $n$ -dimensionale è *deformabile* (o *flessibile*) se esiste una famiglia continua di sue diverse immersioni isometriche nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^{n+1}$ , si pensi a un foglio di carta che viene piegato (un pezzo di piano che diventa un pezzo di un cilindro, chiaramente restando isometrico a se stesso durante la deformazione). Ovviamente, un’ipersuperficie *deformabile* non può essere *rigida*.

In dimensione maggiore di due la rigidità è un fenomeno piuttosto comune per un’ipersuperficie  $S$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Essendo infatti  $\text{Riem}_p = B_p \otimes B_p/2$ , per ogni  $p \in S$ , è naturale pensare che si possa “prendere la radice” del (doppio del) tensore di Riemann e ottenere univocamente (intrinsecamente) la seconda forma fondamentale  $B_p$ , se la forma bilineare  $\mathcal{R}_p$  (o equivalentemente, l’operatore  $\mathcal{R}_p$ ) è definita positiva. In effetti, se una tale forma  $B_p$  esiste, è univocamente determinata a meno del segno, se  $n \geq 3$ .

**PROPOSIZIONE 7.6.6.** *Sia  $(S, g)$  una varietà riemanniana di dimensione  $n \geq 3$  con la forma  $\mathcal{R}_p$  non degenere ( $\det \mathcal{R}_p \neq 0$ ). Se esiste una forma bilineare simmetrica  $B_p$  su  $T_p S$  tale che  $\text{Riem}_p = B_p \otimes B_p/2$ , allora è unica a meno del segno.*

**DIMOSTRAZIONE.** Vediamo prima la dimostrazione nel caso  $n = 3$ . Fissata una base ortonormale  $\{e_1, e_2, e_3\}$  di  $T_p S$ , la matrice di coefficienti  $h_{ij} = B_p(e_i, e_j)$  deve essere invertibile, con quadrato del suo determinante uguale a  $\det \mathcal{R}_p > 0$ , per l’Osservazione 7.4.5 e le relazioni tra le curvatures immediatamente precedenti. I suoi *cofattori* (coefficienti della sua inversa moltiplicata per il suo determinante) sono dati da

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}(h_{i+1\ j+1}h_{i+2\ j+2} - h_{i+1\ j+2}h_{i+2\ j+1})$$

per ogni  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  (dove gli indici sono considerati "modulo" 3). Poiché si ha

$$R_{i+1 i+2 j+1 j+2} = h_{i+1 j+1} h_{i+2 j+2} - h_{i+1 j+2} h_{i+2 j+1},$$

deve essere che la matrice inversa ha coefficienti

$$h_{ij}^{-1} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{\det \mathcal{R}_p}} = (-1)^{i+j} \frac{R_{i+1 i+2 j+1 j+2}}{\sqrt{\det \mathcal{R}_p}}$$

dunque è univocamente determinata. Invertendo tale matrice si ottiene allora unicamente  $h_{ij}$ , a meno di segno.

Sia ora  $n \geq 4$ , con lo stesso argomento abbiamo che tutti i determinanti delle sottomatrici  $2 \times 2$  della matrice invertibile  $h_{ij}$  sono determinati, la sua unicità a meno di segno è allora conseguenza del seguente lemma.

**LEMMA 7.6.7.** *Siano  $A$  e  $B$  due matrici  $n \times n$ , con  $n \geq 3$ , simmetriche e invertibili con tutti i determinanti delle sottomatrici  $2 \times 2$  coincidenti, allora  $A = B$  oppure  $A = -B$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Data una base  $\{e_i\}$  di  $\mathbb{R}^n$ , definiamo  $\mathcal{A} : \Lambda^2 \mathbb{R}^n \rightarrow \Lambda^2 \mathbb{R}^n$  per mezzo del suo comportamento sulla base  $e_i \wedge e_j$ ,

$$\mathcal{A}(e_i \wedge e_j) = Ae_i \wedge Ae_j = \sum_{k,l=1}^n a_{ik} e_k \wedge a_{jl} e_l = \sum_{\substack{k,l=1 \\ k < l}}^n (a_{ik} a_{jl} - a_{il} a_{kj}) e_k \wedge e_l$$

(dove  $a_{ij}$  sono i coefficienti di  $A$ , che abbiamo identificato con un'applicazione lineare da  $\mathbb{R}^n$  in se) e lo stesso per  $\mathcal{B}$ , usando la matrice  $B$ . Segue, per ipotesi, che  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ .

Considerato ora un generico vettore  $v \in \mathbb{R}^n$  non nullo, vogliamo vedere che  $Av$  e  $Bv$  sono linearmente dipendenti, dunque  $Av = \lambda_v Bv$ , per un qualche  $\lambda_v \in \mathbb{R}$ . Se così non fosse, poiché  $n \geq 3$ , esiste  $w \in \mathbb{R}^n$  tale che  $Av, Bv$  e  $Aw$  sono linearmente indipendenti, essendo  $A$  invertibile, quindi  $Av \wedge Bv \wedge Aw \neq 0$  da cui

$$0 \neq Av \wedge Aw \wedge Bv = \mathcal{A}(v \wedge w) \wedge Bv = \mathcal{B}(v \wedge w) \wedge Bv = Bv \wedge Bw \wedge Bv$$

che è una contraddizione, in quanto l'ultimo termine è chiaramente nullo.

Se  $v_1, v_2$  sono allora due vettori linearmente indipendenti, si ha

$$\lambda_{v_1+v_2} (Bv_1 + Bv_2) = \lambda_{v_1+v_2} B(v_1 + v_2) = A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = \lambda_{v_1} Bv_1 + \lambda_{v_2} Bv_2$$

da cui segue che  $\lambda_{v_1+v_2} = \lambda_{v_1} = \lambda_{v_2}$ , essendo  $B$  invertibile. Inoltre,

$$\mu \lambda_{\mu v} Bv = \lambda_{\mu v} B(\mu v) = A(\mu v) = \mu Av = \mu \lambda_v Bv$$

per ogni  $v \in \mathbb{R}^n$  e  $\mu \neq 0$ , che implica  $\lambda_{\mu v} = \lambda_v$ .

Dunque  $\lambda_v$  è una costante  $\lambda \neq 0$  e  $Av = \lambda Bv$  per ogni  $v \in \mathbb{R}^n$ , cioè  $A = \lambda B$ . Si conclude allora che  $\lambda$  deve essere 1 o  $-1$ , per l'uguaglianza dei determinanti  $2 \times 2$ , che è la tesi.  $\square$

OSSERVAZIONE 7.6.8. Se  $(S, g)$  ha dimensione  $n = 3$ , l'argomento della dimostrazione prova anche l'esistenza di una tale forma  $B_p$ , infatti la matrice  $h_{ij}$  si ottiene costruttivamente dal tensore di Riemann e con un calcolo diretto si mostra che  $R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}$  (lo si provi per esercizio, osservando che  $\det \mathcal{R}_p = \det c_{ij} = \det(-1)^{i+j} R_{i+1i+2j+1j+2}$  e ricordando che  $\det \mathcal{R}_p$  è puro in dimensione  $n = 3$ ). Se  $n \geq 4$  l'esistenza della forma  $B_p$  si ha sotto ulteriori ipotesi (si vedano [200, 201]) e si può ottenere costruttivamente con l'algoritmo descritto in [105] (si veda anche [188]).

OSSERVAZIONE 7.6.9. Questa proposizione si applica ovviamente a ogni tensore di curvatura algebrico  $P$ .

Per l'Osservazione 7.4.5 e la discussione che la precede, se la dimensione  $n \geq 3$  è dispari, perché esista la forma  $B_p$  si deve avere  $\det \mathcal{R}_p \geq 0$ . Un esempio che mostra che l'ipotesi  $\det \mathcal{R}_p > 0$  non è sufficiente per l'esistenza di  $B_p$ , se  $n \geq 4$  è dato da  $(\mathbb{H}^n, g_{\text{can}})$  che ha  $\det \mathcal{R}_p \neq 0$  in ogni suo punto  $p$ , ma non esiste  $B_p$  tale che  $\text{Riem}_p = B_p \otimes B_p/2$ , argomentando come nella discussione dopo l'Osservazione 7.4.10. Si noti che l'ipotesi  $\det \mathcal{R}_p \neq 0$  è implicata dal fatto che tutte le curvatures sezionali siano positive in  $p \in S$  e può essere sostituita dalla richiesta che il determinante  $\det S_p$  dell'operatore shape associato a  $B_p$  (o la curvatura di Gauss  $G_p = \det S_p$  di un'immersione) non si annulli, sempre per le relazioni precedenti l'Osservazione 7.4.5.

Se infine l'operatore di curvatura ha determinante nullo, non solo (come per  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ) potrebbe non essere possibile trovare una forma  $B_p$ , ma se anche fosse possibile, potrebbe non essere unica (a meno di segno), come vedremo nell'Osservazione 7.6.14.

OSSERVAZIONE 7.6.10. Il caso delle superfici è speciale in quanto  $\text{Riem}_p = R(p)g_p \otimes g_p$ , dunque l'esistenza di una forma  $B_p$  è immediata se la curvatura scalare  $R(p)$  è maggiore o uguale a zero e in realtà, anche se  $R(p) < 0$  possiamo sempre trovare una forma bilineare simmetrica  $h_{ij}$  tale che

$$h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk} = R_{ijkl} = R(p)(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}),$$

infatti, scegliendo una base ortonormale  $\{e_1, e_2\}$ , il tensore di Riemann si scrive  $R_{ijkl} = R(p)(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$ , dunque ponendo  $h_{11} = R(p)$ ,  $h_{12} = 0$  e  $h_{22} = 1$  si ha una possibile forma che soddisfa l'equazione (7.21). Chiaramente, per ogni costante  $\lambda \in \mathbb{R}$  non zero, anche tutte le forme date da  $h_{11} = R(p)/\lambda$ ,  $h_{12} = 0$  e  $h_{22} = \lambda$  la soddisfano, da cui non vi è mai unicità, a differenza di quanto abbiamo visto se la dimensione è maggiore di due. Questo è coerente con gli esempi di catenoide e elicoide (Esercizio 2.3.15), isometrici ma con due seconde forme fondamentali diverse e delle diverse immersioni isometriche di aperti della sfera, nell'Esercizio 7.4.7 e suggerisce un diverso comportamento rispetto a rigidità e deformabilità tra le superfici e le ipersuperfici di dimensione maggiore di due.

Abbiamo allora come conseguenza immediata della Proposizione 7.6.6 il seguente teorema.

**TEOREMA 7.6.11.** *Sia  $(S, g)$  una varietà riemanniana di dimensione  $n \geq 3$  con tutte le curvatures sezionali positive in un punto  $p \in S$ . Allora la seconda forma fondamentale  $B_p$  di ogni ipersuperficie data da una sua immersione isometrica locale in  $\mathbb{R}^{n+1}$  di un intorno  $U$  di  $p$  è univocamente determinata (a meno del segno), dunque intrinseca. Segue che tutte le possibili immersioni differiscono solo per isometrie di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , cioè  $\varphi(U)$  è rigida.*

**DIMOSTRAZIONE.** La tesi segue dal Lemma 7.6.7 e ricordando che per un'ipersuperficie abbiamo  $B_p$  tale che  $\text{Riem}_p = B_p \otimes B_p/2$ , dunque la condizione  $\det \mathcal{R}_p > 0$ , è equivalente ad avere tutte le curvatures sezionali positive in  $p \in S$  (come detto nell'Osservazione 7.6.9), dunque in un suo intorno. L'affermazione finale segue dal Teorema 7.6.2 e dall'Osservazione 7.6.4, essendo  $B_p$  univocamente determinata a meno del segno.  $\square$

**OSSERVAZIONE 7.6.12.** Per l'Osservazione 7.6.9, l'ipotesi di curvatures sezionali positive in  $p \in S$  può essere sostituita dalla richiesta che la curvatura di Gauss  $G_p = \det S_p$  di un'immersione non si annulli.

**COROLLARIO 7.6.13.** *Se l'ipersuperficie  $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ , di dimensione  $n \geq 3$ , ha curvatura di Gauss  $G_p$  non zero in  $p \in S$ , allora  $S$  è localmente rigida in un intorno di  $p$ . In particolare, ciò vale se  $S$  ha curvatura positiva.*

**OSSERVAZIONE 7.6.14.** Se la curvatura di  $(S, g)$  è soltanto maggiore o uguale a zero (o equivalentemente, in questo caso,  $\det \mathcal{R}_p \neq 0$ ) la seconda forma fondamentale di una sua immersione isometrica locale in  $\mathbb{R}^{n+1}$  non è necessariamente determinata, per esempio se consideriamo le diverse immersioni isometriche di un aperto della sfera  $\varphi_\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  dell'Esercizio 7.4.7 e definiamo  $\psi : U \times \mathbb{R}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^{n-2}$  come  $\psi(p, x) = (\varphi_\alpha(p), x)$  abbiamo una famiglia di immersioni isometriche con seconde forme fondamentali diverse (e curvatura di Gauss nulla). Ancora più semplicemente, per ogni curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  nel piano parametrizzata in lunghezza d'arco, tutte le ipersuperfici  $\gamma \times \mathbb{R}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  sono flat, isometriche a  $I \times \mathbb{R}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ , ma le loro seconde forme fondamentali variano con  $\gamma$ . Segue che in questi esempi le ipersuperfici diverse non sono ottenibili l'un l'altra con un'isometria di  $\mathbb{R}^{n+1}$  e sono chiaramente deformabili (dunque non rigide).

Riguardo al problema dell'immergibilità, sempre per la Proposizione 7.6.6, se la forma  $\mathcal{R}$  di una varietà riemanniana  $(S, g)$  di dimensione  $n \geq 3$  è definita positiva la sua ipotetica seconda forma fondamentale  $B$ , nel caso si possa immergere isometricamente in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , è univocamente determinata (a meno di segno) e nel caso  $n = 3$  è facile da calcolare, mentre nel caso  $n \geq 4$  si può ottenere con l'algoritmo descritto in [105]. Chiaramente, per poter applicare il Teorema 7.6.2 e

immergere localmente la varietà, tale forma  $B$  deve anche soddisfare le equazioni di Codazzi–Mainardi, il che esclude molte varietà dal poter essere immerse isometricamente come ipersuperfici (si veda l'esempio che segue). In realtà, se  $n \geq 4$  le equazioni di Codazzi–Mainardi sono una conseguenza dell'equazione di Gauss, se il determinante dell'operatore shape associato a  $B$  non è zero (per esempio, se tutte le curvatures sezionali sono positive o lo è la forma  $\mathcal{R}$ , per l'Osservazione 7.4.5. Questo è stato mostrato da Thomas in [196] e segue dalla seconda identità di Bianchi, che dunque, in questo caso speciale, risulta essere equivalente alle equazioni di Codazzi–Mainardi (si veda il commento dopo l'Esercizio 7.4.14). Si ha dunque il seguente risultato (l'unicità a meno di isometrie segue dal Teorema 7.6.2 e dall'Osservazione 7.6.4).

**PROPOSIZIONE 7.6.15.** *Sia  $(S, g)$  una varietà riemanniana di dimensione  $n \geq 4$  con la forma  $\mathcal{R}$  definita positiva. Se esiste una forma bilineare simmetrica  $B$  tale che  $\text{Riem} = B \otimes B/2$ , allora per ogni  $p \in S$  esiste un suo intorno  $U \subseteq S$  e un'immersione isometrica  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , unica a meno di isometrie di  $\mathbb{R}^{n+1}$ .*

**ESEMPIO 7.6.16.** In dimensione  $n = 3$  le equazioni di Codazzi–Mainardi non sono conseguenza dell'equazione di Gauss, anche se la forma  $\mathcal{R}$  è definita positiva. Consideriamo la fibrazione di Hopf di  $\mathbb{S}^3$ , data dall'azione di  $\mathbb{S}^1$  per moltiplicazione complessa, considerando  $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{C}^2$  e  $\mathbb{S}$  come i numeri complessi di modulo unitario (Esempio 2.3.17). Una base ortonormale del tangente  $T_{(z,w)}\mathbb{S}^3$  è data da  $X_1 = (iz, iw)$  e  $X_2, X_3$  due vettori di  $\mathbb{R}^4 \approx \mathbb{C}^2$  ortogonali (rispetto al prodotto scalare reale in  $\mathbb{R}^4$ ) a  $(z, w)$  e  $(iz, iw)$  (per esempio, in  $(1, 0)$  tale base è data da  $(i, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(0, i)$ ). Definiamo allora una metrica  $g^\varepsilon$  su  $\mathbb{S}^3$  ponendo  $g^\varepsilon(X_1, X_1) = \varepsilon^2$ ,  $g^\varepsilon(X_2, X_2) = g^\varepsilon(X_3, X_3) = 1$  e  $g^\varepsilon(X_i, X_j) = 0$  se  $i \neq j$ , per  $\varepsilon > 0$ , cioè stiamo deformando la metrica canonica di  $\mathbb{S}^3$  lungo le fibre della fibrazione di Hopf  $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^2$ . Le varietà  $(\mathbb{S}^3, g^\varepsilon)$  si dicono *sferi di Berger* (si veda [167]) e chiaramente se  $\varepsilon$  tende a 1, la metrica  $g^\varepsilon$  tende alla metrica canonica della 3-sfera che ha curvatura costante, dunque anche la curvatura di tale metriche (almeno per  $\varepsilon$  vicino a 1) ha la forma  $\mathcal{R}$  definita positiva. Si mostra (lo si provi per esercizio, oppure si veda [167, Esempio 27, Capitolo 4, Sezione 2]) che sebbene esista  $B$  tale che  $\text{Riem} = B \otimes B/2$ , descritta nella base ortonormale  $Y_1 = X_1/\varepsilon$ ,  $Y_2 = X_2$  e  $Y_3 = X_3$  da

$$h_{11} = B(Y_1, Y_1) = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{4 - 3\varepsilon^2}}, \quad h_{22} = B(Y_2, Y_2) = h_{33} = B(Y_3, Y_3) = \sqrt{4 - 3\varepsilon^2}$$

e  $h_{ij} = B(Y_i, Y_j) = 0$  se  $i \neq j$ , la forma  $B$  non soddisfa le equazioni di Codazzi–Mainardi, se  $\varepsilon \neq 1$ , in particolare  $\nabla_{Y_2}B(Y_3) \neq \nabla_{Y_3}B(Y_2)$ .

Conseguenza di tutta questa discussione è che abbiamo essenzialmente tre categorie di ipersuperfici, in dipendenza della dimensione, che hanno comportamenti diversi dal punto di vista della rigidità: curve, superfici e ipersuperfici di dimensione maggiore di due. Moralmente, all'aumentare della dimensione,



la geometria diventa più rigida. Per questo motivo il suo studio si è concentrato principalmente sulle superfici in  $\mathbb{R}^3$ , seguendo l'intuizione naturale che localmente una superficie *non* sia rigida (si pensi ad un foglio di carta), ma una superficie compatta invece lo sia globalmente, o almeno non sia possibile deformarla globalmente, isometricamente con continuità. Per esempio, Darboux (1896) ha provato che ogni pezzo sufficientemente piccolo di una superficie analitica con curvatura non nulla è deformabile, mentre Liebmann (1899) ha mostrato che la sfera non è deformabile. Un esempio di una superficie compatta e non rigida è mostrato nella seguente figura.

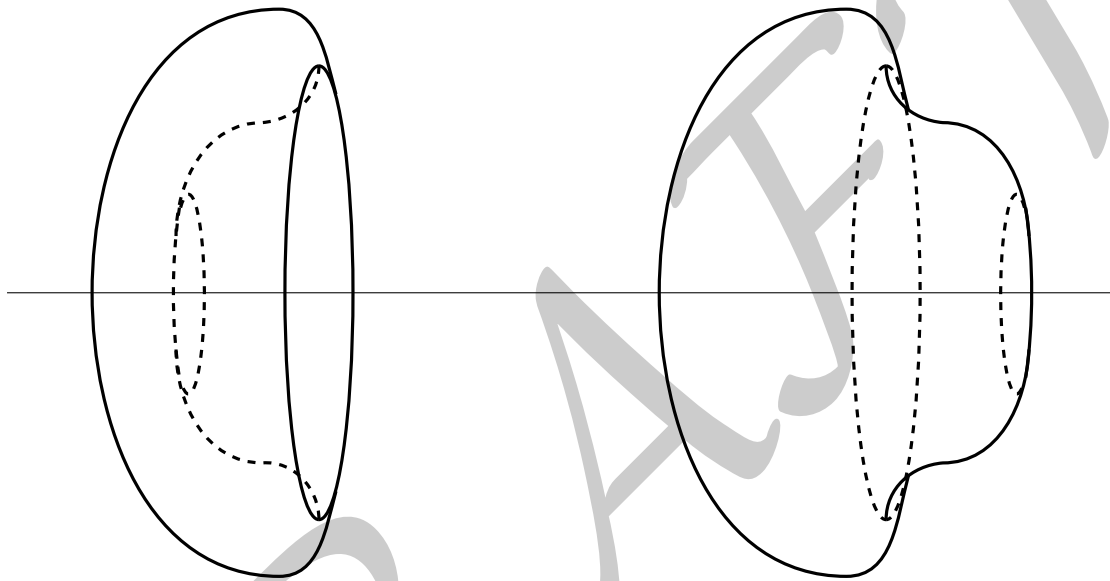


FIGURA 7.4

Nel 1927 Cohn-Vossen [61] ha mostrato il cosiddetto *teorema di rigidità per gli ovaloidi*, cioè che due *ovaloidi* (superfici compatte in  $\mathbb{R}^3$  con curvatura positiva) isometrici si ottengono l'un l'altro con un'isometria dello spazio (dunque gli *ovaloidi* sono globalmente rigidi). Il problema (che risale a Eulero) se una superficie compatta generale sia (globalmente) deformabile, rimane a nostra conoscenza aperto, si veda [179], per approfondire.

OSSERVAZIONE 7.6.17. Le stesse questioni di rigidità si possono porre per i poliedri. È un risultato classico di Cauchy (1813) che due poliedri convessi isometrici sono congruenti, mentre Connelly [63] ha esibito un poliedro non convesso, non intrecciato e omeomorfo a una sfera (*sfera di Connelly*), deformabile con continuità, mantenendo le facce inalterate. Si veda il libro [101], per approfondire, in particolare il quarto capitolo per un'introduzione storica.

Riguardo al problema dell'immersibilità per le superfici, abbiamo visto con gli esempi di  $\mathbb{CP}^2$  e delle sfere di Berger che in dimensione  $n > 2$ , una varietà con curvatura positiva non è in generale immergibile isometricamente in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Invece, in dimensione due ciò è sempre possibile. Il risultato globale che segue, nel caso  $S = \mathbb{S}^2$  è noto come *problema/teorema di immersione di Weyl* ed è stato provato nei lavori di Weyl, Lewy, Aleksandrov, Pogorelov e Nirenberg, si veda [82].

**TEOREMA 7.6.18 (Problema/teorema di immersione di Weyl).** *Se  $(S, g)$  è una superficie con curvatura positiva, allora si può localmente immergere isometricamente in  $(\mathbb{R}^3, g_{\text{eucl}}$ ). Inoltre, se  $S$  è compatta e semplicemente connessa (dunque diffeomorfa a una sfera, per il teorema di Gauss–Bonnet) esiste un embedding isometrico globale e tale embedding è unico a meno di isometrie euclidee (per il teorema di rigidità per gli ovaloidi di Cohn–Vossen).*

Dai teoremi di Hadamard 7.4.20 e Stoker 7.4.23, segue allora che l'eventuale immagine globale di  $S$  in  $\mathbb{R}^3$  è il bordo di un insieme strettamente convesso.

Il problema dell'immersione isometrica anche soltanto locale di una superficie generica in  $\mathbb{R}^3$  è risolto (positivamente) soltanto nel caso di una metrica analitica, mentre rimane aperto nel caso generale di una superficie con una metrica di classe  $C^\infty$  non identicamente positiva o negativa, si vedano [114, 115, 121, 161, 172], per approfondire.

**OSSERVAZIONE 7.6.19.** Una considerazione euristica che dovrebbe essere stata suggerita al lettore da questo capitolo (si pensi ai teoremi di Hadamard, Stoker, Gauss–Bonnet, di uniformizzazione e al materiale di questa sezione) è che le varietà riemanniane con (forme di) “curvatura” positiva “assomigliano” agli insiemi convessi, dunque dovrebbero poter avere un numero ristretto di “tipi topologici”. Questa intuizione, corretta, sarà rafforzata nei prossimi capitoli, si veda il survey di Ziller [244], per approfondire l'argomento. L'ipotesi di (forme di) “curvatura” negativa invece è molto meno restrittiva topologicamente, si pensi per esempio al teorema di uniformizzazione, inoltre, per un risultato di Lohkamp [140], si può mettere su ogni varietà differenziabile di dimensione almeno tre una metrica completa, di volume finito, con tensore di Ricci definito negativo in ogni punto.

## 7.7. Il funzionale Area

Data un'immersione  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  di una varietà  $n$ -dimensionale in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , consideriamo il seguente funzionale Area,

$$\text{Area}(\varphi) = \int_S d\mu$$

dove  $\mu$  è la misura canonica associata alla metrica  $g$  su  $S$ , indotta dall'immersione (chiaramente non è altro che il volume della varietà riemanniana  $(S, g)$ ).

In maniera analoga a quanto fatto per il funzionale lunghezza (energia) per le curve, vogliamo calcolare la variazione prima e seconda. Consideriamo dunque una mappa (variazione)  $H : S \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , tale che tutte le applicazioni  $\varphi_t = H(\cdot, t) : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  siano immersioni, per  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  e  $\varphi_0 = \varphi$ . Supponiamo inoltre che fuori da un compatto  $K \subseteq S$  si abbia  $\varphi_t(p) = \varphi(p)$  per ogni  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Definiamo il campo  $X = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} \Big|_{t=0}$  lungo la mappa  $\varphi$  a valori in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , generatore infinitesimale della variazione  $H$ , notando che è nullo fuori dal compatto  $K$  e osserviamo che per ogni immersione  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  e per ogni campo vettoriale  $X$  lungo  $\varphi$  con supporto compatto, la mappa definita da  $H(p, t) = \varphi(p) + tX(p)$  è una variazione ammissibile, in quanto per  $|t|$  piccolo,  $\varphi_t = H(\cdot, t)$  è un'immersione e  $H$  ha  $X$  come generatore infinitesimale.

Calcoliamo dunque, in una carta coordinata, dove  $g^t$  è la metrica indotta su  $S$  dall'immersione  $\varphi_t$ ,  $\mu_t$  la misura canonica di  $(S, g^t)$  e  $h_{ij}$  le componenti della seconda forma fondamentale  $B$  di  $\varphi$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}^t \Big|_{t=0} &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_j} \right\rangle \Big|_{t=0} \\ &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle X, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle X, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle - 2 \left\langle X, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle X^\top, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\langle X^\top, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle - 2\Gamma_{ij}^k \left\langle X^\top, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right\rangle - 2h_{ij} \langle X, \nu \rangle, \end{aligned}$$

dove  $X^\top$  è la componente tangente a  $S$  del campo  $X$  e abbiamo usato le equazioni di Gauss–Weingarten (7.19) nell'ultimo passaggio.

Definendo la 1-forma  $\omega = (X^\top)^\flat$ , possiamo riscrivere questa formula come

$$\frac{\partial}{\partial t} g_{ij}^t \Big|_{t=0} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} - 2\Gamma_{ij}^k \omega_k - 2h_{ij} \langle X, \nu \rangle = \nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i - 2h_{ij} \langle X, \nu \rangle. \quad (7.25)$$

Usando allora la nota formula di derivazione del determinante di una matrice  $\partial_t \det A = \det A \operatorname{tr}(A^{-1} \partial_t A)$ , otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det g_{ij}^t} \Big|_{t=0} &= \frac{\sqrt{\det g_{ij}} g^{ij} \frac{\partial}{\partial t} g_{ij}^t \Big|_{t=0}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{\det g_{ij}} g^{ij} (\nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i - 2h_{ij} \langle X, \nu \rangle)}{2} \\ &= \sqrt{\det g_{ij}} (\operatorname{div} X^\top - H \langle X, \nu \rangle) \end{aligned}$$

che in termini di misure possiamo scrivere

$$\frac{d}{dt} \mu_t \Big|_{t=0} = (\operatorname{div} X^\top - H \langle X, \nu \rangle) \mu.$$

Se l'Area dell'immersione  $\varphi$  è finita, si vede facilmente che lo stesso vale per tutte le mappe  $\varphi_t$ , essendo perturbazioni a supporto compatto di  $\varphi$ . Assumendo che il compatto  $K$  sia contenuto in una singola carta coordinata  $(U, \psi)$ , abbiamo allora

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \text{Area}(\varphi_t) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \int_K d\mu_t \Big|_{t=0} \\
 &= \frac{d}{dt} \int_{\psi(K)} \sqrt{\det g_{ij}^t} d\mathcal{L}^n \Big|_{t=0} \\
 &= \int_{\psi(K)} \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\det g_{ij}^t} \Big|_{t=0} d\mathcal{L}^n \\
 &= \int_{\psi(K)} (\text{div } X^\top - H\langle X, \nu \rangle) \sqrt{\det g_{ij}} d\mathcal{L}^n \\
 &= \int_S (\text{div } X^\top - H\langle X, \nu \rangle) d\mu \\
 &= - \int_S H\langle X, \nu \rangle d\mu
 \end{aligned} \tag{7.26}$$

dove abbiamo usato il fatto che  $X$  è zero fuori da  $K$  e nell'ultimo passaggio abbiamo applicato il Corollario 3.8.3 del teorema della divergenza. Si noti che tutti gli integrali sono ben definiti in quanto stiamo integrando solo sul compatto  $K$ . Nel caso  $K$  sia contenuto in più carte coordinate, la stessa conclusione segue da un argomento standard con le partizioni dell'unità.

**PROPOSIZIONE 7.7.1.** *La variazione prima del funzionale Area dipende solo dalla componente normale del generatore infinitesimale  $X = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} \Big|_{t=0}$  della variazione dell'immersione  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ,*

$$\delta \text{Area}_\varphi(X) = \frac{d}{dt} \text{Area}(\varphi_t) \Big|_{t=0} = - \int_S H\langle X, \nu \rangle d\mu,$$

dove tutte le quantità sono riferite a  $\varphi$ .

Dunque, le ipersuperfici  $S$  che sono "punti critici" del funzionale Area devono soddisfare

$$\int_S H\langle X, \nu \rangle d\mu = 0$$

per ogni campo  $X$  lungo  $\varphi$  con supporto compatto. Dal lemma fondamentale del calcolo delle variazioni (si veda [17], per esempio) segue che si deve avere  $H = 0$  dappertutto e viceversa.

**OSSERVAZIONE 7.7.2.** Si può fare un calcolo analogo se la codimensione dell'immersione è maggiore di uno oppure se lo spazio ambiente è una varietà riemanniana generica, usando il formalismo sviluppato per la variazione dei

funzionali lunghezza e energia delle geodetiche nella Sezione 6.3 (in particolare, la Proposizione 6.3.1). Il risultato è lo stesso sostituendo a  $H\nu$ , la curvatura media vettoriale, cioè la traccia della seconda forma fondamentale (vettoriale)  $\Pi$  dell'immersione  $\varphi$ ,

$$\delta \text{Area}_\varphi(X) = \left. \frac{d}{dt} \text{Area}(\varphi_t) \right|_{t=0} = - \int_S \langle H, X \rangle d\mu$$

(lo si provi per esercizio). Si notino inoltre le analogie col calcolo della variazione prima del funzionale lunghezza di una curva  $\gamma$ , Proposizione 6.3.9 e la relazione tra la derivata  $\frac{D}{dt}\dot{\gamma}$  lungo  $\gamma$  e la curvatura (media) di quest'ultima.

**DEFINIZIONE 7.7.3.** Le ipersuperfici o le sottovarietà immerse o embedded (e anche le immersioni isometriche) in una varietà riemanniana, con  $H$  (vettoriale, se la codimensione è maggiore di uno) identicamente nulla sono dette *superfici minime*. Col termine *superficie minima immersa* si intende un'immersione isometrica (in genere con autointersezioni) che è una superficie minima.

Il motivo per tale terminologia è che se una sottovarietà  $S$  (o un'immersione) di una varietà riemanniana  $(M, g)$  è un minimo locale del funzionale Area, allora  $H = 0$ . Talvolta si usa anche il termine *minimale*.

Per un'introduzione all'importante soggetto delle superfici minime (estesissimo in letteratura), si veda [229] e i testi ivi menzionati (in particolare [164]).

Anche le ipersuperfici con curvatura media costante (dette CMC in letteratura, da *constant mean curvature*), che sono i punti critici del funzionale Area con un vincolo sul "volume di spazio" contenuto, hanno ricevuto grande attenzione (si veda [213]). Ci limitiamo a menzionare un famoso e importante risultato di Aleksandrov in [6]: *se  $S$  è un'ipersuperficie embedded, compatta e con  $H$  costante, allora  $S$  è una sfera.*

**ESERCIZIO 7.7.4.** Si mostri che una curva parametrizzata proporzionalmente alla sua lunghezza d'arco è una geodetica se e solo se è una superficie minima immersa unidimensionale (si faccia riferimento alla Proposizione 6.3.9).

**ESERCIZIO 7.7.5.** Si mostri che la catenoide e l'elicoide, visti nell'Esempio 2.3.15, sono superfici minime.

**OSSERVAZIONE 7.7.6.** Per l'Osservazione 7.1.5, una sottovarietà totalmente geodetica ha la seconda forma fondamentale identicamente nulla (e viceversa), dunque in particolare, è una superficie minima.

**ESERCIZIO 7.7.7.** Si mostri le sottovarietà complete e totalmente geodetiche di  $\mathbb{R}^n$  sono tutti e soli i sottospazi affini (flat). Si determinino le sottovarietà complete e totalmente geodetiche di  $\mathbb{S}^n$ .

**ESERCIZIO 7.7.8.** Si mostri l'insieme dei punti fissi di un'isometria di una varietà riemanniana in sé è una sottovarietà totalmente geodetica.

OSSERVAZIONE 7.7.9. La quantità  $-H\nu$  (oppure l'opposto della curvatura media scalare  $H$ ) può essere interpretata come il *gradiente* (l'equazione di Eulero-Lagrange) del funzionale Area (attenzione, la misura  $\mu$  varia con l'immersione, dunque non stiamo calcolando il gradiente rispetto a una fissata struttura hilbertiana sullo spazio delle immersioni di  $S$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ ).

Come per le geodetiche, vogliamo ora calcolare (nelle stesse notazioni sopra) anche la variazione seconda del funzionale Area per una superficie minima di  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

PROPOSIZIONE 7.7.10. *La variazione seconda del funzionale Area per un'immersione minima  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  (cioè con  $H = 0$ ) dipende solo dalla componente normale del generatore infinitesimale  $X = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} \Big|_{t=0}$  della variazione,*

$$\delta^2 \text{Area}_\varphi(X) = \frac{d^2}{dt^2} \text{Area}(\varphi_t) \Big|_{t=0} = \int_S (|\nabla \langle X, \nu \rangle|^2 - \langle X, \nu \rangle^2 |B|^2) d\mu,$$

dove tutte le quantità sono riferite all'immersione  $\varphi$ .

DIMOSTRAZIONE. Dal calcolo (7.26) si ha

$$\frac{d}{dt} \int_S d\mu_t = - \int_S H \langle X, \nu \rangle d\mu_t,$$

dove tutte le quantità sono riferite a  $\varphi_t$  e  $X = X(\cdot, t) = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}$  (qui e nel seguito ometteremo di indicare il parametro  $t$ , per semplicità, su molte quantità).

Dunque,

$$\frac{d^2}{dt^2} \text{Area}(\varphi_t) \Big|_{t=0} = - \frac{d}{dt} \int_S H \langle X, \nu \rangle d\mu_t \Big|_{t=0} = - \int_S \langle X, \nu \rangle \frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{t=0} d\mu.$$

Per ottenere

$$\frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left\langle \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x_i \partial x_j}, \nu \right\rangle g_t^{ij} \right] \Big|_{t=0}$$

(dove  $g_t^{ij}$  è la matrice inversa di  $g_t^{ij}$ ), dobbiamo allora calcolare

$$\frac{\partial g_t^{ij}}{\partial t} \Big|_{t=0}, \quad \left\langle \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=0} \quad \text{e} \quad \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x_i \partial x_j}, \nu \right\rangle \Big|_{t=0}.$$

Riguardo al primo termine, sapendo dalla formula (7.25) che

$$\frac{\partial g_{ij}^t}{\partial t} \Big|_{t=0} = \nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i - 2h_{ij} \langle X, \nu \rangle,$$

con  $\omega = (X^\top)^\flat$  e poiché  $g_{ij}^t g_t^{jk} = \delta_i^k$ , abbiamo

$$0 = \frac{\partial g_{ij}^t}{\partial t} \Big|_{t=0} g^{jk} + g_{ij} \frac{\partial g_t^{jk}}{\partial t} \Big|_{t=0} = g^{jk} (\nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i - 2h_{ij} \langle X, \nu \rangle) + g_{ij} \frac{\partial g_t^{jk}}{\partial t} \Big|_{t=0},$$

quindi, ponendo per comodità, qui e nel seguito,  $X_\tau = X^\top$  e  $u = \langle X, \nu \rangle$ ,

$$\left. \frac{\partial g^{pk}}{\partial t} \right|_{t=0} = -g^{jp} g^{ik} (\nabla_i \omega_j + \nabla_j \omega_i - 2u h_{ij}) = -\nabla^p X_\tau^k - \nabla^k X_\tau^p + 2u h^{pk}.$$

Usando le equazioni di Gauss–Weingarten (7.19), il secondo termine sopra è dato da

$$\left\langle \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=0} = \Gamma_{ij}^k \left\langle \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_k}, \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=0} = -\Gamma_{ij}^k \left( \frac{\partial u}{\partial x_k} + X_\tau^q h_{qk} \right)$$

in quanto si ha

$$\left\langle \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_k}, \frac{\partial \nu}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=0} = -\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_k}, \nu \right\rangle \Big|_{t=0} = -\left\langle \frac{\partial X}{\partial x_k}, \nu \right\rangle = -\frac{\partial u}{\partial x_k} + \left\langle X, \frac{\partial \nu}{\partial x_k} \right\rangle$$

e l'ultimo termine è uguale a

$$-\frac{\partial u}{\partial x_k} - h_{kq} g^{qp} \left\langle X, \frac{\partial \varphi}{\partial x^p} \right\rangle = -\frac{\partial u}{\partial x_k} - X_\tau^q h_{qk},$$

per le equazioni di Gauss–Weingarten (7.19).

Infine,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi_t}{\partial x_i \partial x_j}, \nu \right\rangle \Big|_{t=0} = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial x_i \partial x_j}, \nu \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 (u\nu)}{\partial x_i \partial x_j}, \nu \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 X_\tau}{\partial x_i \partial x_j}, \nu \right\rangle$$

e (di nuovo usando ripetutamente le equazioni di Gauss–Weingarten (7.19))

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 (u\nu)}{\partial x_i \partial x_j}, \nu \right\rangle &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \left\langle \frac{\partial^2 \nu}{\partial x_i \partial x_j}, \nu \right\rangle u \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} (h_{jl} g^{lp} \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}), \nu \right\rangle u \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - h_{jl} g^{lp} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}, \nu \right\rangle u \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - u h_{jl} g^{lp} h_{ip} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial^2 X_\tau}{\partial x_i \partial x_j}, \nu \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \frac{\partial X_\tau}{\partial x_j}, \nu \right\rangle - \left\langle \frac{\partial X_\tau}{\partial x_j}, \frac{\partial \nu}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left( X_\tau^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} \right), \nu \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \left( X_\tau^p \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} \right), \frac{\partial \nu}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ X_\tau^p \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_p}, \nu \right\rangle \right] - X_\tau^p \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_p}, \frac{\partial \nu}{\partial x_i} \right\rangle - \frac{\partial X_\tau^p}{\partial x_j} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}, \frac{\partial \nu}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} (X_\tau^p h_{pj}) - X_\tau^p \Gamma_{jp}^k \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \frac{\partial \nu}{\partial x_i} \right\rangle - \frac{\partial X_\tau^p}{\partial x_j} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_p}, \frac{\partial \nu}{\partial x_i} \right\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial x_i} (X_\tau^p h_{pj}) + X_\tau^p \Gamma_{jp}^k h_{ik} + \frac{\partial X_\tau^k}{\partial x_j} h_{ik}.
\end{aligned}$$

Dunque,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial H}{\partial t} \Big|_{t=0} &= -2h_{ij} \nabla^i X_\tau^j + 2u|B|^2 - g^{ij} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial u}{\partial x_k} - g^{ij} \Gamma_{ij}^k h_{kq} X_\tau^q \\
&\quad + g^{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - u|B|^2 + g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (X_\tau^p h_{pj}) + h_{ij} \nabla^i X_\tau^j \\
&= u|B|^2 - h_{ij} \nabla^i X_\tau^j + \Delta u + g^{ij} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (X_\tau^p h_{pj}) - \Gamma_{ij}^k X_\tau^p h_{pk} \right] \\
&= u|B|^2 + \Delta u - h_{ij} \nabla^i X_\tau^j + g^{ij} \nabla_i (X_\tau^p h_{pj}) \\
&= u|B|^2 + \Delta u + X_\tau^p g^{ij} \nabla_i h_{pj} \\
&= u|B|^2 + \Delta u + \langle X_\tau, \operatorname{div} B \rangle \\
&= u|B|^2 + \Delta u + \langle X_\tau, \nabla H \rangle \\
&= u|B|^2 + \Delta u,
\end{aligned}$$

dove abbiamo usato la relazione  $\operatorname{div} B = \nabla H$ . Concludiamo allora

$$\frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Area}(\varphi_t) \Big|_{t=0} = \int_S (-u \Delta u - u^2 |B|^2) d\mu$$

e integrando per parti,

$$\frac{d^2}{dt^2} \operatorname{Area}(\varphi_t) \Big|_{t=0} = \int_S (|\nabla u|^2 - u^2 |B|^2) d\mu$$

che è quanto volevamo provare.  $\square$

Per il calcolo della variazione seconda del funzionale Area in generale, per una generica immersione (non necessariamente minima), si veda [70].

**OSSERVAZIONE 7.7.11.** Se lo spazio ambiente è una varietà riemanniana generica  $(M, g)$ , sempre usando il formalismo sviluppato per la variazione dei funzionali lunghezza e energia delle geodetiche nella Sezione 6.3 (in particolare, la



Proposizione 6.3.1), si può mostrare analogamente che

$$\delta^2 \text{Area}_\varphi(X) = \frac{d^2}{dt^2} \text{Area}(\varphi_t) \Big|_{t=0} = \int_S [|\nabla \langle X, \nu \rangle|^2 - (|B|^2 + R^M(\nu, \nu)) \langle X, \nu \rangle^2] d\mu$$

per un'immersione minima  $\varphi : S \rightarrow M$  (lo si provi per esercizio e si confronti con la formula (6.9)).

Dalla formula (7.13) si ha

$$2R^M(\nu, \nu) = R^M - R^S + H^2 - |B|^2$$

e sostituendo nella formula precedente, possiamo riscrivere la formula di variazione seconda come

$$\delta^2 \text{Area}_\varphi(X) = \int_S [|\nabla \langle X, \nu \rangle|^2 + \frac{1}{2}(R^S - R^M - |B|^2) \langle X, \nu \rangle^2] d\mu.$$

Diamo allora la seguente definizione.

DEFINIZIONE 7.7.12. Diciamo che un'ipersuperficie  $S \subseteq M$  o un'immersione minima  $\varphi : S \rightarrow M$  è *stabile* se  $\delta^2 \text{Area}_\varphi(X) \geq 0$  per ogni campo vettoriale  $X$  lungo  $S$  o  $\varphi$ , a supporto compatto. Equivalentemente, se per ogni  $u \in C_c^\infty(S)$  si ha

$$\int_S [|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}(R^S - R^M - |B|^2)u^2] d\mu \geq 0.$$

Considerando l'operatore ellittico autoaggiunto (rispetto al prodotto in  $L^2(S, \mu)$ )

$$L = -\Delta^S + \frac{1}{2}(R^S - R^M - |B|^2),$$

la forma quadratica associata

$$Q(u) = \langle u, Lu \rangle_{L^2(S, \mu)} = \int_S uLu d\mu$$

(che si estende allo spazio di Sobolev  $H_0^1(S)$ ) coincide con l'integrale sopra. Dunque, la stabilità di  $S$  può essere espressa in termini della nonnegatività di  $Q$  o degli autovalori dell'operatore  $L$ .

## 7.8. Calcolo tangenziale

Introduciamo alcuni operatori differenziali, chiamati "tangenziali" e il relativo formalismo legati a una sottovarietà  $n$ -dimensionale  $S$  di  $\mathbb{R}^m$  con la metrica indotta da  $\mathbb{R}^m$ , considerandola più come un suo sottoinsieme e volendo utilizzare le coordinate di  $\mathbb{R}^m$  invece che quella date da una sua carta. Per una discussione più estesa e dettagliata del materiale di questa sezione e per le dimostrazioni dei risultati solo enunciati, si vedano i libri di Simon [184] e Federer [88].

Supponendo di voler integrare su  $S$  una funzione definita in  $\mathbb{R}^m$ , la misura canonica  $\mu$  di  $S$  coincide con la *misura di Hausdorff*  $n$ -dimensionale di  $\mathbb{R}^m$  ristretta a  $S$ , denotata con  $\mathcal{H}^n \llcorner S$ .

Per ogni punto  $x \in S$ , abbiamo l'applicazione lineare  $P(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  che è la proiezione ortogonale sul tangente  $n$ -dimensionale  $T_x S \subseteq \mathbb{R}^m$ , di conseguenza l'applicazione  $\text{Id} - P(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , dove  $\text{Id}$  è l'identità di  $\mathbb{R}^m$ , è la proiezione ortogonale sullo spazio normale  $(m - n)$ -dimensionale  $N_x S \subseteq \mathbb{R}^m$  di  $S$  in  $x$ .

Chiamiamo *gradiente tangenziale*  $\nabla^\top f(x)$  di una funzione  $C^1$ , definita in un intorno  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  di un punto  $x \in S$ , la proiezione di  $\nabla^{\mathbb{R}^m} f(x)$  su  $T_x S$ . È facile vedere che  $\nabla^\top f$  dipende solo dalla restrizione di  $f$  a  $S \cap U$  e coincide col gradiente (riemanniano)  $\nabla^S f$  di  $f$ , considerando su  $S$  la metrica indotta.

Se  $P_{ij}(x)$  è la matrice della proiezione ortogonale  $P(x) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  sullo spazio tangente  $T_x S$  (gli indici si riferiscono alle coordinate di  $\mathbb{R}^m$ , relative alla sua base standard  $\{e_i\}$ ), si ha  $\nabla_i^\top f(x) = P_{ij}(x) \nabla f^j(x)$ . Si noti inoltre che  $P_{ij}(x) = \langle e_j^\top, e_i \rangle = \nabla_i^\top x^j$  per ogni  $x \in S$ , dove  $^\top$  indica la componente tangente a  $S$ .

Definiamo poi la *derivata tangenziale* di un campo vettoriale  $Y = Y^i e_i$  lungo  $S$ , a valori in  $\mathbb{R}^m$ , nella direzione di un vettore  $X \in \mathbb{R}^n$ , come

$$\nabla_X^\top Y(x) = \sum_{i=1}^m \langle X, \nabla^\top Y^i(x) \rangle e_i.$$

Per la Proposizione 6.3.1, segue che  $\nabla_X^\top Y$  coincide con la derivata covariante di  $Y$  lungo  $S$ , in direzione di  $X^\top$ . Inoltre, se  $X$  e  $Y$  sono campi tangenti a  $S$ , si ha che  $(\nabla_X^\top Y)^\top$  è la derivata covariante  $\nabla_X^S Y$  relativa alla connessione di Levi-Civita di  $S$ , con la metrica indotta, per la formula (3.9) (Osservazione 6.3.2).

Vale allora per la divergenza tangenziale (si ricordi la formula (7.20) che la definisce),

$$\text{div}^\top X = \sum_{i=1}^m \nabla_i^\top X^i$$

che lasciamo da mostrare al lettore, per esercizio e con un calcolo diretto,

$$\Delta f = \text{div}^\top \nabla^\top f = \sum_{i=1}^m \nabla_i^\top \nabla^\top f^i,$$

dove in entrambe le formule gli indici si riferiscono alle componenti nelle coordinate di  $\mathbb{R}^m$ .

Considerando la seconda forma fondamentale  $\text{II}$  e l'operatore shape  $S$  di  $S$  estesi ai campi a valori in  $\mathbb{R}^m$ , come definiti nelle formule (7.6) e (7.7), ponendo

$$h_{ij}^k = \langle \text{II}(e_i, e_j), e_k \rangle = \langle \text{II}(e_i^\top, e_j^\top), e_k \rangle,$$

si ha

$$H^i = \langle H, e_i \rangle = \sum_{j=1}^m \langle \Pi(e_j, e_j), e_i \rangle = \sum_{j=1}^m h_{jj}^i$$

e per le equazioni di Gauss–Weingarten (7.12), abbiamo

$$\Pi(X, Y) = - \sum_{\alpha=1}^{m-n} \langle X, \nabla_{Y^\top}^\top \nu_\alpha \rangle \nu_\alpha,$$

per ogni coppia di campi  $X, Y$  lungo  $S$  e dove  $\{\nu_\alpha\}$  è una base ortonormale locale del fibrato normale a  $S$  (lo si mostri per esercizio).

Per una mappa  $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}^k$  definiamo il *jacobiano tangenziale*,

$$J^\top \Phi(x) = [\det(d^\top \Phi_x^* \circ d^\top \Phi_x)]^{1/2}$$

dove  $d^\top \Phi_x : T_x S \rightarrow \mathbb{R}^k$  è la mappa lineare ottenuta prendendo il gradiente tangenziale componente per componente e  $d^\top \Phi_x^* : \mathbb{R}^k \rightarrow T_x S$  la sua aggiunta (dunque, rappresentata in componenti dalla matrice trasposta). Vale allora il seguente risultato (si veda [184] per la dimostrazione).

**TEOREMA 7.8.1** (Formula dell'area). *Se  $\Phi$  è una funzione iniettiva dalla sottovarietà  $S \subseteq \mathbb{R}^m$  in  $\mathbb{R}^k$ , si ha*

$$\int_{\Phi(S)} f(y) d\mathcal{H}^n(y) = \int_S f(\Phi(x)) J^\top \Phi(x) d\mathcal{H}^n(x) \quad (7.27)$$

per ogni  $f \in C_c^0(\mathbb{R}^k)$ .

Consideriamo la divergenza tangenziale di un campo vettoriale normale  $X^\alpha \nu_\alpha$  lungo  $S$ , con  $\{\nu_\alpha\}$  una base ortonormale locale del fibrato normale a  $S$ , come sopra. Si ha

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^\top X &= \sum_{i=1}^m \nabla_i^\top X^i = \sum_{\alpha=1}^{m-n} \sum_{i=1}^m \nabla_i^\top (X^\alpha \nu_\alpha^i) = \sum_{\alpha=1}^{m-n} \sum_{i=1}^m X^\alpha \nabla_i^\top \nu_\alpha^i \\ &= \sum_{\alpha=1}^{m-n} \sum_{i=1}^m X^\alpha \langle e_i, \nabla_i^\top \nu_\alpha \rangle = - \sum_{\alpha=1}^{m-n} \sum_{i=1}^m \langle X, \nu_\alpha \rangle \langle \Pi(e_i, e_i), \nu_\alpha \rangle \\ &= - \sum_{i=1}^m \langle X, H \rangle \end{aligned}$$

dunque, scrivendo  $X = X^\top + X^\perp$ , poiché  $\operatorname{div}^\top$  coincide con l'operatore divergenza usuale di  $S$  sui campi tangenti, abbiamo

$$\operatorname{div}^\top X = \operatorname{div} X^\top - \langle X, H \rangle,$$

da cui il seguente *teorema della divergenza tangenziale* (si veda [184, Capitolo 2, Sezione 7]).

**TEOREMA 7.8.2.** *Se  $S$  è una sottovarietà di  $\mathbb{R}^m$ , per ogni campo vettoriale  $X$  lungo  $S$  a supporto compatto, si ha*

$$\int_S \operatorname{div}^\top X \, d\mu = - \int_S \langle X, H \rangle \, d\mu,$$

*nelle notazioni sopra.*

Ovviamente, se  $X$  è un campo tangente a  $S$ , si ritrova il Corollario 3.8.3 del teorema della divergenza 3.8.2 (si enunci l'analogo di quest'ultimo in questo contesto).

**OSSERVAZIONE 7.8.3.** L'utilità di utilizzare nei calcoli questi operatori è chiaramente dovuta all'uso delle coordinate di  $\mathbb{R}^m$ , invece che quelle di una carta di  $S$  e al fatto che le derivate che si considerano sono quelle standard, non quelle covarianti per le quali il formalismo è tecnicamente più pesante. Questa è la ragione per cui in molti contesti più legati all'analisi che alla geometria, come lo studio delle superfici minime (si veda [99] per esempio, in particolare il Capitolo 10), sono stati ampiamente utilizzati e talvolta semplificano i calcoli, rendendoli più intuitivi. Per esempio, si provi a calcolare la variazione prima del funzionale Area con questi strumenti (in particolare la formula dell'area (7.27)). Notiamo però che diventano molto meno comodi nel momento in cui si debbano considerare derivate iterate, come nel calcolo della variazione seconda del funzionale Area, dove il formalismo riemanniano mostra la sua forza (ci si convinca di questo fatto provando a calcolarla senza utilizzare le derivate covarianti).