

## CAPITOLO 1

### Richiami di geometria differenziale

#### 1.1. Varietà differenziabili

DEFINIZIONE 1.1.1. Una *varietà topologica*  $M$  di dimensione  $n$  è uno spazio topologico di Hausdorff, a base numerabile e tale che per ogni punto  $p \in M$  esiste un intorno aperto  $U \subseteq M$  di  $p$  e un omeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \Omega$  con  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . La coppia  $(U, \varphi)$  viene detta *carta coordinata* (o *carta locale*).

DEFINIZIONE 1.1.2. Un *atlante* di classe  $C^k$  ( $C^\infty$ ) per  $M$  è una famiglia di carte coordinate  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ , per  $\alpha \in \mathcal{A}$ , tali che la famiglia di aperti  $U_\alpha$  è un ricoprimento di  $M$  e le *mappe di transizione* (che sono degli omeomorfismi)

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sono diffeomorfismi di classe  $C^k$  ( $C^\infty$ ), per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  tali che  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ . Una carta coordinata  $(V, \psi)$  si dice *compatibile* con un atlante di classe  $C^k$  ( $C^\infty$ ) per  $M$  se unendola alla famiglia di carte di tale atlante, si ha ancora un atlante  $C^k$  ( $C^\infty$ ) per  $M$ .

Un atlante  $C^k$  ( $C^\infty$ ) per  $M$  si dice *massimale* se contiene tutte le carte coordinate ad esso compatibili.

Due atlanti  $C^k$  ( $C^\infty$ ) per  $M$  si dicono *equivalenti* se la loro unione è ancora un atlante  $C^k$  ( $C^\infty$ ) per  $M$ .

Una *struttura differenziale*  $C^k$  ( $C^\infty$ ) su  $M$  è un atlante massimale  $C^k$  ( $C^\infty$ ) per  $M$ .

DEFINIZIONE 1.1.3. Una *varietà differenziabile* (o *differenziale*)  $M$  di classe  $C^k$  ( $C^\infty$ ) è una varietà topologica con una struttura differenziale  $C^k$  ( $C^\infty$ ).

Rimandiamo al testo di Abate e Tovena [2] per tutto il materiale di questo capitolo, in particolare, per le definizioni standard e le proprietà delle funzioni  $C^k$  tra due varietà differenziabili, di spazio e fibrato tangente e cotangente, di campi vettoriali e 1-forme, del differenziale di una funzione, di campi e 1-forme coordinati, nonché per le dimostrazioni dei vari risultati solo enunciati. Inoltre, assumeremo una familiarità del lettore con le strutture topologiche e differenziabili canoniche degli spazi  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{S}^n$ ,  $\mathbb{H}^n$ ,  $\mathbb{R}\mathbb{P}^n$  e loro quozienti, dei gruppi  $\text{GL}(n)$ ,  $\text{SL}(n)$ ,  $\text{O}(n)$ ,  $\text{SO}(n)$ , dei prodotti di varietà differenziabili (come il toro  $n$ -dimensionale  $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ ,  $n$ -volte), dei quozienti per l'azione di un gruppo (di Lie) e degli spazi omogenei, con le nozioni standard di topologia generale (vedi ad esempio [76]) e con i concetti e risultati di base della topologia

algebraica: la teoria dei rivestimenti (differenziali), la classificazione delle superfici, le basi di omotopia, omologia e coomologia (si veda [149], per esempio).

Scriveremo  $x^i$  per denotare un sistema di coordinate locali indotte da una carta coordinata  $(U, \varphi)$ , con associati campi coordinati  $\frac{\partial}{\partial x^i}$  (che talvolta denoteremo semplicemente con  $\partial_i$ ) e 1-forme coordinate  $dx^i$ .

Se  $M$  e  $N$  sono due varietà differenziabili, denoteremo con  $C^\infty(M)$  le funzioni  $C^\infty$  a valori reali su  $M$  e con  $C^\infty(M, N)$  lo spazio delle funzioni  $C^\infty$  da  $M$  a  $N$ .

In tutto il testo, a meno che esplicitamente diversamente specificato, tutte le varietà differenziabili saranno connesse e come tutti gli oggetti che considereremo, saranno di classe  $C^\infty$ . Utilizzeremo inoltre la convenzione di Einstein, ossia considereremo sempre sommati gli indici ripetuti, ad esempio un campo vettoriale  $X$  su  $M$  si esprimerà in coordinate locali come  $X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

Ricordiamo che una varietà topologica di Hausdorff a base numerabile è *paracompatta* (ogni ricoprimento di  $M$  in aperti ammette un raffinamento localmente finito), da cui segue che ogni varietà differenziabile  $M$  ammette *partizioni dell'unità*  $C^\infty$ , cioè se  $\{U_\alpha\}$  è un ricoprimento aperto di  $M$ , allora esiste una famiglia di applicazioni  $\rho_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$  che soddisfano:

- $0 \leq \rho_\alpha \leq 1$ ,
- $\text{supp } \rho_\alpha \subseteq U_\alpha$ ,
- $\{\text{supp } \rho_\alpha\}$  è un ricoprimento localmente finito di  $M$ ,
- per ogni  $p \in M$ , si ha  $\sum_\alpha \rho_\alpha(p) = 1$ .

## 1.2. Fibrati e tensori

Dato un fibrato vettoriale  $\pi : E \rightarrow B$  di rango  $k$ , indicheremo con  $\Gamma(E)$  lo spazio delle sue *sezioni* (globali), cioè applicazioni  $s : B \rightarrow E$  di classe  $C^\infty$  tali che  $\pi \circ s = \text{Id}$ .

Un fibrato vettoriale  $\pi : E \rightarrow B$  di rango  $k$  si dice *banale* se esiste un diffeomorfismo  $\psi : E \rightarrow B \times \mathbb{R}^k$  tale che  $\psi : \pi^{-1}(p) \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$  è un isomorfismo di spazi vettoriali, per ogni  $p \in B$ . È facile vedere che questo è equivalente all'esistenza di  $k$  sezioni che per ogni punto di  $B$  sono linearmente indipendenti in  $\pi^{-1}(p)$ . Un *riferimento* per un fibrato  $\pi : E \rightarrow B$  di rango  $k$  su  $U \subseteq B$  è una scelta di  $k$  sezioni linearmente indipendenti in ogni punto di  $U$ , se  $U = B$  il riferimento si dice *globale* e dunque il fibrato è banale.

**DEFINIZIONE 1.2.1.** Una varietà differenziabile  $M$  è *parallelizzabile* se il suo fibrato tangente  $TM$  è banale.

Ricordiamo i seguenti fatti:

- Il prodotto di varietà parallelizzabili è una varietà parallelizzabile.
- Ogni varietà differenziabile di dimensione 3 è parallelizzabile (si veda [26] e le referenze ivi citate).

- Ogni campo vettoriale su una sfera  $\mathbb{S}^{2k}$  di dimensione pari ha almeno uno zero, quindi nessuna di tali sfere è parallelizzabile [92, Theorem 1.41] (si esibisca per esercizio un campo vettoriale mai nullo su ogni sfera di dimensione dispari). In realtà le sole sfere parallelizzabili sono  $\mathbb{S}^1$ ,  $\mathbb{S}^3 = \text{SO}(4)$  e  $\mathbb{S}^7$  (si veda [40]).
- I tori  $\mathbb{T}^n$  e il gruppo speciale ortogonale  $\text{SO}(n)$  sono varietà parallelizzabili, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  (così come tutti i gruppi di Lie, si veda [2]).

I fibrati vettoriali che incontreremo più comunemente sono:

- il fibrato tangente  $TM$ , le cui sezioni sono i campi vettoriali,
- il fibrato cotangente  $TM^*$ , le cui sezioni sono le 1-forme,
- il fibrato  $T_s^r M = \bigotimes^s TM^* \otimes^r TM$ , le cui sezioni sono i campi tensoriali (detti anche semplicemente tensori) di tipo  $(r, s)$  ( $r$  è l'indice di controvarianza e  $s$  l'indice di covarianza,  $T_0^1 M = TM$  e  $T_1^0 M = TM^*$ ). Definiamo inoltre, per convenzione,  $T_0^0 M$  come il fibrato banale  $M \times \mathbb{R}$  le cui sezioni sono le funzioni in  $C^\infty(M)$ ,
- il fibrato delle  $k$ -forme alternanti  $\Lambda^k M$ , le cui sezioni sono le  $k$ -forme differenziali,
- il fibrato delle  $k$ -forme simmetriche  $\Sigma^k M$ .

Se  $T \in \Gamma(T_s^r M)$ , indicheremo con  $T_p$  il tensore nel punto  $p \in M$ , elemento dello spazio vettoriale  $T_s^r M_p = \bigotimes^s T_p M^* \otimes^r T_p M$ . Si ha un naturale isomorfismo lineare tra  $T_s^r M_p$  e lo spazio delle mappe multilineari da  $\bigoplus^s T_p M \oplus^r T_p M^*$  in  $\mathbb{R}$ . In coordinate locali, un tensore  $T$  di tipo  $(r, s)$  è allora dato da

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}},$$

dove

$$T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}\right).$$

Applicando quanto detto sopra, punto per punto di  $M$ , si ha che allora un tensore  $T \in \Gamma(T_s^r M)$  si può vedere come un'applicazione  $C^\infty(M)$ -lineare dal  $C^\infty(M)$ -modulo  $\Gamma(\bigoplus^s TM \oplus^r TM^*)$  in  $C^\infty(M) = \Gamma(M \times \mathbb{R})$ . Dunque ogni tensore è un operatore che rientra nella seguente definizione.

**DEFINIZIONE 1.2.2.** Un *operatore locale* su  $M$  è una funzione  $\mathbb{R}$ -lineare  $P : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$  tra gli spazi delle sezioni di due fibrati vettoriali  $E$  e  $F$  su  $M$  che soddisfa la proprietà che se  $U \subseteq M$  è un insieme aperto dove  $s \in \Gamma(E)$  è nulla, si ha che  $Ps \in \Gamma(F)$  è anch'essa nulla in  $U$ .

Oltre ai tensori su  $M$ , esempi di operatori locali sono gli operatori differenziali a coefficienti  $C^\infty$  che operano sulle funzioni  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , viste come sezioni del fibrato banale  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Ovviamente, se abbiamo un operatore locale  $P : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(F)$  e una sezione  $s \in \Gamma(E)$  che si annulla in un punto  $p \in M$ , non è detto che anche  $Ps \in \Gamma(F)$  si annulli nello stesso punto: si pensi al semplice operatore locale "derivata" tra funzioni di  $\mathbb{R}$ . Questo è invece ovviamente

vero se  $P$  è un tensore. Tale proprietà in realtà caratterizza gli operatori locali  $P$  che sono dei tensori ed è equivalente alla  $C^\infty(M)$ -linearità, come enunciato nella seguente proposizione, che fornisce dunque un “test di tensorialità” (si vedano [2, Proposizione 3.2.16] e [92, Proposition 1.114]).

PROPOSIZIONE 1.2.3 (Test di tensorialità). *Per una funzione  $\mathbb{R}$ -lineare*

$$P : \Gamma(\bigoplus^s TM \bigoplus^r TM^*) \rightarrow C^\infty(M)$$

sono equivalenti:

- $P$  è un tensore in  $\Gamma(T_s^r M)$ ,
- se  $s \in \Gamma(\bigoplus^s TM \bigoplus^r TM^*)$  soddisfa  $s_p = 0$  in  $p \in M$ , si ha  $(Ps)_p = 0$ ,
- $P$  è  $C^\infty(M)$ -lineare.

Sui tensori su una varietà differenziabile  $n$ -dimensionale  $M$  abbiamo le seguenti operazioni “naturali”:

- **Prodotto tensoriale** – Dati  $T \in \Gamma(T_s^r M)$  e  $S \in \Gamma(T_q^p M)$ , il loro prodotto è il tensore  $T \otimes S \in \Gamma(T_{s+q}^{r+p} M)$  di componenti, in coordinate locali,

$$(T \otimes S)_{j_1 \dots j_s \ell_1 \dots \ell_q}^{i_1 \dots i_r k_1 \dots k_p} = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} S_{\ell_1 \dots \ell_q}^{k_1 \dots k_p}.$$

Questo prodotto (associativo) si estende naturalmente allo spazio

$$\bigoplus_{r,s \in \mathbb{N}} \Gamma(T_s^r M)$$

dei tensori su  $M$  rendendolo un'algebra graduata, oltre a essere uno spazio vettoriale reale e un  $C^\infty(M)$ -modulo (così come singolarmente tutti gli spazi  $\Gamma(T_s^r M)$ ).

- **Contrazioni** – Gli operatori di contrazione  $c_q^p : \Gamma(T_s^r M) \rightarrow \Gamma(T_{s-1}^{r-1} M)$ , per  $p \in \{1, \dots, r\}$  e  $q \in \{1, \dots, s\}$ , sono gli operatori locali definiti in coordinate da

$$(c_q^p T)_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{r-1}} = \sum_{\ell=1}^n T_{j_1 \dots j_{q-1} \ell j_q \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_{p-1} \ell i_p \dots i_{r-1}},$$

per ogni tensore  $T \in \Gamma(T_s^r M)$ .

In particolare, la contrazione  $c_1^1$  di un tensore  $T$  di tipo  $(1, 1)$ , che si identifica/rappresenta un operatore lineare  $T : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ , è detta *traccia* di  $T$  (o dell'operatore  $T$ ) denotata con  $\text{tr } T \in C^\infty(M)$ , esplicitamente

$$\text{tr } T = c_1^1 T = \sum_{i=1}^n T_i^i.$$

- **Prodotto interno** – Dato un campo  $X$ , l'operatore prodotto interno  $i_X : \Gamma(T_s^r M) \rightarrow \Gamma(T_{s-1}^r M)$  (con  $s \geq 1$ ) è l'operatore locale definito in coordinate da

$$(i_X T)_{j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_r} = X^\ell T_{\ell j_1 \dots j_{s-1}}^{i_1 \dots i_r},$$

per ogni tensore  $T \in \Gamma(T_s^r M)$ . Definiamo inoltre, per convenzione,  $i_X T = 0$  per ogni  $T \in \Gamma(T_0^r M)$ .

Si noti che  $i_X T = c_1^1(X \otimes T)$  e nel caso particolare in cui  $T = \alpha \in \Gamma(T_s^0 M)$ , che  $i_X \alpha = c_1^1(X \otimes \alpha) = c_1^1(\alpha \otimes X)$ .

- *Pull-back e push-forward* – Data una mappa  $\varphi : M \rightarrow N$  di classe  $C^\infty$  tra due varietà differenziabili  $M$  e  $N$ , possiamo considerare il *pull-back*  $\varphi^* \omega \in \Gamma(T_s^0 M)$  di un tensore  $\omega$  di tipo  $(0, s)$  su  $N$ , con  $s \geq 1$  (completamente covariante, cioè una  $s$ -forma), definito dalla seguente formula:

$$(\varphi^* \omega)_p(v_1, \dots, v_s) = \omega_{\varphi(p)}(d\varphi_p(v_1), \dots, d\varphi_p(v_s))$$

per ogni  $p \in M$  e ogni famiglia di vettori  $v_1, \dots, v_s \in T_p M$ .

Inoltre, per ogni  $f \in C^\infty(M) = \Gamma(T_0^0 M)$  (cioè una 0-forma), poniamo  $\varphi^* f = f \circ \varphi$ .

Abbiamo

$$\varphi^*(\alpha \otimes \beta) = \varphi^* \alpha \otimes \varphi^* \beta$$

per ogni coppia  $\alpha, \beta$  di forme su  $N$  e se  $\psi : N \rightarrow L$  è di classe  $C^\infty$ , si ha  $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$ .

Nel caso la mappa  $\varphi$  sia un diffeomorfismo, possiamo estendere  $\varphi^*$  in modo  $\mathbb{R}$ -lineare a  $\Gamma(T_s^r N)$ , per ogni  $r, s \in \mathbb{N}$ , in modo che le seguenti proprietà siano soddisfatte:

- per ogni  $Y \in \Gamma(TN)$  e per ogni  $p \in M$  si ha

$$(\varphi^* Y)_p = d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}(Y_{\varphi(p)}),$$

- vale  $\varphi^*(T \otimes S) = \varphi^* T \otimes \varphi^* S$  per ogni coppia di tensori  $T, S$ .

Il tensore  $\varphi^* T \in \Gamma(T_s^r M)$  si dice *pull-back* di  $T \in \Gamma(T_s^r N)$ , per la mappa  $\varphi$ .

Sempre assumendo che  $\varphi$  sia un diffeomorfismo, definiamo poi il *push-forward*  $\varphi_* S$  di un tensore  $S \in \Gamma(T_s^r M)$  per la mappa  $\varphi$  come  $(\varphi^{-1})^* S \in \Gamma(T_s^r N)$ . Segue dalla definizione

$$\varphi_*(T \otimes S) = \varphi_* T \otimes \varphi_* S,$$

per ogni coppia  $T, S$  di tensori su  $M$ .

Si osservi che gli operatori  $\varphi^*$  e  $\varphi_*$  commutano con le contrazioni definite sopra.

**OSSERVAZIONE 1.2.4.** Date due carte coordinate  $(U, \varphi) = (U, (x^1, \dots, x^m))$  e  $(\tilde{U}, \tilde{\varphi}) = (\tilde{U}, (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^m))$  di una varietà differenziabile  $M$ , con  $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ ,

consideriamo un tensore  $T \in T_s^r M$  le cui espressioni in coordinate sono date da

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \quad \text{in } U,$$

$$T = \tilde{T}_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} d\tilde{x}^{\beta_1} \otimes \dots \otimes d\tilde{x}^{\beta_s} \otimes \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\alpha_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\alpha_r}} \quad \text{in } \tilde{U}.$$

Poiché si ha

$$\frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^\beta} \quad \text{e} \quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^\alpha} d\tilde{x}^\alpha,$$

segue che le componenti  $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$  e  $\tilde{T}_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}$ , che sono funzioni  $C^\infty$  rispettivamente in  $U$  e  $\tilde{U}$ , sono legate fra loro su  $U \cap \tilde{U}$  da

$$\begin{aligned} T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} &= T\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}, dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}\right) \\ &= T\left(\frac{\partial \tilde{x}^{\beta_1}}{\partial x^{j_1}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\beta_1}}, \dots, \frac{\partial \tilde{x}^{\beta_s}}{\partial x^{j_s}} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{\beta_s}}, \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{\alpha_1}} d\tilde{x}^{\alpha_1}, \dots, \frac{\partial x^{i_r}}{\partial \tilde{x}^{\alpha_r}} d\tilde{x}^{\alpha_r}\right) \\ &= \frac{\partial \tilde{x}^{\beta_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{\beta_s}}{\partial x^{j_s}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial x^{i_r}}{\partial \tilde{x}^{\alpha_r}} \tilde{T}_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r}. \end{aligned}$$

**OSSERVAZIONE 1.2.5.** Data una mappa  $f : M \rightarrow N$  di classe  $C^\infty$  tra due varietà differenziabili  $M$  e  $N$ , con carte coordinate  $(U, \varphi) = (U, (x^1, \dots, x^m))$  e  $(V, \psi) = (V, (y^1, \dots, y^n))$ , rispettivamente attorno a  $p \in M$  e  $f(p) \in N$ , si ha

$$\begin{aligned} (f^* dy^i)_j &= (f^* dy^i) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \\ &= dy^i \left( df \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \right) \\ &= dy^i \left( \left( \frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^k}{\partial x^j} \circ \varphi \right) \frac{\partial}{\partial y^k} \right) \\ &= \frac{\partial \bar{f}^i}{\partial x^j} \circ \varphi, \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con  $\bar{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$  la funzione  $f$  "scritta in coordinate". Non essendoci rischio di equivoco (si veda l'osservazione seguente), con un abuso di notazione, in genere il trattino sopra la funzione  $f$  si omette, da cui possiamo scrivere

$$f^* dy^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j} dx^j,$$

sottintendendo che stiamo considerando la funzione  $f$  tra gli aperti euclidei  $\varphi(U)$  e  $\psi(V)$  e le forme in coordinate. Analogamente, se  $f$  è un diffeomorfismo,

$$\left( f_* \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^i = \left( df \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) \circ f^{-1} \right)^i = dy^i \left( \left( \frac{\partial(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})^k}{\partial x^j} \circ \varphi \circ f^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial y^k} \right) = \frac{\partial \bar{f}^i}{\partial x^j} \circ \varphi \circ f^{-1}$$

e con la stessa convenzione precedente su  $f$  e i campi, possiamo allora scrivere

$$f_* \frac{\partial}{\partial x^j} = \left( \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \circ f^{-1} \right) \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

OSSERVAZIONE 1.2.6. Data una funzione  $f \in C^\infty(M)$ , a prima vista sembrerebbe che ci possa essere un rischio di equivoco denotando con la scrittura  $\frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$  sia  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f$  che  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x^i}(x(p))$ , dove abbiamo indicato con  $\bar{f} = f \circ \varphi^{-1}$  la funzione  $f$  “scritta in coordinate”. Questa è invece una notazione molto potente, in quanto rende l’operazione “da compiere” intuitiva e il risultato è lo stesso, poiché infatti  $\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p f = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x^i}(x(p))$ .

### 1.3. La derivata di Lie

Le *parentesi di Lie* (Lie bracket)  $[X, Y]$  di una coppia di campi vettoriali  $X, Y$  su  $M$  è il campo vettoriale definito da

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= X(Yf) - Y(Xf) \\ &= X^i \frac{\partial(Yf)}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial(Xf)}{\partial x^j} \\ &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left( Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left( X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \\ &= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i}, \end{aligned}$$

per ogni  $f \in C^\infty(M)$ , da cui, in coordinate locali

$$[X, Y]^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}.$$

Questo prodotto ( $\mathbb{R}$ -multilineare, non-associativo e antisimmetrico, infatti  $[Y, X] = -[X, Y]$  e  $[X, X] = 0$ ) rende lo spazio  $\Gamma(TM)$  dei campi vettoriali su  $M$  un’*algebra di Lie* (oltre a essere uno spazio vettoriale reale e un  $C^\infty(M)$ -modulo), cioè si ha anche l’*identità di Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad (1.1)$$

per ogni terna  $X, Y, Z$  di campi vettoriali su  $M$ .

Ricordiamo inoltre che se  $\varphi : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo, si ha

$$[\varphi_* X, \varphi_* Y] = \varphi_* [X, Y]. \quad (1.2)$$

ESERCIZIO 1.3.1. Si mostri che per qualunque coppia di campi coordinati si ha

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] = 0.$$

Definiamo la *derivata di Lie*  $L_X Y$  di un campo  $Y$  rispetto a  $X$  come  $[X, Y]$ . Si noti che  $L_X : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$  è un operatore lineare e locale, ma *non* è un tensore di tipo  $(1, 1)$ , così come non lo è  $LY$ , definito da  $LY(X) = L_X Y$  e nemmeno  $T(\cdot, \cdot) = [\cdot, \cdot]$  (di tipo  $(1, 2)$ ). Si verifichi infatti che  $L_X$ ,  $LY$  e  $T(\cdot, \cdot)$  non sono operatori  $C^\infty(M)$ -lineari.

**DEFINIZIONE 1.3.2.** Estendiamo (si provi che tale estensione è ben definita e unica) la derivata di Lie  $L_X = [X, \cdot]$  definita sui campi vettoriali (cioè su  $\Gamma(T_0^1 M)$ ) a tutta l'algebra dei tensori, imponendo che tale derivata sia  $\mathbb{R}$ -lineare e che per ogni coppia  $r, s$  di interi nonnegativi sia un operatore lineare  $L_X : \Gamma(T_s^r M) \rightarrow \Gamma(T_s^r M)$  (si noti che  $L_X$  mantiene il tipo dei tensori) che soddisfa:

- $L_X f = Xf = df(X)$  per ogni funzione  $f \in C^\infty(M) = \Gamma(T_0^0 M)$ ,
- $L_X(T \otimes S) = L_X T \otimes S + T \otimes L_X S$  per ogni coppia di tensori  $T, S$  ( $L_X$  è una derivazione sull'algebra dei tensori di  $M$ ),
- $L_X \circ c_q^p = c_q^p \circ L_X$  per ogni contrazione  $c_q^p$  ( $L_X$  commuta con le contrazioni).

Segue allora che  $L_X$  è un operatore locale.

**ESEMPIO 1.3.3.** Calcoliamo ad esempio  $L_X \omega$ , con  $\omega \in \Gamma(T_1^0 M) = \Gamma(TM^*)$ , cioè una 1-forma: per ogni campo vettoriale  $Y$ , si ha

$$\begin{aligned} (L_X \omega)(Y) &= c_1^1(L_X \omega \otimes Y) \\ &= c_1^1(L_X(\omega \otimes Y) - \omega \otimes L_X Y) \\ &= c_1^1 \circ L_X(\omega \otimes Y) - c_1^1(\omega \otimes [X, Y]) \\ &= L_X \circ c_1^1(\omega \otimes Y) - \omega([X, Y]) \\ &= X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]). \end{aligned}$$

Per esercizio, si scrivano le componenti di  $L_X \omega$  in coordinate locali.

Si noti che in una carta coordinata si ha

$$(L_X dx^i) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = -dx^i \left( \left[ X, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] \right) = dx^i \left( \frac{\partial X^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k} \right) = \frac{\partial X^i}{\partial x^j},$$

dunque  $L_{\frac{\partial}{\partial x^k}} dx^i = 0$ .

**ESERCIZIO 1.3.4.** Si mostri che se  $T \in \Gamma(T_s^r M)$ , per ogni  $X, X_1, \dots, X_s \in \Gamma(TM)$  e  $\omega_1, \dots, \omega_r \in \Gamma(TM^*)$ , si ha

$$\begin{aligned} (L_X T)(X_1, \dots, X_s, \omega_1, \dots, \omega_r) &= X(T(X_1, \dots, X_s, \omega_1, \dots, \omega_r)) \\ &\quad - \sum_{i=1}^s T(X_1, \dots, X_{i-1}, [X, X_i], X_{i+1}, \dots, X_s, \omega_1, \dots, \omega_r) \\ &\quad - \sum_{j=1}^r T(X_1, \dots, X_s, \omega_1, \dots, \omega_{j-1}, L_X \omega_j, \omega_{j+1}, \dots, \omega_r). \end{aligned}$$

In particolare, se  $\omega \in \Gamma(T_s^0 M)$  e  $X, X_1, \dots, X_s$  sono campi vettoriali,

$$(L_X \omega)(X_1, \dots, X_s) = X(\omega(X_1, \dots, X_s)) - \sum_{i=1}^s \omega(X_1, \dots, X_{i-1}, [X, X_i], X_{i+1}, \dots, X_s). \quad (1.3)$$

**PROPOSIZIONE 1.3.5.** Definendo

$$[L_X, L_Y] = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X,$$

si ha la formula "operatoriale"

$$[L_X, L_Y] = L_{[X, Y]}, \quad (1.4)$$

per ogni coppia di campi vettoriali  $X$  e  $Y$ . Segue dunque,

$$L_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \circ L_{\frac{\partial}{\partial x^j}} - L_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \circ L_{\frac{\partial}{\partial x^i}} = L_{[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}]} = 0,$$

per ogni coppia di campi di una base coordinata locale, per l'Esercizio 1.3.1. Questa formula costituisce una generalizzazione del teorema di Schwarz in  $\mathbb{R}^n$ .

**DIMOSTRAZIONE.** L'operatore  $\mathcal{L} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$  coincide con  $L_{[X, Y]}$  sulle funzioni in  $C^\infty(M)$  e sui campi vettoriali, per l'identità di Jacobi (1.1). Si vede inoltre facilmente che  $\mathcal{L}$  commuta con le contrazioni (poiché  $L_X$  e  $L_Y$  commutano) e che è una derivazione sull'algebra dei tensori di  $M$ , infatti

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(T \otimes S) &= (L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X)(T \otimes S) \\ &= L_X(L_Y T \otimes S + T \otimes L_Y S) - L_Y(L_X T \otimes S + T \otimes L_X S) \\ &= (L_X \circ L_Y)T \otimes S + L_Y T \otimes L_X S + L_X T \otimes L_Y S + T \otimes (L_X \circ L_Y)S \\ &\quad - (L_Y \circ L_X)T \otimes S - L_X T \otimes L_Y S - L_Y T \otimes L_X S - T \otimes (L_Y \circ L_X)S \\ &= (L_X \circ L_Y)T \otimes S + T \otimes (L_X \circ L_Y)S - (L_Y \circ L_X)T \otimes S - T \otimes (L_Y \circ L_X)S \\ &= \mathcal{L}T \otimes S + T \otimes \mathcal{L}S. \end{aligned}$$

Essendo unica l'estensione degli operatori  $\mathcal{L} = L_X \circ L_Y - L_Y \circ L_X$  e  $L_{[X, Y]}$ , essi coincidono allora su tutta l'algebra dei tensori di  $M$ , da cui la formula sopra.  $\square$

### 1.4. Forme differenziali

Una  $k$ -forma differenziale  $\omega$  su una varietà  $M$  di dimensione  $n$  è una sezione del fibrato  $\Lambda^k M$ , sottofibrato di  $T_k^0 M$ , cioè una  $k$ -forma (tensore covariante di tipo  $(0, k)$ ) *alternante* (o *esterna*):

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \text{sgn}(\sigma) \omega(X_1, \dots, X_k),$$

per ogni famiglia di campi vettoriali  $X_1, \dots, X_k$  e per ogni permutazione  $\sigma : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ . Indicheremo con  $\Omega^k M = \Gamma(\Lambda^k M)$  lo spazio vettoriale delle  $k$ -forme differenziali su  $M$ , notando che  $\Omega^0 M = C^\infty(M)$ ,  $\Omega^1 M = \Gamma(TM^*)$  e che  $\Omega^k M = 0$ , se  $k > n$ .

**OSSERVAZIONE 1.4.1.** Formalmente il fibrato delle  $k$ -forme alternanti andrebbe denotato con  $\Lambda_k M$  invece che  $\Lambda^k M$ , simbolo che andrebbe riservato per il fibrato dei  $k$ -vettori alternanti. Si usa invece generalmente questa notazione a causa dell'importanza estremamente maggiore delle  $k$ -forme alternanti. Sottolineiamo che comunque le considerazioni di algebra multilineare che seguono valgono analogamente per i  $k$ -vettori alternanti.

Definiamo il *prodotto wedge* (o *prodotto esterno*)  $\wedge$  di  $\alpha \in \Omega^k M$  e  $\beta \in \Omega^h M$  come la  $(k+h)$ -forma alternante

$$\begin{aligned} (\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{k+h}) &= \frac{1}{k!h!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+h}} \text{sgn}(\sigma) (\alpha \otimes \beta)(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k+h)}) \\ &= \frac{1}{k!h!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+h}} \text{sgn}(\sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+h)}), \end{aligned}$$

dove con  $\mathcal{P}_{k+h}$  abbiamo indicato il gruppo delle permutazioni di  $\{1, \dots, k+h\}$ . In particolare, se  $\alpha$  e  $\beta$  sono due 1-forme, si ha

$$(\alpha \wedge \beta)(X, Y) = \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X).$$

**ESERCIZIO 1.4.2.** Si provi che se  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \Omega^1 M$  e  $X_1, \dots, X_k$  sono campi vettoriali, si ha

$$(\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k)(X_1, \dots, X_k) = \det[\alpha_i(X_j)].$$

Il prodotto wedge è un prodotto associativo che si estende naturalmente allo spazio  $\Omega M = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Omega^k M$  delle forme differenziali su  $M$  rendendolo un'algebra graduata (oltre che uno spazio vettoriale reale e un  $C^\infty(M)$ -modulo) e che soddisfa (anticommutatività)

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kh} \beta \wedge \alpha,$$

per ogni  $\alpha \in \Omega^k M$  e  $\beta \in \Omega^h M$ .

Per  $k \in \{1, \dots, n\}$  si può allora scrivere  $\omega \in \Omega^k M$  in coordinate locali nei

seguenti modi:

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \\ &= \frac{1}{k!} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},\end{aligned}$$

in quanto  $\omega_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}} = \text{sgn}(\sigma) \omega_{i_1 \dots i_k}$ , per ogni  $k$ -upla di indici  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ , inoltre se tale  $k$ -upla contiene un indice ripetuto si ha  $\omega_{i_1 \dots i_k} = 0$ .

ESERCIZIO 1.4.3. Usando la definizione del prodotto wedge si mostri che

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*\alpha \wedge \varphi^*\beta \quad \text{e} \quad L_X(\alpha \wedge \beta) = L_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge L_X\beta,$$

per ogni  $\alpha \in \Omega^k M$  e  $\beta \in \Omega^h M$ . Segue che  $L_X$  è una derivazione sull'algebra delle forme differenziali di  $M$ .

ESERCIZIO 1.4.4. Si mostri che

$$i_X(\alpha \wedge \beta) = i_X\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge i_X\beta,$$

per ogni  $\alpha \in \Omega^k M$  e  $\beta \in \Omega^h M$ .

DEFINIZIONE 1.4.5. Una  $k$ -forma simmetrica  $\omega$  su una varietà  $M$  di dimensione  $n$  è una sezione del fibrato  $\Sigma^k M$ , sottofibrato di  $T_k^0 M$ , cioè una  $k$ -forma (tensore covariante di tipo  $(0, k)$ ) che soddisfa

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \omega(X_1, \dots, X_k),$$

per ogni famiglia di campi vettoriali  $X_1, \dots, X_k$  e ogni permutazione  $\sigma : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ . Indicheremo con  $\mathcal{S}^k M = \Gamma(\Sigma^k M)$  lo spazio vettoriale delle  $k$ -forme simmetriche su  $M$ , notando che  $\mathcal{S}^0 M = C^\infty(M)$ ,  $\mathcal{S}^1 M = \Gamma(TM^*)$ . Poniamo inoltre  $\mathcal{S}M = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{S}^k M$ .

ESERCIZIO 1.4.6. Si considerino gli operatori lineari che operano sulle  $k$ -forme  $\omega$  come segue:

$$\begin{aligned}\text{Sym}(\omega)(X_1, \dots, X_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \in \mathcal{S}^k M, \\ \text{Ant}(\omega)(X_1, \dots, X_k) &= \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_k} \text{sgn}(\sigma) \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \in \Omega^k M\end{aligned}$$

e si mostri che sono l'identità rispettivamente sulle  $k$ -forme simmetriche e sulle  $k$ -forme differenziali.

ESERCIZIO 1.4.7. Notando il legame esistente tra il prodotto wedge e l'operatore  $Ant$ , si definisca, analogamente al prodotto wedge, il *prodotto simmetrico*  $\odot$  di  $\alpha \in \mathcal{S}^k M$  e  $\beta \in \mathcal{S}^h M$  e si noti che esso permette di definire un prodotto associativo e commutativo che rende lo spazio  $\mathcal{S}M$  delle forme simmetriche su  $M$  un'algebra graduata (oltre che uno spazio vettoriale reale e un  $C^\infty(M)$ -modulo) su cui la derivata di Lie è una derivazione.

ESERCIZIO 1.4.8. Si mostri che se  $\omega \in \mathcal{S}^k M$ , le sue componenti in coordinate locali soddisfano  $\omega_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(k)}} = \omega_{i_1 \dots i_k}$  per ogni famiglia di indici  $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$ . Si discuta poi la possibile definizione di tensori simmetrici/antisimmetrici generali  $T \in \Gamma(T_s^r M)$ .

OSSERVAZIONE 1.4.9. Se  $\omega$  è una 2-forma, in coordinate locali si ha

$$\begin{aligned} Sym(\omega) &= (\omega_{ij} dx^i \otimes dx^j + \omega_{ji} dx^i \otimes dx^j) / 2 = \frac{\omega_{ij} + \omega_{ji}}{2} dx^i \otimes dx^j \\ Ant(\omega) &= (\omega_{ij} dx^i \otimes dx^j - \omega_{ji} dx^i \otimes dx^j) / 2 = \frac{\omega_{ij} - \omega_{ji}}{2} dx^i \otimes dx^j. \end{aligned}$$

Si può quindi sempre "decomporre"  $\omega$  nella sua *parte simmetrica*  $Sym(\omega)$  e *antisimmetrica*  $Ant(\omega)$  la cui somma è  $\omega$ , cioè  $\omega = Sym(\omega) + Ant(\omega)$ .

DEFINIZIONE 1.4.10. Su ogni spazio di forme differenziali  $\Omega^k M$  si definisce (unicamente) l'operatore locale *differenziale esterno*  $d : \Omega^k M \rightarrow \Omega^{k+1} M$  tale che:

- per ogni  $f \in \Omega^0 M = C^\infty(M)$  si ha che  $df$  è il differenziale della funzione  $f$  (che è una 1-forma, cioè un elemento di  $\Omega^1 M = \Gamma(TM^*)$ ),
- $d^2 = d \circ d = 0$ ,
- si ha  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ , per ogni  $\alpha \in \Omega^k M$  e  $\beta \in \Omega^h M$ .

In coordinate locali, si ha

$$\begin{aligned} d\omega &= d\left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \omega_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} d\omega_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \end{aligned}$$

ESEMPIO 1.4.11. Calcoliamo ad esempio  $d\omega$  per la 1-forma differenziale  $\omega = \omega_i dx^i$ : per ogni coppia di campi vettoriali  $X, Y$ , si ha

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y) &= d(\omega_i dx^i)(X, Y) \\ &= (d\omega_i \wedge dx^i)(X, Y) \\ &= d\omega_i(X) dx^i(Y) - d\omega_i(Y) dx^i(X) \\ &= X\omega_i Y^i - Y\omega_i X^i \\ &= X(\omega_i Y^i) - Y(\omega_i X^i) - \omega_i X Y^i + \omega_i Y X^i \\ &= X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]). \end{aligned}$$

Per esercizio, si scrivano le componenti di  $d\omega$  in coordinate locali.

PROPOSIZIONE 1.4.12. *Il differenziale esterno soddisfa le seguenti proprietà:*

- per ogni mappa  $\varphi : M \rightarrow N$  di classe  $C^\infty$ , si ha  $\varphi^* \circ d = d \circ \varphi^*$ ,
- per ogni campo vettoriale  $X$  si ha

$$L_X \circ d = d \circ L_X \quad e \quad L_X = d \circ i_X + i_X \circ d.$$

DIMOSTRAZIONE. Il primo punto segue dalla prima formula nell'Esercizio 1.4.3 e dalla seconda e terza proprietà nella definizione del differenziale esterno, considerando coordinate locali e argomentando per induzione sul grado delle forme (lo si provi per esercizio).

La prima formula al secondo punto è conseguenza immediata della seconda e della proprietà  $d^2 = 0$ .

La seconda formula si mostra facendo vedere che i due operatori locali  $L_X$  e  $d \circ i_X + i_X \circ d$  coincidono sulle funzioni  $C^\infty$  e sulle 1-forme e che sono entrambi derivazioni sull'algebra delle forme differenziali di  $M$  (si vedano gli Esercizi 1.4.3 e 1.4.4), dunque coincidono su tutta tale algebra, argomentando per induzione sul grado delle forme (una volta scritte in coordinate locali).  $\square$

ESERCIZIO 1.4.13. Si mostri che se  $\omega \in \Omega^k M$  e  $X_0, X_1, \dots, X_k$  sono campi vettoriali, si ha

$$\begin{aligned} d\omega(X_0, X_1, \dots, X_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k), \end{aligned}$$

dove il simbolo  $\widehat{X}_i$  indica l'assenza di tale campo dagli argomenti di  $\omega$ .

DEFINIZIONE 1.4.14. Una varietà differenziabile si dice *orientabile* se ha un atlante di carte coordinate tale che gli jacobiani delle mappe di transizione (che non si annullano mai) sono positivi, tale atlante si dice allora *orientato*. Due atlanti orientati sono *equiorientati* se la loro unione è sempre un atlante orientato. Una *orientazione* di  $M$  è una classe di equivalenza di atlanti orientati con tale relazione di equiorientazione. Una varietà munita di un'orientazione è detta *orientata*.

Si può mostrare che ogni varietà orientabile e connessa ha esattamente due possibili orientazioni e che una varietà non orientabile ha un rivestimento (differenziale) canonico di grado due che è una varietà orientabile, si veda la discussione prima della Proposizione 3.25 in [117]. Ricordando che ogni rivestimento di uno spazio topologico semplicemente connesso è un omeomorfismo, segue che ogni varietà differenziabile semplicemente connessa è orientabile.

DEFINIZIONE 1.4.15. Diremo che un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  tra due varietà differenziabili e orientate *preserva l'orientazione* (è *orientation-preserving*) se l'atlante immagine  $(f(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ f^{-1})$  dell'atlante orientato  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  di  $M$  e l'atlante orientato di  $N$  sono equiorientati. Viceversa, diremo che  $f$  *non preserva l'orientazione* (è *orientation-reversing*) se tale atlante immagine e l'atlante che definisce l'orientazione opposta di  $N$  sono equiorientati.

ESERCIZIO 1.4.16. Si provi che un diffeomorfismo  $f : M \rightarrow N$  preserva l'orientazione se e solo se in carte coordinate  $(U, \varphi)$  di  $M$  e  $(V, \psi)$  di  $N$ , appartenenti a rispettivi atlanti orientati e per cui la mappa  $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$  sia ben definita, ha jacobiano positivo. Viceversa, tale jacobiano è negativo se e solo se  $f$  è orientation reversing.

Ciò chiaramente mostra che la definizione precedente è ben posta.

DEFINIZIONE 1.4.17. Una *forma di volume* sulla varietà differenziabile  $n$ -dimensionale  $M$  è una  $n$ -forma differenziale mai nulla  $\omega \in \Omega^n M$ .

Si osservi che se  $\omega$  e  $\omega'$  sono due forme di volume su  $M$ , allora esiste una funzione  $f \in C^\infty(M)$  mai nulla tale che  $\omega' = f\omega$ .

PROPOSIZIONE 1.4.18. Sia  $M$  una varietà differenziabile connessa,  $n$ -dimensionale. Sono equivalenti:

- $M$  è orientabile,
- esiste una forma di volume su  $M$ ,
- il fibrato  $\Lambda^n M$  è banale.

Sia ora  $\omega \in \Omega^n M$  con supporto compatto contenuto in  $U \subseteq M$  aperto, dove  $(U, \varphi)$  è una carta coordinata,  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , appartenente a un atlante orientato della varietà differenziabile  $n$ -dimensionale orientata  $M$ . Segue che

$$(\varphi^{-1})^* \omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

è una  $n$ -forma differenziale su  $\mathbb{R}^n$  (una volta estesa a zero fuori da  $\varphi(U)$ ), per una certa funzione  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$  a supporto compatto. Definiamo allora

$$\int_M \omega = \int_{\mathbb{R}^n} f dx^1 \cdots dx^n,$$

che si vede facilmente essere indipendente dalla carta coordinata scelta (contenente il supporto di  $\omega$ ) dell'atlante orientato (lo si provi per esercizio).

Nel caso generale, se  $\omega$  è una  $n$ -forma differenziale con supporto compatto, consideriamo una partizione dell'unità  $\{\rho_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}\}$  associata a un ricoprimento in aperti coordinati  $\{U_\alpha\}$  dell'atlante orientato di  $M$  e definiamo

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_M \rho_\alpha \omega.$$

Si mostra allora che questo integrale è indipendente dalla particolare partizione dell'unità e dall'atlante orientato che si sono scelti.

OSSERVAZIONE 1.4.19. Se si considera un atlante orientato che induce la stessa orientazione su  $M$ , l'integrale  $\int_M \omega$  è invariato, mentre cambia segno se consideriamo un atlante orientato che induce su  $M$  l'orientazione opposta.

Le forme differenziali  $\omega$  tali che  $d\omega = 0$  sono dette *chiuse*, mentre quelle per cui esiste una forma differenziale  $\alpha$  tale che  $d\alpha = \omega$ , *esatte*. Per la proprietà  $d^2 = 0$  del differenziale esterno, che implica che ogni forma esatta è chiusa, la seguente definizione è ben posta.

DEFINIZIONE 1.4.20 (Gruppi di coomologia di de Rham). Il  $k$ -esimo gruppo di coomologia di de Rham è definito come lo spazio vettoriale reale (quoziente)

$$H_{DR}^k(M) = \{\omega \in \Omega^k M : d\omega = 0\} / d\Omega^{k-1} M,$$

per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , con  $k \geq 1$ .

Ponendo  $\Omega^{-1}M = 0$ , si ha  $H_{DR}^0(M) = \{f \in C^\infty(M) : df = 0\}$ , cioè le funzioni  $C^\infty$  localmente costanti, spazio vettoriale isomorfo a  $\mathbb{R}^m$ , con  $m \in \mathbb{N}$  il numero delle componenti connesse di  $M$ . Notiamo inoltre che  $H_{DR}^k(M) = 0$  se  $k > n$ , dove  $n$  è la dimensione della varietà  $M$ .

La dimensione  $b_k(M)$  dello spazio vettoriale reale  $H_{DR}^k(M)$  è detto  $k$ -esimo numero di Betti di  $M$ .

In  $\mathbb{R}^n$  si ha  $H_{DR}^0(M) = \mathbb{R}$  e  $H_{DR}^k(M) = 0$ , per ogni  $k \in \mathbb{N}$  con  $k \geq 1$ . Più in generale, si ha il seguente risultato (si veda [2, Sezione 5.3]) e relativo corollario, che segue dal primo punto della Proposizione 1.4.12.

TEOREMA 1.4.21 (Lemma di Poincaré). Sia  $U$  un aperto stellato di  $\mathbb{R}^n$  e  $\omega \in \Omega^k U$ , con  $k \geq 1$ , chiusa. Allora esiste  $\alpha \in \Omega^{k-1} U$  tale che  $d\alpha = \omega$ , cioè  $H_{DR}^k(M) = 0$  (ogni forma differenziale chiusa su  $\mathbb{R}^n$  è esatta).

COROLLARIO 1.4.22. Per ogni  $p \in M$ , c'è un intorno aperto  $U$  di  $p$  in  $M$  tale che se  $\omega \in \Omega^k U$ , con  $k \geq 1$ , è chiusa, allora esiste  $\alpha \in \Omega^{k-1} U$  tale che  $d\alpha = \omega$ . In altre parole, ogni forma chiusa su  $M$  è localmente esatta.

OSSERVAZIONE 1.4.23. Si può mostrare che gli spazi vettoriali  $H_{DR}^k(M)$  sono degli invarianti topologici di  $M$  e che se  $M$  è una varietà differenziabile  $n$ -dimensionale, compatta, connessa e orientabile, si ha  $H_{DR}^n(M) = \mathbb{R}$ . Se  $M$  è orientabile e non compatta oppure non orientabile,  $H_{DR}^n(M) = 0$  (si veda [2, Corollario 5.6.9]). Inoltre, se  $M$  è semplicemente connessa, si ha  $H_{DR}^1(M) = 0$ . Menzioniamo infine che  $H_{DR}^k(\mathbb{S}^n) = 0$  per  $k \neq 0, n$ , si veda [2, Esempio 5.3.7].

OSSERVAZIONE 1.4.24. Si dimostra che la caratteristica di Eulero–Poincaré di  $M$  (si veda [149], per esempio), che è un invariante topologico di  $M$ , è data da

$$\chi(M) = b_0(M) - b_1(M) + \cdots + (-1)^n b_n(M).$$

Nel caso speciale di una superficie compatta, connessa e orientabile  $S$ , si ha  $b_0(S) = b_2(S) = 1$ , dunque  $\chi(S) = 2 - b_1(S)$ . Valendo  $\chi(S) = 2 - 2g(S)$ , dove  $g(S)$  è il *genere* di  $S$  (il numero di "buchi"), abbiamo che la dimensione  $b_1(S)$  di  $H_{DR}^1(S)$  è uguale a due volte  $g(S)$ . Per esempio,  $H_{DR}^1(\mathbb{S}^2) = 0$  e  $H_{DR}^1(\mathbb{T}) = \mathbb{R}^2$ , dove  $\mathbb{T} = \mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  è il toro (la sfera ha genere zero e il toro uno).



FIGURA 1.1 Superfici di genere 0, 1, 2 e 3.

### 1.5. Campi vettoriali e flussi

Dati un campo vettoriale  $X$  e un punto  $p$  di una varietà differenziabile  $n$ -dimensionale  $M$ , possiamo considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)} \\ \gamma(0) = p \end{cases}$$

per una curva  $\gamma : I \rightarrow M$ , su un intervallo  $I \subseteq \mathbb{R}$  contenente 0. Una tale curva  $\gamma$  si dice *curva integrale* di  $X$  uscente da  $p$ .

Argomentando in carte locali con il teorema di esistenza e unicità (e di dipendenza  $C^\infty$ ) delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie (si veda [170]), si mostra che tale problema ha sempre una soluzione  $C^\infty$  (unica)  $\gamma_p : I_p \rightarrow M$  in un intervallo aperto  $I_p \subseteq \mathbb{R}$  "massimale", che dipende in modo  $C^\infty$  dal punto  $p$  e dal campo  $X$ . Inoltre si verifica una e una sola delle seguenti situazioni:  $\gamma_p$  è costante, o è iniettiva, oppure è periodica non costante.

Detta  $D \subseteq M \times \mathbb{R}$  l'unione degli insiemi  $\{p\} \times I_p$ , al variare di  $p$  in  $M$ , si mostra che  $D$  è un aperto di  $M \times \mathbb{R}$  contenente  $M \times \{0\}$ , dunque per ogni  $(p_0, t_0) \in D$  esistono un intorno aperto  $U$  di  $p_0$  in  $M$  e un intervallo aperto  $I \subseteq \mathbb{R}$  contenente  $t_0$ , tali che per ogni  $q \in U$  le soluzioni  $\gamma_q$  sono definite in  $I$  (almeno).

La mappa  $\theta : (q, t) \in D \mapsto \gamma_q(t) \in M$  si dimostra essere  $C^\infty$  ed è chiamata *flusso locale* o semplicemente *flusso* di  $X$ . Nel caso in cui  $D$  è  $M \times \mathbb{R}$  la chiameremo invece *flusso globale* di  $X$ . Se la varietà  $M$  è compatta o se il campo  $X$  è a supporto compatto, è facile vedere che il flusso di  $X$  è globale.

Per ogni  $t \in \mathbb{R}$  tale che l'insieme aperto  $D_t = \{p \in M : t \in I_p\}$  sia non vuoto, l'applicazione  $\theta_t : D_t \rightarrow D_{-t}$  data da  $\theta_t(p) = \theta(p, t)$  è un diffeomorfismo con inversa  $\theta_{-t}$ ,  $\theta_0 = \text{Id}$ , inoltre se è ben definita la composizione  $\theta_t \circ \theta_{t'}$ , il suo dominio è contenuto (in generale strettamente) in  $D_{t+t'}$  e su di esso vale  $\theta_t \circ \theta_{t'} = \theta_{t+t'}$ . La famiglia di funzioni  $\theta_t$  è chiamata *gruppo locale ad un parametro* di  $X$ , sebbene in generale non sia un gruppo a meno che il flusso non sia globale. In quest'ultimo caso chiameremo  $\theta_t$  *gruppo ad un parametro* di  $X$ .

**PROPOSIZIONE 1.5.1.** *Se  $\varphi : M \rightarrow N$  è un diffeomorfismo e  $X$  un campo vettoriale su  $M$  con gruppo locale ad un parametro  $\theta_t$ , allora  $\varphi \circ \theta_t \circ \varphi^{-1}$  è il gruppo locale ad un parametro di  $\varphi_*X$ .*

Si può dimostrare la seguente relazione (1.5) con la derivata di Lie che ne giustifica il nome, essendo dunque un modo di "derivare" un campo nella direzione di un altro. Sfortunatamente, malgrado soddisfi il teorema di Schwarz, cioè l'invarianza rispetto all'ordine in cui sono prese le derivate iterate, visto nella Proposizione 1.3.5, la mancanza della  $C^\infty(M)$ -linearità di  $(X, Y) \mapsto L_X Y = [X, Y]$  in  $X$  (e l'indipendenza dalla "struttura metrica" che andremo a considerare sulle varietà, essendo infatti la derivata di Lie legata solo alla struttura differenziale) non la rende lo strumento adatto alla geometria riemanniana, quanto invece la *derivata covariante* che introdurremo nel Capitolo 3 (che al contrario, non soddisferà il teorema di Schwarz).

**PROPOSIZIONE 1.5.2.** *Siano  $X$  e  $Y$  due campi vettoriali su  $M$  e  $\theta_t$  il gruppo locale ad un parametro di  $X$ , allora*

$$\left. \frac{d}{dt} (\theta_{t*} Y)_p \right|_{t=0} = -[X, Y]_p \quad (1.5)$$

per ogni  $p \in M$ .

**ESERCIZIO 1.5.3.** *Sia  $X$  un campo vettoriale su  $M$  e  $\theta_t$  il gruppo locale ad un parametro di  $X$ . Se  $T \in \Gamma(T_s M)$ , si mostri che*

$$\left. \frac{d}{dt} (\theta_{t*} T)_p \right|_{t=0} = -L_X T_p$$

per ogni  $p \in M$ .

Inoltre, si può mostrare che i flussi locali associati a due campi vettoriali  $X, Y$ , rispettivamente  $\theta_t$  e  $\sigma_s$ , commutano fra loro (cioè  $\theta_t \circ \sigma_s = \sigma_s \circ \theta_t$ , per  $t, s$  in un intorno di  $0 \in \mathbb{R}$ ) se e solo se  $[X, Y] = 0$  localmente (si veda [2, Proposizione 3.7.3]).

## 1.6. Sottovarietà

**DEFINIZIONE 1.6.1.** Diremo che una mappa  $f : M \rightarrow N$  è un'immersione se il differenziale  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  è iniettivo per ogni  $p \in M$ . Se inoltre  $f$  è un omeomorfismo con la sua immagine  $f(M) \subseteq N$  (quindi è iniettiva), diremo che

$f$  è un *embedding*. Infine, diremo che  $f$  è una *sommersione* se il suo differenziale è surgettivo in ogni punto (talvolta, in tale caso,  $N$  si dice *base* e  $M$  *spazio totale*).

Argomentando in carte locali, si può vedere facilmente che localmente un'immersione  $f : S \rightarrow M$  è sempre un embedding. Inoltre, se  $f$  è iniettiva e *propria* (la controimmagine di ogni compatto è compatta) è un embedding (globale). Ciò è sempre vero se  $S$  è compatta. Si mostrino queste affermazioni per esercizio.

**OSSERVAZIONE 1.6.2.** Si noti che una curva  $\gamma : I \rightarrow M$ , con  $I \subseteq \mathbb{R}$  è un'immersione se e solo se  $\dot{\gamma} = d\gamma(\partial_1)$  non si annulla mai. In tale caso si dice che la curva è *regolare*.

Introduciamo ora le mappe a rango costante e il più importante teorema che le riguarda, conseguenza del teorema della funzione inversa. Nel seguito, utilizzeremo tale teorema per munire le immagini di embedding oppure di immersioni iniettive di un'opportuna struttura differenziale.

**DEFINIZIONE 1.6.3.** Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa  $C^\infty$  tra due varietà differenziabili. Il *rango* di  $f$  in  $p \in M$  è il rango del differenziale  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ .

**TEOREMA 1.6.4 (Teorema del rango).** Siano  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  e  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  aperti e  $f : U \rightarrow V$  una mappa di rango costante  $k \geq 0$ . Allora per ogni  $p \in U$ , esistono una carta coordinata  $(U_0, \varphi)$  per  $\mathbb{R}^m$  centrata in  $p$  e una carta coordinata  $(V_0, \psi)$  per  $\mathbb{R}^n$  centrata in  $f(p)$ , con  $U_0 \subseteq U$  e  $f(U_0) \subseteq V_0 \subseteq V$ , tali che

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$$

e  $\psi(f(U_0)) = \psi(V_0) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\} \times \dots \times \{0\})$ .

**COROLLARIO 1.6.5.** Siano  $M$  una varietà differenziabile  $m$ -dimensionale e  $N$  una  $n$ -dimensionale e  $f : M \rightarrow N$  una mappa di rango costante  $k \geq 0$ . Allora per ogni  $p \in M$ , esistono una carta coordinata  $(U, \varphi)$  di  $M$  centrata in  $p$  e una carta coordinata  $(V, \psi)$  di  $N$  centrata in  $f(p)$ , con  $f(U) \subseteq V$ , tali che

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)$$

e  $\psi(f(U)) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^k \times \{0\} \times \dots \times \{0\})$ . In particolare,

- se  $f : M \rightarrow N$  è un'immersione (quindi di rango costante  $m \leq n$ ), per ogni  $p \in M$ , esistono una carta coordinata  $(U, \varphi)$  di  $M$  centrata in  $p$  e una carta coordinata  $(V, \psi)$  di  $N$  centrata in  $f(p)$ , con  $f(U) \subseteq V$ , tali che

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0)$$

e  $\psi(f(U)) = \psi(V) \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\} \times \dots \times \{0\})$ ,

- se  $f : M \rightarrow N$  è una sommersione (quindi di rango costante  $n \leq m$ ), per ogni  $p \in M$ , esistono una carta coordinata  $(U, \varphi)$  di  $M$  centrata in  $p$  e una carta coordinata  $(V, \psi)$  di  $N$  centrata in  $f(p)$ , con  $f(U) \subseteq V$ , tali che

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^n).$$

ESERCIZIO 1.6.6. Si mostri che se  $f : S \rightarrow M$  è un embedding di una varietà  $k$ -dimensionale  $S$  in una varietà  $n$ -dimensionale  $M$  e  $p \in f(S)$ , esiste una carta coordinata  $(V, \psi)$  di  $M$  centrata in  $p$ , tale che

$$\psi(f(S) \cap V) = \{x \in \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n : x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}.$$

In particolare,  $(f(S) \cap V, \pi \circ \psi|_{f(S) \cap V})$  è una carta coordinata per  $f(S)$  in  $p$  (nella topologia indotta su  $f(S)$  da  $M$ ), dove  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  è la proiezione ortogonale sulle prime  $k$  componenti di  $\mathbb{R}^n$ . Si concluda dunque che è possibile munire  $f(S)$  di una struttura differenziale (unica) rispetto alla quale  $f : S \rightarrow f(S)$  è un diffeomorfismo e per la quale  $\iota : f(S) \hookrightarrow M$  è un embedding.

ESERCIZIO 1.6.7. Usando il fatto che localmente ogni immersione è un embedding e ragionando localmente come nell'Esercizio 1.6.6, si mostri che se  $f : S \rightarrow M$  un'immersione iniettiva, allora è possibile ottenere una struttura differenziale di  $f(S)$  (unica) rispetto alla quale  $f : S \rightarrow f(S)$  è un diffeomorfismo e per la quale  $\iota : f(S) \hookrightarrow M$  è un'immersione.

Essendo  $f : S \rightarrow f(S)$  un diffeomorfismo in entrambi i due casi considerati in questi esercizi, la struttura differenziale che si ottiene su  $f(S)$  coincide con quella data dalle carte  $(f(U), \varphi \circ f|_U^{-1})$ , dove con  $(U, \varphi)$  indichiamo le carte coordinate dell'atlante di  $S$ . La differenza è che nel primo caso gli aperti delle carte coordinate sono dati da restrizioni degli aperti delle carte di  $M$ , mentre nel secondo da questi ultimi intersecati con le immagini degli aperti di  $S$  per la mappa  $f$ , infatti in questo caso potrebbero esserci punti  $p \in f(S)$  tali che non esista una carta coordinata  $(V, \psi)$  di  $M$  centrata in  $p$ , tale che

$$\psi(f(S) \cap V) = \{x \in \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n : x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}$$

(si veda la Figura 1.2). Questo implica che nel caso di un embedding, la topologia su  $f(S)$  ottenuta per immagine diretta della topologia di  $S$  mediante  $f$  e la topologia indotta da  $M$  coincidono. Invece, nel caso di un'immersione iniettiva che non sia un embedding, la topologia su  $f(S)$  è strettamente più fine di quella indotta da  $M$  (la mappa inclusione è continua). In particolare, la mappa  $f$  non è un omeomorfismo tra  $S$  e  $f(S)$  con la topologia indotta.

DEFINIZIONE 1.6.8. Una *sottovarietà (regolare)*  $S$  di una varietà differenziabile  $M$  è un sottoinsieme di  $M$  con una struttura di varietà differenziabile tale che l'inclusione  $\iota : S \hookrightarrow M$  sia un embedding.

Una *sottovarietà immersa* è l'immagine  $f(S)$  di una varietà differenziabile  $S$  via un'immersione iniettiva  $f : S \rightarrow M$ , con la struttura indotta discussa nell'Esercizio 1.6.7. Nel seguito, nel caso in cui l'immersione iniettiva sia rilevante,

diremo (con un abuso di notazione) che  $f : S \rightarrow M$  è una sottovarietà immersa, altrimenti parleremo di una sottovarietà immersa  $S \subseteq M$ , sottintendendo che l'immersione è data dalla mappa inclusione  $\iota : S \hookrightarrow M$ .

La differenza tra la dimensione di  $M$  e di  $S$  è detta *codimensione* di  $S$  in  $M$ . Una sottovarietà (immersa) di codimensione uno è detta *ipersuperficie* (immersa).

OSSERVAZIONE 1.6.9. Segue ovviamente dalla definizione che ogni sottovarietà è una sottovarietà immersa. Inoltre, dall'Esercizio 1.6.6 possiamo concludere che le immagini di embedding, con la struttura differenziale ivi introdotta, sono sottovarietà. Dunque, se  $f : S \rightarrow M$  è un'immersione (anche non iniettiva), per ogni punto  $p \in S$  esiste un intorno aperto  $U \subseteq S$  di  $p$  tale che  $f(U)$  è una sottovarietà di  $M$ .

Per l'Esercizio 1.6.6, una sottovarietà  $k$ -dimensionale  $S \subseteq M$  di una varietà differenziabile  $M$  di dimensione  $n$ , ammette nell'intorno di ogni suo punto  $p \in S$  una carta ottenuta da una della varietà ambiente, cioè esiste una carta coordinata  $(V, \psi)$  di  $M$  centrata in  $p \in V$ , tale che

$$\psi(S \cap V) = \{x \in \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n : x^{k+1} = \dots = x^n = 0\}$$

e  $(S \cap V, \pi \circ \psi|_{S \cap V})$  è una carta coordinata per  $S$  in un intorno di  $p$ , dove  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  è la proiezione ortogonale sulle prime  $k$  componenti di  $\mathbb{R}^n$ . La carta  $(V, \psi)$  di  $M$  si dice che è *adattata* alla sottovarietà  $S$ . Un atlante di  $M$  costituito da carte che se intersecano la sottovarietà  $S$  allora sono adattate, si dice *adattato* a  $S$ .

OSSERVAZIONE 1.6.10. La discussione fatta in precedenza sulla differenza tra embedding e immersioni iniettive si applica chiaramente alle sottovarietà. Vediamo nella figura che segue una curva  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  che nel primo caso è un'immersione non iniettiva, nel secondo un'immersione iniettiva ma non un embedding e nel terzo un embedding. Negli ultimi due casi il suo supporto è dunque rispettivamente, una sottovarietà immersa (ma non una sottovarietà) e una sottovarietà di  $\mathbb{R}^2$ .

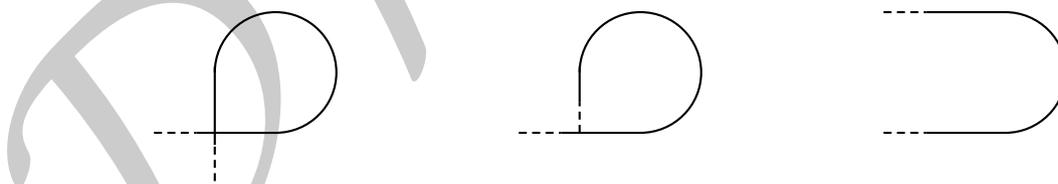


FIGURA 1.2

Si noti come nel secondo caso la topologia di  $\gamma(\mathbb{R})$  data dalla sua struttura differenziale è più fine di quella indotta da  $M$  (si considerino gli intorni del punto dove la curva si avvicina a se stessa nelle due topologie).

ESERCIZIO 1.6.11. Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa  $C^\infty$  tra due varietà differenziabili. Se  $S$  è una sottovarietà oppure una sottovarietà immersa di  $M$ , allora segue facilmente che  $f|_S : S \rightarrow N$  è ancora una mappa  $C^\infty$ . Se  $\tilde{S}$  è invece una sottovarietà immersa di  $N$  tale che  $f(M) \subseteq \tilde{S}$  e  $f : M \rightarrow \tilde{S}$  è continua, utilizzando il Corollario 1.6.5, si mostri che  $f : M \rightarrow \tilde{S}$  è ancora una mappa  $C^\infty$ . In particolare se  $\tilde{S}$  è una sottovarietà di  $N$  tale che  $f(M) \subseteq \tilde{S}$ , allora  $f : M \rightarrow \tilde{S}$  è una mappa  $C^\infty$ .

Se  $S$  è una sottovarietà di una varietà differenziabile  $M$  e  $p \in S$ , il differenziale  $d\iota_p : T_p S \hookrightarrow T_p M$  realizza  $T_p S$  come il sottospazio vettoriale  $d\iota_p(T_p S)$  di  $T_p M$ . Analogamente, per una sottovarietà immersa, se abbiamo un'immersione iniettiva  $f : S \rightarrow M$ , il differenziale  $df_p : T_p S \rightarrow T_{f(p)} M$  identifica  $T_p S$  con il sottospazio vettoriale  $df_p(T_p S)$  di  $T_{f(p)} M$  (identificheremo anche il tangente  $T_{f(p)} f(S)$  di  $f(S)$  in  $f(p)$  con il sottospazio vettoriale  $df_p(T_p S)$  di  $T_{f(p)} M$ ). Infine, anche per un'immersione non necessariamente iniettiva  $f : S \rightarrow M$ , per l'Osservazione 1.6.9, il differenziale  $df_p : T_p S \rightarrow T_{f(p)} M$  identifica  $T_p S$  con il sottospazio vettoriale  $df_p(T_p S)$  di  $T_{f(p)} M$ , per ogni  $p \in S$ .

ESERCIZIO 1.6.12. Si mostri che, con l'identificazione tra i tangenti di cui sopra, se  $S$  è una sottovarietà di  $M$  e  $X, Y$  sono campi vettoriali su  $S$  che localmente si estendono a campi  $\tilde{X}, \tilde{Y}$  su  $M$ , si ha  $[X, Y]^S = [\tilde{X}, \tilde{Y}]^M$  in ogni punto di  $S$ . Si provi che lo stesso vale nel caso in cui  $S$  sia una sottovarietà immersa di  $M$ .

DEFINIZIONE 1.6.13. Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa  $C^\infty$  tra due varietà differenziabili. Un punto  $p \in M$  si dice *punto critico* di  $f$  se il differenziale  $df_p : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  non è surgettivo. Un *valore critico* di  $f$  è l'immagine di un punto critico, un *valore regolare* è un punto di  $f(M)$  che non è un valore critico. Indichiamo con  $\text{Crit}(f)$  l'insieme dei punti critici di  $f$ . Infine, un *insieme di livello* di  $f$  è un sottoinsieme di  $M$  della forma  $f^{-1}(q)$ , con  $q \in f(M) \subseteq N$ .

Chiaramente, se  $N = \mathbb{R}$ , i punti critici di una funzione  $f \in C^\infty(M)$  sono quelli dove  $df$  si annulla.

PROPOSIZIONE 1.6.14. Sia  $f : M \rightarrow N$  una mappa  $C^\infty$  tra due varietà differenziabili con  $\dim M = n + k \geq n = \dim N$ . Allora:

- per ogni  $q \in f(M)$  l'insieme  $M_q = f^{-1}(q) \setminus \text{Crit}(f)$  è una sottovarietà  $k$ -dimensionale di  $M$ . In particolare, se  $q$  è un valore regolare allora  $f^{-1}(q)$  è una sottovarietà  $k$ -dimensionale di  $M$ ,
- se  $p \in M_q$  lo spazio tangente di  $M_q$  in  $p$  coincide con il kernel di  $df_p$ . In particolare, se  $N = \mathbb{R}^n$  e  $f \in C^\infty(M; \mathbb{R}^n)$ , allora lo spazio tangente di  $M_q$  in  $p$  è dato dai vettori  $X_p \in T_p M$  tali che  $X_p f^i = 0$  per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

ESERCIZIO 1.6.15. Si mostri che se  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $q \in \mathbb{R}$  è un valore regolare, allora  $f^{-1}(q)$  è un'ipersuperficie orientabile di  $\mathbb{R}^n$ .

**TEOREMA 1.6.16 (Teorema di Whitney – 1935).** *Ogni varietà differenziabile di dimensione  $n$  ha un embedding proprio in  $\mathbb{R}^{2n+1}$ .*

**OSSERVAZIONE 1.6.17.** Nel 1944 lo stesso Whitney ha mostrato che l'embedding si può avere anche in  $\mathbb{R}^{2n}$  (la differenza è che in  $\mathbb{R}^{2n+1}$  si può anche richiedere che l'embedding sia proprio, cioè la controimmagine di ogni compatto è compatta). Inoltre se la varietà è compatta e orientabile, si ha un embedding in  $\mathbb{R}^{2n-1}$ .

Se  $n > 1$  si può trovare un'immersione (non necessariamente iniettiva) della varietà in  $\mathbb{R}^{2n-1}$  (oppure in  $S^{2n-1}$ , per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ). Si vedano [2, Sezione 2.8] e [241].

**ESERCIZIO 1.6.18.** Si mostri che se la mappa da  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  in  $\mathbb{R}^4$  data da

$$(x, y, z) \mapsto (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$$

induce un embedding del piano proiettivo  $\mathbb{R}P^2$  (visto come quoziente di  $S^2$ ) in  $\mathbb{R}^4$ .

### 1.7. Il teorema di Frobenius

Supponiamo di avere un riferimento  $X_1, \dots, X_n$  locale del fibrato tangente  $TM$  in un aperto  $U \subseteq M$ . Fissato un punto  $p \in U$  non è difficile trovare una carta coordinata  $(W, \varphi)$  tale che  $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  nel solo punto  $p$  (lo si provi per esercizio). Niente garantisce invece che si possa avere  $X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$  su tutto il dominio di una carta, infatti in generale ciò non è possibile. Vale il seguente risultato [2, Teorema 3.7.4].

**PROPOSIZIONE 1.7.1.** *Sia  $X_1, \dots, X_n$  un riferimento locale del fibrato tangente  $TM$  in un aperto  $U \subseteq M$ . Allora per ogni punto  $p \in U$  esiste una carta locale  $(W, \varphi)$  centrata in  $p$  tale che  $X_i|_W = \frac{\partial}{\partial x^i}$ , per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ , se e solo se  $[X_i, X_j] = 0$  in  $U$ , per ogni  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .*

Un campo vettoriale mai nullo su  $M$  determina un sottospazio unidimensionale dello spazio tangente in ogni punto della varietà, dunque le sue curve integrali, che hanno derivata mai nulla, individuano delle sottovarietà unidimensionali di  $M$  che in ogni punto hanno come spazio tangente tale sottospazio. Il teorema di Frobenius generalizza questo risultato a una scelta in ogni punto di  $M$  di un sottospazio  $k$ -dimensionale dello spazio tangente. Riferimenti principali per questa sezione sono [2, Sezione 3.7] e [206].

**DEFINIZIONE 1.7.2.** Sia  $M$  una varietà differenziabile di dimensione  $n$  e sia  $1 \leq k \leq n$ . Una *distribuzione di rango  $k$*  su  $M$  è un sottoinsieme  $\mathcal{D} \subseteq TM$  tale che:

- per ogni  $p \in M$  l'insieme  $\mathcal{D}_p = \mathcal{D} \cap T_p M$  è un sottospazio vettoriale di  $T_p M$  di dimensione  $k$ ,

- per ogni  $p \in M$  esistono un intorno aperto  $U$  di  $p$  e dei campi vettoriali  $X_1, \dots, X_k$  su  $U$  tali che  $\mathcal{D}_q = \langle (X_1)_q, \dots, (X_k)_q \rangle$  per ogni  $q \in U$  (tale famiglia di campi è detta *riferimento locale per  $\mathcal{D}$* ).

In altre parole, una distribuzione è una scelta  $C^\infty$  di un sottospazio vettoriale  $k$ -dimensionale di  $T_p M$  per ogni punto  $p \in M$ .

DEFINIZIONE 1.7.3. Data una distribuzione  $\mathcal{D}$  su  $M$ , diciamo che un campo vettoriale  $X$  su un aperto  $U \subseteq M$  giace su  $\mathcal{D}$  se  $X_p \in \mathcal{D}_p$  per ogni  $p \in U$ .

Una distribuzione  $\mathcal{D}$  si dice *involutiva* se  $[X, Y]$  giace su  $\mathcal{D}$  per ogni coppia di campi vettoriali  $X$  e  $Y$  di  $M$  che giacciono su  $\mathcal{D}$ .

ESERCIZIO 1.7.4. Data una distribuzione  $\mathcal{D}$  di rango  $k$ , utilizzando le proprietà delle parentesi di Lie, si mostri che  $\mathcal{D}$  è involutiva se e solo se per ogni punto  $p \in M$  esiste un suo intorno aperto  $U$  e un riferimento locale  $X_1, \dots, X_k$  per  $\mathcal{D}$  su  $U$ , tale che  $[X_i, X_j]$  è un campo vettoriale che giace su  $\mathcal{D}$ , per ogni  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ .

ESEMPIO 1.7.5. Non tutte le distribuzioni sono involutive: consideriamo per esempio  $M = \mathbb{R}^3$  con le coordinate  $(x, y, z)$  e i campi vettoriali linearmente indipendenti su tutto  $\mathbb{R}^3$

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{e} \quad Y = \frac{\partial}{\partial y}.$$

Allora  $X$  e  $Y$  definiscono una distribuzione di rango 2 data da  $\mathcal{D}_p = \langle X_p, Y_p \rangle$ , per ogni  $p \in \mathbb{R}^3$ . Per costruzione entrambi  $X$  e  $Y$  giacciono su  $\mathcal{D}$ , tuttavia  $[X, Y] = \frac{\partial}{\partial z}$  non è combinazione lineare di  $X$  e  $Y$ , di conseguenza non giace su  $\mathcal{D}$  e la distribuzione non è involutiva.

DEFINIZIONE 1.7.6. Sia  $\mathcal{D}$  una distribuzione di rango  $k$  su  $M$ . Una sottovarietà immersa  $f(S) \subseteq M$  di dimensione  $k$ , data da  $f : S \rightarrow M$ , tale che  $T_p S = \mathcal{D}_p$  per ogni  $p \in S$ , si dice *sottovarietà integrale* di  $\mathcal{D}$ . La distribuzione  $\mathcal{D}$  si dice *integrabile* se ogni punto  $p \in M$  è contenuto in una sottovarietà integrale di  $\mathcal{D}$ .

PROPOSIZIONE 1.7.7. Ogni distribuzione integrabile è involutiva.

Le sottovarietà integrali generalizzano le curve integrali già viste per i campi vettoriali, che rappresentano distribuzioni di rango 1 (se non si annullano mai). Vedremo che come le curve integrali anche le sottovarietà integrali sono a due a due disgiunte.

DEFINIZIONE 1.7.8. Sia  $\mathcal{D}$  una distribuzione di rango  $k$  su  $M$ . Una carta coordinata  $(U, \varphi)$  con  $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$  si dice *piatta* per  $\mathcal{D}$  se  $\mathcal{D}_p = \langle \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_p \rangle$ , per ogni  $p \in U$  e inoltre  $\varphi(U) = \Omega' \times \Omega''$ , dove  $\Omega'$  è un aperto di  $\mathbb{R}^k$  e  $\Omega''$  è un aperto di  $\mathbb{R}^{n-k}$ .

Gli insiemi della forma

$$\{p \in U : x^{k+1}(p) = c_{k+1}, \dots, x^n(p) = c_n\}$$

con  $(c_{k+1}, \dots, c_n) \in \Omega''$  fissati si dicono *slice*.

DEFINIZIONE 1.7.9. Una distribuzione  $\mathcal{D}$  si dice *completamente integrabile* se per ogni  $p \in M$  esiste una carta locale  $(U, \varphi)$  centrata in  $p$  e piatta per  $\mathcal{D}$ .

È facile vedere, usando carte coordinate piatte che ogni distribuzione completamente integrabile è integrabile, infatti le slice sono varietà integrali. Abbiamo dunque che

$$\text{completamente integrabile} \implies \text{integrabile} \implies \text{involutiva},$$

il teorema di Frobenius afferma che in realtà queste tre proprietà sono equivalenti.

TEOREMA 1.7.10 (Teorema di Frobenius). *Ogni distribuzione involutiva è completamente integrabile. Segue che se  $\mathcal{D} \subseteq TM$  è una distribuzione involutiva di rango  $k$  su  $M$ , allora per ogni punto  $p \in M$  passa un'unica sottovarietà integrale connessa massimale  $N_p$  di  $\mathcal{D}$ , ovvero ogni altra sottovarietà integrale connessa contenente  $p$  è contenuta in  $N_p$ .*

OSSERVAZIONE 1.7.11. In vari testi, per esempio [2, Teorema 3.7.11], il teorema di Frobenius si ottiene come conseguenza della Proposizione 1.7.1, dimostrata indipendentemente. In [206] si ha una dimostrazione diretta del teorema di Frobenius, che implica la Proposizione 1.7.1, come mostreremo nell'Osservazione 1.7.13.

Il teorema di Frobenius è utile per cercare soluzioni (locali) non banali  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  di sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali del prim'ordine, come ad esempio il seguente,

$$A_k^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) = 0$$

in un aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , per  $k \in \{1, \dots, m\}$  con  $m < n$ , per dei coefficienti  $A_k^i \in C^\infty(\Omega)$ . Infatti, se consideriamo i campi  $X_k = A_k^i \partial_i$  su  $\Omega$  e la distribuzione  $\mathcal{D}$  che essi generano, abbiamo due casi:

- La distribuzione  $\mathcal{D}$  è involutiva oppure esistono altri campi  $X_k = A_k^i \partial_i$  su  $\Omega$ , per  $k = \{m+1, \dots, \ell\}$ , tali che la distribuzione  $\mathcal{D}'$  generata da tutti i campi  $X_k$  è involutiva e ha rango  $d < n$ . In tal caso, esiste una carta coordinata  $(U, \varphi)$ , con  $\varphi = (y^1, \dots, y^n)$ , tale che le varietà integrali della distribuzione  $\mathcal{D}$  (o  $\mathcal{D}'$ ) sono date da

$$\{x \in U : y^{d+1}(x) = c_{d+1}, y^{d+2}(x) = c_{d+2}, \dots, y^n(x) = c_n\}$$

per delle costanti  $c_{d+1}, \dots, c_n$ . È allora facile vedere che in tale carta locale una qualunque funzione  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^\infty$  risolve il sistema differenziale se e solo se dipende solo dalle variabili  $y^{d+1}, \dots, y^n$ .

- Se la distribuzione  $\mathcal{D}$  non è involutiva e non può essere completata a una distribuzione involutiva  $\mathcal{D}'$  che ammetta un numero di generatori inferiore a  $n$ , il sistema differenziale non ammette soluzioni non banali (lo si provi per esercizio, osservando che se  $u$  risolve  $X_k u = 0$  per ogni  $k \in \{1, \dots, m\}$ , allora  $[X_i, X_j]u = 0$  per ogni  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ).

Un altro esempio estremamente importante è la seguente proposizione, che useremo ripetutamente nel seguito, riguardante i sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali del primo ordine “in forma normale”. Ne diamo prima una dimostrazione diretta e poi mostriamo come discenda naturalmente dal teorema di Frobenius. In realtà, questa proposizione è la versione “classica” del teorema di Frobenius che venne originariamente sviluppato proprio con l’intento di risolvere tali sistemi (le equazioni come quella del Problema (1.6) sono dette *equazioni ai differenziali totali*), mentre la versione “moderna” data dal Teorema 1.7.10 ne è l’interpretazione geometrica (si veda [206, Capitolo 2], per una altra versione ancora, di taglio algebrico–geometrico).

**PROPOSIZIONE 1.7.12.** *Sia  $V \times U \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  aperto e  $X_i : V \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , per  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Allora, per ogni  $\bar{x} \in V$  e  $\bar{y} \in U$  esiste unica una funzione  $u : W \rightarrow U$ , in un intorno  $W \subseteq V$  di  $\bar{x}$  in  $\mathbb{R}^m$  tale che*

$$\begin{cases} u(\bar{x}) = \bar{y} \\ \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) = X_i(x, u(x)) \end{cases} \quad \text{per ogni } x \in W \text{ e per ogni } i \in \{1, \dots, m\}, \quad (1.6)$$

se e solo se in  $V \times U$  se valgono le seguenti condizioni di integrabilità:

$$\frac{\partial X_i}{\partial x^j} + \frac{\partial X_i}{\partial y^k} X_j^k = \frac{\partial X_j}{\partial x^i} + \frac{\partial X_j}{\partial y^k} X_i^k \quad (1.7)$$

per ogni  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  (l’unicità è nel senso che se  $\tilde{u} : \tilde{W} \rightarrow U$  è un’altra soluzione del Problema (1.6) in un intorno  $\tilde{W}$  di  $\bar{x}$ , allora  $u$  e  $\tilde{u}$  coincidono sulla componente connessa di  $W \cap \tilde{W}$  che contiene  $\bar{x}$ ).

**DIMOSTRAZIONE.** La necessità segue dal teorema di Schwarz, in quanto se  $u$  risolve il Problema (1.6) si ha  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^i}(\bar{x}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(\bar{x})$ , che è l’equazione (1.7) valutata in  $(\bar{x}, u(\bar{x})) = (\bar{x}, \bar{y})$ , una volta sviluppati i calcoli.

Supponiamo senza perdita di generalità che  $0 \in V$  e  $\bar{x} = 0$ . Assumendo che valga la condizione (1.7), costruiamo la funzione  $u$  induttivamente come segue: prima definiamo  $u(x^1, 0, \dots, 0) = \beta_1(x^1)$ , dove  $\beta_1$  è la soluzione dell’ODE

$$\begin{cases} \beta_1(0) = \bar{y} \\ \beta_1'(\tau) = X_1(\tau, 0, \dots, 0, \beta_1(\tau)) \end{cases}$$

che ha una soluzione unica per  $|\tau| < \varepsilon_1$ . Dunque

$$\frac{\partial u}{\partial x^1}(x^1, 0, \dots, 0) = X_1(x^1, 0, \dots, 0, u(x^1, 0, \dots, 0)),$$

cioè  $u$  soddisfa l'equazione differenziale del sistema (1.6) per  $j = 1$ .

Supponendo di avere costruito  $u(x^1, \dots, x^{k-1}, 0, \dots, 0)$  che soddisfa il sistema (1.6) per  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ , poniamo  $u(x^1, \dots, x^{k-1}, x^k, 0, \dots, 0) = \beta_k(x^k; x^1, \dots, x^{k-1})$ , dove  $\beta_k$  risolve

$$\begin{cases} \beta_k(0; x^1, \dots, x^{k-1}) = u(x^1, \dots, x^{k-1}, 0, \dots, 0) \\ \beta'_k(\tau; x^1, \dots, x^{k-1}) = X_k(x^1, \dots, x^{k-1}, \tau, 0, \dots, 0, \beta_k(\tau; x^1, \dots, x^{k-1})) \end{cases} \quad (1.8)$$

che ha una soluzione per  $|\tau| < \varepsilon_k$  (indipendente da  $(x^1, \dots, x^{k-1})$  quando i valori  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-1}$  sono scelti sufficientemente piccoli). Dunque  $u$  è  $C^\infty$  e

$$\frac{\partial u}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0) = X_k(x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0, u(x^1, \dots, x^k, 0, \dots, 0)).$$

Mostriamo che  $u$  continua soddisfare il sistema (1.6) per  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ . Per fare ciò consideriamo  $i \in \{1, \dots, k-1\}$  e definiamo

$$\begin{aligned} h(\tau; x^1, \dots, x^{k-1}) &= \frac{\partial u}{\partial x^i}(x^1, \dots, x^{k-1}, \tau, 0, \dots, 0) \\ &\quad - X_i(x^1, \dots, x^{k-1}, \tau, 0, \dots, 0, u(x^1, \dots, x^{k-1}, \tau, 0, \dots, 0)), \end{aligned}$$

dunque  $h(0; x^1, \dots, x^{k-1}) = 0$ , per la definizione di  $u$  con il sistema (1.8) e per l'ipotesi induttiva. Usiamo ora l'equazione (1.7) per ottenere un'equazione differenziale per  $h$  e per semplificare i calcoli, evitiamo di indicare che tutte le espressioni di  $u$  sono valutate in  $(x^1, \dots, x^{k-1}, \tau, 0, \dots, 0)$  mentre tutte le espressioni di  $X_i$  sono valutate in

$$(x^1, \dots, x^{k-1}, \tau, 0, \dots, 0, u(x^1, \dots, x^{k-1}, \tau, 0, \dots, 0)).$$

Applicando la definizione di  $h$  e  $u$ , il teorema di Schwarz a  $u$  e la condizione (1.7), si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} h(\tau; x^1, \dots, x^{k-1}) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^k \partial x^i} - \frac{\partial X_i}{\partial x^k} - \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \frac{\partial X_i}{\partial y^l} \\ &= \frac{\partial X_k}{\partial x^i} + \frac{\partial u^l}{\partial x^i} \frac{\partial X_k}{\partial y^l} - \frac{\partial X_i}{\partial x^k} - \frac{\partial X_i}{\partial y^l} X_k^l \\ &= \frac{\partial X_k}{\partial x^i} + (h^l(\tau; x^1, \dots, x^{k-1}) + X_i^l) \frac{\partial X_k}{\partial y^l} - \frac{\partial X_i}{\partial x^k} - \frac{\partial X_i}{\partial y^l} X_k^l \\ &= h^l(\tau; x^1, \dots, x^{k-1}) \frac{\partial X_k}{\partial y^l}. \end{aligned}$$

Per il teorema di unicità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie, l'unica soluzione con la condizione iniziale  $h(0; x^1, \dots, x^{k-1}) = 0$  è  $h(\tau; x^1, \dots, x^{k-1}) = 0$ , dunque  $u$  soddisfa il sistema (1.6) per ogni  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Per induzione abbiamo dunque una soluzione  $u$  del sistema (1.6) nell'aperto  $W = \{(x^1, \dots, x^m) : |x^k| < \varepsilon_k \text{ per ogni } k \in \{1, \dots, m\}\}$ , l'unicità segue sempre dal suddetto teorema di unicità.  $\square$

Vediamo una dimostrazione alternativa dell'esistenza di una soluzione del Problema (1.6), usando il teorema di Frobenius 1.7.10.

SECONDA DIMOSTRAZIONE. Se consideriamo la distribuzione  $\mathcal{D}$  su  $V \times U$  di rango  $m$ , generata dai campi

$$(x, y) \mapsto \widetilde{X}_i(x, y) = e_i + X_i^1(x, y)e_{m+1} + \cdots + X_i^n(x, y)e_{m+n}$$

per  $i \in \{1, \dots, m\}$ , dove  $\{e_i\}$  è la base canonica di  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ , essa è involutiva se e solo se  $[\widetilde{X}_i, \widetilde{X}_j]$  giace su  $\mathcal{D}$ , cioè se ponendo

$$Z_{ij}^l = \frac{\partial X_j^l}{\partial x^i} + \frac{\partial X_j^l}{\partial y^k} X_i^k - \frac{\partial X_i^l}{\partial x^j} - \frac{\partial X_i^l}{\partial y^k} X_j^k, \quad (1.9)$$

il campo  $Z_{ij} = Z_{ij}^1 e_{m+1} + \cdots + Z_{ij}^n e_{m+n}$  è in ogni punto una combinazione lineare dei campi  $\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_m$ , per ogni  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ . Per la definizione dei campi  $\widetilde{X}_i$ , ciò può avvenire se e solo se tale combinazione lineare ha tutti i coefficienti nulli, dunque se e solo se  $Z_{ij} = 0$ , per ogni  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ .

Se vale la condizione (1.7), la distribuzione  $\mathcal{D}$  di rango  $m$  è allora involutiva, quindi è completamente integrabile per il teorema di Frobenius e localmente esiste un'unica sottovarietà integrale (embedded)  $m$ -dimensionale  $S$ , passante per il punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  e contenuta in  $V \times U$ . Lo spazio tangente in ogni punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  di tale sottovarietà è generato dai vettori linearmente indipendenti  $\widetilde{X}_1(x, y), \dots, \widetilde{X}_m(x, y)$ , dunque si vede facilmente che non può contenere alcun vettore in  $\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \approx T_{(x,y)}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n)$ , da cui segue che la mappa di proiezione  $\pi_x$  da  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  su  $\mathbb{R}^m$ , ristretta a  $S$ , è un diffeomorfismo locale e dunque esistono un intorno aperto  $\widetilde{W}$  di  $(\bar{x}, \bar{y})$  in  $S$  e un aperto  $W \subseteq V$  di  $\mathbb{R}^m$ , contenente  $\bar{x}$ , tra i quali  $\pi_x$  è un diffeomorfismo. Chiamiamo  $u : W \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^n$  la mappa ottenuta componendo l'inversa  $\varphi : W \rightarrow S \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  di tale diffeomorfismo con la mappa di proiezione sul secondo fattore  $\pi_y : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , cioè deve essere  $\varphi(x) = (x, u(x))$  (si noti che  $u(\bar{x}) = \bar{y}$ , in quanto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in S$ ). Abbiamo allora che per ogni  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $x \in W$ ,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) = e_i + \frac{\partial u^1}{\partial x^i}(x)e_{m+1} + \cdots + \frac{\partial u^n}{\partial x^i}(x)e_{m+n} \in T_{(x,u(x))}S$$

e per la lineare indipendenza dei vettori  $\widetilde{X}_1(x, u(x)), \dots, \widetilde{X}_m(x, u(x))$ , che sono una base di  $T_{(x,u(x))}S$  e

$$\widetilde{X}_i(x, u(x)) = e_i + X_i^1(x, u(x))e_{m+1} + \cdots + X_i^n(x, u(x))e_{m+n},$$

concludiamo che

$$\frac{\partial u}{\partial x^i}(x) = X_i(x, u(x)),$$

per ogni  $i \in \{1, \dots, m\}$  e  $x \in W$ , cioè  $u$  è la soluzione (unica) del Problema (1.6).  $\square$

OSSERVAZIONE 1.7.13. Anche la Proposizione 1.7.1 segue dal teorema di Frobenius secondo la stessa linea di questa dimostrazione. Passando a coordinate locali è chiaramente sufficiente dimostrarla per  $M = \mathbb{R}^n$  in un intorno dell'origine (si ricordi la relazione (1.2)).

Se  $X_1, \dots, X_n$  è un riferimento locale del fibrato tangente in un aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  con  $[X_i, X_j] = 0$  per ogni  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , come sopra definiamo i campi (si noti che dipendono solo dalla variabile  $y$ ) su  $\mathbb{R}^n \times U$

$$(x, y) \mapsto \tilde{X}_i(y) = e_i + X_i^1(y)e_{n+1} + \dots + X_i^n(y)e_{2n}$$

per  $i \in \{1, \dots, n\}$  e analogamente (equazione (1.9))

$$Z_{ij}^l = \frac{\partial X_j^l}{\partial y^k} X_i^k - \frac{\partial X_i^l}{\partial y^k} X_j^k,$$

che sono tutti nulli per l'ipotesi  $[X_i, X_j] = 0$ . Procedendo allo stesso modo otteniamo dunque una funzione  $u : \tilde{W} \rightarrow U$  da un intorno  $\tilde{W}$  dell'origine di  $\mathbb{R}^n$ , tale che

$$\frac{\partial u}{\partial x^i}(x) = X_i(u(x))$$

per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $x \in \tilde{W}$ , con  $u(0) = 0$ . A meno di restringerne il dominio, possiamo supporre che  $u$  sia un diffeomorfismo con la sua immagine  $W \subseteq \mathbb{R}^n$ , intorno aperto di  $0 \in \mathbb{R}^n$  contenuto in  $U$ . Allora, posto  $\varphi = u^{-1} = (y^1, \dots, y^n) : W \rightarrow \tilde{W}$ , la carta coordinata  $(W, \varphi)$  soddisfa  $X_i|_W = \frac{\partial}{\partial y^i}$ , per ogni  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

ESERCIZIO 1.7.14. Si dimostri il teorema di Frobenius 1.7.10 usando la Proposizione 1.7.12.

ESERCIZIO 1.7.15. Si estenda la Proposizione 1.7.12 a campi  $X_i : V \times U \rightarrow TM$ , con  $V$  e  $U$  aperti rispettivamente di due varietà differenziabili  $N$  e  $M$ .

## 1.8. Il teorema di Stokes

Introduciamo il concetto di varietà differenziabile con bordo. Sia  $H^n$  il *semi-spazio superiore chiuso* di  $\mathbb{R}^n$ , ovvero

$$H^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}.$$

Il *bordo*  $\partial H^n$  di  $H^n$  è l'iperpiano di equazione  $x^n = 0$ , ovvero il bordo topologico di  $H^n$  nella topologia standard.

DEFINIZIONE 1.8.1. Una *varietà topologica con bordo*  $M$  di dimensione  $n$  è uno spazio topologico di Hausdorff, a base numerabile tale che per ogni punto  $p \in M$  esista una coppia, detta *carta coordinata*,  $(U, \varphi)$  con  $U \subseteq M$  intorno aperto di  $p$  e  $\varphi : U \rightarrow \Omega$  un omeomorfismo con  $\Omega$  aperto di  $H^n$ . La coppia  $(U, \varphi)$  viene detta *carta coordinata* (o *carta locale*). In particolare, se  $\varphi(U) \cap \partial H^n \neq \emptyset$  diremo che  $(U, \varphi)$  è un *carta di bordo*, altrimenti diremo che  $(U, \varphi)$  è una *carta interna*. Definiamo allora l'*interno*  $\overset{\circ}{M}$  di  $M$  come i punti  $p \in M$  (*punti interni*) che

appartengono a una carta coordinata interna e il bordo  $\partial M$  di  $M$  come i punti  $p \in M$  (punti di bordo) per i quali esiste una carta di bordo  $(U, \varphi)$  di  $M$  in  $p$  con  $\varphi(p) \in \partial H^n$ . È facile vedere (lo si mostri per esercizio) che ogni punto di  $M$  è o un punto interno o un punto di bordo, cioè  $M = \overset{\circ}{M} \cup \partial M$  e  $\overset{\circ}{M} \cap \partial M = \emptyset$ .

**DEFINIZIONE 1.8.2.** Un atlante di bordo per  $M$  è una famiglia di carte coordinate  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ , per  $\alpha \in \mathcal{A}$ , tali che la famiglia di aperti  $U_\alpha$  è un ricoprimento di  $M$  e le mappe di transizione

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

sono diffeomorfismi di classe  $C^\infty$  (compreso il bordo, nel caso sia presente – si veda [2, Definizione 2.7.4]), per ogni  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$  tali che  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ .

Analogamente alle varietà topologiche (senza bordo) possiamo allora definire quando due atlanti sono compatibili, cos'è una struttura differenziale e una varietà differenziabile con bordo.

**OSSERVAZIONE 1.8.3.** Chiaramente, le carte interne non sono altro che le usuali carte coordinate che dunque forniscono una struttura di varietà differenziabile (senza bordo) alla varietà topologica  $\overset{\circ}{M}$ .

Se  $p \in \partial M$  è un punto di bordo, per ogni carta coordinata  $(U, \varphi)$  che lo contiene si ha  $\varphi(p) \in \partial H^n \approx \mathbb{R}^{n-1}$ , dunque, restringendo le carte di bordo  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  a  $U_\alpha \cap \partial M$  si ha una famiglia di carte coordinate  $(U_\alpha \cap \partial M, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M})$  che forniscono a  $\partial M$  una struttura di varietà differenziabile (senza bordo)  $(n-1)$ -dimensionale, inoltre la mappa inclusione  $\iota : \partial M \hookrightarrow M$  è un embedding.

Come per le varietà differenziabili (senza bordo), possiamo definire un atlante orientato, quando una varietà differenziabile con bordo è orientabile, cos'è una orientazione e dunque cos'è una varietà con bordo orientata (si tenga presente la discussione in [134, Pagina 392]). Si mostra facilmente che l'atlante indotto per restrizione su  $\partial M$  da un atlante orientato di  $M$  è a sua volta orientato. Vale dunque il seguente fatto.

**PROPOSIZIONE 1.8.4.** Il bordo di una varietà differenziabile orientabile è orientabile.

**DEFINIZIONE 1.8.5.** Se  $M$  è una varietà differenziabile con bordo di dimensione  $n$  orientata, con un atlante orientato  $\mathcal{A}$ , indicheremo con  $\partial \mathcal{A}$  l'atlante orientato indotto per restrizione su  $\partial M$  e considereremo su  $\partial M$  l'orientazione indotta da  $\partial \mathcal{A}$  se  $n$  è pari, quella opposta se  $n$  è dispari.

Con una costruzione analoga a quella fatta nel caso di varietà differenziabili senza bordo, si può introdurre lo spazio tangente di una varietà con bordo. Di conseguenza, si possono definire analogamente i tensori e se  $\omega$  è una forma differenziale su  $M$ , definiamo  $\omega|_{\partial M} = \iota^* \omega$ , dove  $\iota : \partial M \hookrightarrow M$  è la mappa inclusione.

Supponiamo ora che  $M$  sia una varietà con bordo orientata di dimensione  $n$  e sia  $\omega \in \Omega^n M$  con supporto compatto. Anche per le varietà con bordo risulta essere ben definito l'integrale

$$\int_M \omega,$$

analogamente alle varietà differenziabili senza bordo. Se ora  $\omega$  è una  $(n-1)$ -forma differenziale su  $M$  a supporto compatto, la restrizione  $\omega|_{\partial M}$  appartiene a  $\Omega^{n-1} \partial M$  e possiamo calcolare  $\int_{\partial M} \omega|_{\partial M}$ , che per convenzione denotiamo con

$$\int_{\partial M} \omega,$$

sottintendendo la restrizione. Sempre per convenzione poniamo inoltre  $\int_{\partial M} \omega = 0$  quando  $\partial M = \emptyset$ .

**TEOREMA 1.8.6 (Teorema di Stokes).** *Sia  $M$  una varietà con bordo orientata di dimensione  $n$  e consideriamo  $\partial M$  con l'orientazione data nella Definizione 1.8.5. Allora per ogni  $\omega \in \Omega^{n-1} M$  a supporto compatto si ha*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

**COROLLARIO 1.8.7 (Teorema di Gauss–Green).** *Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^2$  tale che  $\bar{D}$  sia una varietà differenziabile con bordo (dunque un'unione finita di curve semplici, chiuse, di classe  $C^\infty$  e regolari), allora*

$$\int_{\partial D} f dx^1 + g dx^2 = \int_D \left( \frac{\partial g}{\partial x^1} - \frac{\partial f}{\partial x^2} \right) dx^1 dx^2,$$

per ogni coppia di funzioni  $f, g \in C^\infty(\bar{D})$ .

**DIMOSTRAZIONE.** È sufficiente applicare il teorema di Stokes alla 1-forma differenziale  $\omega = f dx^1 + g dx^2$ .  $\square$

**COROLLARIO 1.8.8 (Teorema della divergenza).** *Sia  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  tale per cui  $\partial D$  sia un'ipersuperficie di classe  $C^\infty$ . Allora, denotando con  $\nu$  la normale esterna e con  $d\sigma$  la forma di volume su  $\partial D$  data da  $i_\nu(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)|_{\partial D}$  si ha*

$$\int_D \operatorname{div} X dx = \int_{\partial D} \langle X, \nu \rangle d\sigma,$$

per ogni campo  $X \in C^\infty(\bar{D}; \mathbb{R}^n)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Banalmente,  $\bar{\Omega}$  è una varietà differenziabile  $n$ -dimensionale con bordo. Ponendo

$$\omega = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} X^i dx^1 \wedge \cdots \widehat{dx^i} \cdots \wedge dx^n = i_X(dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)$$

si ha

$$d\omega = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = (\operatorname{div} X) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

e la tesi segue applicando il teorema di Stokes alla  $(n-1)$ -forma differenziale  $\omega$ , in quanto

$$i_X (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)|_{\partial D} = \iota^* (i_X (dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n)) = \langle X, \nu \rangle d\sigma \quad (1.10)$$

dove  $\iota : \partial D \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  è l'inclusione (lo si provi per esercizio).  $\square$

**COROLLARIO 1.8.9 (Teorema del rotore).** *Sia  $S \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie orientata, di classe  $C^\infty$ , con bordo dato da una curva  $\gamma$  (orientata positivamente), chiusa, semplice e parametrizzata in lunghezza d'arco  $s$  (cioè tale che  $|\gamma'|$  è sempre uguale a 1), dunque con vettore tangente unitario  $\tau = \gamma'$ . Allora, denotando con  $\nu$  la normale a  $S$  che la orienta e con  $d\sigma$  la forma di volume su  $S$  data da  $i_\nu (dx \wedge dy \wedge dz)|_S$  si ha*

$$\int_S \langle \operatorname{rot} X, \nu \rangle d\sigma = \int_\gamma \langle X, \tau \rangle ds,$$

per ogni campo  $X$  in un dominio di  $\mathbb{R}^3$  che contiene  $S$ .

L'integrale a destra è detto circuitazione del campo  $X$  su  $\gamma$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Ponendo  $\omega = X^i dx^i$  si ha

$$\begin{aligned} d\omega &= \left( \frac{\partial X^2}{\partial x} - \frac{\partial X^1}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left( \frac{\partial X^3}{\partial x} - \frac{\partial X^1}{\partial z} \right) dx \wedge dz + \left( \frac{\partial X^3}{\partial y} - \frac{\partial X^2}{\partial z} \right) dy \wedge dz \\ &= i_{\operatorname{rot} X} (dx \wedge dy \wedge dz) \end{aligned} \quad (1.11)$$

dunque  $d\omega|_S = \langle \operatorname{rot} X, \nu \rangle d\sigma$ , come nella formula (1.10). La tesi segue allora applicando il teorema di Stokes alla 1-forma differenziale  $\omega$  su  $S$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE 1.8.10.** Consideriamo la 2-forma

$$\omega = X^1 dy \wedge dz + X^2 dz \wedge dx + X^3 dx \wedge dy$$

e la 1-forma  $\sigma = X^1 dx + X^2 dy + X^3 dz$ , associate a un campo  $X$  in un aperto  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^3$ . Per la formula (1.11) si ha allora che

$$d\omega = \operatorname{div} X (dx \wedge dy \wedge dz) \quad \text{e} \quad d\sigma = i_{\operatorname{rot} X} (dx \wedge dy \wedge dz).$$

Segue che il campo  $X$  ha divergenza nulla se e solo se  $\omega$  è chiusa ed è irrotazionale (ha rotore nullo) se  $\sigma$  è chiusa. Chiaramente  $\sigma$  è esatta se e solo se  $X$  è conservativo (come il campo elettrico o il campo gravitazionale), cioè il gradiente di una funzione  $f$  (detta potenziale di  $X$ ), da cui segue la formula "classica"  $\operatorname{rot} \nabla f = 0$ , in quanto  $\sigma = df$  e

$$i_{\operatorname{rot} \nabla f} (dx \wedge dy \wedge dz) = d\sigma = ddf = 0$$

che dice che ogni campo conservativo è irrotazionale.

La forma  $\omega$  è invece esatta  $\omega = d\alpha$  con  $\alpha = Y^1 dx + Y^2 dy + Y^3 dz$ , se e solo se il campo  $X$  è solenoidale (come il campo magnetico, ma anche quello elettrico in

assenza di cariche o quello gravitazionale in assenza di massa), cioè il rotore di un altro campo  $Y$  (detto *potenziale vettore* di  $X$ ), da cui segue  $\operatorname{div} \operatorname{rot} Y = 0$ , in quanto  $X = \operatorname{rot} Y$  e

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} Y (dx \wedge dy \wedge dz) = d\omega = dd\alpha = 0.$$

che esprime il fatto che ogni campo solenoidale ha divergenza nulla.

Da ciò segue che le condizioni sull'aperto  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ , per cui ogni campo irrotazionale sia conservativo e ogni campo a divergenza nulla sia solenoidale, sono rispettivamente  $H_{DR}^1(\Omega) = 0$  e  $H_{DR}^2(\Omega) = 0$  (Definizione 1.4.20). Queste condizioni valgono se  $\Omega$  è stellato (o semplicemente contrattile), per il lemma di Poincaré 1.4.21. Si osservi che la semplice connessione di  $\Omega$  implica  $H_{DR}^1(\Omega) = 0$  ma non  $H_{DR}^2(\Omega) = 0$ .

**ESERCIZIO 1.8.11.** Si mostri che nell'aperto  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  la 2-forma  $\omega = \frac{x^1}{|x|^3} dx^2 \wedge dx^3 + \frac{x^2}{|x|^3} dx^3 \wedge dx^1 + \frac{x^3}{|x|^3} dx^1 \wedge dx^2$  è chiusa ma non è esatta.

Si esibisca un campo a divergenza nulla ma non solenoidale nell'aperto  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , che è semplicemente connesso ma con  $H_{DR}^2(\Omega) = \mathbb{R}$  (lo si provi).

**ESERCIZIO 1.8.12.** Ricordando che il laplaciano di una funzione è la divergenza del suo campo gradiente, si calcoli il rotore del rotore di un campo  $X$  in  $\mathbb{R}^3$ .

## 1.9. Varietà simplettiche e sistemi hamiltoniani

Nel seguito, introdurremo una struttura aggiuntiva sulle varietà lisce che ci permetta di scrivere su di esse le equazioni di Hamilton per moti di particelle o corpi rigidi. Più precisamente, muniremo le nostre varietà lisce di una cosiddetta 2-forma simplettica.

A tal fine, cominciamo richiamando concetti e risultati sugli spazi vettoriali simplettici. Ci limiteremo a trattare la teoria solo in dimensione finita.

**DEFINIZIONE 1.9.1.** Sia  $V$  uno spazio vettoriale reale, di dimensione finita  $n$ . Una forma bilineare  $\omega: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  è detta *simplettica* se è:

- *antisimmetrica*: per ogni  $\xi, \eta \in V$ ,  $\omega(\xi, \eta) = -\omega(\eta, \xi)$ ;
- *non-degenere*: per ogni  $\xi \in V \setminus \{0\}$ , esiste un  $\eta \in V$  tale che  $\omega(\xi, \eta) \neq 0$ .

In tal caso, la coppia  $(V, \omega)$  è detta *spazio vettoriale simplettico*.

**OSSERVAZIONE 1.9.2.** Denotando con  $V^*$  lo spazio vettoriale duale a  $V$ , dire che  $\omega$  è non-degenere è equivalente al fatto che la mappa lineare

$$\omega_\flat: \xi \in V \rightarrow \omega(\xi, \cdot) \in V^*$$

è iniettiva, quindi biettiva essendo le dimensioni di  $V$  e  $V^*$  uguali.

**ESEMPIO 1.9.3 (Forma simplettica standard).** Sia  $V$  uno spazio vettoriale di dimensione  $2n$ , sia  $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$ . A questa, possiamo associare la base duale  $\{\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n\}$  per  $V^*$ : definiamo quindi il 2-covettore  $\omega \in \Lambda^2(V^*)$  come

$$\omega = \sum_{i=1}^n \alpha_i \wedge \beta_i.$$

Essendo  $\omega(a_i, a_j) = \omega(b_i, b_j) = 0$  e  $\omega(a_i, b_j) = -\omega(b_j, a_i) = \delta_{ij}$ , si verifica subito che  $\omega$  è una forma simplettica.

Gli spazi vettoriali simplettici si distinguono profondamente dagli spazi di Hilbert per il seguente motivo. Fissato uno spazio vettoriale  $V$ , se si restringe un prodotto scalare su un sottospazio di  $V$ , allora le sue proprietà sono conservate. Ciò non vale per gli spazi simplettici.

**DEFINIZIONE 1.9.4.** Sia  $(V, \omega)$  uno spazio simplettico di dimensione  $n$ , sia  $S \subseteq V$  un suo sottospazio vettoriale di dimensione  $k \leq n$ . Diremo *complemento simplettico* di  $S$  il sottospazio di  $V$

$$S^\perp = \bigcap_{w \in S} \ker(\omega_b(w)).$$

I complementi simplettici sono definiti in modo analogo ai complementi ortogonali per i prodotti scalari; usando la mappa lineare

$$\Phi: v \in V \longrightarrow \omega_b(v) \in S^*,$$

si può facilmente verificare che la dimensione di  $S^\perp$  è  $n - k$ .

Ma si può dire che  $S \cap S^\perp = \{0\}$ ? In generale no, poiché dall'antisimmetria di  $\omega$  discende che per ogni  $v \in V$ ,  $\omega(v, v) = 0$ , perciò se  $S$  ha dimensione 1, si ha  $S \subseteq S^\perp$ .

**DEFINIZIONE 1.9.5.** Dato uno spazio simplettico  $(V, \omega)$ , un sottospazio  $S \subseteq V$  è detto:

- *simplettico* se  $S \cap S^\perp = \emptyset$ ;
- *isotropo* se  $S \subseteq S^\perp$ ;
- *coisotropo* se  $S^\perp \subseteq S$ ;
- *Lagrangiano* se  $S = S^\perp$ .

Vale allora il seguente fatto, di semplice dimostrazione:

**PROPOSIZIONE 1.9.6.** Dato uno spazio simplettico  $(V, \omega)$ , un sottospazio  $S \subseteq V$  è:

- *simplettico* se e solo se  $l_0$  è  $S^\perp$ ;
- *simplettico* se e solo se  $\omega|_S$  è non-degenere;
- *isotropo* se e solo se  $\omega|_S = 0$ ;
- *coisotropo* se e solo se  $S^\perp$  è isotropo;

- *Lagrangiano se e solo se  $\omega|_S = 0$  e  $\dim(S) = \dim(S^\perp) = \frac{1}{2} \dim(V)$ .*

A causa del fatto che non tutti i sottospazi di uno spazio simplettico sono simplettici, segue che gli spazi simplettici hanno una struttura rigida, in particolare hanno dimensione pari:

**PROPOSIZIONE 1.9.7.** *Dato uno spazio simplettico  $(V, \omega)$ , necessariamente  $\dim(V) = 2n$ ; in particolare, esiste una base per  $V$  su cui  $\omega$  è la forma simplettica standard di cui nell'Esempio 3.*

**DIMOSTRAZIONE.** Con l'idea di ripercorrere l'algoritmo di Gram-Schmidt, vorremmo provare che è possibile costruire una base  $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$  tale che  $\omega$  agisce su di essa come nell'Esempio 3, ragionando per induzione su  $m = \dim(V)$ .

Se  $m = 0$ , non c'è nulla da provare.

Se  $m \geq 1$ , supponiamo che la nostra tesi è vera per ogni spazio simplettico di dimensione minore di  $m$ . Sia  $a_1 \in V \setminus \{0\}$ : per la non-degenerazione di  $\omega$ , deve esistere  $b_1 \in V \setminus \{0\}$  tale che  $\omega(a_1, b_1) \neq 0$ : a meno di normalizzazione, supponiamo  $\omega(a_1, b_1) = 1$ . Dall'antisimmetria di  $\omega$  segue che  $a_1, b_1$  sono linearmente indipendenti, quindi  $\dim(V) \geq 2$ . Sia dunque  $S \subseteq V$  il sottospazio generato da  $\{a_1, b_1\}$ : il suo complemento simplettico  $S^\perp$  ha dimensione  $m - 2$  ed è simplettico, essendolo  $S$  per costruzione e valendo quindi la Proposizione 1.9.6. Per ipotesi induttiva,  $S^\perp$  ha dimensione pari e ha una base  $\{a_2, b_2, \dots, a_n, b_n\}$  come nella tesi. La base cercata è allora  $\{a_1, b_1, \dots, a_n, b_n\}$ .  $\square$

In letteratura, la base costruita in questa dimostrazione è altresì nota come *base simplettica*.

**OSSERVAZIONE 1.9.8.** Dalla Proposizione 1.9.7, si può provare che  $\omega$  è una forma simplettica se e solo se  $\omega^n = \bigwedge_{i=1}^n \omega \neq 0$ .

Abbiamo ora tutti gli strumenti per descrivere le varietà simplettiche, definite in modo del tutto naturale come segue:

**DEFINIZIONE 1.9.9.** Data una varietà liscia  $M$  di dimensione  $2n$  e una 2-forma  $\alpha \in \Gamma(T_2^0 M)$ , la coppia  $(M, \alpha)$  è detta una *varietà simplettica* se per ogni  $p \in M$ ,  $\alpha_p$  è una forma simplettica su  $T_p M$  e la 2-forma  $\alpha$  è chiusa.

Dall'Osservazione 8 segue che le varietà simplettiche sono sempre orientabili, il che motiva le seguenti due definizioni:

**DEFINIZIONE 1.9.10.** Data una varietà simplettica  $(M, \alpha)$ , la forma di volume  $\mu = \bigwedge_{i=1}^n \alpha$  è detta *forma di Liouville*.

E' immediato notare che ogni simplettomorfismo da una varietà simplettica in sé deve conservare la forma di Liouville.

DEFINIZIONE 1.9.11. Date due varietà simplettiche  $(M, \alpha)$  e  $(N, \beta)$ , un diffeomorfismo  $F: M \rightarrow N$  tale che  $F^*\beta = \alpha$  è detto *simplettomorfismo*.

In modo analogo all'esistenza di una base su cui una forma simplettica su uno spazio simplettico è in forma standard, vale il seguente importante risultato dovuto a Gaston Darboux:

TEOREMA 1.9.12 (Darboux). *Data una varietà simplettica  $(M, \alpha)$  di dimensione  $n$ , per ogni  $p \in M$  esiste una carta  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$  centrata in  $p$ , tale che  $\alpha$  si rappresenta su di essa come*

$$\alpha = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i.$$

Per una dimostrazione, vedere per esempio Lee [120]. Le carte descritte dal Teorema di Darboux sono dette *carte simplettiche* e hanno l'utilità di semplificare molti calcoli. Come vedremo fra poco, in particolare, saremo in grado di scrivere localmente le equazioni di Hamilton come si fa su uno spazio Euclideo.

A tal proposito, si consideri la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1.9.13. Data una varietà simplettica  $(M, \alpha)$  di dimensione  $2n$ , data una funzione liscia  $H: M \rightarrow \mathbb{R}$  (la *hamiltoniana*), chiamiamo *sistema hamiltoniano* la terna  $(M, \alpha, H)$ .

Fisicamente, la terna di un sistema hamiltoniano contiene lo *spazio delle fasi*  $M$ , su cui è definita una forma simplettica  $\alpha$  (lo strumento che ci permetterà di descrivere l'evoluzione di osservabili) e un'osservabile  $H$  (l'*energia*, per esempio) che generi la dinamica di un sistema di  $n$  particelle che si muove sulla nostra varietà; una generica configurazione del nostro sistema di particelle è descritta dalle coordinate  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ .

Per descrivere la nostra dinamica, abbiamo bisogno di un campo vettoriale: disponendo della hamiltoniana  $H$ , il suo differenziale può essere rappresentato univocamente da un opportuno campo liscio  $X^{(H)}$ , sfruttando l'Osservazione 1.9.2:

$$dH_p = \alpha_p(X_p^{(H)}, \cdot), \quad \forall p \in M.$$

DEFINIZIONE 1.9.14. Dato un sistema hamiltoniano  $(M, \alpha, H)$ , il campo liscio  $X_H$  tale che per ogni  $p \in M$ ,  $\alpha_p(X_p^{(H)}, \cdot)$  è detto *campo hamiltoniano*.

In coordinate di Darboux  $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ , si ha che

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i} dy_i = \sum_{i=1}^n X_{x_i}^{(H)} dy_i - \sum_{i=1}^n X_{y_i}^{(H)} dx_i,$$

da cui segue che in queste coordinate, il campo hamiltoniano si rappresenta come

$$X^{(H)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^n -\frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Di conseguenza, associando a  $X^{(H)}$  il gruppo a un parametro  $\{\Phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ , otteniamo le equazioni di Hamilton

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{x_i}}{\partial t}(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\partial H}{\partial y_i}(\Phi(t; \mathbf{x}, \mathbf{y})) \\ \frac{\partial \Phi_{y_i}}{\partial t}(t; \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{\partial H}{\partial x_i}(\Phi(t; \mathbf{x}, \mathbf{y})) \\ \Phi(0; \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (1.12)$$

dove  $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ .

Come accennavamo appena sopra, l'utilità della forma simplettica sta nel determinare l'evoluzione di osservabili lungo le equazioni (1.12). Si consideri a tal fine la seguente definizione:

**DEFINIZIONE 1.9.15.** Dato un sistema hamiltoniano  $(M, \alpha, H)$ , chiamiamo *parentesi di Poisson* la forma bilineare tale che, date due funzioni lisce  $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  e detti  $X^{(f)}, X^{(g)}$  i loro campi hamiltoniani, soddisfa

$$\{f, g\}_p = \alpha_p(X^{(f)}, X^{(g)}).$$

Con l'aiuto delle parentesi di Poisson, il Teorema di Darboux può essere provato in modo simile alla Proposizione 1.9.7. Si prova con conti diretti il seguente fatto:

**PROPOSIZIONE 1.9.16.** Data una varietà simplettica  $(M, \alpha)$ , valgono le seguenti proprietà per le parentesi di Poisson:

- antisimmetria:  $\{f, g\} = -\{g, f\}$ , per ogni  $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ;
- identità di Jacobi:  $\{\{f, g\}, h\} + \{\{h, f\}, g\} + \{\{g, h\}, f\} = 0$ , per ogni  $f, g, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ;
- regola di Leibnitz:  $\{fg, h\} = \{f, h\}g + \{g, h\}f$ , per ogni  $f, g, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

Di conseguenza, la  $\mathbb{R}$ -algebra delle funzioni  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ , munita delle parentesi di Poisson, rende  $M$  una varietà di Poisson.

La seguente proposizione ci permette di determinare l'evoluzione di osservabili lungo (1.12) e quindi gli integrali primi per la (1.12):

**PROPOSIZIONE 1.9.17.** Dato un sistema hamiltoniano  $(M, \alpha, H)$ , valgono i seguenti fatti:

- Per ogni  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ , si ha

$$\frac{\partial}{\partial t}(f \circ \Phi_t) = \{f \circ \Phi_t, H \circ \Phi_t\}$$

abbreviando la notazione,  $\frac{df}{dt} = \{f, H\}$ ; in particolare,  $\frac{dx_i}{dt} = \{x_i, H\}$  e  $\frac{dy_i}{dt} = \{y_i, H\}$ , per ogni  $i = 1, \dots, n$ ;

- $f$  è un integrale primo per (1.12) se e solo se  $\{f, H\} = 0$ ; in particolare,  $H$  è un integrale primo per (1.12);
- (Teorema di Noether)  $f$  è un integrale primo per la dinamica di hamiltoniana  $H$  se e solo se  $H$  è un integrale primo per la dinamica di hamiltoniana  $f$ .

DIMOSTRAZIONE. E' sufficiente provare il primo punto. Si ha che

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= L_{X^{(H)}} f \\ &= df[X^{(H)}] \\ &= \{X^{(f)}, X^{(H)}\} \\ &= \{f, H\}. \end{aligned}$$

□

In queste notazioni, possiamo mostrare una classe importante di simplettomorfismi:

PROPOSIZIONE 1.9.18. Dato un sistema hamiltoniano  $(M, \alpha, H)$ , per ogni  $t \in \mathbb{R}$  il flusso hamiltoniano al tempo  $t$ ,  $\Phi_t = \Phi(t, \cdot)$ , è un simplettomorfismo da  $M$  in sè.

DIMOSTRAZIONE. Essendo  $\Phi_0$  la mappa identica, è sufficiente mostrare che per ogni  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\frac{d}{dt} \Phi_t^*(\omega) = 0$ . Essendo  $d\omega = 0$  e  $d(dH) = 0$ , si ha, per ogni  $p \in M$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Phi_t^* \omega(p) &= \Phi_t^*(L_{X^{(H)}} \omega)(p) \\ &= \Phi_t^*(\iota_{X^{(H)}}(d\omega) + d(\iota_{X^{(H)}} \omega)) \\ &= \Phi_t^*(d(dH)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Concludiamo questo paragrafo con la costruzione esplicita di una struttura simplettica sul fibrato cotangente di una generica varietà liscia; nei capitoli successivi, verrà trattato un sistema hamiltoniano speciale, il sistema geodetico.

La questione fondamentale è la seguente: è possibile costruire una struttura simplettica su una generica varietà liscia? Dalla Proposizione 1.9.7, segue che ciò non è possibile se la nostra varietà ha dimensione dispari. Ci sono però due cose di cui bisogna tenere conto.

La prima è che se  $n$  è la dimensione della nostra varietà, allora i suoi fibrati tangente e cotangente hanno dimensione  $2n$ . La seconda è che le equazioni di Hamilton vogliono descrivere l'evoluzione delle variabili di stato posizione,

legata alle coordinate locali che vengono definite sulla nostra varietà in esame e momento, che nel caso in cui sia lineare vive sul fibrato tangente, essendo proporzionale alla velocità.

Ciò ci spinge quindi a supporre che in qualche modo, sia possibile costruire una struttura simplettica sul fibrato tangente. In realtà, la costruzione di una struttura simplettica sarà realizzata nel seguente modo naturale sul fibrato cotangente.

Sia  $M$  una generica varietà liscia di dimensione  $n$ , sia  $T^*M$  il suo fibrato cotangente e sia  $\pi^*: T^*M \rightarrow M$  la proiezione del cotangente sulla varietà.

Sia dunque  $\omega \in T^*M$ , sia  $T_\omega\pi^*: T_\omega T^*M \rightarrow T_{\pi^*(\omega)}M$  la mappa tangente a  $\pi^*$  in  $\omega$ .

Preso allora  $\eta \in T_\omega T^*M$ , si ha che  $T_\omega\pi^*(\eta)$  è un vettore su  $T_{\pi^*(\omega)}M$ , mentre  $\omega$  è un covettore, quindi è lecito considerare, evitando abusi di notazione, la 1-forma  $\theta \in \Gamma(TT^*M)$  definita come

$$\theta(\eta) = \omega(T_\omega\pi^*(\eta)), \quad \forall \eta \in T_\omega T^*M.$$

Detto ciò, definiamo la 2-forma  $\alpha^* \in \Gamma(T_2^0 T^*M)$  sul fibrato cotangente come

$$\alpha^* = -d\theta.$$

**PROPOSIZIONE 1.9.19.** *La coppia  $(T^*M, \alpha^*)$  è una varietà simplettica. Se  $(U, (x_1, \dots, x_n))$  è una carta su  $M$  e  $((\pi^*)^{-1}(U), (x_1, \dots, x_n, \omega_1, \dots, \omega_n))$  è la corrispondente carta su  $T^*M$ , su quest'ultima  $\alpha^*$  è rappresentata come*

$$\alpha^* = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge d\omega_i.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Se identifichiamo  $\omega$  con  $(x_1, \dots, x_n, \omega_1, \dots, \omega_n)$  e dunque  $\eta \in T_\omega T^*M$  con  $(x_1, \dots, x_n, \omega_1, \dots, \omega_n; X_1, \dots, X_n, \Omega_1, \dots, \Omega_n)$ , allora

$$T_\omega\pi^*(\eta) = (x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_n),$$

e allora

$$\omega(T_\omega\pi^*(\eta)) = \sum_{i=1}^n X_i \omega_i.$$

In altre parole,  $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i dx_i$ . La tesi è dunque immediata.  $\square$