

## CAPITOLO 2

### Varietà riemanniane

Vorremmo introdurre una nozione di distanza tra le coppie di punti di una varietà differenziabile. Una possibilità è imporre una struttura di spazio metrico, ma in realtà vorremmo essere in grado di calcolare la lunghezza delle curve, con l'idea che, come in  $\mathbb{R}^n$ , la distanza è data dalla lunghezza della curva più corta che congiunge i punti (detta geodetica) e che la lunghezza di una curva si calcola integrando il modulo (norma) della sua velocità in ogni punto. Su una varietà differenziabile la velocità in un punto della curva è un vettore nello spazio tangente alla varietà in tale punto. È dunque necessaria la scelta di una funzione sugli spazi tangenti in ogni punto della varietà che ci dica quanto un vettore è "lungo". Se tale funzione è data da una norma generica (che varia "in modo  $C^\infty$ " da punto a punto), si ha quella che viene chiamata *metrica finsleriana* (e *geometria finsleriana* lo studio di tali varietà). In geometria riemanniana (che ne è un caso particolare) si richiede che tale norma venga da un prodotto scalare su ogni spazio tangente alla varietà, cioè una forma bilineare e definita positiva. Al variare del punto si ha dunque un tensore  $g$  di tipo  $(0, 2)$  che chiameremo *metrica riemanniana*. Generalizzando, si può ammettere che tale forma bilineare  $g$  (cioè di segnatura  $(n, 0)$  in ogni punto) non sia necessariamente definita positiva ma possa essere degenere, o soltanto semidefinita positiva, oppure abbia una segnatura fissata  $(k, n - k)$ , ottenendo quelle che vengono dette *metriche pseudo-riemanniane* (dette anche *semi-riemanniane*), in cui potrebbe essere che per dei vettori  $v \in T_p M$  si abbia  $|v|_p^2 = g_p(v, v) < 0$ . Nel caso particolarmente importante, di segnatura  $(n - 1, 1)$  la forma  $g$  è detta *metrica di Lorentz*, in quanto nel caso  $n = 4$  (segnatura  $(3, 1)$ ), la coppia varietà-metrica di Lorentz modella lo spazio-tempo relativistico. Concludiamo menzionando anche la *geometria sub-riemanniana* in cui si assumono restrizioni sui possibili vettori tangenti alle curve utilizzate per calcolare la distanza tra i punti della varietà.

#### 2.1. Metriche riemanniane

DEFINIZIONE 2.1.1. Sia  $M$  una varietà differenziabile. Una *metrica riemanniana* (o semplicemente una *metrica*) su  $M$  è una 2-forma  $g \in \Gamma(TM^* \otimes TM^*) = \Gamma(T_2^0 M)$  tale che, per ogni  $p \in M$ , la forma bilineare  $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$  sia

- *simmetrica*:

$$g_p(v, w) = g_p(w, v) \quad \text{per ogni coppia di vettori } v, w \in T_p M$$

(dunque  $g$  è un elemento di  $\mathcal{S}^2M$ , cioè una 2-forma simmetrica),

- *definita positiva*:

$$g_p(v, v) > 0 \quad \text{per ogni vettore } v \neq 0 \text{ in } T_pM.$$

Una *varietà riemanniana*  $(M, g)$  è una varietà differenziabile  $M$  con una metrica riemanniana  $g$ .

Dalla definizione segue immediatamente che per ogni  $p \in M$  l'applicazione  $g_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  definisce su  $T_pM$  un prodotto scalare definito positivo, talvolta indicato anche come  $\langle v, w \rangle_p$ . Risultano quindi definite la lunghezza di un vettore tangente  $v \in T_pM$

$$|v|_p = \sqrt{g_p(v, v)}$$

e l'angolo compreso tra due vettori tangenti  $v, w \in T_pM$

$$\angle(v, w) = \arccos\left(\frac{g_p(v, w)}{|v| \cdot |w|}\right).$$

Se  $(x^1, \dots, x^n)$  è un sistema di coordinate locali in un aperto  $U$  di  $M$ , possiamo scrivere  $g$  come

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

per opportune funzioni  $g_{ij} \in C^\infty(U)$ , le quali in ogni punto determinano una matrice simmetrica e definita positiva. Se  $(y^1, \dots, y^n)$  è un altro sistema di coordinate in  $U$  rispetto al quale  $g = \tilde{g}_{rs} dy^r \otimes dy^s$ , vale la seguente formula di cambio di coordinate

$$\tilde{g}_{rs} = \frac{\partial x^i}{\partial y^r} \frac{\partial x^j}{\partial y^s} g_{ij}$$

(si veda l'Osservazione 1.2.4).

**ESEMPIO 2.1.2.** La metrica "canonica" (o euclidea)  $g_{\text{eucl}}$  su  $\mathbb{R}^n$ , visto come varietà differenziabile, rispetto alle coordinate cartesiane (che sono globali), è data dalla 2-forma

$$g_{\text{eucl}} = dx^1 \otimes dx^1 + \dots + dx^n \otimes dx^n = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j,$$

dove  $\delta_{ij}$  è la funzione "delta di Kronecker" (1 se  $i = j$ , 0 altrimenti). Nel seguito  $g_{\text{eucl}}$  sarà talvolta denotata anche con  $g_{\text{can}}$ .

Si mostri per esercizio che in *coordinate polari*  $(r, \theta)$  su  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , si ha

$$g_{\text{eucl}} = dr^2 + r^2 d\theta^2 = dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta.$$

**TEOREMA 2.1.3** (Teorema "zero" della geometria riemanniana). *Ogni varietà differenziabile ammette una metrica riemanniana.*

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $M$  una varietà differenziabile. Consideriamo un ricoprimento aperto in carte coordinate  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  di  $M$ , con  $\alpha \in \mathcal{A}$ . Sia  $g_\alpha = \varphi_\alpha^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$  il pull-back locale del prodotto scalare standard di  $\mathbb{R}^n$  e  $\{\rho_\alpha\}$  una partizione dell'unità subordinata al ricoprimento  $\{U_\alpha\}$ , per  $\alpha \in \mathcal{A}$ .

Si può definire allora

$$g = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \rho_\alpha g_\alpha$$

che si vede facilmente essere una 2-forma simmetrica e definita positiva su ogni spazio tangente di  $M$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE 2.1.4.** Non è sempre possibile richiedere l'esistenza di una 2-forma simmetrica non degenera con segnatura assegnata (diversa da  $(n, 0)$ ) su una varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$ . Si provi, ad esempio, per esercizio, che sulla  $n$ -sfera  $\mathbb{S}^n$  con  $n$  pari non si può trovare una 2-forma simmetrica con segnatura  $(n-1, 1)$  (cioè  $\mathbb{S}^n$  non ammette una metrica lorentziana), si veda [80, Sezione 2.6].

**DEFINIZIONE 2.1.5.** Sia  $M$  una varietà differenziabile e  $g$  una metrica riemanniana su di essa. Fissata una funzione positiva  $u : M \rightarrow (0, +\infty)$  di classe  $C^\infty$ , possiamo definire su  $M$  una nuova metrica riemanniana  $ug$  che viene detta *conforme* alla metrica  $g$ . E' immediato verificare che "essere conformi" è una relazione di equivalenza sullo spazio delle metriche riemanniane di  $M$  e che passando da una metrica a una metrica conforme, su ogni spazio tangente gli angoli tra ogni coppia di vettori sono invariati. Se la funzione  $u$  è una costante positiva  $\lambda$  la metrica risultante  $\lambda g$  si dice *riscaldamento* della metrica  $g$  (o semplicemente *riscalata*) oppure *omotetica* a  $g$ .

Se  $f : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo tra due varietà riemanniane  $(M, g)$  e  $(N, h)$  e si ha che  $f^*h$  è una metrica conforme a  $g$  su  $M$ , diremo che  $f$  è una mappa *conforme* (segue allora che  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  "mantiene" gli angoli tra i vettori, per ogni  $p \in M$ ) e che le varietà riemanniane  $(M, g)$  e  $(N, h)$  sono *conformalmente equivalenti*.

**DEFINIZIONE 2.1.6.** Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa tra due varietà riemanniane  $(M, g)$  e  $(N, h)$ . Diciamo che  $f$  è un'*isometria* in  $p \in M$  se

$$h_{f(p)}(df_p(v), df_p(w)) = g_p(v, w) \quad \text{per ogni } v, w \in T_p M.$$

Chiamiamo  $f$  *isometria locale* se  $M$  e  $N$  hanno la stessa dimensione e  $f$  è un'*isometria* in ogni punto di  $M$ . Diciamo che  $f$  è un'*isometria* se è un diffeomorfismo che risulta essere un'*isometria* in ogni  $p \in M$ .

Infine, due varietà riemanniane  $(M, g)$  e  $(N, h)$  sono (*localmente*) *isometriche* se esiste un'*isometria* (locale)  $f : M \rightarrow N$ .

Dalla definizione segue immediatamente che ogni isometria locale è un'immersione e dunque, avendo le varietà la stessa dimensione, è localmente un'*isometria*. Si noti che se  $f : M \rightarrow N$  è un'*isometria*, anche  $f^{-1} : N \rightarrow M$  lo è

e viceversa. Inoltre, un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  è un'isometria se e solo se il pull-back  $f^*h$  della metrica  $h$  per  $f$  coincide con la metrica  $g$ . Ovviamente l'insieme  $\text{Iso}(M)$  delle isometrie di una varietà riemanniana  $(M, g)$  in sé ha una naturale struttura di gruppo (per composizione), così come il gruppo dei diffeomorfismi  $\text{Diff}(M)$  di una varietà differenziabile  $M$  in se stessa (e il gruppo  $\text{Hom}(M)$  degli omeomorfismi).

**ESERCIZIO 2.1.7.** Si mostri che una varietà riemanniana di dimensione 1 è sempre localmente isometrica intorno a ogni suo punto a un intervallo di  $\mathbb{R}$ .

Poter "misurare" la lunghezza dei vettori tangenti ci permette di definire la lunghezza di una curva su una varietà riemanniana, integrandone la velocità (in modulo).

**DEFINIZIONE 2.1.8.** Una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  di classe  $C^1$  a tratti è una funzione continua dall'intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  in  $M$ , derivabile con derivata continua eccetto al più un numero finito di punti interni in cui ne esistono finiti i limiti destro e sinistro. Denoteremo lo spazio di tali funzioni con  $C_S^1(I)$  o semplicemente, quando indicare l'intervallo  $I$  non è rilevante, con  $C_S^1$ .

**DEFINIZIONE 2.1.9.** Se  $\gamma : I \rightarrow M$  è una curva di classe  $C^1$  a tratti, definiamo la *lunghezza* di  $\gamma$  come

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_I |\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)} dt.$$

Se per ogni coppia di valori  $s \leq s' \in I$  si ha

$$\mathcal{L}(\gamma|_{[s,s']}) = \int_s^{s'} |\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)} dt = s' - s,$$

diremo che la curva è *parametrizzata in lunghezza d'arco*. Più in generale, se esiste  $c > 0$  tale che per ogni coppia di valori  $s \leq s' \in I$  si ha

$$\mathcal{L}(\gamma|_{[s,s']}) = \int_s^{s'} |\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)} dt = c(s' - s),$$

diremo che la curva è *parametrizzata proporzionalmente alla (sua) lunghezza d'arco*.

Si noti che se una curva di classe  $C^1$  a tratti è parametrizzata proporzionalmente alla sua lunghezza d'arco, il modulo della sua velocità è costante. In particolare, se è parametrizzata in lunghezza d'arco, tale costante è 1.

**ESERCIZIO 2.1.10.** Si mostri che la riparametrizzazione di una curva non ne cambia la lunghezza e che ogni curva  $C^1$  a tratti  $\gamma : I \rightarrow M$  regolare (cioè tale che  $\dot{\gamma}$  è sempre diversa da zero, dove esiste) può essere sempre riparametrizzata in lunghezza d'arco, eventualmente cambiando l'intervallo di definizione  $I$ .

**ESERCIZIO 2.1.11.** Tenendo presente (lo si provi) che una varietà differenziabile di dimensione 1 connessa è diffeomorfa a  $\mathbb{R}$  (se non compatta) o a  $\mathbb{S}^1$

(se compatta), si mostri che una varietà riemanniana di dimensione 1 è sempre isometrica a un intervallo aperto di  $\mathbb{R}$  o a una "omotetia" di  $\mathbb{S}^1$  (con la loro metrica naturale). Segue che in entrambi i due casi (topologici) l'unico invariante (riemanniano) è la lunghezza (eventualmente infinita) della curva.

**ESERCIZIO 2.1.12.** Si mostri che se  $f : M \rightarrow N$  è un'isometria tra due varietà riemanniane  $(M, g)$ ,  $(N, h)$  e  $\gamma : I \rightarrow M$  è una curva in  $M$ , allora  $\gamma$  e la curva  $f \circ \gamma : I \rightarrow N$  hanno la stessa lunghezza.

Per ogni coppia di punti  $p$  e  $q$  di una varietà riemanniana connessa  $(M, g)$ , definiamo la loro *distanza riemanniana* (o *geodetica*), che indicheremo con  $d(p, q)$ , come l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve  $C^1$  a tratti che congiungono  $p$  e  $q$ . Vedremo nel Teorema 4.3.3 che  $d$  è una distanza che rende  $(M, d)$  uno spazio metrico la cui topologia coincide con quella di  $M$  come varietà.

Il seguente teorema segue immediatamente dall'Esercizio 2.1.12.

**TEOREMA 2.1.13.** Se  $f : M \rightarrow N$  è un'isometria tra due varietà riemanniane allora  $f$  è un'isometria nel senso degli spazi metrici tra  $(M, d^M)$  e  $(N, d^N)$ , cioè  $f$  è un omeomorfismo e

$$d^M(p, q) = d^N(f(p), f(q)),$$

per ogni  $p, q \in M$ .

In realtà, vale anche l'inverso (si veda [160]).

**TEOREMA 2.1.14 (Myers–Steenrod).** Se  $f : M \rightarrow N$  è un'isometria nel senso degli spazi metrici tra  $(M, d^M)$  e  $(N, d^N)$ , con le distanze riemanniane  $d^M$  e  $d^N$  relative a  $(M, g)$  e  $(N, h)$ , allora  $f$  è un'isometria nel senso delle varietà riemanniane. In particolare,  $f$  risulta essere un diffeomorfismo di classe  $C^\infty$ .

**DEFINIZIONE 2.1.15.** Se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana orientata  $n$ -dimensionale, definiamo la *forma di volume canonica* di  $M$  come la  $n$ -forma di volume  $dV$  su  $M$  che in una carta coordinata orientata (cioè appartenente a un atlante orientato dell'orientazione di  $M$ ) è data da

$$dV = \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

dove con  $\det g_{ij}$  abbiamo denotato il determinante della matrice  $(g_{ij})$ .

Questa scelta di  $dV$  come forma canonica di volume di  $(M, g)$  segue dal richiedere che  $dV_p(e_1, \dots, e_n) = 1$  per ogni base ortonormale (orientata)  $\{e_i\}$  di  $T_p M$ , per ogni  $p \in M$ .

La forma  $dV$  è ben definita. Infatti, se  $(U, (x^1, \dots, x^n))$  e  $(W, (y^1, \dots, y^n))$  sono due carte orientate di  $M$  con  $U \cap W \neq \emptyset$ , si ha che

$$\begin{aligned} \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n &= \sqrt{\det g_{ij}} \det \left( \frac{\partial x^k}{\partial y^\alpha} \right) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \\ &= \sqrt{\det g_{ij} \det \left( \frac{\partial x^k}{\partial y^\alpha} \right)^2} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \\ &= \sqrt{\det \left( \frac{\partial x^k}{\partial y^\alpha} \right) \det g_{ij} \det \left( \frac{\partial x^k}{\partial y^\beta} \right)} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \\ &= \sqrt{\det \left( \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} g_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} \right)} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \\ &= \sqrt{\det g_{\alpha\beta}} dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \end{aligned}$$

in  $U \cap W$ .

**ESERCIZIO 2.1.16.** Si mostri che se  $f : M \rightarrow N$  è un'isometria tra due varietà riemanniane orientate, allora

$$dV^M = f^* dV^N \quad \text{oppure} \quad dV^M = -f^* dV^N,$$

a seconda che  $f$  sia un diffeomorfismo orientation-preserving o orientation-reversing.

Ovviamente l'insieme  $\text{Iso}_o(M)$  delle isometrie orientation-preserving di una varietà riemanniana orientata  $(M, g)$  in sé è un sottogruppo del gruppo  $\text{Iso}(M)$  delle isometrie, così come l'insieme  $\text{Diff}_o(M)$  dei diffeomorfismi orientation-preserving è un sottogruppo di  $\text{Diff}(M)$ , per una varietà differenziabile orientata  $M$ .

Introduciamo ora in una qualunque varietà riemanniana  $M$  di dimensione  $n$  una misura canonica, che nel caso in cui la varietà sia orientata è naturalmente legata alla forma di volume canonica. Diciamo che un sottoinsieme  $E \subseteq M$  è *misurabile* se, per ogni carta coordinata  $(U, \varphi)$  di  $M$ , si ha che  $\varphi(E \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n$  è misurabile secondo Lebesgue. Si verifica facilmente che la famiglia di tutti sottoinsiemi misurabili di  $M$  è una  $\sigma$ -algebra, che denotiamo con  $\mathcal{M}(M)$ . Segue che ogni aperto di  $M$  è misurabile, dunque la  $\sigma$ -algebra degli insiemi boreliani  $\mathcal{B}(M)$  di  $M$  è contenuta in  $\mathcal{M}(M)$ . Si noti che questa nozione di misurabilità dipende solo dalla struttura differenziale, mentre la misura canonica che è definita dal seguente teorema (si veda [106, Sezione 3.4]) è determinata dalla metrica riemanniana della varietà.

**TEOREMA 2.1.17.** Per ogni varietà riemanniana  $(M, g)$  esiste un'unica misura  $\mu_g$  sullo spazio misurabile  $(M, \mathcal{M}(M))$ , che chiameremo *misura canonica*, tale che in

ogni carta coordinata  $(U, \varphi)$ , si ha

$$\mu_g(A) = \int_{\varphi(A)} \sqrt{\det g_{ij}(\varphi^{-1}(x))} d\mathcal{L}^n(x),$$

per ogni insieme  $A \in \mathcal{M}(M)$  contenuto in  $U$ , dove  $\mathcal{L}^n$  è la misura di Lebesgue su  $\mathbb{R}^n$ . Inoltre valgono le seguenti proprietà:

- (1)  $\mu_g$  è completa,
- (2)  $\mu_g(K) < +\infty$  per ogni  $K$  compatto di  $M$ ,
- (3)  $\mu_g(V) > 0$  per ogni  $V$  aperto di  $M$  non vuoto,
- (4)  $\mu_g$  è regolare, cioè per ogni  $A \in \mathcal{M}(M)$  si ha

$$\begin{aligned} \mu_g(A) &= \sup \{ \mu_g(K) : K \subseteq M \text{ compatto contenuto in } A \} \\ \mu_g(A) &= \inf \{ \mu_g(V) : V \subseteq M \text{ aperto contenente } A \}, \end{aligned}$$

- (5) se  $E \in \mathcal{M}(M)$ , esistono  $A, B \in \mathcal{B}(M)$  tali che  $A \subseteq E \subseteq B$  e  $\mu_g(B - A) = 0$ .

Per l'approssimazione mediante funzioni semplici delle funzioni misurabili nonnegative, segue che se  $f$  è continua a supporto compatto contenuto in una carta  $(U, \varphi)$  si ha

$$\int_M f d\mu_g = \int_{\varphi(\text{supp } f)} f(\varphi^{-1}(x)) \sqrt{\det g_{ij}(\varphi^{-1}(x))} d\mathcal{L}^n(x),$$

dunque se  $f$  è continua a supporto compatto, una volta scelto un ricoprimento di  $M$  con carte coordinate  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ , per  $\alpha \in \mathcal{A}$  e una partizione dell'unità  $\rho_\alpha$  associata, vale

$$\int_M f d\mu_g = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{\varphi_\alpha(\text{supp } \rho_\alpha f)} \rho_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x)) f(\varphi_\alpha^{-1}(x)) \sqrt{\det g_{ij}(\varphi_\alpha^{-1}(x))} d\mathcal{L}^n(x).$$

È quindi ben definito l'integrale

$$\text{Vol}(A) = \mu_g(A) = \int_M \chi_A d\mu_g$$

per ogni insieme misurabile  $A \subseteq M$ , che chiameremo *volume riemanniano* di  $A$ .

**ESERCIZIO 2.1.18.** Si mostri che se  $f : M \rightarrow N$  è un'isometria tra due varietà riemanniane  $(M, g)$ ,  $(N, h)$  e  $A \subseteq M$  è un misurabile per la misura canonica di  $(M, g)$ , allora  $f(A)$  è un misurabile per la misura canonica di  $(N, h)$ , inoltre  $A$  e  $f(A)$  hanno lo stesso volume.

Segue che se esiste un'isometria tra due varietà riemanniane  $(M, g)$  e  $(N, h)$ , allora  $\text{Vol}(M) = \text{Vol}(N)$ , nel caso almeno una abbia volume finito.

**OSSERVAZIONE 2.1.19.** Nel caso in cui la varietà riemanniana  $(M, g)$  sia orientata e  $dV$  sia la sua forma canonica di volume, per ogni  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  continua a supporto compatto, una volta scelto un atlante orientato  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ , per  $\alpha \in \mathcal{A}$  e

una partizione dell'unità  $\rho_\alpha$  associata, possiamo definire il funzionale lineare e positivo

$$\Omega(f) = \int_M f dV = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} \int_{\varphi_\alpha(\text{supp } \rho_\alpha f)} \rho_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x)) f(\varphi_\alpha^{-1}(x)) \sqrt{\det g_{ij}(\varphi_\alpha^{-1}(x))} d\mathcal{L}^n,$$

sullo spazio  $C_c(M)$  delle funzioni continue a supporto compatto su  $M$ . Si dimostra che  $\Omega(f)$  non dipende né dall'atlante orientato scelto, né dalla partizione dell'unità. Per il *teorema di rappresentazione di Riesz* (si veda [176]), esiste allora una  $\sigma$ -algebra  $\widetilde{\mathcal{M}}(M)$  su  $M$  che contiene  $\mathcal{B}(M)$  ed esiste un'unica misura  $\widetilde{\mu}_g$  su  $(M, \widetilde{\mathcal{M}}(M))$  che rappresenta  $\Omega$ , cioè tale che  $\Omega(f) = \int_M f d\widetilde{\mu}_g$  per ogni  $f \in C_c(M)$  e che soddisfa le proprietà (1)–(5) del Teorema 2.1.17.

Si vede allora facilmente (lo si provi per esercizio) che i due spazi di misura  $(M, \mathcal{M}(M), \mu_g)$  e  $(M, \widetilde{\mathcal{M}}(M), \widetilde{\mu}_g)$  coincidono, in particolare  $\widetilde{\mu}_g = \mu_g$ . Cioè, in altre parole, integrare una funzione  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  rispetto alla misura canonica  $\mu_g$  coincide con l'integrare la forma  $f dV$  su  $M$ , come descritto nella Sezione 1.4, dopo la Proposizione 1.4.18.

## 2.2. Sottovarietà riemanniane

**DEFINIZIONE 2.2.1.** Diremo che un'immersione  $f : N \rightarrow M$  tra due varietà riemanniane  $(N, h)$  e  $(M, g)$  è *isometrica* (o *riemanniana*) se  $f$  è un'isometria in ogni punto di  $N$ , equivalentemente se  $f^*g = h$ .

Data una sommersione  $f : N \rightarrow M$  tra due varietà differenziabili, per ogni  $p \in N$  un qualunque sottospazio vettoriale complementare a  $\ker df_p \subseteq T_p N$  è isomorfo a  $T_{f(p)} M$ . In generale non c'è una scelta canonica ma, se  $N$  è munita di una metrica riemanniana  $h$ , il prodotto scalare  $h_p$  permette di scegliere canonicamente come complementare il sottospazio ortogonale a  $\ker df_p$ , che denoteremo con  $H_p$  e che chiameremo *sottospazio orizzontale* di  $T_p N$  (talvolta  $\ker df_p$  verrà detto *sottospazio verticale*).

**DEFINIZIONE 2.2.2.** Diremo che una sommersione  $f : N \rightarrow M$  tra due varietà riemanniane  $(N, h)$  e  $(M, g)$  è *isometrica* (o *riemanniana*) se  $df_p$  è un'isometria lineare in ogni punto  $p \in N$  tra  $H_p$  e  $T_{f(p)} M$ .

**DEFINIZIONE 2.2.3.** Una *sottovarietà riemanniana (regolare)*  $(S, h)$  di una varietà riemanniana  $(M, g)$  è una sottovarietà differenziabile  $S$  di  $M$  dotata di una metrica riemanniana  $h$ , rispetto alla quale l'inclusione  $\iota : S \hookrightarrow M$  sia un'isometria in ogni punto di  $S$  (cioè  $\iota^*g = h$ ).

Una *sottovarietà immersa riemanniana* di una varietà riemanniana  $(M, g)$  è una sottovarietà immersa  $f(S)$  di  $M$ , data da un'immersione iniettiva  $f : S \rightarrow M$  di una varietà riemanniana  $(S, h)$  tale che sia un'isometria in ogni punto di  $S$  (cioè  $f^*g = h$ ).

Se abbiamo un'immersione  $f : S \rightarrow M$  di una varietà differenziabile  $S$  (senza una struttura riemanniana, cioè una metrica, su di essa) in una varietà riemanniana  $(M, g)$ , la 2-forma  $h = f^*g$  è banalmente un elemento di  $\mathcal{S}^2S$  e, sfruttando il fatto che  $f$  è un'immersione, risulta essere una metrica su  $S$ . Tale metrica, detta *metrica indotta* su  $S$ , rende  $(S, h)$  una varietà riemanniana e la mappa  $f$  un'isometria in ogni punto di  $S$ . In particolare se  $f$  è anche iniettiva,  $f(S)$  è una sottovarietà immersa riemanniana e, se  $f$  è l'embedding dato dall'inclusione  $\iota : S \hookrightarrow M$ , la varietà  $(S, h)$  è una sottovarietà riemanniana.

Si noti che in quest'ultimo caso la metrica indotta  $h = \iota^*g$  su  $S$  non è altro che la restrizione del tensore metrico  $g$  di  $M$  ai sottospazi vettoriali  $T_pS$  di  $T_pM$ . Infatti, per ogni  $p \in S$  (per l'identificazione fatta nella Sezione 1.6) si ha  $h_p(v, w) = g_p(\iota_*v, \iota_*w) = g_p(v, w)$ , per ogni coppia di vettori  $v, w \in T_pS$ . Analogamente, per un'immersione (iniettiva o meno)  $f : S \rightarrow M$ , la metrica indotta  $h = f^*g$  su  $S$  è la restrizione del tensore metrico  $g$  di  $M$  ai sottospazi vettoriali  $T_pS$  di  $T_{f(p)}M$ , per ogni  $p \in S$  (sempre per l'identificazione della Sezione 1.6 e l'Osservazione 1.6.9), dunque, in particolare, ciò vale per una sottovarietà immersa riemanniana.

Un importante caso speciale è una sottovarietà di  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  (per esempio un'ipersuperficie ottenuta come controimmagine di un valore regolare di una funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ), dove per ogni  $p \in S$  lo spazio tangente  $T_pS$  a  $S$  in  $p$  si identifica con un sottospazio vettoriale di  $\mathbb{R}^n$  e la metrica indotta è la restrizione del prodotto scalare di  $\mathbb{R}^n$  a tale sottospazio (che nel caso di un'ipersuperficie ottenuta come sopra, è l'iperpiano  $\ker df_p = \nabla f_p^\perp$ ). Usando il teorema di Whitney 1.6.16, abbiamo dunque un secondo modo di mettere una metrica riemanniana su una varietà differenziabile  $M$  (cioè di dimostrare il Teorema 2.1.3): avendo un embedding di  $M$  in uno spazio euclideo, possiamo allora considerare su  $M$  la metrica indotta dall'ambiente.

Il teorema di Whitney 1.6.16 ha un'importante versione riemanniana, dovuta a John F. Nash (si veda [230] e anche [155]).

**TEOREMA 2.2.4** (Teorema di immersione di Nash – 1956). *Ogni varietà riemanniana ha un embedding isometrico in  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$  per  $n$  abbastanza grande.*

Per mezzo di tale teorema, si potrebbe allora studiare la geometria delle varietà riemanniane vedendole tutte come sottovarietà degli spazi euclidei. Va comunque sottolineato che sono da tenere ben distinte le proprietà *intrinseche* (invarianti per isometria) di tali varietà riemanniane e quelle *estrinseche*, legate all'embedding isometrico (non ve n'è uno "canonico", in particolare quello fornito dal teorema di Nash non lo è, dunque tali proprietà variano a seconda dell'embedding). Queste ultime sono infatti, in un certo senso, dovute "all'interazione" della sottovarietà con lo spazio "ambiente" e sono "estranee" alla struttura riemanniana della sottovarietà astratta. Ad esempio, abbiamo visto negli

esercizi 2.1.7 e 2.1.11 che la geometria delle varietà riemanniane unidimensionali è banale, mentre la geometria delle curve negli spazi euclidei è molto ricca, si pensi al fatto che due curve del piano sono sempre localmente isometriche, ma tale isometria non è in generale la restrizione di un'isometria di  $\mathbb{R}^2$ . È infatti ben noto che le curve nel piano sono classificate, a meno di isometrie dell'ambiente, dalla loro *curvatura* (si veda [1, Capitolo 1] e anche le parti iniziali delle Sezioni 7.5 e 7.6), che definiremo nel Capitolo 7 (Esempio 7.2.3) che però non ha nulla a che vedere con la *curvatura riemanniana* che vedremo nel Capitolo 5, in particolare, per le curve quest'ultima è identicamente nulla (Esempio 5.1.4).

### 2.3. Esempi

ESEMPIO 2.3.1 (Sfere). Applicando quanto detto sopra, se consideriamo la funzione  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $f(x) = |x|^2$ , la sfera unitaria  $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x|^2 = 1\} = f^{-1}(1)$  (1 è un valore regolare per la funzione  $f$ ) con la metrica indotta  $g_{\text{eucl}}$  da  $\mathbb{R}^{n+1}$  diventa la varietà riemanniana  $(\mathbb{S}^n, g_{\text{can}})$ .

Più in generale, la sfera  $S = \mathbb{S}_R^n$  di  $\mathbb{R}^{n+1}$  centrata nell'origine e di raggio  $R > 0$  è data da  $f^{-1}(R^2)$ . Denotando con  $\iota : S \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  la sua inclusione in  $\mathbb{R}^{n+1}$ , abbiamo su  $S$  la metrica indotta  $g^R = \iota^* g_{\text{eucl}}$ .

Sia  $p = (p^1, \dots, p^{n+1}) \in S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  e tramite  $d\iota_p$  immergiamo  $T_p S$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$  ottenendo, per quanto detto sopra,

$$T_p S \simeq \ker df_p = \left\{ v \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} p^i v^i = 0 \right\}.$$

Adottando l'identificazione qui sopra, il prodotto scalare di  $v, w \in T_p S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  è semplicemente  $g(v, w) = \sum_{i=1}^{n+1} v^i w^i$ , ossia è il prodotto scalare di  $\mathbb{R}^{n+1}$  ristretto all'iperpiano tangente alla sfera. Se si vogliono fare i conti in coordinate locali, è comodo utilizzare l'atlante dato dalle proiezioni stereografiche. Per semplicità, faremo solo i conti utilizzando la proiezione  $\pi^N : S \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$  dal polo Nord  $N = (0, \dots, 0, R) \in S$ . Nelle coordinate  $x_N = (x_N^\alpha) \in \mathbb{R}^n$  su  $S$  date da  $\pi^N$  la mappa inclusione  $\iota : S \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  si scrive come

$$x^1 = \frac{2R^2 x_N^1}{|x_N|^2 + R^2}, \quad \dots, \quad x^n = \frac{2R^2 x_N^n}{|x_N|^2 + R^2}, \quad x^{n+1} = R \frac{|x_N|^2 - R^2}{|x_N|^2 + R^2}.$$

Da qui a fine esempio, gli indici latini prendono valore da 1 a  $n+1$ , quelli greci da 1 a  $n$ .

Avendo l'espressione locale in coordinate di  $\iota$ , possiamo scrivere la metrica  $g^R$

su  $S$  in coordinate locali (si tenga presente l'Osservazione 1.2.5),

$$\begin{aligned} g^R &= \iota^*(\delta_{ij} dx^i \otimes dx^j) = \sum_{i=1}^{n+1} \iota^* dx^i \otimes \iota^* dx^i = \sum_{i=1}^{n+1} \left( \frac{\partial x^i}{\partial x_N^\alpha} dx_N^\alpha \right) \otimes \left( \frac{\partial x^i}{\partial x_N^\beta} dx_N^\beta \right) \\ &= \frac{4R^4}{(R^2 + |x_N|^2)^2} \sum_{\alpha=1}^n dx_N^\alpha \otimes dx_N^\alpha, \end{aligned}$$

dopo alcuni calcoli (li si svolga per esercizio). Quindi scrivendo  $g^R = g_{\alpha\beta}^R dx_N^\alpha \otimes dx_N^\beta$ , abbiamo

$$g_{\alpha\beta}^R = \frac{4R^4}{(|x_N|^2 + R^2)^2} \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.1)$$

Osserviamo allora che la metrica indotta sulla sfera  $S$  privata di un polo (che topologicamente è uno spazio omeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ ) è un cambio conforme della metrica euclidea di  $\mathbb{R}^n$  (è ben noto che la proiezione stereografica è un'applicazione *conforme*, cioè che mantiene gli angoli). Inoltre, notiamo che la varietà  $(\mathbb{S}_R^n, g^R)$  è isometrica a  $(\mathbb{S}^n, R^2 g_{\text{can}})$ .

**ESEMPIO 2.3.2 (Spazio iperbolico).** Consideriamo il semispazio di  $\mathbb{R}^n$ ,

$$H^n = \{(x^1, \dots, x^n) : x^n > 0\}$$

e dotiamolo della metrica

$$g^c = \frac{c^2}{(x^n)^2} g_{\text{eucl}} = \frac{c^2}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i,$$

dove  $c > 0$  è una costante fissata. La varietà riemanniana così costruita (detta *modello del semispazio*) è denotata con  $(\mathbb{H}_c^n, g^c)$  e prende il nome di *spazio iperbolico (di curvatura negativa  $-1/c^2$ )*. Se  $c = 1$ , chiamiamo semplicemente *spazio iperbolico* tale varietà e scriviamo  $\mathbb{H}^n$  con la metrica

$$g_{\text{can}} = \frac{1}{(x^n)^2} g_{\text{eucl}} = \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i. \quad (2.2)$$

Si osservi che la varietà  $(\mathbb{H}_c^n, g^c)$  è isometrica a  $(\mathbb{H}^n, c^2 g_{\text{can}})$  e che tutte le metriche  $g^c$  sono conformi alla metrica euclidea su  $H^n \subseteq \mathbb{R}^n$ .



Jules Henri Poincaré, 1854–1912

Ci sono altri “modelli” per lo spazio iperbolico, ossia varietà riemanniane  $(M, g)$  isometriche a  $(\mathbb{H}_c^n, g^c)$ , ciascuna delle quali si ottiene costruendo un diffeomorfismo  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{H}_c^n$  e ponendo su  $M$  la metrica  $g = \varphi^* g^c$ .

Vediamo il più celebre di questi modelli: il *disco di Poincaré*. Sia

$$D_c^n = \left\{ (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (y^i)^2 < c^2 \right\}$$

cioè la palla aperta di  $\mathbb{R}^n$  di raggio  $c$  e consideriamo la mappa

$$\varphi : D_c^n \rightarrow \mathbb{H}_c^n$$

descritta in coordinate da

$$x^1 = \frac{2c^2 y^1}{\sum_{i=1}^{n-1} (y^i)^2 + (y^n - c)^2}$$

...

$$x^{n-1} = \frac{2c^2 y^{n-1}}{\sum_{i=1}^{n-1} (y^i)^2 + (y^n - c)^2}$$

$$x^n = c \frac{c^2 - \sum_{i=1}^n (y^i)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} (y^i)^2 + (y^n - c)^2}.$$

Tale funzione è un diffeomorfismo, con inversa data da

$$y^1 = \frac{2c^2 x^1}{\sum_{i=1}^n (x^i)^2 + 2cx^n + c^2}$$

...

$$y^{n-1} = \frac{2c^2 x^{n-1}}{\sum_{i=1}^n (x^i)^2 + 2cx^n + c^2}$$

$$y^n = c \frac{\sum_{i=1}^n (x^i)^2 - c^2}{\sum_{i=1}^n (x^i)^2 + 2cx^n + c^2}.$$

Segue che  $(D_c^n, g)$  è isometrico a  $(\mathbb{H}_c^n, g^c)$  dove

$$g = \varphi^* g^c = \frac{4c^4}{\left(c^2 - \sum_{i=1}^n (y^i)^2\right)^2} \sum_{i=1}^n dy^i \otimes dy^i$$

dunque, anche in questo modello la metrica è conforme a quella euclidea nel disco  $D_c^n$ .

Un terzo modello isometrico a  $(\mathbb{H}_c^n, g^c)$  (detto *di Minkowski* o *dell'iperboloide*) è dato dall'iperboloide

$$Y_c^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : (x^{n+1})^2 - \sum_{i=1}^n (x^i)^2 = c^2, x^{n+1} > 0 \right\},$$

dotato della metrica ottenuta restringendo la forma bilineare (*metrica di Minkowski*)

$$dx^1 \otimes dx^1 + \cdots + dx^n \otimes dx^n - dx^{n+1} \otimes dx^{n+1}$$

su  $\mathbb{R}^{n+1}$  ai suoi spazi tangenti (si mostri che tale restrizione è una forma bilineare definita positiva su tutti gli spazi tangenti a  $Y_c^n$ ). Si veda [2, Proposizione 6.5.26] per la dimostrazione che tale modello è isometrico allo spazio iperbolico.

Infine, menzioniamo anche il *modello di Klein* (o *di Klein–Beltrami*, in quanto tale spazio era stato introdotto da Beltrami nel 1868 e studiato immediatamente dopo da Klein), dato da una metrica *non conforme* a quella euclidea sempre sul disco unitario di  $\mathbb{R}^n$ , per il quale rimandiamo il lettore a [209] e la cui importanza verrà descritta nella nota storica che segue.

**NOTA STORICA.** Lo spazio iperbolico, che come vedremo nell'Esempio 5.5.5 ha curvatura costante uguale a  $-1$ , è stato storicamente estremamente rilevante nella discussione sul *quinto postulato di Euclide* (in particolare sulla sua possibile deduzione o indipendenza dai primi quattro) e nello sviluppo delle *geometrie non euclidee*. Infatti, fornisce un esempio (come mostreremo nell'Esempio 5.5.5 e nell'Osservazione 5.5.6 – si veda anche l'Esercizio 5.5.7) di spazio dove per un punto esterno ad una retta passano più rette “parallele”, in contraddizione col quinto postulato che è equivalente all'esistenza e unicità della retta “parallela” (cioè che non incontra mai la retta data) per un punto esterno. Anche sulla sfera si ha una contraddizione, perché le “rette” sono i cerchi massimi, che si incontrano tutti, dunque *non* vi sono rette “parallele”; tuttavia in questo caso la limitatezza delle “rette”, confliggendo col secondo postulato di Euclide, non ne faceva un esempio accettabile per concludere l'indipendenza del quinto dai primi quattro. Girolamo Saccheri (1667–1773) [218], chiarì la questione e ridusse il problema a cercare (o a escluderne l'esistenza, come tentò senza successo, ovviamente) un eventuale esempio con più rette “parallele”, esempio che, in ultima analisi, concluse non poteva esistere in quanto “ripugnante alla natura della retta”. Il primo a ipotizzare esplicitamente la possibilità di tale indipendenza fu Georg Klügel (1739–1812) [217], in una dissertazione del 1763.

Lo stesso Gauss (1777–1855), senza però pubblicare nulla ma discutendone solo in corrispondenze private con altri matematici (alcuni suoi scritti al riguardo furono resi pubblici solo dopo la sua morte), si era convinto della possibilità di geometrie non euclidee (iperboliche) e ne aveva successivamente sviluppato la teoria che fu poi ottenuta indipendentemente e pubblicata per primo da János Bolyai (1802–1860) [223] nel 1832. La concezione apparentemente indubitabile al tempo era il punto di vista kantiano della geometria euclidea come indiscutibilmente “data a priori”, legata alla nostra percezione dello spazio in cui viviamo. In realtà invece non solo la matematica moderna è totalmente astratta e assiomatica dunque in quanto tale, dal punto di vista logico, completamente scorrelata dall’osservazione concreta, ma all’estremo opposto rispetto alle convinzioni di Kant (1724–1804), con le conferme sperimentali della teoria della relatività di Einstein, la fisica ha da tempo concluso che lo spazio è curvo in presenza di massa, non euclideo. Si può anche ragionevolmente ipotizzare che Gauss probabilmente non lo escludesse: se quando misurò la somma degli angoli di triangoli “molto grossi” (con vertici cime di montagne) avesse trovato un risultato diverso da 180 gradi (tenendo presente l’errore dovuto agli strumenti dell’epoca), ciò avrebbe inficiato l’aprioristica “concezione euclidea” dello spazio. Analogamente e indipendentemente da Gauss e Bolyai, anche Nikolai Lobachevsky (1792–1856) [231] arrivò alle stesse conclusioni che pubblicò in vari scritti di grande chiarezza logica-matematica, tra il 1826 e il 1840. Anche lui, come Gauss, era infatti molto critico della visione kantiana e discusse esplicitamente la possibilità che lo spazio non fosse euclideo, proponendo degli esperimenti concreti per cercare di stabilirlo. Come temuto da Gauss (cosa che lo spinse a non rendere pubbliche le proprie conclusioni), tali lavori vennero duramente criticati (e Lobachevsky accusato di plagio), sebbene invece Gauss li apprezzasse considerevolmente. A questo punto, per chiudere la questione mancava solo “realizzare un modello” il più esplicito e concreto possibile di uno spazio non euclideo in cui il quinto postulato non valesse, dimostrando così la “coerenza” di un sistema formale (una “geometria”) in cui tale postulato era negato. Felix Klein (1849–1925) [216] esibì nel 1871 un tale modello astratto, sorprendentemente semplice, il sopracitato *modello di Klein* [209] che dunque “chiudeva” la più che millenaria discussione sull’indipendenza logica del quinto postulato dagli altri (dando ragione a Euclide), ma che aveva il difetto di non essere “realizzabile” come una superficie nello spazio euclideo  $\mathbb{R}^3$  (vi erano anche altri “difetti” geometrici legati alle lunghezze e agli angoli). Eugenio Beltrami (1835–1900) [215] nel 1868 descrisse infine la *pseudosfera* (introdotta qualche anno prima da Ferdinand Minding (1806–1885) e che vedremo nell’Esempio 2.3.16), che è una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , dunque “concretamente” costruibile, che (sfortunatamente solo) localmente ha le proprietà del piano iperbolico, quindi ne rappresenta un modello locale esplicito e visualizzabile nello spazio

dove viviamo (segue che ha curvatura costante  $-1$ , per l'Esempio 5.5.5). L'unico neo della pseudosfera è che non ha la topologia di un piano e i tentativi di "correggere" tale difetto erano destinati a fallire, in quanto per un teorema di Hilbert (1862–1943) del 1901 [119] (si vedano [83, 221]), il piano iperbolico  $\mathbb{H}^2$  non si può immergere, cioè "realizzare" come una superficie in  $\mathbb{R}^3$ . I tempi erano comunque ormai maturi per la piena accettazione e l'approfondito studio successivo, che continua ancora oggi, dello spazio iperbolico astratto e della geometria non euclidea iperbolica, in particolare, dopo la descrizione da parte di Poincaré (1854–1912), circa nel 1880, dei modelli visti sopra.

Rimandiamo il lettore interessato ad approfondire l'argomento al bellissimo libro di Silvia Benvenuti [28] (da cui viene gran parte di questa nota), per una dettagliata presentazione storica, tecnicamente rigorosa, della discussione sulla geometrie non euclidee, nonché di come tale discussione abbia in molteplici occasioni influenzato l'arte e il pensiero scientifico, sociale e filosofico.

**OSSERVAZIONE 2.3.3.** Vedremo che gli spazi  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{S}^n$  e  $\mathbb{H}^n$  con le metriche canoniche viste sopra (che talvolta vengono chiamati *space forms*) sono le uniche varietà riemanniane complete, semplicemente connesse e a curvatura costante, uguale a  $0$ ,  $+1$ ,  $-1$ , rispettivamente (Teorema 9.1.1), inoltre, eventualmente riscalandone la metrica, sono i *rivestimenti universali riemanniani* (si veda la Definizione 2.3.12) di tutte le varietà riemanniane complete, connesse e a curvatura costante. Notiamo anche che sono tutti e tre *omogenei* e *isotropi*, nel senso che scelta qualunque coppia di loro punti  $p, q$  e due basi ortonormali  $\{e_i\}$ ,  $\{e'_i\}$  dei relativi spazi tangenti in  $p$  e  $q$ , esiste sempre un'isometria  $f$  tale che  $f(p) = q$  e  $df_p(e_i) = e'_i$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Ciò è facile da mostrare per  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{S}^n$ , per quanto riguarda  $\mathbb{H}^n$  si veda [92, Esempio 1.101–(f)] o lo si provi per esercizio.

**ESEMPIO 2.3.4 (Prodotti).** Data una coppia di varietà riemanniane  $(M, g)$  e  $(N, h)$ , sulla varietà prodotto  $M \times N$  possiamo considerare la *metrica prodotto*  $g \times h$ , definita da

$$(g \times h)_{(p,q)}(v, w) = g_p(v^M, w^M) + h_q(v^N, w^N),$$

per ogni  $(p, q) \in M \times N$  e  $v, w \in T_{(p,q)}M \times N$ , dove  $v^M$  e  $v^N$  sono le "componenti" di  $v$  in  $T_pM$  e  $T_qN$ , analogamente per  $w$  (ricordiamo che per ogni punto  $(p, q) \in M \times N$  si ha  $T_{(p,q)}M \times N \approx T_pM \oplus T_qN$ ). Per la formula sopra, con un piccolo abuso di notazione, la metrica prodotto è spesso indicata anche con  $g + h$

Per esempio, sul toro  $n$ -dimensionale  $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ , prodotto di  $n$  copie di  $\mathbb{S}^1$ , possiamo considerare la metrica prodotto  $d\theta_1^2 \times \dots \times d\theta_n^2$ , ottenuta dal produrre  $n$ -volte con se stessa la metrica canonica  $d\theta^2 = d\theta_1^2 = \dots = d\theta_n^2$  di  $\mathbb{S}^1$ . Un altro esempio è dato dalla metrica prodotto  $dt^2 + R^2 d\theta^2$  su  $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ , con  $dt^2$  la metrica canonica su  $\mathbb{R}$  e  $R$  una costante positiva, che produce il cilindro (infinito) di raggio  $R$  (si provi per esercizio che è isometrico all'usuale cilindro di raggio  $R$  in  $\mathbb{R}^3$ , con la metrica indotta).

Una costruzione più elaborata (che generalizza il prodotto di due varietà riemanniane) è data dal cosiddetto *prodotto warped* di due varietà  $(M, g)$  e  $(N, h)$ . Stavolta, sulla varietà prodotto consideriamo la *metrica warped*  $g \times h$  (o più precisamente,  $g \times^f h$  e parliamo del *prodotto warped di  $N$  su  $M$  per mezzo della funzione  $f$ , detta funzione di warping*), definita da

$$(g \times h)_{(p,q)}(v, w) = g_p(v^M, w^M) + f(p)h_q(v^N, w^N),$$

dove  $f \in C^\infty(M)$  è una funzione positiva (nelle stesse notazioni di cui sopra). In particolare, un caso importante è quando  $M$  è un intervallo aperto  $I \subseteq \mathbb{R}$  e  $g = g_{\text{eucl}}$  è la sua metrica euclidea canonica. Si ha allora su  $I \times N$  una metrica warped  $g_{\text{eucl}} \times h = g_{\text{eucl}} + fh$ , che in coordinate ( $r$  su  $\mathbb{R}$  e  $x$  su  $N$ ) possiamo scrivere

$$dr^2 + f(r)h_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j,$$

per ogni funzione positiva  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (per approfondire l'argomento, si veda il libro di Petersen [168]).

**ESERCIZIO 2.3.5.** Presa una curva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  nel piano parametrizzata in lunghezza d'arco, data da  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  e tale che  $y(t) > 0$  per ogni  $t \in I$ , possiamo considerare la *superficie di rotazione* (detta anche *di rivoluzione*)  $S$  che si genera nello spazio  $\mathbb{R}^3$ , facendo ruotare  $\gamma$  attorno all'asse delle ascisse, con la metrica indotta da  $\mathbb{R}^3$ . Si mostri che  $S$  è isometrica a un prodotto warped di  $\mathbb{S}^1$  sull'intervallo  $I$  e se ne scriva la metrica warped.

**ESERCIZIO 2.3.6.** Si consideri la superficie  $(S, g)$  prodotto warped di  $\mathbb{S}^1$  su un intervallo aperto  $I$ , con la metrica

$$g = dr^2 + f^2(r) d\theta^2,$$

dove  $f \in C^\infty(I)$  è una funzione positiva (tali superfici si dicono *rotazionalmente simmetriche*). Si trovino condizioni sulla funzione  $f$  affinché  $(S, g)$  sia isometrica a una superficie di rotazione come nell'esercizio precedente.

**ESERCIZIO 2.3.7.** Si mostri che se  $I = (0, +\infty)$  e  $f(r) = r^2$ , il prodotto warped di  $\mathbb{S}^{n-1}$  (con la sua metrica canonica  $g_{\text{can}}$ ) su  $I$ , che dunque è una metrica warped sul "cilindro topologico/differenziale"  $I \times \mathbb{S}^{n-1}$  data da

$$g = dr^2 + r^2 g_{\text{can}},$$

che lo rende isometrico a  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  con la metrica euclidea  $g_{\text{eucl}}$ .

In particolare, se  $n = 2$  si ha  $g = dr^2 + r^2 d\theta^2$ , con  $d\theta^2$  la metrica canonica di  $\mathbb{S}^1$  (si veda l'Esempio 2.1.2).

**ESERCIZIO 2.3.8.** Si mostri che se  $I = (0, \pi)$  e  $f(r) = \sin^2 r$ , il prodotto warped di  $\mathbb{S}^{n-1}$  su  $I$ , con la metrica

$$g = dr^2 + \sin^2 r g_{\text{can}},$$

è una varietà isometrica alla sfera  $\mathbb{S}^n$  con la sua metrica canonica  $g_{\text{can}}$ , senza due punti antipodali.

ESERCIZIO 2.3.9. Si mostri che se  $I = (0, +\infty)$  e  $f(r) = \sinh^2 r$ , il prodotto warped di  $\mathbb{S}^{n-1}$  su  $I$ , con la metrica

$$g = dr^2 + \sinh^2 r g_{\text{can}},$$

è una varietà isometrica a  $\mathbb{H}^n$  privato di un punto, con la sua metrica canonica vista sopra.

In conclusione, le space forms  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{S}^n$  e  $\mathbb{H}^n$ , a meno di uno o due loro punti, possono essere descritte come prodotti warped.

ESERCIZIO 2.3.10. Si mostri che la mappa di proiezione da un prodotto warped  $M \times N$ , con la metrica  $g \times^f h$ , su  $M$  è una sommersione riemanniana e si noti che se la funzione di warping  $f$  non è costante, le fibre non sono tutte isometriche tra loro, cosa invece vera per una metrica prodotto  $g \times h$ .

ESEMPIO 2.3.11 (Rivestimenti riemanniani).

DEFINIZIONE 2.3.12. Un *rivestimento riemanniano*  $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \rightarrow (M, g)$  è un rivestimento differenziale  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  tale che la mappa  $\pi$  è un'isometria locale.

La definizione implica che per ogni punto  $p \in M$ , se  $U \subseteq M$  è un suo intorno aperto tale che  $\pi : \widetilde{U}_i \rightarrow U$  è un diffeomorfismo per ogni aperto della famiglia  $\{\widetilde{U}_i\}$  la cui unione è  $\pi^{-1}(U) \subseteq \widetilde{M}$ , la mappa  $\pi : \widetilde{U}_i \rightarrow U$  è un'isometria.

Segue che se  $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$  è un rivestimento differenziale e abbiamo una metrica  $g$  su  $M$ , la si può sollevare (unicamente) a una metrica  $\widetilde{g} = \pi^*g$  su  $\widetilde{M}$  tale che gli automorfismi di rivestimento siano isometrie di  $\widetilde{M}$  in sé e  $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \rightarrow (M, g)$  sia un rivestimento riemanniano (la mappa  $\pi$  sia un'isometria locale). Viceversa, se abbiamo una metrica  $\widetilde{g}$  su  $\widetilde{M}$  tale che gli automorfismi di rivestimento siano un gruppo di isometrie che agisce transitivamente sui punti delle fibre (il rivestimento si dice allora *normale* o *regolare*), possiamo considerare la metrica  $g = \pi_*\widetilde{g}$  su  $M$  che rende  $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \rightarrow (M, g)$  un rivestimento riemanniano.

Un esempio è il rivestimento a due fogli  $\pi : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{RP}^n$  che, considerando su  $\mathbb{S}^n$  la sua metrica canonica, fornisce una metrica (canonica) su  $\mathbb{RP}^n$ . Un altro esempio è dato dal toro  $\mathbb{T}^n$  che può essere rivestito (in più modi) in senso riemanniano da  $\mathbb{R}^n$ , considerando su di esso la metrica immagine di quella ("piatta") canonica di  $\mathbb{R}^n$  (dunque anch'esso è localmente "piatto" – vedremo successivamente nel dettaglio questo concetto di "piattezza", per ora solo intuitivo). Si veda [92, Sezioni 2.22–2.24], per un'analisi approfondita dei possibili rivestimenti  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , che producono tori "piatti" non isometrici tra loro.

ESERCIZIO 2.3.13. Si mostri che  $\mathbb{R}^2$  riveste in senso riemanniano la *bottiglia di Klein* (si veda [226]), inducendo su di essa una metrica "piatta" (come sopra per  $\mathbb{T}^2$ ) e si descriva la mappa di proiezione ([92, Sezione 2.25]).

OSSERVAZIONE 2.3.14. Se  $n$  è pari, l'unico spazio che ha come rivestimento universale riemanniano la sfera  $\mathbb{S}^n$  con la sua metrica canonica (oltre alla sfera stessa), è lo spazio proiettivo  $\mathbb{R}P^n$  (lo si dimostri tenendo presente che ogni elemento di  $SO(n+1)$  ha un punto fisso). Se  $n$  è dispari invece ci sono molti più spazi, per esempio se  $n = 3$ , gli *spazi lenticolari* (si veda [235], per esempio). La classificazione di tali spazi è comunque completa, si veda [243] e la discussione dopo il Teorema 9.1.1.

ESERCIZIO 2.3.15 (Catenoide e elicoide). Sia  $C \subseteq \mathbb{R}^3$  una *catenoide*, cioè la superficie generata dalla rotazione della curva di equazione  $y = \cosh x$  attorno all'asse delle ascisse (detta *catenaria*, in quanto descrive il profilo che assume una catena sospesa agli estremi, si veda [17] per esempio) e sia  $H \subseteq \mathbb{R}^3$  un'*elicoide*, generata dalle rette parallele al piano  $xy$  che intersecano sia l'asse  $z$  che l'elica  $t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ . Si mostri che sia  $C$  che  $H$  sono sottovarietà di  $\mathbb{R}^3$  e se ne descrivano delle parametrizzazioni naturali. Si dia l'espressione delle metriche indotte su di esse dalla metrica euclidea e si provi che sono due varietà riemanniane localmente isometriche (ma non globalmente). Da questo esercizio segue che elicoide e catenoide sono localmente la stessa varietà dal punto di vista riemanniano, cosa che non si vede dai loro embedding in  $\mathbb{R}^3$ . Per esempio, l'elicoide è una superficie *rigata* per costruzione, mentre la catenoide non contiene alcuna retta di  $\mathbb{R}^3$ . Inoltre, le isometrie locali tra  $C$  e  $H$  non vengono da isometrie dello spazio ambiente.

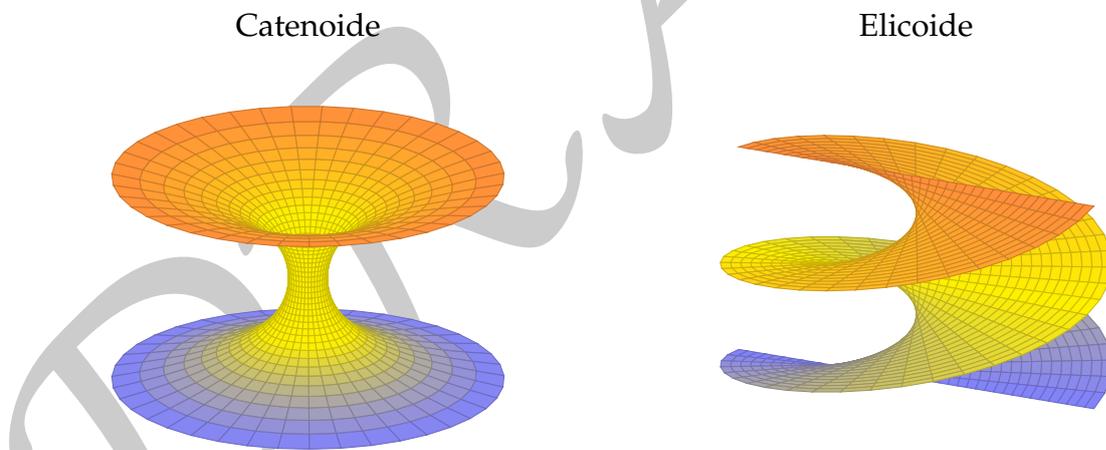


FIGURA 2.1

ESEMPIO 2.3.16 (Pseudosfera). Sia  $P \subseteq \mathbb{R}^3$  la superficie generata dalla rotazione della curva di equazione  $x \mapsto (x - \tanh x, 1/\cosh x)$ , per  $x \in (0, +\infty)$ , attorno all'asse delle ascisse, detta *pseudosfera* (esibita da Eugenio Beltrami [215]

nel 1868, che ha giocato un ruolo nella discussione sulle geometrie non euclidee – si veda la nota storica nell'Esempio 2.3.2). Si mostri, per esercizio, che  $P$  è localmente isometrica al piano iperbolico  $(\mathbb{H}^2, g_{\text{can}})$ , con la sua metrica canonica.

Pseudosfera

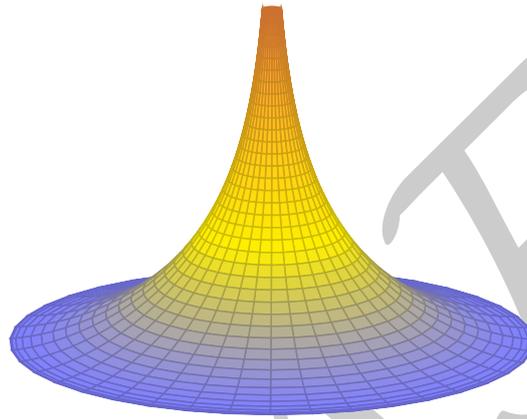


FIGURA 2.2

ESEMPIO 2.3.17 (Spazi proiettivi complessi – Metrica di Fubini–Study). Consideriamo lo spazio proiettivo complesso  $n$ -dimensionale  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ , dato dal quoziente di  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  per la relazione di equivalenza  $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \sim w = (w_1, w_2, \dots, w_{n+1})$  se  $w = \lambda z$  per  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , la cui struttura differenziale è determinata dall'atlante  $\{(U_k, \varphi_k)\}$ , per  $k \in \{1, \dots, n+1\}$ , dove

$$U_k = \{[(z_1, \dots, z_{n+1})] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n : z_k \neq 0\}$$

e  $\varphi_k : U_k \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  è data, per mezzo della base canonica  $\{e_j\}$  di  $\mathbb{R}^{2n}$ , da

$$\begin{aligned} \varphi_k([(z_1, \dots, z_{n+1})]) &= \sum_{j=1}^{k-1} \operatorname{Re}\left(\frac{z_j}{z_k}\right) e_{2j-1} + \operatorname{Im}\left(\frac{z_j}{z_k}\right) e_{2j} \\ &\quad + \sum_{j=k+1}^{n+1} \operatorname{Re}\left(\frac{z_j}{z_k}\right) e_{2j-3} + \operatorname{Im}\left(\frac{z_j}{z_k}\right) e_{2j-2}. \end{aligned}$$

È facile vedere che si può descrivere equivalentemente  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  come il quoziente  $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$  considerando  $\mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \approx \mathbb{R}^{2n+2}$  e  $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{C} \approx \mathbb{R}^2$ , i numeri complessi di modulo unitario  $e^{i\theta}$ , per  $\theta \in \mathbb{R}$ , dove l'azione di  $\mathbb{S}^1$  è data da

$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{2n+1} \nu(\lambda, z) \mapsto \lambda z \in \mathbb{S}^{2n+1}$  e la mappa di proiezione  $\mathcal{P} : \mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{R}^{2n+2} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n \approx \mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$  è descritta da

$$\mathcal{P}\left(\sum_{j=1}^{n+1} x^j e_{2j-1} + y^j e_{2j}\right) = [(x^1 + iy^1, \dots, x^{n+1} + iy^{n+1})].$$

Osserviamo che

$$\mathcal{P}^{-1}\left([(x^1 + iy^1, \dots, x^{n+1} + iy^{n+1})]\right) = \left\{ \sum_{j=1}^{n+1} \operatorname{Re}(e^{i\theta}(x^j + iy^j))e_{2j-1} + \operatorname{Im}(e^{i\theta}(x^j + iy^j))e_{2j} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

e che  $\mathcal{P}$  è una sommersione. Infatti,  $\mathcal{P}$  è chiaramente differenziabile e si vede facilmente che per ogni  $z = \sum_{j=1}^{n+1} (x^j e_{2j-1} + y^j e_{2j}) \in \mathbb{S}^{2n+1}$ , il kernel di  $d\mathcal{P}_z$  è il sottospazio vettoriale (unidimensionale) di  $T_z \mathbb{S}^{2n+1} = z^\perp \subseteq \mathbb{R}^{2n+2}$  generato dal vettore  $\hat{z} = \sum_{j=1}^{n+1} (y^j e_{2j-1} - x^j e_{2j})$  (considerando su  $\mathbb{R}^{2n+2}$  la metrica canonica euclidea). Segue dunque, per motivi dimensionali, che  $\mathcal{P}$  è una sommersione, inoltre il sottospazio orizzontale  $H_z \subseteq T_z \mathbb{S}^{2n+1}$  è allora l'ortogonale in  $\mathbb{R}^{2n+2}$  (rispetto alla metrica euclidea) del sottospazio bidimensionale generato da  $z$  e  $\hat{z}$ . Se ora consideriamo sulla sfera  $\mathbb{S}^{2n+1}$  la sua metrica canonica indotta da  $\mathbb{R}^{2n+2}$ , abbiamo un'unica metrica riemanniana su  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  che renda  $\mathcal{P}$  una sommersione riemanniana. Infatti, se imponiamo che  $d\mathcal{P}_z|_{H_z} : H_z \rightarrow T_{\mathcal{P}(z)} \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  sia un'isometria lineare, per ogni  $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$ , dobbiamo solo verificare che se  $x = \mathcal{P}(z) = \mathcal{P}(z')$ , le due metriche "immagine" così associate su  $T_x \mathbb{C}\mathbb{P}^n$  coincidono. Ciò segue dal fatto che per ogni tale coppia  $z, z'$  esiste un'isometria  $R$  di  $\mathbb{S}^{2n+1}$  che manda  $z$  in  $z'$ , descritta dalla matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

tale che dunque (lo si veda per esercizio)  $dR_z$  è un'isometria tra  $H_z$  e  $H_{z'}$  e  $d\mathcal{P}_{z'} \circ dR_z = d\mathcal{P}_z$  (in quanto  $\mathcal{P} \circ R = \mathcal{P}$ ).

Questa metrica su  $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  si dice *metrica di Fubini–Study* e la indicheremo con  $g_{\text{can}}$ .

Nel caso speciale  $n = 1$  abbiamo che  $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \approx \mathbb{S}^2$ , cioè possiamo "fibrare" la sfera tridimensionale in suoi cerchi massimi distinti, uno per ogni punto della sfera bidimensionale. Questa "descrizione" particolare di  $\mathbb{S}^3$  è molto importante e viene detta *fibrazione di Hopf* (si vedano [167, 222], per approfondire).

ESERCIZIO 2.3.18. Si provi che  $(\mathbb{C}\mathbb{P}^1, g_{\text{can}}) = (\mathbb{S}^2, g_{\text{can}}/4)$ .

ESEMPIO 2.3.19 (Spazio di Schwarzschild). Per  $m > 0$ , il prodotto warped dato dalla *metrica di Schwarzschild*

$$g_{\text{Schw}} = \frac{dr \otimes dr}{1 - \frac{2m}{r^{n-2}}} + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

su  $M_{\text{Schw}} = ((2m)^{\frac{1}{n-2}}, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$  è detto *spazio (esterno) di Schwarzschild di massa  $m$* .

L'applicazione

$$(r, \theta) \in M_{\text{Schw}} \mapsto (s, \theta) \in ((m/2)^{\frac{1}{n-2}}, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$$

dove  $s$  è definita implicitamente da

$$r = s \left( 1 + \frac{m}{2s^{n-2}} \right)^{\frac{2}{n-2}},$$

è un'isometria tra  $(M_{\text{Schw}}, g_{\text{Schw}})$  e la varietà riemanniana

$$\left( ((m/2)^{\frac{1}{n-2}}, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}, \left( 1 + \frac{m}{2s^{n-2}} \right)^{\frac{4}{n-2}} [ds \otimes ds + s^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}] \right).$$

Dunque, in virtù dell'Esercizio 2.3.7, la varietà riemanniana

$$\left( \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \left( 1 + \frac{m}{2|x|^{n-2}} \right)^{\frac{4}{n-2}} g_{\text{eucl}} \right), \quad (2.3)$$

conforme a  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  con la metrica canonica, è un'estensione dello spazio di Schwarzschild di massa  $m$ .

Se  $n = 3$ , secondo le equazioni della relatività generale, lo spazio di Schwarzschild rappresenta un universo statico senza materia in cui sia presente un unico *buco nero* di massa  $m$ . La sfera di raggio  $m/2$  in  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  è allora il cosiddetto *orizzonte degli eventi* del buco nero (si noti che quando  $r \rightarrow 2m^+$  in  $(M_{\text{Schw}}, g_{\text{Schw}})$ , si sta "andando verso il bordo" sferico dello spazio di Schwarzschild tridimensionale – in blu nella seguente figura). Per approfondire, si vedano [66, 80].

## Spazio di Schwarzschild

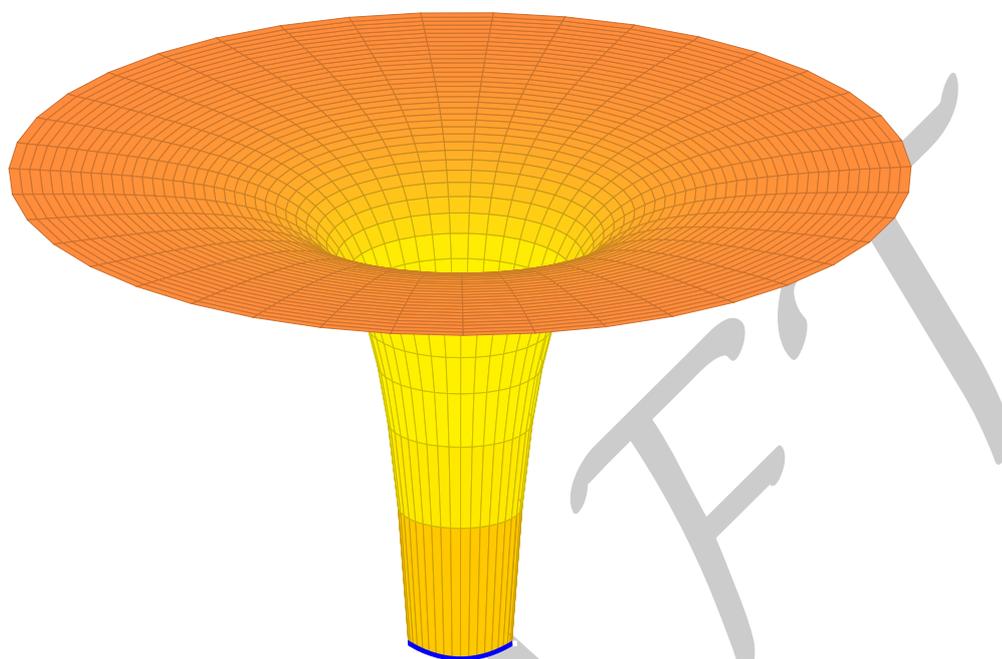


FIGURA 2.3

Vari altri esempi e “metodi di costruzione” di varietà riemanniane (ed esercizi correlati) si possono trovare nel libro di Petersen [168, Capitolo 4], in particolare, segnaliamo i prodotti *doubly warped* e le metriche sui gruppi di Lie (si veda [206] per la teoria di base). Si vedano inoltre gli spazi omogenei e gli spazi quoziente in [92, Sezioni 2.A.5 e 2.A.6].

## 2.4. Estensione della metrica ai tensori

Introduciamo la nozione più generale di metrica riemanniana su un fibrato vettoriale.

**DEFINIZIONE 2.4.1.** Una *metrica riemanniana*  $g$  (o *prodotto scalare*) su un fibrato vettoriale  $E$  di una varietà differenziabile  $M$  è una sezione del fibrato  $E^* \otimes E^*$  simmetrica e definita positiva, cioè la forma bilineare  $g_p : E_p \times E_p \rightarrow \mathbb{R}$  è simmetrica e definita positiva, per ogni  $p \in M$  e per ogni coppia di sezioni  $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ , la mappa  $p \mapsto g_p(s_1(p), s_2(p))$  è di classe  $C^\infty$ . Ciò è equivalente ad avere un’applicazione  $C^\infty(M)$ -bilineare

$$g : \Gamma(E) \times \Gamma(E) \rightarrow C^\infty(M)$$

simmetrica (cioè  $g(s_1, s_2) = g(s_2, s_1)$ , per ogni  $s_1, s_2 \in \Gamma(E)$ ) e definita positiva (cioè  $g(s, s) \geq 0$ , per ogni  $s \in \Gamma(E)$ , con  $g(s, s) = 0$  se e solo se  $s$  è la sezione nulla).

Una metrica riemanniana  $g$  su una varietà differenziabile  $M$  è dunque una metrica riemanniana sul fibrato tangente  $TM$  e induce una metrica riemanniana  $g$  su ogni fibrato  $T_s^r M$ , come segue.

Per ogni coppia di tensori  $T, S$  dello stesso tipo  $(r, s)$  poniamo

$$g(T, S) = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} S_{\ell_1 \dots \ell_s}^{k_1 \dots k_r} g_{i_1 k_1} \dots g_{i_r k_r} g^{j_1 \ell_1} \dots g^{j_s \ell_s}$$

in una carta coordinata, dove (qui e nel seguito)  $g^{ij}$  sono le componenti della matrice inversa di  $g_{ij}$ . Si vede facilmente che tale prodotto scalare è indipendente dalla carta coordinata scelta e dunque  $g(S, T)$  è ben definito come elemento di  $C^\infty(M)$ . Poiché per ogni  $p \in M$  e per ogni  $\{e_i\}$  base ortonormale di  $T_p M$  esiste una carta  $(U, (x_1, \dots, x_n))$  centrata in  $p$  tale che  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = e_i$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  (lo si mostri per esercizio), che nel seguito chiameremo *carta ortonormale centrata in  $p$* , segue immediatamente che  $g$  è una metrica riemanniana sul fibrato  $T_s^r M$ . Si noti che dunque, in particolare, la metrica riemanniana indotta da  $g$  sul fibrato cotangente  $TM^*$  è il  $(2, 0)$ -tensore definito in coordinate da  $g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^j}$ , che talvolta denoteremo anche con il simbolo  $g^{-1}$ .

Ovviamente, la norma di un tensore  $T \in \Gamma(T_s^r M)$  è allora definita come

$$|T| = \sqrt{g(T, T)}$$

da cui, in una carta coordinata

$$|T|^2 = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} T_{\ell_1 \dots \ell_s}^{k_1 \dots k_r} g_{i_1 k_1} \dots g_{i_r k_r} g^{j_1 \ell_1} \dots g^{j_s \ell_s}.$$

Si noti che per  $f, h \in C^\infty(M)$  si ha  $g(f, h) = fh$  e  $g(dx^i, dx^j) = g^{ij}$ , inoltre

$$|g|^2 = g_{ij} g_{kl} g^{ik} g^{jl} = \text{tr } g = n,$$

cioè il quadrato della norma del tensore metrico di  $(M, g)$  è uguale alla dimensione della varietà  $M$ .

**ESERCIZIO 2.4.2.** Se  $(M, g)$  è una varietà riemanniana, considerata la metrica riemanniana omotetica  $g^\lambda = \lambda g$ , con  $\lambda > 0$ , si osservi che le metriche riemanniane associate  $g^\lambda$  e  $g$  sul fibrato  $T_s^r M$  sono legate dalla relazione  $g^\lambda = \lambda^{r-s} g$ .

**ESEMPIO 2.4.3.** Siano  $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$  e  $\alpha, \beta, \omega, \sigma \in \Gamma(TM^*)$ , allora in coordinate locali si ha

$$g(X \otimes Y, Z \otimes W) = (X \otimes Y)^{ij} (Z \otimes W)^{kl} g_{ik} g_{jl} = X^i Y^j Z^k W^l g_{ik} g_{jl} = g(X, Z) g(Y, W),$$

$$g(\alpha \otimes \beta, \omega \otimes \sigma) = (\alpha \otimes \beta)_{ij} (\omega \otimes \sigma)_{kl} g^{ik} g^{jl} = \alpha_i \beta_j \omega_k \sigma_l g^{ik} g^{jl} = g(\alpha, \omega) g(\beta, \sigma),$$

dunque

$$g(\alpha \wedge \beta, \omega \wedge \sigma) = g(\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha, \omega \otimes \sigma - \sigma \otimes \omega) = 2(g(\alpha, \omega) g(\beta, \sigma) - g(\alpha, \sigma) g(\beta, \omega)),$$

$$g(\alpha \odot \beta, \omega \odot \sigma) = g(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha, \omega \otimes \sigma + \sigma \otimes \omega) = 2(g(\alpha, \omega)g(\beta, \sigma) + g(\alpha, \sigma)g(\beta, \omega)).$$

Seguono le formule

$$\begin{aligned} |X \otimes Y|^2 &= |X|^2 |Y|^2, \\ |\alpha \otimes \beta|^2 &= |\alpha|^2 |\beta|^2, \\ |\alpha \wedge \beta|^2 &= 2(|\alpha|^2 |\beta|^2 - g(\alpha, \beta)^2), \\ |\alpha \odot \beta|^2 &= 2(|\alpha|^2 |\beta|^2 + g(\alpha, \beta)^2). \end{aligned}$$

**ESERCIZIO 2.4.4.** Si mostri che se  $\alpha$  è una 2-forma simmetrica e  $\beta$  una 2-forma differenziale (antisimmetrica), si ha  $g(\alpha, \beta) = 0$ . Facendo allora riferimento all'Osservazione 1.4.9, si concluda che la decomposizione di una 2-forma nella sua parte simmetrica e antisimmetrica è una *decomposizione ortogonale* e che  $\Gamma(T_2^0 M) = \mathcal{S}^2 M \oplus^\perp \Omega^2 M$ . Infine, si noti che segue

$$|\omega|^2 = |\mathcal{S}ym(\omega)|^2 + |\mathcal{A}nt(\omega)|^2,$$

per ogni  $\omega \in \Gamma(T_2^0 M)$ .

Essendo  $g$  un prodotto scalare definito positivo, per ogni coppia di tensori  $T, S$  dello stesso tipo  $(r, s)$  in una varietà riemanniana  $(M, g)$  vale la *disuguaglianza di Cauchy-Schwarz* (o di prodotto scalare)

$$|g(T, S)| \leq |T| |S|,$$

dove si ha l'uguaglianza in un punto  $p \in M$  se e solo se i due tensori sono proporzionali in  $T_s^r M_p$  (cioè  $S_p = \lambda T_p$ , per  $\lambda \in \mathbb{R}$ ).

Com'è usuale, una possibile dimostrazione segue dal considerare il polinomio di secondo grado in  $\alpha \in \mathbb{R}$ , puntualmente dato da

$$0 \leq |T + \alpha S|^2 = g(T + \alpha S, T + \alpha S) = |T|^2 + 2\alpha g(T, S) + \alpha^2 |S|^2,$$

che essendo sempre nonnegativo, ha discriminante nonpositivo, da cui la disuguaglianza.

Come immediata conseguenza (lo si mostri per esercizio) abbiamo che per ogni coppia di tensori  $T, S$  dello stesso tipo  $(r, s)$  vale

$$|T + S| \leq |T| + |S|.$$

con uguaglianza in un punto  $p \in M$  se e solo se  $S_p = \lambda T_p$ , per un qualche  $\lambda \geq 0$ .

## 2.5. Operatori "musicali"

L'operatore  $\flat$  (*bemolle*) è definito come l'operatore che associa a un campo vettoriale  $X \in \Gamma(TM)$  la 1-forma

$$X_p^\flat(v) = g_p(X_p, v) \quad \text{per ogni } p \in M \text{ e } v \in T_p M.$$

Essendo in ogni  $p \in M$  la forma bilineare  $g_p$  non degenera, l'operatore bemolle è invertibile e il suo inverso, l'operatore  $\sharp$  (*diesis*), associa a una 1-forma  $\omega \in \Gamma(TM^*)$  il campo vettoriale  $\omega^\sharp$  caratterizzato dalla relazione

$$\omega_p(v) = g_p(\omega_p^\sharp, v) \quad \text{per ogni } p \in M \text{ e } v \in T_pM.$$

Calcoliamo i coefficienti in coordinate locali della 1-forma  $X^\flat$  e del campo  $\omega^\sharp$ :

$$X_i^\flat = X^\flat\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = g\left(X, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = g\left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X^j g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X^j g_{ji},$$

quindi,

$$X^\flat = X^j g_{ji} dx^i \quad \text{e} \quad X_i^\flat = X^j g_{ji},$$

$$\omega_k g^{ki} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) g^{ki} = g\left(\omega^\sharp, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) g^{ki} = (\omega^\sharp)^j g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) g^{ki} = (\omega^\sharp)^j g_{jk} g^{ki} = (\omega^\sharp)^i,$$

cioè,

$$\omega^\sharp = \omega_k g^{ki} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad (\omega^\sharp)^i = \omega_k g^{ki}.$$

**OSSERVAZIONE 2.5.1.** Il motivo dei nomi delle notazioni "musicali" è dovuto al fatto che  $\flat$  "abbassa" gli indici, "contraendo" con la matrice del tensore metrico,  $X^\flat = c_1^1(g \otimes X)$ , mentre  $\sharp$  li "alza", "contraendo" con la matrice inversa,  $\omega^\sharp = c_1^1(g^{-1} \otimes \omega)$  (così come bemolle e diesis, rispettivamente, abbassano e alzano le note di un semitono in uno spartito).

**ESERCIZIO 2.5.2.** Si verifichi che per ogni 1-forma  $\omega \in \Gamma(TM^*)$  e una funzione  $f \in C^\infty(M)$  vale la formula

$$\omega^\sharp f = df(\omega^\sharp) = \omega(df^\sharp).$$

In generale, possiamo applicare questa operazione di "alzare" o "abbassare" gli indici a un generico tensore  $T \in \Gamma(T_s^r M)$ , contraendo con la matrice della metrica o della sua inversa in una carta coordinata, oppure procedendo nel seguente modo: se si vuole abbassare un indice, si considera la contrazione  $c_1^p(g \otimes T)$  per qualche  $p \in \{1, \dots, r\}$ , mentre se si vuole alzare un indice,  $c_q^1(g^{-1} \otimes T)$  per qualche  $q \in \{1, \dots, s\}$ . Quando si opera in coordinate, va comunque prestata una certa cura a dove si "posiziona" l'indice alzato o abbassato tra quelli già presenti. In caso di possibili ambiguità, è bene specificare esplicitamente il tensore di partenza e il tensore risultante, come nel seguente esempio.

**ESEMPIO 2.5.3.** Supponiamo che  $T$  sia un tensore di tipo  $(1, 3)$  su  $M$ . Se applichiamo a  $T$  l'operatore bemolle sull'indice di controvarianza otteniamo un tensore  $(0, 4)$  in cui però dovremo specificare "dove abbassiamo" tale indice. Per esempio, fissata una carta locale, se

$$T = T_{ijk}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l} \quad (2.4)$$

definiamo

$$T^{\flat} = T_{ijk s} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^s = g_{sl} T_{ijk}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^s.$$

Se invece scrivessimo

$$T = T_{ijk}^l dx^i \otimes dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^l} \otimes dx^k, \quad (2.5)$$

che rappresenta lo stesso tensore, interpretandoli entrambi come applicazioni  $C^\infty(M)$ -multilineari  $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ , avremmo

$$T^{\flat} = T_{ijsk} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^s \otimes dx^k = g_{sl} T_{ijk}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^s \otimes dx^k,$$

che è un tensore diverso dal precedente.

Questa possibile ambiguità può essere risolta utilizzando gli operatori di contrazione, come detto sopra, oppure (come talvolta si trova in letteratura) con la notazione più precisa per le due espressioni (2.4) e (2.5),

$$T = T_{ijk}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l}$$

$$T = T_{ij}^l{}_k dx^i \otimes dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial x^l} \otimes dx^k,$$

per cui è chiaro dove "si abbassa" l'indice  $l$ , considerando  $T^{\flat}$ .

**OSSERVAZIONE 2.5.4.** Si noti che ovviamente gli operatori  $\flat$  e  $\sharp$  sono degli isomorfismi di  $C^\infty(M)$ -moduli e in particolare di spazi vettoriali reali.

**DEFINIZIONE 2.5.5.** La *traccia* di una 2-forma  $\omega \in \Gamma(T_2^0 M)$  è data da

$$\text{tr } \omega = \text{tr } \omega^{\sharp} = c_1^1 \omega^{\sharp}$$

(si noti che la definizione è indipendente da quale dei due indici di  $\omega$  si "sollevi"). In coordinate locali, abbiamo  $\text{tr } \omega = g^{ij} \omega_{ij}$ , se inoltre  $\{e_i\}$  è una base ortonormale di  $T_p M$ , si ha  $\text{tr } \omega_p = \sum_{i=1}^n \omega_p(e_i, e_i)$ .

**OSSERVAZIONE 2.5.6.** Si ha  $\text{tr } g = g^{ij} g_{ij} = n$ , cioè la traccia del tensore metrico di  $(M, g)$  è uguale alla dimensione della varietà. Inoltre, per ogni 2-forma  $\omega$ , si ha  $\text{tr } \omega = g(\omega, g)$  e la decomposizione *ortogonale*

$$\omega = (\text{tr } \omega)g/n + \hat{\omega},$$

dove  $\hat{\omega} = \omega - (\text{tr } \omega)g/n$  ha traccia nulla. Se  $\omega$  ha traccia nulla, cioè  $\omega = \hat{\omega}$  si dice che è *trace-free*.

Si ha dunque

$$|\omega|^2 = |\text{tr } \omega|^2 + |\hat{\omega}|^2$$

inoltre, per l'Esercizio 2.4.4, questa decomposizione ortogonale può essere raffinata come segue:

$$\omega = (\text{tr } \omega)g/n + \mathcal{S}ym(\omega) + \mathcal{A}nt(\omega),$$

essendo  $\text{tr } \omega = \text{tr } \text{Sym}(\omega)$  e ogni 2-forma antisimmetrica trace-free. In coordinate, si ha allora

$$\omega_{ij} = (\text{tr } \omega)g_{ij}/n + \frac{\dot{\omega}_{ij} + \dot{\omega}_{ji}}{2} + \frac{\omega_{ij} - \omega_{ji}}{2}.$$

Segue quindi

$$|\omega|^2 = |\text{tr } \omega|^2 + |\text{Sym}(\omega)|^2 + |\text{Ant}(\omega)|^2.$$

**DEFINIZIONE 2.5.7.** Se  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  è una funzione di classe  $C^\infty$  sulla varietà riemanniana  $(M, g)$ , il campo vettoriale  $\nabla f = df^\sharp$  associato al differenziale di  $f$ , che soddisfa

$$(\nabla f)h = df^\sharp h = g(df, dh) \quad \text{e} \quad g(\nabla f, X) = df(X),$$

per ogni  $h \in C^\infty(M)$  e  $X \in \Gamma(TM)$ , si dice *gradiente* della funzione  $f$ . In coordinate, si ha dunque  $\nabla f^i = df_k g^{ki}$ .

**OSSERVAZIONE 2.5.8.** Si noti la formula

$$(\nabla f)h = g(df, dh) = g(\nabla f, \nabla h).$$

Inoltre, se  $(x^1, \dots, x^n)$  sono delle coordinate su un aperto  $U$  di  $(M, g)$ , si ha

$$\nabla x^i = (dx^i)^\sharp = g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad (2.6)$$

per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ , che *non* è semplicemente  $\frac{\partial}{\partial x^i}$ , a meno che i campi coordinati in un punto non formino una base ortonormale (dunque si avrebbe  $g_{ij} = \delta_{ij}$  e  $g^{ij} = \delta^{ij}$  in tale punto). Infatti, per ogni  $f \in C^\infty(M)$ , abbiamo

$$(\nabla x^i)f = dx_k^i g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x^j} = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

**OSSERVAZIONE 2.5.9.** Se  $X, Y \in \Gamma(TM)$  sono campi vettoriali e  $\omega, \eta \in \Gamma(TM^*)$  sono 1-forme su  $(M, g)$ , abbiamo

$$g(X, Y) = g(X^b, Y^b) \quad \text{e} \quad g(\omega, \eta) = g(\omega^\sharp, \eta^\sharp),$$

infatti

$$g(X^b, Y^b) = g(X^j g_{ji} dx^i, Y^r g_{rs} dx^s) = X^j Y^r g_{ji} g_{rs} g^{is} = X^j Y^r g_{jr} = g(X, Y)$$

$$g(\omega^\sharp, \eta^\sharp) = g(\omega_j g^{ji} \frac{\partial}{\partial x^i}, \eta_r g^{rs} \frac{\partial}{\partial x^s}) = \omega_j \eta_r g^{ji} g^{rs} g_{is} = \omega_j \eta_r g^{jr} = g(\omega, \eta).$$

Dall'osservazione precedente deduciamo anche la seguente disuguaglianza

$$|T(X_1, \dots, X_s, \omega_1, \dots, \omega_r)| \leq |T| |X_1| \cdots |X_s| |\omega_1| \cdots |\omega_r|, \quad (2.7)$$

per ogni tensore  $T \in \Gamma(T_s^r M)$ , campi vettoriali  $X_1, \dots, X_s$  e 1-forme  $\omega_1, \dots, \omega_r$ . Infatti, definito  $S = X_1^b \otimes \cdots \otimes X_s^b \otimes \omega_1^\sharp \otimes \cdots \otimes \omega_r^\sharp \in \Gamma(T_s^r M)$ , per ogni  $p \in M$

abbiamo

$$\begin{aligned}
 g(T, S)(p) &= T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p) S_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p) \\
 &= T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p) (X_1^b)_{j_1} \cdots (X_s^b)_{j_s} (\omega_1^\sharp)^{i_1} \cdots (\omega_r^\sharp)^{i_r}(p) \\
 &= T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p) (X_1)^{j_1} \cdots (X_s)^{j_s} (\omega_1)_{i_1} \cdots (\omega_r)_{i_r}(p) \\
 &= T(X_1, \dots, X_s, \omega_1, \dots, \omega_r)(p)
 \end{aligned}$$

in una carta ortonormale in  $p$ , osservando che in tali coordinate  $X_i^b(p) = X^i(p)$  e  $(\omega^\sharp)^j(p) = \omega_j(p)$ , per ogni campo vettoriale  $X$  e per ogni 1-forma  $\omega$ . Dunque, si ha

$$|T(X_1, \dots, X_s, \omega_1, \dots, \omega_r)| = |g(T, S)| \leq |T| |S| = |T| |X_1^b| \cdots |X_s^b| |\omega_1^\sharp| \cdots |\omega_r^\sharp|$$

per la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz e l'Esempio 2.4.3, dall'Osservazione 2.5.9 segue allora la disuguaglianza (2.7).

**OSSERVAZIONE 2.5.10.** Concludiamo questo paragrafo con le seguenti osservazioni. Ricordando che abbiamo costruito nella Sezione 1.9 una struttura simplettica sul fibrato cotangente, grazie agli operatori musicali siamo in grado di costruire addirittura la seguente, notevole struttura hamiltoniana sul fibrato tangente di una generica varietà Riemanniana.

Data allora la nostra varietà Riemanniana  $(M, g)$ , nelle notazioni della Proposizione 1.9.19 consideriamo la struttura simplettica  $(T^*M, \alpha^*)$  sul fibrato cotangente  $T^*M$ . E' naturale allora definire l'hamiltoniana  $H^*: T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$H^*(\omega) = \frac{1}{2} g^{ij} \omega_i \omega_j, \quad \forall \omega \in T^*M.$$

La struttura hamiltoniana  $(T^*M, \alpha^*, H^*)$  è detta *sistema cogeodetico* e il flusso hamiltoniano associato il *flusso cogeodetico*.

Grazie alla struttura Riemanniana su  $M$ , è possibile trasferire la struttura hamiltoniana sul fibrato cotangente proprio sul fibrato tangente. In particolare, dato l'operatore bemolle  $\flat$  indotto dalla metrica Riemanniana  $g$ , si chiama  $\alpha \in \Gamma(T_2^0 TM)$  la 2-forma definita come  $\alpha = \flat^* \alpha^*$ . Si verifica facilmente che  $\alpha$  è su ogni  $p \in TM$  una forma simplettica su  $T_p TM$  e che è chiusa, poiché queste proprietà si mantengono preservate mediante l'azione del pullback di un diffeomorfismo; inoltre, dalla Proposizione 1.9.19 segue che localmente,

$\alpha = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dv_i$ . Analogamente, definiamo l'hamiltoniana  $H: TM \rightarrow \mathbb{R}$  come

*l'energia cinetica della singola particella*

$$H(X) = \flat^* H^*(X) = H^*(\flat(X)) = \frac{1}{2} g_{ij} X^i X^j, \quad \forall X \in TM.$$

Ciò ci porta alla seguente importante definizione:

**DEFINIZIONE 2.5.11.** Data una varietà Riemanniana  $(M, g)$ , la struttura hamiltoniana  $(TM, \alpha, H)$  è detta *sistema geodetico* e il flusso hamiltoniano associato è detto *flusso geodetico*.

## 2.6. L'operatore di Hodge

Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana  $n$ -dimensionale, orientata con forma di volume (in coordinate locali)

$$dV = \sqrt{\det g_{ij}} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

**DEFINIZIONE 2.6.1.** Per ogni  $k \in \{0, \dots, n\}$ , la forma *duale di Hodge* di una  $k$ -forma differenziale  $\omega \in \Omega^k M$  è l'unica  $(n-k)$ -forma differenziale  $\star\omega \in \Omega^{n-k} M$  tale che

$$\sigma \wedge (\star\omega) = g(\sigma, \omega) dV \frac{1}{k!}$$

per ogni  $\sigma \in \Omega^k M$ .

In particolare, se  $\omega$  e  $\sigma$  appartengono a  $\Omega^k M$ , si ha  $\omega \wedge (\star\omega) = \frac{1}{k!} |\omega|^2 dV$  e  $\omega \wedge (\star\sigma) = \sigma \wedge (\star\omega)$ . Si noti anche che  $\star 1 = dV$  e che cambiando l'orientazione della varietà si cambia il segno a  $\star\omega$ .

L'operatore di Hodge  $\star : \Omega^k M \rightarrow \Omega^{n-k} M$  è chiaramente  $C^\infty(M)$ -lineare e in una carta coordinata si ha

$$\star(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = \frac{\sqrt{\det g_{ij}}}{(n-k)!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_n} \text{sgn}(\sigma) g^{i_1 \sigma(1)} \cdots g^{i_k \sigma(k)} dx^{\sigma(k+1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(n)},$$

per calcolo diretto (lo si provi per esercizio e sempre per esercizio si scrivano le componenti di  $\star\omega$  in una carta coordinata in funzione delle componenti di  $\omega$ ).

Si ha poi l'importante relazione

$$\star \star \omega = (-1)^{k(n-k)} \omega \tag{2.8}$$

per ogni  $\omega \in \Omega^k M$ . Per provarla, notiamo che scegliendo una carta ortonormale in  $p \in M$ , per ogni  $k$ -pla di indici  $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ , si ha nel punto  $p$ ,

$$\begin{aligned} \star(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) &= \frac{1}{(n-k)!} \sum_{\tau \in \tilde{\mathcal{P}}_n} \text{sgn}(\tau) dx^{j_{\tau(1)}} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{\tau(n-k)}} \\ &= \text{sgn}(\tilde{\tau}) dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-k}}, \end{aligned}$$

dove  $\tilde{\mathcal{P}}_n$  è il sottoinsieme di  $\mathcal{P}_n$  costituito dalle permutazioni  $\tau$  dell'insieme  $\{1, \dots, n\}$  tali che  $\tau(l) = i_l$  per ogni  $l \in \{1, \dots, k\}$ , l'insieme degli indici  $j_1 < \cdots < j_{n-k}$  è il complementare di  $\{i_1, \dots, i_k\}$  in  $\{1, \dots, n\}$  e  $\tilde{\tau}$  è l'elemento di  $\tilde{\mathcal{P}}_n$  tale che  $\tilde{\tau}(k+l) = j_l$  per ogni  $l \in \{1, \dots, n-k\}$ , dunque

$$\text{sgn}(\tilde{\tau}) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-k}} = dV.$$

Sempre nel punto  $p \in M$ , essendo (per l'anticommutatività del prodotto esterno di forme differenziali)

$$\begin{aligned} dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-k}} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ = (-1)^{k(n-k)} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_{n-k}} \\ = (-1)^{k(n-k)} \operatorname{sgn}(\tilde{\tau}) dV, \end{aligned}$$

segue che

$$\star \star (dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}) = (-1)^{k(n-k)} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

da cui la formula (2.8), per la  $C^\infty(M)$ -linearità dell'operatore di Hodge. Di conseguenza abbiamo che  $\star^{-1} = (-1)^{k(n-k)} \star$ , dunque  $\star^{-1} = \star$  se  $n$  è dispari e  $\star^{-1} = (-1)^k \star$  se  $n$  è pari.

DEFINIZIONE 2.6.2. Per ogni  $k \in \{0, \dots, n\}$ , definiamo il *codifferenziale*  $\delta : \Omega^k M \rightarrow \Omega^{k-1} M$  che opera su una  $k$ -forma differenziale  $\omega \in \Omega^k M$  come

$$\delta \omega = (-1)^{n(k-1)+1} \star d \star \omega = (-1)^k \star^{-1} d \star \omega,$$

dove  $d$  è il differenziale esterno (definendo  $\Omega^{-1} M$  come il  $C^\infty(M)$ -modulo nullo, dunque se  $k = 0$ , cioè  $\omega$  è una funzione in  $C^\infty(M)$ , si ha  $\delta \omega = 0$ ).

ESERCIZIO 2.6.3. Si provino le relazioni, per  $\omega \in \Omega^k M$ :

- $d\omega = (-1)^{n(k-1)} \star \delta \star \omega$ , quindi se la dimensione  $n$  di  $M$  è pari  $\delta \omega = -\star d \star \omega$  e  $d\omega = \star \delta \star \omega$ ,
- $\delta \star \omega = (-1)^{k+1} \star d\omega$  e  $d \star \omega = (-1)^k \star \delta \omega$ ,
- $d\delta \star \omega = \star \delta d\omega$  e  $\delta d \star \omega = \star d\delta \omega$ .

Come per il differenziale esterno si ha  $\delta^2 = \delta \circ \delta = 0$ , infatti

$$\delta^2 \omega = (-1)^{n(k-2)+1} \star d \star \delta \omega = (-1)^{n(k-2)+1} (-1)^{n(k-1)+1} \star d \star \star d \star \omega = (-1)^{k(n-k)+1} \star d^2 \star \omega = 0,$$

in quanto  $d^2 = 0$ .

Se  $\omega$  è una 0-forma differenziale, cioè una funzione  $f \in C^\infty(M)$ , si ha  $\delta f = 0$ . Se  $\omega \in \Omega^k M$  soddisfa  $\delta \omega = 0$  diciamo che è *cochiusa* e se esiste  $\sigma \in \Omega^{k+1} M$  tale che  $\delta \sigma = \omega$  diciamo che  $\omega$  è *coesatta*. Dalle relazioni viste sopra abbiamo allora facilmente che  $\omega$  è cochiusa/coesatta se e solo se  $\star \omega$  è chiusa/esatta, rispettivamente (lo si provi per esercizio).

DEFINIZIONE 2.6.4. Chiamiamo *laplaciano di Hodge* (detto anche *operatore di Laplace-de Rham*) l'operatore  $\Delta^H = \delta d + d\delta : \Omega^k M \rightarrow \Omega^k M$ .

Si noti che  $\Delta^H = (\delta + d)^2 = (\delta + d) \circ (\delta + d)$ .

ESERCIZIO 2.6.5. Si provi che se  $\Delta^H \omega = 0$ , allora anche  $\Delta^H(\star \omega) = 0$ .

OSSERVAZIONE 2.6.6. In  $\mathbb{R}^3$  gli operatori differenziali "classici" gradiente, rotore, divergenza e laplaciano possono essere ottenuti come segue:

- per una funzione reale  $f$  su un aperto di  $\mathbb{R}^3$  il suo gradiente è dato da  $\nabla f = df^\sharp$ ,
- se  $X = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} + C\frac{\partial}{\partial z}$  è un campo in un aperto di  $\mathbb{R}^3$  si ha

$$\begin{aligned} dX^\flat &= d(Adx + Bdy + Cdz) \\ &= \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) dy \wedge dz, \end{aligned}$$

dunque

$$\star dX^\flat = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) dy + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) dz,$$

da cui

$$\text{rot } X = (\star dX^\flat)^\sharp,$$

- considerando poi che, sempre per il campo  $X = A\frac{\partial}{\partial x} + B\frac{\partial}{\partial y} + C\frac{\partial}{\partial z}$ , si ha

$$\star X^\flat = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy,$$

segue che

$$d \star X^\flat = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

da cui

$$\text{div } X = \star d \star X^\flat,$$

- infine, poiché  $\Delta f = \text{div} \nabla f$ , per una funzione reale  $f$  su un aperto di  $\mathbb{R}^3$ , abbiamo il laplaciano

$$\Delta f = \star d \star (\nabla f)^\flat = \star d \star df,$$

essendo  $\nabla f = df^\sharp$  e i due operatori  $\flat, \sharp$  uno l'inverso dell'altro.

Si noti che con l'eccezione del rotore, che è ben definito solo in  $\mathbb{R}^3$ , le stesse formule definiscono gli analoghi operatori differenziali in  $\mathbb{R}^n$ .

ESERCIZIO 2.6.7. Si mostri che si ha  $\Delta^H f = -\star d \star df$ , dunque in  $\mathbb{R}^n$

$$\Delta^H f = -\Delta f$$

per ogni funzione reale  $f$ .

Si noti che le classiche formule  $\text{rot} \nabla f = 0$  e  $\text{div} \text{rot } X = 0$  seguono facilmente dalle espressioni sopra (e dal fatto che  $d^2 = 0$ ):

$$\text{rot} \nabla f = (\star d(\nabla f)^\flat)^\sharp = (\star ddf)^\sharp = 0$$

e

$$\text{div} \text{rot } X = \star d \star ((\star dX^\flat)^\sharp)^\flat = \star d \star \star dX^\flat = \star ddX^\flat = 0.$$

ESERCIZIO 2.6.8. Si calcoli come opera  $\Delta^H$  sulle forme differenziali di  $\mathbb{R}^n$ .

OSSERVAZIONE 2.6.9. Se la varietà  $n$ -dimensionale  $(M, g)$  non è orientata, si può comunque definire l'operatore di Hodge di una  $k$ -forma differenziale, ma questo è una forma a valori nel fibrato vettoriale  $\Lambda^n M$ , che ha rango 1.

L'operatore di Hodge è chiaramente legato al prodotto scalare  $L^2$  (simmetrico e definito positivo) di due  $k$ -forme differenziali su  $(M, g)$  compatta, dalla formula

$$(\omega, \sigma) = \int_M \omega \wedge \star \sigma = \frac{1}{k!} \int_M g(\omega, \sigma) dV.$$

Con tale prodotto scalare il codifferenziale è l'operatore aggiunto del differenziale esterno (e viceversa), cioè  $(\omega, \delta\sigma) = (d\omega, \sigma)$ , con  $\omega \in \Omega^k M$  e  $\sigma \in \Omega^{k+1} M$ . Tale formula segue dal teorema di Stokes 1.8.6, infatti

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M d(\omega \wedge \star \sigma) \\ &= \int_M d\omega \wedge \star \sigma + (-1)^k \omega \wedge d\star \sigma \\ &= \int_M d\omega \wedge \star \sigma - \omega \wedge \star \delta\sigma \\ &= (d\omega, \sigma) - (\omega, \delta\sigma), \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la relazione  $d\star \sigma = (-1)^{k+1} \star \delta\sigma$  dell'Esercizio 2.6.3.

Inoltre, si vede facilmente che il laplaciano di Hodge è un operatore autoaggiunto (o simmetrico) per il prodotto scalare  $L^2$ , cioè  $(\Delta^H \omega, \sigma) = (\omega, \Delta^H \sigma)$  è semidefinito positivo,  $(\Delta^H \omega, \omega) \geq 0$ .

Le forme differenziali  $\omega$  tali che  $\Delta^H \omega = 0$  si dicono *armoniche* e sono sia chiuse che cochiuse, cioè  $d\omega = \delta\omega = 0$ , infatti si ha

$$0 = (\Delta^H \omega, \omega) = (\delta d\omega + d\delta\omega, \omega) = (d\omega, d\omega) + (\delta\omega, \delta\omega).$$

Per approfondire il materiale di questa sezione, si veda il libro di Warner [206].