

Geodetiche – Teoria locale

In questo capitolo cominciamo ad analizzare le curve *geodetiche* su una varietà riemanniana, che sono le curve che localmente minimizzano la distanza tra loro due punti.

4.1. Geodetiche per una connessione affine

DEFINIZIONE 4.1.1. Sia ∇ una connessione affine su una varietà M e sia $\frac{D}{dt}$ la derivata covariante lungo le curve associata. Una curva $\gamma : I \rightarrow M$ (con I un intervallo di \mathbb{R}) si dice *geodetica* per ∇ se $\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) = 0$, per ogni $t \in I$ (talvolta si dice anche che γ è “autoparallela”).

OSSERVAZIONE 4.1.2. Sarebbe naturale aspettarsi che in una varietà riemanniana (M, g) , così come in \mathbb{R}^n dove le geodetiche sono tratti di retta, si definiscano geodetiche le curve che minimizzano la distanza tra i punti della varietà, cioè i minimi $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ del funzionale lunghezza

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

Per la connessione di Levi–Civita, vedremo nella Proposizione 4.3.12 che ogni curva minimo di \mathcal{L} (ad estremi fissati), parametrizzata proporzionalmente alla sua lunghezza d’arco, soddisfa $\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0$ e che una geodetica è un minimo di \mathcal{L} tra tutte le curve che uniscono ogni due suoi punti abbastanza vicini. Usiamo questa definizione (“differenziale”, contrapposta a quella “variazionale”) di geodetica, in quanto saremo interessati anche alle geodetiche “lunghe”, non necessariamente minimizzanti \mathcal{L} tra ogni coppia di loro punti. Infatti, in \mathbb{R}^n ogni geodetica minimizza sempre la distanza tra ogni coppia di suoi punti ma ciò non è necessariamente vero in una varietà riemanniana generica. Ad esempio, una geodetica sulla sfera unitaria (che è intuitivamente – e vedremo effettivamente essere – un tratto di un cerchio massimo) più lunga di π , che dunque “supera” il punto antipodale a quello da cui parte, perde la minimalità tra i due suoi estremi. Inoltre, dal punto di vista variazionale (che svilupperemo nel Capitolo 6 e che terremo presente in vari commenti), il funzionale lunghezza è scomodo, poiché a crescita lineare e invariante per riparametrizzazione delle curve, il che produce una mancanza di compattezza quando se ne ricercano i

minimi coi metodi diretti del calcolo delle variazioni (si veda [17], per esempio). Allo scopo di superare questa difficoltà, introdurremo nel Capitolo 6 un altro funzionale, l'energia di una curva

$$\mathcal{E}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|^2 dt \quad (4.1)$$

i cui minimi coincideranno con i minimi del funzionale lunghezza, riparametrizzati proporzionalmente alla loro lunghezza d'arco. Inoltre, l'equazione di Eulero–Lagrange di \mathcal{E} sarà proprio $\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0$.

In coordinate locali, posto $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)}$, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \left(\dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)} \right) &= \ddot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)} + \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(t)} \\ &= \left(\ddot{\gamma}^k(t) + \Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t) \dot{\gamma}^i(t) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(t)}. \end{aligned}$$

Di conseguenza, $\frac{D}{dt}\dot{\gamma}$ è identicamente nulla e γ è una geodetica se e solo se in coordinate locali è una soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti C^∞ , del second'ordine, in forma normale (equazione delle geodetiche),

$$\ddot{\gamma}^k(t) = -\Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t) \dot{\gamma}^i(t) \quad \text{per ogni } k \in \{1, \dots, n\}. \quad (4.2)$$

OSSERVAZIONE 4.1.3. Si noti che una soluzione γ di classe C^2 di questo sistema è automaticamente C^∞ (si veda [170]), dunque una curva di classe C^2 che soddisfa $\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0$ è una geodetica.

Segue che le geodetiche sono tutte e sole le proiezioni mediante $\pi : TM \rightarrow M$ delle curve integrali di un campo vettoriale \mathcal{G} su TM detto *campo vettoriale geodetico*. Infatti, consideriamo una carta coordinata $(U, \varphi = (x^i))$ di M con corrispondenti campi coordinati $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ su U , che induce naturalmente la carta coordinata $(\pi^{-1}(U), \psi = (x^i, v^i))$ su TM , data da

$$\pi^{-1}(U) \ni v \mapsto \psi(v) = (\varphi(p), v^1, \dots, v^n) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n,$$

per ogni $v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \in T_p M \subseteq \pi^{-1}(U)$, con $p = \pi(v)$.

Con un abuso di notazione, siano $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n}$ i corrispondenti campi coordinati su $\pi^{-1}(U)$ che soddisfano

$$\pi_* \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad \pi_* \frac{\partial}{\partial v^i} = 0.$$

Consideriamo il campo vettoriale su $\pi^{-1}(U)$ dato da

$$v^k \frac{\partial}{\partial x^k} - \Gamma_{ji}^k(\pi(v)) v^j v^i \frac{\partial}{\partial v^k},$$

al variare della carta locale considerata, siccome le equazioni geodetiche sono indipendenti dalla scelta delle coordinate su M , è possibile “incollare” questi campi vettoriali definiti localmente e ottenere un campo vettoriale su TM che denotiamo con \mathcal{G} e che viene detto *spray geodetico* di M . Segue facilmente che allora una curva $t \mapsto \gamma(t) \in M$ è una geodetica se e solo se $t \mapsto \dot{\gamma}(t) \in TM$ è una curva integrale di \mathcal{G} . Il flusso di \mathcal{G} è detto *flusso geodetico* di M ed è descritto da $\Phi(t, v) = \dot{\gamma}_v(t)$, dove γ_v è la geodetica con $\gamma_v(0) = p = \pi(v)$ e $\dot{\gamma}_v(0) = v \in T_pM$. Si veda [92, Sezione 2.C.8] per esempi e approfondimenti.

Ciò ci permette di utilizzare i risultati della teoria dei flussi locali nello studio delle geodetiche e della mappa esponenziale che definiremo nel seguito. In particolare, si ha immediatamente la seguente proposizione, per il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni di sistemi di ODE (si veda [170], per esempio).

PROPOSIZIONE 4.1.4. *Sia ∇ una connessione affine su M . Fissati $p \in M$ e $v \in T_pM$, esiste una e una sola geodetica massimale $\gamma_v : I \rightarrow M$ di classe C^∞ tale che I è un intervallo aperto contenente $0 \in \mathbb{R}$, $\gamma_v(0) = p$ e $\dot{\gamma}_v(0) = v$.*

D’ora in poi denoteremo sempre con γ_v la geodetica massimale uscente da p con velocità iniziale v .

Osserviamo che, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, la curva $\sigma(t) = \gamma_v(\lambda t)$ è a sua volta una geodetica (si tratta di una verifica diretta della Definizione 4.1.1) che parte da p con velocità λv . Di conseguenza,

$$\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t).$$

Geometricamente, questo significa che, se due geodetiche escono da uno stesso punto con velocità una multipla dell’altra, allora ciascuna si ottiene dall’altra tramite una riparametrizzazione affine (ogni riparametrizzazione affine di una geodetica è sempre una geodetica). In particolare, se γ_v è definita almeno fino a un tempo $\tau > 0$, allora $\gamma_{\tau v}$ è definita almeno fino al tempo 1.

OSSERVAZIONE 4.1.5. Vediamo alcune conseguenze dell’Osservazione 3.6.2.

- Se $S \subseteq M$ è una sottovarietà di (M, g) con la metrica indotta e consideriamo le rispettive connessioni di Levi–Civita, allora, per l’Esercizio 3.5.8, una curva $\gamma : I \rightarrow S$ è una geodetica di S se e solo se si ha

$$0 = \frac{D^S}{dt} \dot{\gamma} = \left(\frac{D^M}{dt} \dot{\gamma} \right)^\top$$

in ogni punto di γ .

- Se $f : M \rightarrow N$ è un’isometria tra due varietà riemanniane (M, g) e (N, h) e $\gamma : I \rightarrow M$ è una geodetica rispetto alla connessione di Levi–Civita di M , allora $f \circ \gamma : I \rightarrow N$ è una geodetica rispetto alla connessione di Levi–Civita di N .

La prima affermazione è immediata mentre la seconda segue notando che, per l’Osservazione 3.6.2, essendo $\dot{\gamma}$ un campo parallelo lungo γ , si ha che $df(\dot{\gamma}) = (f \circ \gamma)'$ è parallelo lungo $f \circ \gamma$.

ESEMPIO 4.1.6. Se S è un'ipersuperficie di \mathbb{R}^n e $\gamma : I \rightarrow S$ è una geodetica per la connessione di Levi-Civita di S , associata alla metrica indotta dalla metrica canonica g_{eucl} di \mathbb{R}^n , si ha

$$0 = \frac{D^S}{dt} \dot{\gamma} = \left(\frac{D^{\mathbb{R}^n}}{dt} \dot{\gamma} \right)^\top = \ddot{\gamma}^\top,$$

in ogni punto di γ . In altre parole, l'accelerazione $\ddot{\gamma}$ di una geodetica è un vettore normale alla ipersuperficie S in ogni suo punto. Viceversa, se ciò vale, la curva è una geodetica di S . Si veda [17, Sezione 6.4] dove tale conclusione viene ottenuta con i metodi del calcolo delle variazioni.

ESERCIZIO 4.1.7. Sia $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \rightarrow (M, g)$ un rivestimento riemanniano e si considerino sulle due varietà le rispettive connessioni di Levi-Civita. Si mostri che le geodetiche di (M, g) sono "proiezioni" di geodetiche di $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ e quelle di $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ sono "sollevamenti" di geodetiche di (M, g) .

ESEMPIO 4.1.8. Determiniamo le geodetiche su due varietà riemanniane particolarmente semplici: \mathbb{R}^n e \mathbb{S}^n (con le loro metriche canoniche e le relative connessioni di Levi-Civita).

Nel caso di \mathbb{R}^n , con l'usuale carta globale, i simboli di Christoffel sono identicamente nulli; pertanto, l'equazione delle geodetiche si riduce a

$$\ddot{\gamma}^k(t) = 0 \quad \text{per ogni } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Le soluzioni di quest'equazione, cioè le geodetiche su \mathbb{R}^n , sono dunque date dai segmenti di rette affini.

Leggermente più complicato è il caso di \mathbb{S}^n , che conviene trattare come la sfera unitaria, sottovarietà riemanniana di \mathbb{R}^{n+1} , nel modo usuale. Siano p un punto di \mathbb{S}^n e v un vettore non nullo in $T_p \mathbb{S}^n$. Indichiamo con π il 2-piano di \mathbb{R}^{n+1} contenente $0, p$ e la retta per l'origine con direzione v . La riflessione φ rispetto al piano π , ristretta a \mathbb{S}^n , è un'isometria di \mathbb{S}^n in se stessa che fissa p e v . Abbiamo visto che un'isometria di una varietà riemanniana mantiene le geodetiche, quindi, per unicità di queste ultime, φ deve mandare γ_v (la geodetica uscente da p con velocità iniziale v) in se stessa. Il luogo dei punti fissi di φ è $\pi \cap \mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^1$. Pertanto, la geodetica γ_v deve percorrere la circonferenza $\pi \cap \mathbb{S}^n$ con velocità costante $|v|$.

ESERCIZIO 4.1.9. Applicando l'Esercizio 4.1.7 all'esempio precedente, si descrivano le geodetiche di \mathbb{T}^n , $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$ e della bottiglia di Klein, con le loro metriche (e connessioni di Levi-Civita) indotte dai rispettivi rivestimenti riemanniani universali \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{R}^2 (si veda inoltre [92, Sezione 2.82 e Esercizi 2.83]).

ESERCIZIO 4.1.10. Si descrivano le geodetiche (relative alla connessione di Levi-Civita) sul cono considerato nell'Esercizio 3.6.9. Se denotiamo con $\alpha \in (0, \pi/2)$ l'angolo di apertura al vertice, si stabilisca la condizione su α per la quale è sempre possibile costruire sul cono una geodetica autointersecante e il

In altre parole, $(d \exp_p)_{O_p}$ è l'identità di $T_p M$. Di conseguenza, applicando il teorema della funzione inversa, si ottiene il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 4.1.12. *Sia ∇ una connessione affine su M . Per ogni $p \in M$ esiste un intorno V_p di O_p in $T_p M$ tale che detto $U_p = \exp_p(V_p) \subseteq M$, intorno di $p \in M$, la restrizione di \exp_p a V_p sia un diffeomorfismo tra V_p e U_p .*

Fissato $p \in M$, consideriamo ora la mappa $\Phi : \Omega \rightarrow M \times M$ data da $\Phi(v) = (\pi(v), \exp_{\pi(v)}(v))$ e calcoliamone il differenziale $d\Phi_{O_p}$ nel punto $O_p \in TM$, origine di $T_p M$, identificando $T_{O_p} TM = T_p M \times T_p M$. Per la curva $t \mapsto \sigma(t) = O_{\tau(t)}$, dove $\tau : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ con $\tau(0) = p$ e $\tau'(0) = v \in T_p M$, abbiamo $\sigma'(0) = (v, O_p)$ e $\Phi(\sigma(t)) = (\tau(t), \tau(t))$, dunque

$$d\Phi_{O_p}(v, O_p) = d\Phi_{O_p}(\sigma'(0)) = (v, v),$$

mentre, per la curva $t \mapsto \theta(t) = wt$ dove $w \in T_p M$, si ha $\theta'(0) = (O_p, w)$ e $\Phi(\theta(t)) = (p, \exp_p(tw))$, da cui

$$d\Phi_{O_p}(O_p, w) = d\Phi_{O_p}(\theta'(0)) = (O_p, w),$$

per il fatto che $(d \exp_p)_{O_p}$ è l'identità di $T_p M$ (formula (4.3)).

Segue che la mappa Φ ha differenziale invertibile in O_p , da cui (per il teorema della funzione inversa) è un diffeomorfismo in un intorno di $O_p \in TM$ con un intorno di (p, p) in $M \times M$.

4.2. Coordinate normali e polari

D'ora in poi, in tutto il testo, a meno che esplicitamente diversamente specificato, assumeremo sempre che (M, g) sia una varietà riemanniana connessa, n -dimensionale e che ∇ sia la sua connessione di Levi-Civita.

Le geodetiche γ su una varietà riemanniana sono sempre parametrizzate per un multiplo della lunghezza d'arco, ovvero hanno velocità di modulo costante. Infatti, hanno la proprietà che la velocità è un campo parallelo lungo γ e abbiamo visto che per ogni connessione compatibile con la metrica, i campi paralleli hanno modulo costante lungo tutta la curva. Precisamente, per la geodetica $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ uscente da $p \in M$ con velocità $v \in T_p M$ e definita sull'intervallo $[0, a)$, si ha

$$|\dot{\gamma}_v(t)|_{\gamma(t)} = |\dot{\gamma}_v(0)|_p = |v|_p,$$

dunque la sua lunghezza è $a|v|_p$.

ESERCIZIO 4.2.1. Si mostri che se la curva σ è una riparametrizzazione di una geodetica γ e σ è parametrizzata proporzionalmente alla sua lunghezza d'arco, allora è una riparametrizzazione affine di γ , in particolare anche σ è una geodetica.

Se consideriamo $(T_p M, g_p)$ come una varietà riemanniana (isometrica a \mathbb{R}^n), le sue geodetiche sono tratti di retta e in particolare quelle uscenti da zero con velocità (che poi rimane costante in modulo) $v \in T_p M$ sono date da $t \mapsto tv$. Indichiamo dunque con $B_\varepsilon(O_p) \subseteq T_p M$ la palla metrica aperta, cioè $B_\varepsilon(O_p) = \{v \in T_p M : |v|_p < \varepsilon\}$. Dal Teorema 4.1.11 e dalla Proposizione 4.1.12 si deduce allora che, per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, la mappa esponenziale è ben definita sulla palla $B_\varepsilon(O_p) \subseteq T_p M$ ed è un diffeomorfismo con l'immagine, che è un intorno del punto $p \in M$.

D'ora in poi, in tutto il testo, assumeremo implicitamente che la mappa esponenziale sia definita nei punti dove ne discuteremo le proprietà.

DEFINIZIONE 4.2.2. Definiamo il *raggio di iniettività* di $p \in M$ come

$$\text{inj}(p) = \sup\{\varepsilon > 0 : \exp_p \text{ è un diffeomorfismo tra } B_\varepsilon(O_p) \text{ e un aperto di } M\}.$$

Si noti che per quanto detto sopra l'insieme di tali $\varepsilon > 0$ non è vuoto, dunque $\text{inj}(p)$ è ben definito e positivo per ogni $p \in M$.

Definiamo il *raggio di iniettività* di M come $\text{inj}(M) = \inf_{p \in M} \text{inj}(p)$.

DEFINIZIONE 4.2.3. Per $r > 0$ tale che la mappa esponenziale sia definita su $B_r(O_p)$, chiamiamo $\exp_p(B_r(O_p))$ *palla geodetica centrata in p di raggio r* . L'immagine $S_r(p)$ per \exp_p di $\partial B_r(O_p)$ (se definita) si dice *sfera geodetica*. Analogamente abbiamo la *palla metrica di centro p e raggio r* data da $B_r(p) = \{q \in M : d(p, q) < r\}$ e la *sfera metrica* $\partial B_r(p) = \{q \in M : d(p, q) = r\}$, dove d è la *distanza riemanniana* che abbiamo definito immediatamente dopo l'Esercizio 2.1.12 (e che studieremo in dettaglio nella prossima sezione).

Infine, l'immagine di un intorno stellato di O_p su cui \exp_p è un diffeomorfismo si dice *intorno normale* di p .

OSSERVAZIONE 4.2.4. Si noti che dalla definizione della distanza riemanniana, la palla geodetica centrata in p di raggio r è contenuta nell'analogha palla metrica e vedremo nella Proposizione 6.1.8, che se la varietà M è completa come spazio metrico con la distanza riemanniana, allora coincidono. Se $r > \text{inj}(p)$ le palle metriche $B_r(p)$ o geodetiche $\exp_p(B_r(O_p))$ non sono in genere omeomorfe a una palla di \mathbb{R}^n e analogamente, la sfera metrica $\partial B_r(p)$ non è necessariamente una sottovarietà omeomorfa a \mathbb{S}^{n-1} (e potrebbe non essere regolare), così come la sfera geodetica $S_r(p)$, che potrebbe avere autointersezioni o non essere regolare, cosa che chiaramente non può succedere, se $r < \text{inj}(p)$. Sempre dalla Proposizione 6.1.8 seguirà (in ipotesi di completezza, come sopra) che se $r \leq \text{inj}(p)$, le sfere metrica e geodetica coincidono, mentre se $r > \text{inj}(p)$, si può solo concludere che $\partial B_r(p) \subseteq S_r(p)$.

PROPOSIZIONE 4.2.5. Per ogni $p \in M$, esistono un intorno U_p di p e $\varepsilon > 0$ tali che,

- ogni geodetica di velocità unitaria uscente da punti di U_p è definita almeno sull'intervallo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, inoltre per ogni coppia di punti $q, m \in U_p$ esiste un unico

vettore $v \in T_q M$ con $|v|_q < \varepsilon$ tale che $\exp_q(v) = m$. Chiamiamo γ_v la geodetica $t \mapsto \exp_q(tv)$, per $t \in [0, 1]$ (si noti che $\mathcal{L}(\gamma_v) = |v|_q < \varepsilon$),

- il vettore $v \in TM$ (dunque anche la geodetica γ_v) dipende in modo C^∞ da q e m ,
- per ogni $q \in U_p$, la mappa \exp_q è un diffeomorfismo tra $B_\varepsilon(O_q)$ e la sua immagine in M , di conseguenza, $\text{inj}(q) \geq \varepsilon$.

DIMOSTRAZIONE. Per l'argomento alla fine della sezione precedente, possiamo trovare un intorno $V_p \subseteq M$ di p e $\varepsilon > 0$ tale che l'aperto $\mathcal{A} = \{v \in TM : \pi(v) \in V_p \text{ e } |v|_{\pi(v)} < \varepsilon\}$ sia contenuto nell'intorno di O_p in TM dove la mappa $\Phi : \Omega \rightarrow M \times M$, data da $\Phi(v) = (\pi(v), \exp_{\pi(v)}(v))$, è definita ed è un diffeomorfismo con un intorno di (p, p) in $M \times M$. Segue che per ogni $q \in V_p$, la mappa $\exp_q = \pi_2 \circ \Phi|_{\Omega \cap T_q M}$ è un diffeomorfismo tra $\mathcal{A} \cap T_q M = B_\varepsilon(O_q)$ e la sua immagine in M ($\pi_2 : M \times M \rightarrow M$ è la mappa di proiezione sul secondo fattore).

Se dunque consideriamo un intorno $U_p \subseteq V_p$ di p tale che $U_p \times U_p \subseteq \Phi(\mathcal{A})$, ogni vettore della controimmagine $\Phi^{-1}(U_p \times U_p) \subseteq \mathcal{A}$ ha modulo minore di ε . Dati dunque $q, m \in U_p$, il vettore v è dato da $\Phi^{-1}(q, m)$, per costruzione della mappa Φ , inoltre se ci fosse un altro vettore $w \in T_q M$ con $|w|_q < \varepsilon$, si avrebbe $w \in \mathcal{A}$ e $\Phi(w) = (q, m)$, il che è impossibile in quanto la mappa Φ , ristretta all'insieme \mathcal{A} , è iniettiva.

Il secondo punto segue dalla regolarità data dal teorema della funzione inversa (la mappa Φ è di classe C^∞) e dalla regolarità della mappa esponenziale. Il terzo punto si ha per costruzione e per la scelta $U_p \subseteq V_p$. \square

OSSERVAZIONE 4.2.6. Si noti che il terzo punto implica che per ogni compatto $K \subseteq M$ si ha $\inf_{p \in K} \text{inj}(p) > 0$. In particolare, se M è compatta $\text{inj}(M) > 0$.

Si mostri per esercizio, usando la proposizione precedente che la funzione $p \mapsto \text{inj}(p)$ è semicontinua inferiormente su M (in realtà è continua, come vedremo nella Proposizione 6.7.3 e nell'Osservazione 6.7.4).

Il fatto che la mappa esponenziale sia un diffeomorfismo in un intorno dell'origine consente di definire delle particolari coordinate su M , chiamate *coordinate normali*. Sia $p \in M$ e sia $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale di $T_p M$ rispetto alla metrica g_p . Sia inoltre $L : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'isomorfismo lineare dato dalla scrittura in coordinate rispetto alla base \mathcal{B} . Allora, considerata la palla geodetica $B = \exp_p(B_\varepsilon(O_p))$, per $\varepsilon < \text{inj}(p)$, le coordinate

$$(x^1(q), \dots, x^n(q)) = L(\exp_p^{-1}(q)) \quad \text{per ogni } q \in B,$$

si dicono *coordinate normali centrate in p (o rispetto a p)*. Si noti che l'immagine in \mathbb{R}^n con la metrica canonica di tale palla geodetica per queste coordinate è allora la palla aperta "standard" centrata nell'origine e di raggio $\varepsilon > 0$, essendo infatti L un'isometria lineare, da cui $\sum_{i=1}^n L^i(v)^2 = \sum_{i=1}^n g_p^2(v, e_i) = g_p(v, v)$.

La base di campi coordinati associata è data (con un piccolo abuso di notazione)

da

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_q &= d(\exp_p \circ L^{-1})_{L(\exp_p^{-1}(q))} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{L(\exp_p^{-1}(q))} \right) \\ &= (d \exp_p)_{\exp_p^{-1}(q)} \left(dL_{L(\exp_p^{-1}(q))}^{-1} \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{L(\exp_p^{-1}(q))} \right) \right) \\ &= (d \exp_p)_{\exp_p^{-1}(q)}(e_i), \end{aligned}$$

in quanto $dL_{\exp_p^{-1}(q)}(e_i) = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{L(\exp_p^{-1}(q))} \in T_{L(\exp_p^{-1}(q))} \mathbb{R}^n$. In particolare, se $q = p$ abbiamo

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = (d \exp_p)_{\exp_p^{-1}(p)}(e_i) = (d \exp_p)_{O_p}(e_i) = e_i,$$

poiché, come abbiamo visto nella sezione precedente, $(d \exp_p)_{O_p} : T_p M \rightarrow T_p M$ è l'identità.

Vediamo ora che in queste coordinate la metrica assume nel punto $p \in M$ una forma particolarmente semplice.

PROPOSIZIONE 4.2.7. *In coordinate normali rispetto a un punto $p \in M$, valgono le seguenti identità:*

- $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$,
- $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$, dunque $\nabla_{\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p} \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p = 0$,
- $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p) = 0$,

per ogni $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ la base ortonormale scelta di $T_p M$. Cominciamo con la verifica della prima relazione, si ha

$$g_{ij}(p) = g_p \left(\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p, \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p \right) = g_p \left((d \exp_p)_{O_p}(e_i), (d \exp_p)_{O_p}(e_j) \right) = g_p(e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Osserviamo ora che la geodetica γ_v , uscente da p con velocità iniziale $v = v^j \left. \frac{\partial}{\partial x^j} \right|_p$, si scrive in coordinate normali come

$$\gamma_v^j(t) = t v^j.$$

Sostituendo questa scrittura nell'equazione delle geodetiche (4.2) e ponendo $t = 0$, si ottiene

$$v^i v^j \Gamma_{ij}^k(p) = 0.$$

Poiché questo ragionamento si applica per qualsiasi $v \in T_p M$ e i simboli di Christoffel $\Gamma_{ij}^k(p)$ sono simmetrici negli indici i e j , concludiamo che sono tutti nulli.

La terza relazione si ottiene infine dalla seconda, utilizzando la formula (3.1). \square

OSSERVAZIONE 4.2.8. Le tre relazioni sono verificate in ogni punto in una qualunque carta coordinata per $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$ (e tale proprietà caratterizzerà le varietà localmente isometriche a \mathbb{R}^n), sottolineiamo che invece per una varietà generica (M, g) esse valgono *solo* nel punto $p \in M$, in coordinate normali centrate in p .

OSSERVAZIONE 4.2.9. Una conseguenza di questo risultato è che, fino al prim'ordine, non è possibile distinguere puntualmente la metrica g dalla metrica piatta di \mathbb{R}^n (non c'è un *invariante* differenziale puntuale per isometria). Vedremo invece che non sempre esistono delle coordinate in cui anche le derivate seconde di g si annullano (come in \mathbb{R}^n), dal momento che le derivate seconde sono legate alla "curvatura" della varietà nel punto, che sarà invariante per isometria e un'ostruzione alla "piattezza" (Sezione 9.1 e in particolare Osservazione 9.2.11).

OSSERVAZIONE 4.2.10. Queste relazioni rendono spesso molto potente fare i calcoli in coordinate normali. In particolare, nel punto $p \in M$ centro delle coordinate normali, possiamo liberamente "alzare" o "abbassare" gli indici dei tensori e le derivate covarianti coincidono con le derivate in coordinate (si vedano per esempio i calcoli (4.8), (5.6), (5.15) o la dimostrazione della Proposizione 5.7.1).

Introduciamo un altro sistema di coordinate locali nell'intorno di un punto $p \in M$, le *coordinate polari*. Fissato $\varepsilon < \text{inj}(p)$, definiamo la mappa $\Psi : (0, \varepsilon) \times \mathbb{S}_p^{n-1} \rightarrow M \setminus \{p\}$, dove $\mathbb{S}_p^{n-1} = \{v \in T_p M : |v|_p = 1\} \subseteq T_p M$ è la *sfera unitaria* di $T_p M$, come

$$\Psi(r, v) = \exp_p(rv).$$

Definiamo allora le coordinate polari riemanniane sulla palla geodetica "buca-ta" $\Psi((0, \varepsilon) \times \mathbb{S}_p^{n-1}) \subseteq M$ componendo Ψ^{-1} con (Id, σ) , per una qualsiasi carta locale $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^{n-1})$ di \mathbb{S}_p^{n-1} , cioè

$$(r(q), \theta^1(q), \dots, \theta^{n-1}(q)) = (\pi^{(0, \varepsilon)} \circ \Psi^{-1}(q), \sigma \circ \pi^{\mathbb{S}_p^{n-1}} \circ \Psi^{-1}(q)).$$

Per esempio, si può prendere come carta per \mathbb{S}_p^{n-1} la proiezione stereografica $\sigma : \mathbb{S}_p^{n-1} \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$. In questo caso, le coordinate polari non risultano definite sui punti della geodetica uscente da p con velocità iniziale w . A livello di notazione, indicheremo con r l'indice relativo alla coordinata radiale r e con $i \in \{1, \dots, n-1\}$ l'indice relativo alle coordinate angolari $\theta^1, \dots, \theta^{n-1}$ su \mathbb{S}_p^{n-1} .

OSSERVAZIONE 4.2.11. Detto in parole povere, le coordinate polari sono le coordinate normali scritte in coordinate polari di \mathbb{R}^n .

Scriviamo i campi coordinati in coordinate polari in un punto $q = \Psi(r, v) = \exp_p(rv)$, con $|v|_p = 1$ e $r \in (0, \varepsilon)$. Si ha

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_q = d\Psi_{(r,v)} \left(\frac{\partial}{\partial r} \Big|_r, O_v \right) = (d \exp_p)_{rv}(v) = \frac{d}{dr} \exp_p(rv) = \dot{\gamma}_v(r) \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} \Big|_q = d\Psi_{(r,v)} \left(0, \frac{\partial}{\partial \sigma^i} \Big|_v \right) = (d \exp_p)_{rv} \left(r \frac{\partial}{\partial \sigma^i} \Big|_{rv} \right) \quad (4.5)$$

dove $\frac{\partial}{\partial \sigma^i} \Big|_{rv} \in T_{rv}T_pM$ coincide con $\frac{\partial}{\partial \sigma^i} \Big|_v \in T_v\mathbb{S}_p^{n-1} \subseteq T_vT_pM$, identificando sia $T_{rv}T_pM$ che T_vT_pM con T_pM , come sopra, γ_v è la geodetica uscente da p con velocità iniziale unitaria $v \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ e O_v è l'origine di $T_v\mathbb{S}_p^{n-1}$. Segue allora che, avendo tale velocità norma costante lungo la geodetica uguale a 1,

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} \Big|_q \right|^2 = g_q \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 1.$$

ESERCIZIO 4.2.12. Si mostri che se X è un campo lungo la sottovarietà \mathbb{S}_p^{n-1} di T_pM , allora X è tangente a \mathbb{S}_p^{n-1} se e solo se in ogni punto $v \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ si ha $g_p(X_v, v) = 0$.

Considerando (T_pM, g_p) come una varietà riemanniana (isometrica a \mathbb{R}^n) e identificando canonicamente $T_v(T_pM)$ con T_pM , per ogni $v \in T_pM$, in generale non ci si può aspettare che la mappa esponenziale (che soddisfa $(d \exp_p)_{O_p} = \text{Id}$) sia un'isometria tra gli aperti V_p e U_p dati dalla Proposizione 4.1.12, in quanto la metrica di M in un intorno di $p \in M$ non è necessariamente piatta, come quella di (T_pM, g_p) . Tuttavia, $(d \exp_p)_v$ conserva i prodotti scalari con vettori "radiali", per ogni $v \in T_pM$, come asserisce il seguente lemma che rende dunque le coordinate polari particolarmente rilevanti.

LEMMA 4.2.13 (Lemma di Gauss). *Siano $p \in M$ e $\varepsilon < \text{inj}(p)$. Allora, per ogni $v \in B_\varepsilon(O_p)$ e $w \in T_pM$, si ha*

$$g_{\exp_p(v)} \left((d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w) \right) = g_p(v, w). \quad (4.6)$$

DIMOSTRAZIONE. Se $v = 0$ la tesi è ovvia, consideriamo dunque $v \neq 0$ e mettiamoci in coordinate polari attorno a p nella palla geodetica di raggio $\varepsilon > 0$. Essendo la formula (4.6) lineare in w , possiamo dimostrare il lemma analizzando separatamente il caso in cui w è ortogonale a v e quello in cui w coincide con v .

Supponiamo $g_p(v, w) = 0$, cioè che w sia ortogonale a v . Ragionando allora come nell'Esercizio 4.2.12, si vede che w è un vettore tangente sia alla sfera $|v|_p \mathbb{S}_p^{n-1}$ nel suo punto v , che alla sfera unitaria \mathbb{S}_p^{n-1} nel suo punto $v/|v|_p$. Estendiamo w a un campo vettoriale \bar{X} su tutta $|v|_p \mathbb{S}_p^{n-1}$ e poi estendiamo \bar{X} a $B_\varepsilon(O_p) \setminus \{O_p\}$ ponendo $\bar{X}_{sz} = \bar{X}_z$, per ogni $z \in |v|_p \mathbb{S}_p^{n-1}$ e $s \in (0, \varepsilon/|v|_p)$ (cioè \bar{X} è costante sui raggi dall'origine di T_pM). Detto Θ il diffeomorfismo dato da $(r, z) \mapsto rz$,

poniamo $X = \Theta^* \bar{X}$ e notiamo che è un campo vettoriale su $(0, \varepsilon) \times \mathbb{S}_p^{n-1}$.
Posto $\bar{v} = v/|v|_p \in \mathbb{S}_p^{n-1}$, sia $\Psi(r, \bar{v}) = \gamma_{\bar{v}}(r) = \exp_p(r\bar{v})$, da cui

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_{\exp_p(r\bar{v})} = \dot{\gamma}_{\bar{v}}(r) = \left(\Psi_* \frac{d}{dr} \right)_{\Psi(r, \bar{v})} = (d \exp_p)_{r\bar{v}}(\bar{v}),$$

per l'equazione (4.4).

Definiamo il campo vettoriale $\tilde{X}_{(r,z)} = rX_z$ per $(r, z) \in (0, \varepsilon) \times \mathbb{S}_p^{n-1}$ e sia

$$Y_{\Psi(r,z)} = (\Psi_* \tilde{X})_{\Psi(r,z)} = (d \exp_p)_{rz}(r\bar{X}_{rz}).$$

Calcoliamo dunque, lungo la geodetica $r \mapsto \gamma_{\bar{v}}(r)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} g_{\gamma_{\bar{v}}} \left(Y, \frac{\partial}{\partial r} \right) &= g_{\gamma_{\bar{v}}} \left(\frac{D}{dr} Y, \frac{\partial}{\partial r} \right) + g_{\gamma_{\bar{v}}} \left(Y, \frac{D}{dr} \dot{\gamma}_{\bar{v}} \right) \\ &= g_{\gamma_{\bar{v}}} \left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} Y, \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &= g_{\gamma_{\bar{v}}} \left(\nabla_Y \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) + g_{\gamma_{\bar{v}}} \left(\left[\frac{\partial}{\partial r}, Y \right], \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{2} Y_{\gamma_{\bar{v}}} g \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) + g_{\gamma_{\bar{v}}} \left(\left[\frac{\partial}{\partial r}, Y \right], \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &= g_{\gamma_{\bar{v}}} \left(Y, \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (4.7)$$

in quanto $\gamma_{\bar{v}}$ è una geodetica, dunque, $\frac{D}{dr} \dot{\gamma}_{\bar{v}} = 0$ e $g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = 1$, inoltre,

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}, Y \right] = \left[\Psi_* \frac{d}{dr}, \Psi_* \tilde{X} \right] = \Psi_* \left[\frac{d}{dr}, rX \right] = \Psi_* \left(X + r \left[\frac{d}{dr}, X \right] \right) = \Psi_* \tilde{X} / r = Y / r,$$

poiché $\left[\frac{d}{dr}, X \right] = 0$, essendo X un campo su $(0, \varepsilon) \times \mathbb{S}_p^{n-1}$ tangente a ogni sfera $\{r\} \times \mathbb{S}_p^{n-1}$, per ogni $r \in (0, \varepsilon)$ fissato, indipendente da r .

Ponendo allora $a(r) = g_{\gamma_{\bar{v}}(r)} \left(Y, \frac{\partial}{\partial r} \right)$, per ogni $r \in (0, |v|_p]$, dal calcolo (4.7) abbiamo $a'(r) = a(r)/r$, da cui

$$a''(r) = a'(r)/r - a(r)/r^2 = 0$$

e poiché

$$\begin{aligned} a'(r) &= g(Y/r, \dot{\gamma}_{\bar{v}}) \\ &= g(\Psi_* X, \dot{\gamma}_{\bar{v}}) \\ &= g((d \exp_p)_{r\bar{v}}(\bar{X}_{r\bar{v}}), (d \exp_p)_{r\bar{v}}(\bar{v})) \\ &= g((d \exp_p)_{r\bar{v}}(\bar{X}_v), (d \exp_p)_{r\bar{v}}(\bar{v})) \\ &= g((d \exp_p)_{r\bar{v}}(w), (d \exp_p)_{r\bar{v}}(\bar{v})), \end{aligned}$$

si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} a'(r) = g((d \exp_p)_{O_p}(w), (d \exp_p)_{O_p}(\bar{v})) = g_p(w, v)/|v|_p = 0,$$

dato che $(d \exp_p)_{O_p}$ è l'identità di $T_p M$. Da $a'(r) = 0$ in $(0, |v|_p]$, segue che $a'(r) = 0$ per $r = |v|_p$, cioè

$$g((d \exp_p)_v(w), (d \exp_p)_v(\bar{v})) = 0,$$

da cui la tesi.

Se $w = v$, poiché

$$g_{\exp_p(r\bar{v})}((d \exp_p)_{r\bar{v}}(\bar{v}), (d \exp_p)_{r\bar{v}}(\bar{v})) = g(\dot{\gamma}_{\bar{v}}(r), \dot{\gamma}_{\bar{v}}(r)) = |\dot{\gamma}_{\bar{v}}(r)|_{\gamma_{\bar{v}}(r)}^2$$

è costante lungo $\gamma_{\bar{v}}$, uguale a 1, ponendo $r = |v|_p$ abbiamo

$$g_{\exp_p(v)}((d \exp_p)_v(\bar{v}), (d \exp_p)_v(\bar{v})) = 1$$

da cui si ha la tesi del lemma anche in questo caso. \square

Il seguente corollario è allora immediato (lo si provi per esercizio, usando le formule (4.4) e (4.5)).

COROLLARIO 4.2.14. *In coordinate polari $(r, \theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ rispetto a un punto $p \in M$, si ha*

- $g_{rr} = 1$,
- $g_{ri} = 0$, per $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

La metrica si può dunque scrivere localmente come

$$g = dr^2 + h_q = dr^2 + g_{ij} d\theta^i \otimes d\theta^j,$$

dove h_q è la metrica indotta da g nel punto $q = \exp_p(rv)$ sulle sfere geodetiche $\Psi(\{r\} \times \mathbb{S}_p^{n-1}) = \exp_p(r\mathbb{S}_p^{n-1})$. In particolare, per ogni $r \in (0, \varepsilon)$, la geodetica γ_v è normale in $\gamma_v(r)$ alla sfera geodetica $S_r(p)$ di raggio r .

Si noti che $dr^2 + g_{ij} d\theta^i \otimes d\theta^j$ non è una metrica prodotto in quanto le funzioni $g_{ij} = g_{ij}(r, \theta)$, che determinano una metrica su \mathbb{S}_p^{n-1} , dipendono da r . Inoltre, tale metrica non è nemmeno una metrica warped in generale, a meno che $g_{ij}(r, \theta) = f(r) \tilde{g}_{ij}(\theta)$, per delle funzioni f e \tilde{g}_{ij} .

Osserviamo inoltre che da questo corollario segue anche che in coordinate polari si ha $g^{rr} = 1$, $g^{ri} = 0$ e g^{ij} è la matrice inversa di g_{ij} , per $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$.

ESERCIZIO 4.2.15. Si mostri che, nelle notazioni del corollario, si ha l'espansione

$$g_{ij}(r, \theta) = r^2 g_{ij}^{\mathbb{S}_p^{n-1}}(\theta) + o(r^2)$$

per $r \rightarrow 0^+$, dove $g^{\mathbb{S}_p^{n-1}}$ è la metrica (indipendente da r) indotta su \mathbb{S}_p^{n-1} dall'isometria lineare $L : (T_p M, g_p) \rightarrow (\mathbb{R}^n, g_{\text{can}})$ utilizzata per definire le coordinate normali/polari (che dunque è un'isometria tra \mathbb{S}_p^{n-1} e \mathbb{S}^{n-1}). Possiamo allora dire informalmente che per ogni punto $p \in M$, la metrica g è "quasi una metrica warped" in una palla metrica di raggio r centrata in p , con un "errore" che va a zero più velocemente di r^2 , cioè della distanza al quadrato da p .

Si noti inoltre che segue anche che se (M, g) è un prodotto warped $I \times N$ in un intorno “bucato” di un punto $p \in M$, dove la metrica si scrive

$$g = dr^2 + f^2(r)h,$$

per una varietà $(n - 1)$ -dimensionale (N, h) , allora (N, h) deve essere una sfera con la metrica canonica a curvatura costante.

ESERCIZIO 4.2.16. Si scrivano i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita in coordinate polari. In particolare, si osservi che Γ_{rr}^r e Γ_{rr}^i sono tutti nulli, per ogni $i \in \{1, \dots, n - 1\}$.

4.3. La distanza riemanniana

Il *funzionale lunghezza* su una varietà riemanniana (M, g) è definito sulle curve $\gamma : I \rightarrow M$ di classe C^1 a tratti, come

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_I |\dot{\gamma}(t)| dt,$$

che sappiamo essere invariante per riparametrizzazione di γ , cioè se a γ sostituiamo la curva $\tilde{\gamma} : J \rightarrow M$ data da $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$, con $\tau : J \rightarrow I$ un diffeomorfismo, abbiamo $\mathcal{L}(\tilde{\gamma}) = \mathcal{L}(\gamma)$.

DEFINIZIONE 4.3.1. Per ogni coppia di punti $p, q \in M$ definiamo la loro *distanza riemanniana*

$$d(p, q) = \inf \{ \mathcal{L}(\gamma) : \gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ di classe } C^1 \text{ a tratti con } \gamma(a) = p \text{ e } \gamma(b) = q \}.$$

ESERCIZIO 4.3.2. Il funzionale \mathcal{L} è ben definito anche se γ è semplicemente lipschitziana (essendo tali funzioni differenziabili quasi ovunque e considerando l'integrale di Lebesgue). Si mostri che

$$d(p, q) = \inf_{\gamma \in C_s^1} \mathcal{L}(\gamma) = \inf_{\gamma \in \text{Lip}} \mathcal{L}(\gamma) = \inf_{\gamma \in C^1} \mathcal{L}(\gamma),$$

dove gli estremi inferiori sono presi sulle curve γ in M che congiungono i punti p e q .

Mostriamo che d è una distanza che rende (M, d) uno spazio metrico la cui topologia è la stessa della topologia di M come varietà.

TEOREMA 4.3.3. *La funzione $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definita sopra è una distanza su M , chiamata distanza riemanniana e la topologia indotta da d coincide con la topologia di M come varietà.*

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col dimostrare che d è effettivamente una distanza su M . La simmetria, la nonnegatività e la disuguaglianza triangolare sono ovvie dalla definizione, dobbiamo mostrare solo che se $d(p, q) = 0$ allora $p = q$. Se $p \neq q$, sia (U, φ) una carta coordinata attorno a p che non contiene q , tale che $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ e $\varphi(U) = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$, allora posto $V = \varphi^{-1}(B_{1/2}(0)) \subseteq U$,

ogni curva di classe C^1 a tratti $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ con $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$ deve intersecare ∂V in $\gamma(t_0)$, per qualche $t_0 \in (a, b)$, possiamo inoltre supporre che $\gamma(t) \in V$ per ogni $t < t_0$. Dunque, si ha

$$\mathcal{L}(\gamma) \geq \mathcal{L}(\gamma|_{[a, t_0]}) = \int_a^{t_0} \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

Per compattezza, esistono due costanti positive α, β tali che

$$\alpha|v|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq (\varphi_*g)_{\varphi(\tilde{p})}(v, v) \leq \beta|v|_{\mathbb{R}^n}^2$$

per ogni $\tilde{p} \in V$ e $v \in \mathbb{R}^n$ ed essendo $\varphi : (V, g|_V) \rightarrow (B_{1/2}(0), \varphi_*g)$ un'isometria, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma) &\geq \int_a^{t_0} \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \\ &= \int_a^{t_0} \sqrt{(\varphi_*g)_{\varphi(\gamma(t))}(d\varphi(\dot{\gamma}(t)), d\varphi(\dot{\gamma}(t)))} dt \\ &= \int_a^{t_0} \sqrt{(\varphi_*g)_{\varphi(\gamma(t))}((\varphi \circ \gamma)'(t), (\varphi \circ \gamma)'(t))} dt \\ &\geq \int_a^{t_0} \sqrt{\alpha |(\varphi \circ \gamma)'(t)|_{\mathbb{R}^n}^2} dt \\ &= \sqrt{\alpha} \int_a^{t_0} |(\varphi \circ \gamma)'(t)|_{\mathbb{R}^n} dt \\ &= \sqrt{\alpha} \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}((\varphi \circ \gamma)|_{[a, t_0]}) \\ &\geq \sqrt{\alpha}/2, \end{aligned}$$

in quanto $\varphi \circ \gamma|_{[a, t_0]}$ è una curva in \mathbb{R}^n che va da 0 a $\varphi(\gamma(t_0)) \in \partial B_{1/2}(0)$, dunque $|\varphi(\gamma(t_0))|_{\mathbb{R}^n} \geq 1/2$. Segue che $d(p, q) \geq \sqrt{\alpha}/2 > 0$.

Con lo stesso argomento si mostra che per ogni $\tilde{p} \in V$, si ha

$$d(p, \tilde{p}) \geq \sqrt{\alpha} |\varphi(\tilde{p})|_{\mathbb{R}^n}$$

e se consideriamo la curva γ da p a \tilde{p} data da $\gamma(t) = \varphi^{-1}(t\varphi(\tilde{p}))$, per $t \in [0, 1]$,

contenuta in V , abbiamo

$$\begin{aligned}
 d(p, \tilde{p}) &\leq \mathcal{L}(\gamma) \\
 &= \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \\
 &= \int_0^1 \sqrt{(\varphi_*g)_{\varphi(\gamma(t))}(d\varphi(\dot{\gamma}(t)), d\varphi(\dot{\gamma}(t)))} dt \\
 &= \int_0^1 \sqrt{(\varphi_*g)_{\varphi(\gamma(t))}((\varphi \circ \gamma)'(t), (\varphi \circ \gamma)'(t))} dt \\
 &\leq \int_0^1 \sqrt{\beta |(\varphi \circ \gamma)'(t)|_{\mathbb{R}^n}^2} dt \\
 &= \sqrt{\beta} \int_0^1 |\varphi(\tilde{p})|_{\mathbb{R}^n} dt \\
 &= \sqrt{\beta} |\varphi(\tilde{p})|_{\mathbb{R}^n},
 \end{aligned}$$

dunque,

$$\sqrt{\alpha} |\varphi(\tilde{p})|_{\mathbb{R}^n} \leq d(p, \tilde{p}) \leq \sqrt{\beta} |\varphi(\tilde{p})|_{\mathbb{R}^n}.$$

Essendo $\varphi : V \rightarrow B_{1/2}(0)$ bigettiva, possiamo considerare la distanza d_* indotta da φ su $B_{1/2}(0)$, cioè $d_*(x, y) = d(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))$ per ogni $x, y \in B_{1/2}(0)$, che rende chiaramente la mappa φ un'isometria nel senso degli spazi metrici tra (V, d) e $(B_{1/2}(0), d_*)$. Poiché

$$\sqrt{\alpha} |\varphi(\tilde{p})|_{\mathbb{R}^n} \leq d_*(0, \varphi(\tilde{p})) \leq \sqrt{\beta} |\varphi(\tilde{p})|_{\mathbb{R}^n},$$

per ogni $\tilde{p} \in V$, segue che d_* e la norma euclidea determinano basi di intorni di $0 \in \mathbb{R}^n$ compatibili, lo stesso quindi vale (essendo ovviamente φ un omeomorfismo tra V e $B_{1/2}(0)$ sia con le topologie relative che con quelle indotte dalle metriche d e d_* , rispettivamente) per gli intorni di $p \in M$ dati dalla topologia di varietà di M e dalla distanza d . Valendo ciò per ogni $p \in M$, concludiamo che la topologia indotta da d coincide con la topologia di M come varietà. \square

DEFINIZIONE 4.3.4. Diremo che la varietà riemanniana è *completa* se lo spazio metrico (M, d) è completo.

Il seguente teorema “raffina” la Proposizione [4.2.5](#)

TEOREMA 4.3.5 (Teorema degli intorni geodetici). *Per ogni $p \in M$, esiste un intorno U_p di p e $\varepsilon > 0$ tali che per ogni coppia di punti $q, m \in U_p$ esiste un'unica geodetica γ (a meno di riparametrizzazioni affini) di lunghezza minore di ε che congiunge q a m . Inoltre, $\mathcal{L}(\gamma) = d(q, m)$ e se $\mathcal{L}(\sigma) = d(q, m)$, per una curva σ di classe C^1 a tratti, quest'ultima coincide con γ , a meno di riparametrizzazione.*

DIMOSTRAZIONE. Siano $U_p \subseteq M$ e $\varepsilon > 0$ dati dalla Proposizione 4.2.5. Riguardo alla prima parte del teorema, l'esistenza e l'unicità, a meno di riparametrizzazioni affini, della geodetica $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ seguono allora da tale proposizione. Dobbiamo solo dimostrare che $\mathcal{L}(\gamma) = d(q, m)$, cioè che ogni curva $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ di classe C^1 a tratti che congiunge q a m ha lunghezza maggiore o uguale a γ . Ciò è banale nel caso in cui $q = m$, dunque possiamo supporre che q e m siano distinti. Per il terzo punto della Proposizione 4.2.5, possiamo considerare delle coordinate polari (r, θ) in q su $B \setminus \{q\} = \exp_q(B_\varepsilon(O_q) \setminus \{O_q\}) \subseteq M$, da cui $m \in B \setminus \{q\}$ e $\mathcal{L}(\gamma) = |\dot{\gamma}(0)|_{\gamma(0)} = r(m)$. Se la curva σ arriva su ∂B per la prima volta in $\sigma(t_0)$, si ha $\sigma(t) \in B$ per ogni $t < t_0$ e, per il Corollario 4.2.14 al lemma di Gauss, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sigma) &\geq \mathcal{L}(\sigma|_{[0, t_0]}) \\ &= \int_0^{t_0} \sqrt{g_{\sigma(t)}(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t))} dt \\ &= \int_0^{t_0} \sqrt{dr^2(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) + h_{\sigma(t)}([\dot{\sigma}(t)]^\top, [\dot{\sigma}(t)]^\top)} dt \\ &\geq \int_0^{t_0} |(r \circ \sigma)'(t)| dt \\ &\geq r(\sigma(t_0)) \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con $[\dot{\sigma}(t)]^\top$ la proiezione del vettore $\dot{\sigma}(t) \in T_{\sigma(t)}M$ sul tangente alla sfera geodetica $\exp_p(r(\sigma(t))S_p^{n-1})$, dunque $\mathcal{L}(\sigma) > \mathcal{L}(\gamma)$. Se invece σ è tutta contenuta in B , analogamente si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sigma) &= \int_0^1 \sqrt{g_{\sigma(t)}(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t))} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{dr^2(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) + h_{\sigma(t)}([\dot{\sigma}(t)]^\top, [\dot{\sigma}(t)]^\top)} dt \\ &\geq \int_0^1 |(r \circ \sigma)'(t)| dt \\ &\geq r(m) \\ &= \mathcal{L}(\gamma). \end{aligned}$$

L'uguaglianza si ha dunque solo se la curva σ è tutta contenuta in B , la funzione $r \circ \sigma$ è monotona crescente e $h_{\sigma(t)}(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) = 0$, che implica $\dot{\sigma}(t)$ proporzionale a $\frac{\partial}{\partial r}$, per ogni $t \in (0, 1]$ dove $\dot{\sigma}(t)$ esiste. Riparametrizzando σ proporzionalmente alla sua lunghezza d'arco, otteniamo che $\dot{\sigma}(t) = \mathcal{L}(\gamma) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\sigma(t)}$. In particolare, σ è di classe C^1 ed è una curva integrale di $\mathcal{L}(\gamma) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\sigma(t)}$, di conseguenza è C^∞ . Per l'Esercizio 4.2.16 è allora una geodetica che connette q a m di lunghezza

$\mathcal{L}(\sigma) = \mathcal{L}(\gamma) = d(q, m) < \varepsilon$, dunque per la Proposizione 4.2.5 coincide con γ . \square

COROLLARIO 4.3.6. *Per ogni $p \in M$, se $\varepsilon < \text{inj}(p)$, la palla geodetica $\exp_p(B_\varepsilon(O_p))$ coincide con la palla metrica $B_\varepsilon(p)$ centrata in $p \in M$ e di raggio ε , rispetto alla distanza d . In particolare, le geodetiche $\gamma_v : [0, \varepsilon] \rightarrow M$ uscenti da p con velocità unitaria $v \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ sono minimali (si veda la Definizione 4.3.9).*

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo delle coordinate polari in p sulla palla geodetica “bucata” $B \setminus \{p\} = \exp_p(B_\varepsilon(O_p) \setminus \{O_p\}) \subseteq M$, allora argomentando come nel teorema precedente, per ogni $q \in B \setminus \{p\}$, si ha che $r(q)$ è proprio la distanza tra p e q , dunque l’ultimo punto segue e $B \subseteq B_\varepsilon(p)$. Non vi sono poi punti di $B_\varepsilon(p)$ fuori da B , in quanto (sempre con lo stesso argomento) ogni curva da p che “esce” da B deve avere lunghezza maggiore di ε , da cui la tesi. \square

Vediamo ora le proprietà locali della funzione distanza che seguono da questi risultati.

PROPOSIZIONE 4.3.7. *Valgono le seguenti affermazioni.*

- (1) **Regolarità della funzione distanza:** *Per ogni $p \in M$, esiste un intorno U_p di p tale che la funzione distanza $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ è C^∞ in $U_p \times U_p \setminus D$, dove $D = \{(q, q) : q \in U_p\}$ e la funzione d^2 è C^∞ in $U_p \times U_p$.*
- (2) **Regolarità della distanza rispetto a un punto:** *Per ogni $p \in M$, la funzione distanza $d_p : M \rightarrow \mathbb{R}$ data da $d_p(q) = d(p, q)$ è 1-lipschitziana e C^∞ in ogni palla “bucata” $B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$, con $\varepsilon < \text{inj}(p)$. La funzione d_p^2 è C^∞ in tutta $B_\varepsilon(p)$.*
- (3) **Legame della distanza rispetto a un punto con le coordinate polari:** *In ogni palla “bucata” $B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$ con $\varepsilon < \text{inj}(p)$, d_p coincide con la funzione r e $\nabla d_p(q)$ coincide con $\frac{\partial}{\partial r} \Big|_q$. In particolare, $|\nabla d_p(q)| = 1$ in ogni punto q di $B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$.*
- (4) **Curve integrali della distanza rispetto a un punto:** *Le geodetiche uscenti da p e parametrizzate in lunghezza d’arco, quindi di velocità unitaria, sono le curve integrali del campo ∇d_p su $B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$ e viceversa.*
- (5) **Legame della distanza rispetto a un punto con le coordinate normali:** *In coordinate normali (x^1, \dots, x^n) rispetto a p in $B_\varepsilon(p)$ con $\varepsilon < \text{inj}(p)$, si ha $d_p^2(q) = |x(q)|_{\mathbb{R}^n}^2$.*

DIMOSTRAZIONE. La 1-lipschitzianità di d_p è ovvia. Le proprietà di regolarità seguono dalla minimalità delle geodetiche data dal Teorema 4.3.5 e dalla loro dipendenza C^∞ al secondo punto della Proposizione 4.2.5 dai loro estremi. Si ha infatti che $d^2(q, m) = |v_{q,m}|_q^2 = g_q(v_{q,m}, v_{q,m})$, dove $v_{q,m} \in T_q M$ è il vettore dato dalla Proposizione 4.2.5, per $(q, m) \in U_p \times U_p$. Ovviamente allora d è C^∞ fuori dalla “diagonale” di $U_p \times U_p$ e d_p^2 è una funzione C^∞ in un intorno di p in M (e d_p in tale intorno eccetto il punto p). Tale intorno si estende fino alla palla geodetica $B_\varepsilon(p)$. Infatti, in coordinate polari $(r, \theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ su $B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$, si ha $d_p = r$, mentre in coordinate normali su $B_\varepsilon(p)$ è immediata

l'identità $d_p^2(q) = |x(q)|_{\mathbb{R}^n}^2$, per costruzione delle stesse. Inoltre segue

$$\nabla d_p = g^{rr} \frac{\partial}{\partial r} + g^{ri} \frac{\partial}{\partial \theta^i} = \frac{\partial}{\partial r},$$

per la formula (2.6) e il fatto che $g^{rr} = 1$, $g^{ri} = 0$. Da cui

$$|\nabla d_p|^2 = g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = g_{rr} = 1.$$

La parte restante dell'enunciato segue dall'equazione (4.4), che implica $\frac{\partial}{\partial r}|_{\gamma_v(r)} = \dot{\gamma}_v(r)$ per ogni $v \in T_p M$ con $|v|_p = 1$ e $r \in (0, \varepsilon)$. \square

OSSERVAZIONE 4.3.8. L'equazione differenziale alle derivate parziali del prim'ordine $|\nabla u| = 1$ è detta *equazione eikonale*. Da quanto visto, la funzione distanza d_p da un punto $p \in M$ la soddisfa in un intorno "bucato" di p .

DEFINIZIONE 4.3.9. Una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, di classe C^1 a tratti, è detta *minimale* (oppure, *che minimizza la distanza*) se non vi sono curve più corte da $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$, ovvero se $\mathcal{L}(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$. Si dice *localmente minimale* (oppure *che localmente minimizza la distanza*) se, per ogni $t \in [a, b]$, esiste un suo intorno $I \subseteq [a, b]$ tale che $\gamma|_I$ sia minimale.

OSSERVAZIONE 4.3.10. Se $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ è minimale è anche localmente minimale. In realtà vale qualcosa di più forte, cioè che γ minimizza la distanza su un qualunque sottointervallo di $[a, b]$. Infatti, se per qualche $t, s \in [a, b]$ esistesse una curva τ da $\gamma(t)$ a $\gamma(s)$ più corta di $\gamma|_{[t, s]}$, allora a meno di riparametrizzare τ , la curva

$$\gamma(\xi) = \begin{cases} \gamma(\xi) & \text{per } \xi \in [a, b] \setminus [t, s] \\ \tau(\xi) & \text{per } \xi \in [t, s] \end{cases}$$

sarebbe più corta di γ .

OSSERVAZIONE 4.3.11. Ovviamente in \mathbb{R}^n i concetti di minimale e localmente minimale coincidono, cosa che invece non vale in generale per una varietà riemanniana, come abbiamo visto per le geodetiche più lunghe di π della sfera unitaria, per esempio. Si vede facilmente (lo si mostri per esercizio) che se M è compatta vi sono sempre geodetiche localmente minimali ma non minimali (si tenga presente la proposizione seguente).

Dal Teorema 4.3.5 segue il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 4.3.12. *Una curva di classe C^1 a tratti è una geodetica se e solo se è localmente minimale ed è parametrizzata per un multiplo della sua lunghezza d'arco.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ sia una geodetica e $t_0 \in (a, b)$ allora, per unicità, γ è l'unica geodetica passante per $p = \gamma(t_0)$ con velocità $\dot{\gamma}(t_0)$. Se consideriamo l'intorno U_p di p e $\varepsilon > 0$ dati dal Teorema 4.3.5, per $\delta > 0$ abbastanza piccolo, la restrizione $\gamma|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$ è una geodetica tutta contenuta in

U_p (in particolare i punti $\gamma(t_0 - \delta), \gamma(t_0 + \delta)$ appartengono a U_p) di lunghezza minore di ε . Dunque è minimale in quanto allora deve coincidere con l'unica geodetica (a meno di riparametrizzazioni affini) minimale data da tale teorema che congiunge $\gamma(t_0 - \delta)$ e $\gamma(t_0 + \delta)$. Analogamente si trattano i casi $t_0 = a$ e $t_0 = b$.

Sia ora $\sigma : [a, b] \rightarrow M$ localmente minimale e parametrizzata per un multiplo della sua lunghezza d'arco, scelto $t_0 \in (a, b)$, come prima consideriamo l'intorno U_p di p e $\varepsilon > 0$ dati dal Teorema 4.3.5. Esistendo $\delta' > 0$ tale che $\sigma|_{[t_0 - \delta', t_0 + \delta']}$ è minimale, esiste $\delta < \delta'$ tale che $\sigma|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]}$ è sempre minimale (Osservazione 4.3.10), è tutta contenuta in U_p e ha lunghezza minore di ε . Per il Teorema 4.3.5 segue che $\sigma|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]}$ è una geodetica. Dall'arbitrarietà di $t_0 \in (a, b)$ e poiché possiamo argomentare analogamente per $t_0 = a$ e $t_0 = b$, possiamo quindi concludere che σ è una geodetica. \square

Si noti che essendo le geodetiche curve di classe C^∞ , una curva C^1 a tratti, localmente minimale e parametrizzata per un multiplo della sua lunghezza d'arco, è C^∞ . Poiché i minimi a estremi fissati del funzionale lunghezza \mathcal{L} sono localmente minimali, per l'Osservazione 4.3.10, la Proposizione 4.3.12 è allora un *teorema di regolarità C^∞ "a meno di riparametrizzazione"* di tali minimi. In genere, nel calcolo delle variazioni, la regolarità dei minimi dei funzionali (in questo caso il funzionale *energia* (4.1), per la discussione nell'Osservazione 4.1.2, che è naturalmente ben definito sulle curve in $W_{loc}^{1,2}$ una volta scritte in coordinate locali – dunque continue – e dove è naturale cercarne i minimi) si ottiene per via diversa, non avendo in generale a disposizione la "forza descrittiva" di un risultato come il Teorema 4.3.5 (e le Proposizioni 4.2.5 e 4.3.12), per esempio seguendo la linea in [17, Sezione 13.1].

COROLLARIO 4.3.13. *Le curve localmente minimali e di conseguenza quelle minimali, cioè i minimi a estremi fissati del funzionale lunghezza \mathcal{L} sulle curve C^1 a tratti, sono geodetiche, dunque di classe C^∞ , una volta riparametrizzate proporzionalmente alla lunghezza d'arco.*

OSSERVAZIONE 4.3.14. Dal Teorema 4.3.5 e dalla Proposizione 4.3.12 segue che una geodetica $t \mapsto \gamma_v(t)$, uscente da $p \in M$ con velocità iniziale $v \in T_p M$, è minimale tra ogni suoi due punti per $t \in [0, \text{inj}(p)/|v|_p]$, ma potrebbe non esserlo più su intervalli più grandi. Si pensi ad esempio alle geodetiche sulla sfera unitaria, che sono minimali se e solo se sono lunghe al massimo π , cioè non superano il punto antipodale a quello di partenza, poi perdono tale proprietà, se "proseguono". Questo fenomeno, cioè che una soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange di un funzionale (in questo caso il funzionale *energia* (4.1), si veda la discussione nell'Osservazione 4.1.2) è minimo del funzionale se l'intervallo di definizione di tale soluzione è "piccolo" e non lo è più (generalmente) se l'intervallo supera una certa soglia, è "classico" nel calcolo delle variazioni

e analizzato in dettaglio e in generale, con la teoria di Jacobi (si veda [17, Sezione 8.3], in particolare l'Osservazione 8.3.18, per esempio). Svilupperemo tale teoria di Jacobi per le geodetiche nel Capitolo 6, collegando poi questo fenomeno (la sua presenza o assenza, come ad esempio in \mathbb{R}^n in cui le geodetiche non smettono mai di essere minimali) alla "curvatura" della varietà.

DEFINIZIONE 4.3.15. Definiamo in generale la *lunghezza* di una curva solo continua $\gamma : [a, b] \rightarrow X$, dove (X, d) è un qualsiasi spazio metrico, come

$$\mathcal{L}_I(\gamma) = \sup \{ d(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + \cdots + d(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \},$$

dove l'estremo superiore è calcolato al variare di $k \in \mathbb{N}$ e di $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$. Diremo allora che una curva è *rettificabile* se ha lunghezza finita. Chiamiamo *distanza intrinseca* la funzione $\delta : X \times X \rightarrow [0, +\infty]$ definita da

$$\delta(p, q) = \inf \{ \mathcal{L}_I(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow X \text{ rettificabile con } \gamma(a) = p \text{ e } \gamma(b) = q \}.$$

Si ha che (X, δ) risulta essere ancora uno spazio metrico, detto *di lunghezza* (*length space*), se $\delta = d$ (si vedano [132, 228]).

Si noti che segue banalmente dalla definizione che la lunghezza $\mathcal{L}_I(\gamma)$ di una curva è invariante per riparametrizzazione (come $\mathcal{L}(\gamma)$).

ESERCIZIO 4.3.16. Si mostri (utilizzando le coordinate normali) che per una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ si ha $|\dot{\gamma}(t_0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(t_0+h), \gamma(t_0))}{|h|}$, per ogni $t_0 \in [a, b]$ in cui $\dot{\gamma}(t_0)$ esiste. Di conseguenza, per una curva C^1 a tratti γ , la disuguaglianza

$$\frac{d(\gamma(t_0+h), \gamma(t_0))}{h} \leq \frac{\mathcal{L}_I(\gamma|_{[t_0, t_0+h]})}{h} = \frac{\mathcal{L}_I(\gamma|_{[0, t_0+h]}) - \mathcal{L}_I(\gamma|_{[0, t_0]})}{h} \leq \frac{\int_{t_0}^{t_0+h} |\dot{\gamma}(t)| dt}{h}$$

per $h > 0$ implica $\frac{d}{dt} \mathcal{L}_I(\gamma|_{[0, t]}) \Big|_{t=t_0} = |\dot{\gamma}(t_0)|$. Si deduca da questo che le lunghezze \mathcal{L}_I e \mathcal{L} coincidono, dunque denoteremo d'ora in poi anche la lunghezza intrinseca \mathcal{L}_I semplicemente con il simbolo \mathcal{L} .

Si utilizzi questo fatto per provare che se d è la distanza riemanniana di (M, g) , allora (M, d) è uno spazio metrico di lunghezza (si veda anche [42, Proposition 3.18]).

Estendiamo ora alcune nozioni, dicendo che una curva rettificabile $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ è *parametrizzata in lunghezza d'arco* se per ogni coppia di valori $s \leq s' \in [a, b]$ si ha $\mathcal{L}(\gamma|_{[s, s']}) = (s' - s)$, *parametrizzata proporzionalmente alla (sua) lunghezza d'arco* se esiste $c > 0$ tale che per ogni coppia di valori $s \leq s' \in [a, b]$ si ha $\mathcal{L}(\gamma|_{[s, s']}) = c(s' - s)$, *minimale* se non vi sono curve rettificabili più corte di lei tra i suoi estremi $p = \gamma(a)$ e $q = \gamma(b)$ (dunque $\mathcal{L}(\gamma) = d(p, q)$) e *localmente minimale* se, per ogni $t \in [a, b]$, esiste un suo intorno $I \subseteq [a, b]$ tale che $\gamma|_I$ sia minimale.

ESERCIZIO 4.3.17. Si provi che se una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ è rettificabile con $\mathcal{L}(\gamma) > 0$, allora si può riparametrizzare (in modo continuo) sullo stesso intervallo $[a, b]$ proporzionalmente alla lunghezza d'arco e, cambiando l'intervallo, in lunghezza d'arco. Si osservi poi che essendo la lunghezza di ogni curva rettificabile maggiore o uguale alla distanza tra i suoi estremi, nel primo caso la curva è lipschitziana di costante $\mathcal{L}(\gamma)/(b - a)$, nel secondo di costante 1.

ESERCIZIO 4.3.18. Si provi che una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ lipschitziana è rettificabile e si ha

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt,$$

se (M, g) è una varietà riemanniana (l'integrale – di Lebesgue – è ben definito in quanto γ è derivabile quasi ovunque in $[a, b]$, essendo lipschitziana).

Date queste definizioni, è possibile migliorare l'enunciato del Corollario 4.3.13.

PROPOSIZIONE 4.3.19. Sia (M, g) una varietà riemanniana e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva continua localmente minimale (o minimale). Allora, a meno di una riparametrizzazione continua, γ è una geodetica, dunque di classe C^∞ .

DIMOSTRAZIONE. Se $\mathcal{L}(\gamma) = 0$, la conclusione è ovvia. Sia $\mathcal{L}(\gamma) > 0$ e supponiamo, senza perdita di generalità, che γ sia parametrizzata in lunghezza d'arco (Esercizio 4.3.17). Allora siccome γ è localmente minimale, per l'Osservazione 4.2.6 e il Teorema 4.3.5, esiste $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ tale che $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ è minimale e $\mathcal{L}(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}) = t_i - t_{i-1} \leq \varepsilon_0$, per un fissato $0 < \varepsilon_0 < \inf_{p \in \gamma([a, b])} \text{inj}(p)$, indipendente da $i \in \{1, \dots, k\}$. Per l'esercizio precedente e argomentando come nella parte finale della dimostrazione del Teorema 4.3.5, deduciamo prima che ogni curva $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$ è di classe C^1 (ricordando che γ è lipschitziana, per l'Esercizio 4.3.17, dunque differenziabile quasi ovunque), poi che ciascuna di esse è una geodetica parametrizzata in lunghezza d'arco. \square

OSSERVAZIONE 4.3.20. Per molto tempo è stato naturale studiare le varietà con metodi unicamente analitici, mentre è ora chiaro che una larga parte di tale studio appartiene essenzialmente alla geometria "metrica" (cioè legata alla funzione distanza, che fornisce a una varietà riemanniana una struttura di spazio metrico compatibile con la topologia della varietà, come abbiamo visto) e l'apparato differenziale è solo un modo per semplificare le definizioni di alcune classi di oggetti e ottenere più facilmente vari risultati. Molte nozioni della geometria riemanniana sono state infatti estese a spazi metrici generali, distinguendo così le nozioni di natura realmente differenziale e quelle semplicemente "metriche". Si veda [44], per approfondire.

Concludiamo questa sezione con alcune definizioni e fatti relativi sempre legati alle geodetiche di una varietà riemanniana (M, g) .

DEFINIZIONE 4.3.21. Un sottoinsieme $C \subseteq M$ si dice (*geodeticamente*) *convesso* se per ogni coppia di punti $p, q \in C$, esiste un'unica (a meno di riparametizzazioni) geodetica minimale $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ che li congiunge ed è tutta contenuta in C .

Una sottovarietà $S \subseteq M$ si dice *totalmente geodetica* se per ogni $p \in S$ e per ogni vettore $v \in T_p S \subseteq T_p M$, la geodetica $t \mapsto \gamma_v(t) = \exp_p^M(tv)$ è tutta contenuta in S (per tutti i $t \in \mathbb{R}$ per i quali è definita).

Una funzione reale f definita su un sottoinsieme convesso $C \subseteq M$ si dice (*strettamente*) *convessa* se per ogni geodetica minimale $\gamma : [a, b] \rightarrow C$ che congiunge due punti di C si ha che la funzione $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è (*strettamente*) convessa.

Si veda la Sezione 12.3, in particolare l'Osservazione 12.3.2, per altre nozioni di convessità di un sottoinsieme.

ESERCIZIO 4.3.22. Si provi che una funzione $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 , con $C \subseteq M$ convesso, è convessa se e solo se il suo hessiano è dappertutto semidefinito positivo. Se tale hessiano è definito positivo, la funzione f è strettamente convessa.

ESERCIZIO 4.3.23. Si mostri che se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ di classe C^2 , con U aperto di M , ha hessiano definito positivo e ha minimo $m = f(p) \in \mathbb{R}$ in $p \in U$, allora esiste $\delta_0 > 0$ tale che per ogni $\delta \in (0, \delta_0)$, ogni sottolivello $f^{-1}([m, m + \delta])$ è un aperto convesso contenuto in U .

Possiamo migliorare il Teorema 4.3.5 (degli intorni geodetici) come segue.

TEOREMA 4.3.24 (Teorema degli intorni convessi – Whitehead). Per ogni $p \in M$, esiste $\delta_0 \in (0, \text{inj}(p))$ tale che se $\delta \in (0, \delta_0)$, la palla geodetica/metrica $B_\delta(p)$ è convessa, inoltre per ogni coppia di punti $q, m \in B_\delta(p)$ esiste un'unica geodetica minimale γ (a meno di riparametizzazioni affini) di lunghezza minore di 2δ , che congiunge q e m ed è interamente contenuta in $B_\delta(p)$. Ogni altra curva minimale che congiunga q e m , coincide con γ a meno di riparametizzazione.

DIMOSTRAZIONE. Innanzitutto, mostriamo che per ogni $p \in M$, se $\delta > 0$ è abbastanza piccolo, la palla $B_\delta(p)$ è convessa. Consideriamo delle coordinate normali (x^1, \dots, x^n) rispetto a p nella palla geodetica $B_{\varepsilon'}(p)$, per $\varepsilon' < \text{inj}(p)$. Dimostriamo che la funzione d_p^2 (che ha minimo zero in p) ha hessiano definito positivo in p . Essendo una funzione C^∞ , il suo hessiano sarà allora definito positivo in un intorno aperto di p e la conclusione segue dall'Esercizio 4.3.23. Nel punto p abbiamo

$$(\text{Hess } d_p^2)_{ij} = \nabla_{ij}^2 d_p^2 = \frac{\partial^2 d_p^2}{\partial x^i \partial x^j} = 2\delta_{ij}, \quad (4.8)$$

per la formula (3.20) e $\nabla d_p^2(p) = 0$, essendo p un punto di minimo di d_p^2 e in quanto in coordinate normali $d_p^2(x) = |x|_{\mathbb{R}^n}^2$ (Proposizione 4.3.7).

Scegliendo allora $\delta_0 > 0$ abbastanza piccolo tale che la palla $B_\delta(p)$ sia convessa per ogni $\delta < \delta_0$, la palla $B_{\delta_0}(p)$ sia contenuta nell'aperto U_p dato dal Teorema 4.3.5 e $2\delta_0 < \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ sempre dato da tale teorema, si ha la tesi osservando che ogni due punti appartenenti a $B_\delta(p)$ hanno distanza minore di 2δ (per la disuguaglianza triangolare). \square

DEFINIZIONE 4.3.25. Una geodetica $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ si dice una *linea* (o una *retta*) se è minimale tra ogni coppia di suoi punti.

Una geodetica $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ si dice un *raggio* (o una *semiretta*) da $p = \gamma(0)$, se è minimale tra ogni coppia di suoi punti.

Una geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ si dice *chiusa* se $\gamma(a) = \gamma(b)$ e $\dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$. Cioè γ è l'immagine di $\sigma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$ con $\nabla_{\dot{\sigma}}\dot{\sigma} = 0$.

Vedremo nella Proposizione 6.1.17 che da ogni punto p di una varietà riemanniana completa (come spazio metrico, con la distanza d) ma non compatta, esce almeno un raggio. Inoltre, vedremo che ogni classe non banale di omotopia libera di curve chiuse di una varietà compatta contiene una geodetica chiusa che minimizza la lunghezza delle curve nella classe, Proposizione 6.1.23.

Dopo lo studio "locale" delle geodetiche su una varietà riemanniana di questo capitolo e delle conseguenze (locali) sulle funzioni distanza da un punto (Proposizione 4.3.7) è naturale porsi il problema dell'esistenza di geodetiche (minimali) tra due punti non necessariamente vicini e analizzare i motivi per cui una geodetica (possibilmente) smette di essere minimale, se troppo lunga. Inoltre, vorremmo studiare le proprietà della funzione distanza d_p non solo localmente, ma su tutta la varietà. Ci occuperemo di queste questioni con i metodi del calcolo delle variazioni nel Capitolo 6.

4.4. Sommersioni e geodetiche

Data una sommersione riemanniana $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \rightarrow (M, g)$, con sottospazio orizzontale $H_{\widetilde{p}} \subseteq T_{\widetilde{p}}\widetilde{M}$, per ogni $\widetilde{p} \in \widetilde{M}$, mostriamo che la mappa π è 1-lipschitziana, cioè contrae le distanze riemanniane,

$$d^M(\pi(\widetilde{p}), \pi(\widetilde{q})) \leq d^{\widetilde{M}}(\widetilde{p}, \widetilde{q}), \quad (4.9)$$

per ogni $\widetilde{p}, \widetilde{q} \in \widetilde{M}$. Infatti, $d\pi_{\widetilde{m}} : T_{\widetilde{m}}\widetilde{M} \rightarrow T_{\pi(\widetilde{m})}M$ diminuisce la norma di ogni vettore, poiché $T_{\widetilde{m}}\widetilde{M} = \ker d\pi_{\widetilde{m}} \oplus H_{\widetilde{m}}$ ed essendo un'isometria lineare tra $H_{\widetilde{m}}$ e $T_{\pi(\widetilde{m})}M$, per ogni $\widetilde{m} \in \widetilde{M}$, da cui segue

$$\mathcal{L}(\pi \circ \widetilde{\gamma}) = \int_a^b |d\pi_{\widetilde{\gamma}(t)}(\dot{\widetilde{\gamma}}(t))| dt \leq \int_a^b |\dot{\widetilde{\gamma}}(t)| dt = \mathcal{L}(\widetilde{\gamma})$$

per ogni curva $\widetilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \widetilde{M}$ di classe C^1 a tratti. Questo chiaramente implica la disuguaglianza (4.9).

Se ora $\gamma : I \rightarrow M$ è una geodetica con $\gamma(t_0) = p = \pi(\tilde{p})$, esistono un intorno $U \subseteq M$ di p e un campo vettoriale X su U tali che γ è una curva integrale di X ($\gamma|_{[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]}$ è l'immagine mediante \exp_p di un segmento di $T_p M$). Consideriamo poi in $\tilde{U} = \pi^{-1}(U) \subseteq \tilde{M}$, intorno di \tilde{p} , il sollevamento orizzontale di X dato da

$$\tilde{X}(\tilde{q}) = d\pi_{\tilde{q}}^{-1}(X(\pi(\tilde{q})))$$

per ogni $\tilde{q} \in \tilde{U}$, dove, con un piccolo abuso di notazione, abbiamo denotato con $d\pi_{\tilde{q}}^{-1}$, l'inversa dell'isometria lineare tra $H_{\tilde{q}}$ e $T_{\pi(\tilde{q})} M$. Se allora $\tilde{\gamma} : (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \tilde{U}$ è una curva integrale di \tilde{X} tale che $\tilde{\gamma}(t_0) = \tilde{p}$, si ha

$$\frac{d}{dt}(\pi \circ \tilde{\gamma})(t) = d\pi_{\tilde{\gamma}(t)}(\dot{\tilde{\gamma}}(t)) = d\pi_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{X}(\tilde{\gamma}(t))) = X(\pi(\tilde{\gamma}(t)))$$

per ogni $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, dunque $\pi \circ \tilde{\gamma}$ è una curva integrale per il campo X con $\pi \circ \tilde{\gamma}(t_0) = \pi(\tilde{p}) = p$, quindi deve coincidere con γ , ristretta a $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Inoltre, la curva $\tilde{\gamma}$ è parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco, in quanto, essendo $\dot{\tilde{\gamma}}(t)$ orizzontale e γ una geodetica,

$$|\dot{\tilde{\gamma}}(t)| = |d\pi_{\tilde{\gamma}(t)}(\dot{\tilde{\gamma}}(t))| = |\dot{\gamma}(t)|$$

è costante. Infine, $\tilde{\gamma}$ è localmente minimizzante, infatti, per ogni $[a, b] \subseteq (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ per cui $\gamma|_{[a, b]}$ è minimale, si ha

$$\mathcal{L}(\tilde{\gamma}|_{[a, b]}) = \mathcal{L}(\gamma|_{[a, b]}) = d^M(\gamma(a), \gamma(b)) \leq d^{\tilde{M}}(\tilde{\gamma}(a), \tilde{\gamma}(b))$$

per la disuguaglianza (4.9). Dunque, deve valere l'uguaglianza e $\tilde{\gamma}$ è una geodetica, per la Proposizione 4.3.12.

Abbiamo allora dimostrato che ogni geodetica $\gamma : I \rightarrow M$ da un punto $p = \pi(\tilde{p})$, si può "sollevare" localmente ad una geodetica *orizzontale* di \tilde{M} da \tilde{p} . Si noti che tale "sollevamento" potrebbe non essere globale. Per esempio, considerata la sommersione riemanniana $\pi : (x, y, z) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, g_{\text{eucl}}) \rightarrow (x, y) \in (\mathbb{R}^2, g_{\text{eucl}})$, il sollevamento orizzontale *massimale* della geodetica $\gamma(t) = (t, 0)$, definita su tutto \mathbb{R} , nel punto $(1, 0, 0)$ è dato da $\tilde{\gamma}(t) = (t, 0, 0)$, per ogni $t \in (0, +\infty)$.

Consideriamo ora una geodetica $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \tilde{M}$ tale che il vettore $\dot{\tilde{\gamma}}(t_0)$ sia orizzontale, per un qualche $t_0 \in I$. Allora, ponendo $\tilde{p} = \tilde{\gamma}(t_0)$ e ragionando come sopra, la geodetica γ di M uscente da $p = \pi(\tilde{p})$ con velocità $\dot{\gamma}(t_0) = d\pi_{\tilde{p}}(\dot{\tilde{\gamma}}(t_0))$ deve coincidere con la curva $\pi \circ \tilde{\gamma}$. Segue che $\tilde{\gamma}$ è la "sollevata" di γ , dunque la sua velocità $\dot{\tilde{\gamma}}(t)$ è orizzontale per ogni $t \in I$ e la geodetica $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ è definita su tutto I .

Le geodetiche di M sono allora le immagini delle geodetiche *orizzontali* di \tilde{M} e se la mappa esponenziale $\exp^{\tilde{M}}$ è definita su tutto $T\tilde{M}$ (cioè tutte le geodetiche si possono estendere indefinitamente – proprietà che chiameremo *completezza geodetica*, nel Capitolo 6), lo stesso vale per \exp^M su TM .

ESEMPIO 4.4.1 (Geodetiche di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$). Studiamo le geodetiche dello spazio proiettivo complesso n -dimensionale $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ con la metrica di Fubini–Study, visto nell’Esempio 2.3.17. Usiamo la descrizione di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ come il quoziente $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$, con sommersione (fibrato) associata $\mathcal{P} : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Abbiamo visto che per ogni $z = \sum_{j=1}^{n+1} (x^j e_{2j-1} + y^j e_{2j}) \in \mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{R}^{2n+2}$, il sottospazio orizzontale $H_z \subseteq T_z \mathbb{S}^{2n+1}$ è l’ortogonale in \mathbb{R}^{2n+2} (rispetto alla metrica euclidea) del sottospazio bidimensionale generato da z e $\hat{z} = \sum_{j=1}^{n+1} (y^j e_{2j-1} - x^j e_{2j})$, considerando su \mathbb{R}^{2n+2} la metrica canonica euclidea.

Per quanto visto sopra, se γ è una geodetica di velocità unitaria in $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ con $\gamma(0) = \mathcal{P}(z)$ e $\dot{\gamma}(0) = v \in T_{\mathcal{P}(z)}\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, la velocità iniziale v della geodetica “sollevata” $\tilde{\gamma}$, uscente da z , è data dal vettore $\tilde{v} \in T_z \mathbb{S}^{2n+1}$, di norma unitaria, con $\langle \tilde{v}, z \rangle = \langle \tilde{v}, \hat{z} \rangle = 0$ tale che $d\mathcal{P}_z(\tilde{v}) = v$. Dunque, $\tilde{\gamma}(t) = z \cos t + \tilde{v} \sin t$, che è un cerchio massimo di \mathbb{S}^{2n+1} (si veda l’Esempio 4.1.8), ovviamente periodica di periodo π (si noti che è *orizzontale*, in quanto $\dot{\tilde{\gamma}}$ è ortogonale a $\tilde{\gamma}$) e $\gamma(t) = \mathcal{P}(z \cos t + \tilde{v} \sin t)$.

Se ora consideriamo due geodetiche γ e σ di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ uscenti dallo stesso punto $\mathcal{P}(z)$ con due velocità unitarie v e w , le due geodetiche “sollevate” $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\sigma}$, uscenti da z sono minimali fino alla lunghezza π e il loro primo punto di intersezione è il punto antipodale $-z \in \mathbb{S}^{2n+1}$ di z . Se \tilde{v} e \tilde{w} non appartengono alla stessa orbita sotto l’azione di \mathbb{S}^1 su \mathbb{S}^{2n+1} (cioè non esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che $\tilde{w} = e^{i\theta} \tilde{v}$, considerando $\mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \approx \mathbb{R}^{2n+2}$ e $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$), si vede facilmente che per ogni $t \in (0, \pi)$ non può essere $\mathcal{P}(\tilde{\gamma}(t)) = \mathcal{P}(\tilde{\sigma}(t))$, dunque anche le geodetiche γ e σ hanno la loro prima intersezione quando raggiungono la lunghezza π . Se invece esiste $\theta \in \mathbb{R}$ tale che $\tilde{w} = e^{i\theta} \tilde{v}$, si ha allora

$$\gamma(\pi/2) = \mathcal{P}(\tilde{\gamma}(\pi/2)) = \mathcal{P}(\tilde{v}) = \mathcal{P}(\tilde{w}) = \mathcal{P}(\tilde{\sigma}(\pi/2)) = \sigma(\pi/2).$$

Per ogni $t \in (0, \pi/2)$ non può essere $\mathcal{P}(\tilde{\gamma}(t)) = \mathcal{P}(\tilde{\sigma}(t))$, quindi in questo caso, le geodetiche γ e σ hanno la loro prima intersezione quando raggiungono la lunghezza $\pi/2$.

Infine, notiamo che ogni geodetica è minimale fino alla lunghezza $\pi/2$, mentre se è più lunga, la geodetica uscente dallo stesso punto con velocità opposta raggiunge il punto finale della prima con minor lunghezza (lo si provi per esercizio).

ESEMPIO 4.4.2 (Metrica di Sasaki su TM). Per una varietà riemanniana (M, g) di dimensione n , la mappa $\pi : TM \rightarrow M$ è chiaramente una sommersione (lo è per ogni varietà differenziabile M). Lo spazio verticale $V_v M = \ker d\pi_v \subseteq T_v TM$ in $v \in TM$ è chiaramente isomorfo a $T_{\pi(v)} M$ e, volendo assegnare in modo naturale un sottospazio vettoriale $H_v M$ supplementare a $V_v M$ in $T_v TM$ mediante la connessione di Levi–Civita, definiamo $H_v M$ come l’insieme dei vettori $Y \in T_v TM$ tali che Y è il vettore velocità $\dot{X}(0)$ del campo parallelo $X(t)$ lungo

una qualsiasi curva $t \mapsto \gamma(t) \in M$ uscente da $\pi(v)$ soddisfacente $X(0) = v$ (considerando ovviamente $X(t)$ come una curva in TM passante per v).

In una carta coordinata $(U, \varphi = (x^i))$ di M con corrispondenti campi coordinati $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$ su U , che induce naturalmente la carta coordinata $(\pi^{-1}(U), \psi = (x^i, v^i))$ su TM , data da

$$\pi^{-1}(U) \ni v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_{\pi(v)} + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_{\pi(v)} \mapsto \psi(v) = (\varphi(\pi(v)), v^1, \dots, v^n) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n,$$

un vettore

$$Y = \lambda^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_v + \dots + \lambda^n \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_v + Y^1 \frac{\partial}{\partial v^1} \Big|_v + \dots + Y^n \frac{\partial}{\partial v^n} \Big|_v \in T_v TM$$

è allora verticale se e solo se $\lambda^1 = \dots = \lambda^n = 0$ e appartiene a $H_v M$ se e solo se

$$Y^i + \Gamma_{jk}^i(\pi(v)) \lambda^j v^k = 0 \quad (4.10)$$

per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, per la prima equazione del sistema (3.16). Dunque $V_v M$ e $H_v M$ sono sottospazi di $T_v TM$ entrambi di dimensione n e sono supplementari. La mappa $d\pi_v : T_v TM \rightarrow T_{\pi(v)} M$ è allora descritta da

$$d\pi_v(Y) = \lambda^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_{\pi(v)} + \dots + \lambda^n \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_{\pi(v)},$$

per ogni vettore Y come sopra e lo spazio verticale $V_v M = \ker d\pi_v$ si identifica con $T_{\pi(v)} M$ mediante l'isomorfismo lineare $\mathcal{I}_v : V_v M \rightarrow T_{\pi(v)} M$ dato da

$$V_v M \ni W = W^1 \frac{\partial}{\partial v^1} \Big|_v + \dots + W^n \frac{\partial}{\partial v^n} \Big|_v \xrightarrow{\mathcal{I}_v} W^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_{\pi(v)} + \dots + W^n \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_{\pi(v)} \in T_{\pi(v)} M. \quad (4.11)$$

Per ogni $v \in TM$, essendo $T_v TM = V_v M \oplus H_v M$, possiamo considerare la forma bilineare $g_T(v)$ su $T_v TM$ data dalle seguenti condizioni,

$$g_T(v)(Y, W) = \begin{cases} g_{\pi(v)}(\mathcal{I}_v(Y), \mathcal{I}_v(W)) & \text{se } Y, W \in V_v M \\ 0 & \text{se } (Y, W) \text{ o } (W, Y) \in V_v M \times H_v M \\ g_{\pi(v)}(d\pi_v(Y), d\pi_v(W)) & \text{se } Y, W \in H_v M \end{cases}$$

allora l'applicazione $g_T : v \mapsto g_T(v)$ risulta essere una metrica riemanniana su TM , detta *metrica di Sasaki*. Segue che $\pi : (TM, g_T) \rightarrow (M, g)$ è una sommersione riemanniana con spazio orizzontale $H_v M$, infatti, le applicazioni $d\pi_v$ e \mathcal{I}_v sono isometrie lineari, rispettivamente tra $(H_v M, g_T)$, $(V_v M, g_T)$ e $(T_{\pi(v)} M, g_{\pi(v)})$, per la definizione della metrica g_T .

ESERCIZIO 4.4.3. Si mostri che se $t \mapsto \gamma(t)$ è una geodetica di (M, g) , allora la curva $t \mapsto \dot{\gamma}(t) \in TM$ ha velocità orizzontale in ogni punto ed è una geodetica di (TM, g_T) .

4.5. Sistemi geodetici

Grazie alla decomposizione orizzontale-verticale del fibrato tangente di una varietà Riemanniana e all'introduzione della metrica di Sasaki, siamo in grado di semplificare il formalismo sul sistema geodetico (TM, α, H) (vedere Paragrafo 2.5). Vale innanzitutto la seguente formula di rappresentazione locale per α :

PROPOSIZIONE 4.5.1. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana, sia $X \in TM$ e si ponga $\xi \in T_X TM$, di decomposizione orizzontale-verticale $\xi = (\xi_h, \xi_v)$ con $\xi_h \in H_X M$ e $\xi_v \in V_X M$. Allora, per ogni $\xi, \eta \in T_X TM$, si ha*

$$\alpha_X(\xi, \eta) = g(\xi_h, \eta_v) - g(\xi_v, \eta_h).$$

DIMOSTRAZIONE. Per far vedere questo, mostriamo che vale l'uguaglianza in coordinate normali. In particolare, preso $p \in M$, una qualunque carta normale centrata in p , diciamo (U, x) , soddisfa $x(p) = 0$, $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$ e $\Gamma_{ij}^k(0) = 0$ per ogni indice i, j, k .

Dalla scelta di (U, x) segue che se X si rappresenta come $(0, v)$, allora per un qualunque $\xi = (\xi_h, \xi_v) \in T_X TM$ si ha che le rappresentazioni locali di ξ_h e ξ_v sono date rispettivamente da $(0, v, \xi_h, 0)$ e $(0, v, 0, \xi_v)$ cosa simile per un qualunque altro $\eta = (\eta_h, \eta_v) \in T_X TM$. Quindi, dalla rappresentazione locale di α (vedere Paragrafo 2.5) segue che $\alpha(\xi, \eta) = g(\xi_h, \eta_v) - g(\xi_v, \eta_h)$ che era proprio quello che volevamo. \square

Seguono banalmente i seguenti fatti:

PROPOSIZIONE 4.5.2. *Sia (M, g) una varietà Riemanniana, sia (TM, α, H) il sistema geodetico. Si denoti con Φ_t il flusso geodetico al tempo $t \in \mathbb{R}$. Allora:*

- il campo hamiltoniano $X^{(H)}$ è orizzontale e quindi per ogni $v \in TM$, $X^{(H)}(v) = (v, 0) \in H_v M \oplus V_v M (= T_v TM)$;
- per ogni $v \in TM$, $\pi(\Phi_t(v))$ è la geodetica γ su M , di condizioni iniziali $(\gamma(0), \dot{\gamma}(0)) = v$;
- per ogni $v \in M$, $\Phi_t(v)$ è una geodetica su TM al variare di t nell'intervallo di esistenza di Φ_t ;
- per ogni $a > 0$, l'insieme delle soluzioni $v \in TM$ dell'equazione $H(v) = a$ è una sottovarietà regolare di TM .

DIMOSTRAZIONE. I primi tre punti discendono banalmente dalla definizione di flusso geodetico e dal fatto che la mappa di proiezione $\pi: TM \rightarrow M$ è un rivestimento Riemanniano, una volta munito TM della metrica di Sasaki.

Quanto al quarto punto, dalla Proposizione 4.5.1 si ha che per ogni $(0, v) \in H_v M \oplus V_v M$ con $v \neq 0$ tale che $H(v) = a$, si ha

$$dH(0, v) = \alpha(X^{(H)}(v), (0, v)) = g(v, v) = 2a > 0,$$

dunque la tesi segue dal teorema della funzione implicita. \square

OSSERVAZIONE 4.5.3. Dalla Proposizione 1.9.17 (vedere Paragrafo 1.9) segue che H si conserva lungo il flusso geodetico. Ciò in realtà è coerente col fatto che la norma della velocità delle geodetiche si mantiene costante nel tempo. A tal proposito, dalla quadraticità di H segue che fissati $a, b > 0$, la funzione

$$X \in H^{-1}(a) \longrightarrow \sqrt{\frac{b}{a}}X \in H^{-1}(b)$$

è biunivoca. Tutto ciò ci spinge allora a studiare il flusso geodetico sul fibrato unitario

$$SM = \{X \in TM : g(X, X) = 1\}.$$