APPENDICE A

Richiami di calcolo delle variazioni

Consideriamo una funzione $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, con $n \geq 1$. Il *problema standard del calcolo delle variazioni* consiste nel cercare e studiare gli eventuali minimi di un funzionale integrale

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b f(t, y(t), y'(t))\, dt = \int_a^b f(t, y_1(t), \dots, y_n(t), y_1'(t), \dots, y_n'(t))\, dt$$

tra tutte le funzioni $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ in un certo insieme $\mathcal{A}$.
Ovviamente il funzionale $\mathcal{F}$ deve essere ben definito su tale insieme, per cui, supporremo che la funzione f sia continua e l'insieme $\mathcal{A}$ sia contenuto nello spazio $C^1_S([a,b], \mathbb{R}^n)$. Queste ipotesi di regolarità possono essere indebolite, ma, per ragioni di interesse, non ce ne occuperemo.

La funzione integranda f è chiamata *lagrangiana* del problema (o del funzionale $\mathcal{F}$) e nel seguito, la denoteremo con $f(t, y, \xi)$. Il nostro obiettivo sarà quello di introdurre alcune connessioni tra le proprietà di f e quelle del funzionale $\mathcal{F}$ e dei suoi minimi. Supponendo inizialmente che un minimo (locale) esista, presenteremo delle condizioni che tale minimo deve necessariamente soddisfare. Tratteremo anche alcune condizioni sufficienti e infine ci occuperemo dell'esistenza (e dell'eventuale unicità) dei minimi, con l'osservazione che ampliare lo spazio in cui si cercano i minimi è talvolta necessario per le esigenze del problema (ad esempio, quando minimi non esistono o non siamo in grado di dimostrarne l'esistenza sullo spazio di funzioni considerato).

Sebbene non di nostro interesse, ovviamente si possono porre le stesse questioni anche per funzionali integrali più generali, come ad esempio

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(k)}(t))\, dt$$

al variare di $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ in un certo insieme $\mathcal{A}$, oppure funzionali del tipo

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega f(x, u(x), Du(x))\, dx$$

definiti su certe funzioni $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$, dove $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n\times m} \to \mathbb{R}$.

Consideriamo una lagrangiana $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua, le cui derivate parziali f_{y_i}, f_{ξ_i} esistono e sono continue. Il funzionale associato è

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b f(t, y(t), y'(t))\, dt\,,$$

e chiamiamo *prima equazione di Eulero–Lagrange* di $\mathcal{F}$, l'equazione differenziale o il sistema di equazioni differenziali

$$\frac{d}{dt} f_{\xi_i}(t, y(t), y'(t)) = f_{y_i}(t, y(t), y'(t)) \tag{EL1}$$

per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, in cui va sempre specificato se è da interpretarsi in senso "classico" o meno (chiaramente dipendente dalla regolarità della funzione f) e in quali punti t dell'intervallo $[a,b]$ vale. Molto spesso si fa riferimento ad essa semplicemente come *equazione di Eulero–Lagrange*, senza l'aggettivo "prima".

Le funzioni che soddisfano la prima equazione di Eulero–Lagrange (EL1) si dicono *estremali* del funzionale $\mathcal{F}$ (o *punti critici*).

L'equazione Eulero–Lagrange è soltanto una condizione *necessaria* ma non *sufficiente* per un minimo debole/forte del funzionale $\mathcal{F}$, su un spazio di funzioni $\mathcal{A}$ munito con una topologia (norma) da stabilirsi inizialmente.

D'ora in poi, lo spazio di funzioni $\mathcal{A}$ sarà un sottoinsieme o di $C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ o di $C^1_S([a,b], \mathbb{R}^n)$, su entrambi i quali possiamo considerare o la *norma* C^1

$$\|y\| = \sup_{t\in[a,b]} |y(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |y'(t)|\,,$$

dove se $y \in C^1_S([a,b], \mathbb{R}^n)$ il secondo "sup" si prende sui punti di esistenza di y', oppure la norma uniforme (o *norma* C^0)

$$\|y\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |y(t)|.$$

La topologia (o la norma) dello spazio di funzioni $\mathcal{A}$ nella ricerca dei minimi assoluti di un funzionale $\mathcal{F}$, non è rilevante (sebbene l'approccio topologico sia la chiave per l'esistenza dei minimi), in quanto il concetto di *minimo assoluto* è soltanto legato alla *struttura di ordine* di $\mathbb{R}$, indipendente dalla topologia. Al contrario, cercando minimi *locali* (*relativi*) dobbiamo far intervenire la topologia per definire gli intorni su cui le funzioni sono minimi. Allora, chiameremo *minimo debole* per un funzionale $\mathcal{F}$ su $\mathcal{A}$, un minimo locale in norma C^1 su $\mathcal{A}$, invece *minimo forte*, un minimo locale di $\mathcal{F}$ in norma uniforme su $\mathcal{A}$.
Ovviamente $\|y\|_\infty \leq \|y\|$ per ogni $y \in \mathcal{A}$, di conseguenza un minimo forte per $\mathcal{F}$ su $\mathcal{A}$ è anche minimo debole.

Enunciamo ora alcune proprietà di cui godono i minimi deboli per un funzionale $\mathcal{F}$ definito sullo spazio $\mathcal{A} = \{y \in C^1_S([a,b], \mathbb{R}^n) \,:\, y(a) = y_a \text{ e } y(b) = y_b\}\,.$

PROPOSIZIONE A.0.1. *Se $y \in C^1_S([a,b],\mathbb{R}^n)$ è un minimo debole del funzionale*

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b f(t, y(t), y'(t))\, dt$$

su $\mathcal{A} = \{y \in C^1_S([a,b],\mathbb{R}^n) \,:\, y(a) = y_a \text{ e } y(b) = y_b\}$ e $[c,d] \subseteq [a,b]$, allora $y|_{[c,d]}$ è un minimo debole del funzionale ristretto

$$\mathcal{F}_{[c,d]}(z) = \int_c^d f(t, z(t), z'(t))\, dt$$

sull'insieme delle funzioni $z \in C^1_S([c,d],\mathbb{R}^n)$ tali che $z(c) = y(c)$ e $z(d) = y(d)$.

La Proposizione A.0.1 vale anche se minimizziamo su funzioni C^1 e non C^1 a tratti.

TEOREMA A.0.2. *Sia $y \in C^1_S([a,b],\mathbb{R}^n)$ minimo debole del funzionale*

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b f(t, y(t), y'(t))\, dt,$$

su $\mathcal{A} = \{y \in C^1_S([a,b],\mathbb{R}^n) \,:\, y(a) = y_a \text{ e } y(b) = y_b\}$, con $f, f_{\xi_i}, f_{y_i} \in C^0$.
Allora, in ogni sottointervallo chiuso di $[a,b]$ il cui interno è privo di punti di discontinuità a salto per y', per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$, la funzione $t \mapsto f_{\xi_i}(t, y(t), y'(t))$ è C^1 e vale la prima equazione di Eulero–Lagrange (EL1).
In ogni punto $c \in (a,b)$ di discontinuità a salto di y' vale l'uguaglianza

$$f_{\xi_i}(c, y(c), y'_-(c)) = f_{\xi_i}(c, y(c), y'_+(c)), \tag{EW}$$

per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$, chiamata prima condizione di Erdmann–Weierstrass *per y nel punto di discontinuità c di y'. Sopra, $y'_\pm(c)$ sono i limiti destro e sinistro di y' in c.*

Se minimizziamo su funzioni C^1 e non C^1 a tratti, vale un analogo enunciato sull'intero intervallo $[a,b]$, ma senza le condizioni di Erdmann–Weierstrass.

Interpretiamo ora da un punto di vista più astratto l'equazione di Eulero–Lagrange, il che mostrerà una più stretta connessione col problema della ricerca dei minimi nella situazione finito–dimensionale.
Consideriamo uno spazio di Banach $(B, \|\cdot\|_B)$ e sia $\mathcal{F} : B \to \mathbb{R}$ un funzionale (non necessariamente integrale). Dati $u, v \in B$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione $g(\varepsilon) = \mathcal{F}(u + \varepsilon v)$. Se g è derivabile in $\varepsilon = 0$, scriviamo

$$d\mathcal{F}_u(v) = g'(0)$$

e chiamiamo $d\mathcal{F}_u(v)$ *derivata di Gateaux* di $\mathcal{F}$ in u rispetto alla direzione v. Se $d\mathcal{F}_u(v)$ esiste per ogni $v \in B$ e l'applicazione $v \mapsto d\mathcal{F}_u(v)$ è lineare, chiamiamo l'applicazione

$$d\mathcal{F}_u : B \to \mathbb{R}$$

differenziale di Gateaux di $\mathcal{F}$ in u. In particolare, se B è uno spazio di Hilbert e $\mathcal{F}$ è differenziabile secondo Gateaux in $u \in B$ con differenziale $d\mathcal{F}_u$ continuo, per il teorema di rappresentazione di Riesz–Fischer, esiste un vettore $\nabla\mathcal{F}(u) \in B$ tale che

$$d\mathcal{F}_u(v) = \langle \nabla\mathcal{F}(u), v\rangle.$$

per ogni $v \in B$. Questo vettore $\nabla\mathcal{F}(u)$ è allora detto *gradiente* di $\mathcal{F}$ in u. Similmente alla situazione finito–dimensionale, se u è un punto di minimo o massimo locale del funzionale $\mathcal{F}$ in B e per una direzione $v \in B$ la derivata di Gateaux $d\mathcal{F}_u(v)$ esiste, deve essere nulla. Se $d\mathcal{F}_u$ esiste è uguale a zero.

Una forma più forte di differenziabilità di un funzionale è data dalla definizione analoga al differenziale di una funzione in $\mathbb{R}^n$. Diciamo che il funzionale $\mathcal{F} : B \to \mathbb{R}$ è *differenziabile secondo Fréchet* in $u \in B$ se esiste una mappa lineare e continua $L_u : B \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{v\to 0} \frac{\mathcal{F}(u+v) - \mathcal{F}(u) - L_u(v)}{\|v\|_B} = 0.$$

La mappa L_u è allora detta *differenziale di Fréchet* (o semplicemente differenziale) di $\mathcal{F}$ in u. Questa definizione è effettivamente una versione più forte della differenziabilità secondo Gateaux, infatti se $\mathcal{F}$ differenziabile secondo Fréchet in u con differenziale L_u, allora $\mathcal{F}$ è differenziabile secondo Gateaux in u con differenziale di Gateaux $d\mathcal{F}_u = L_u$. Di conseguenza, se il differenziale di Fréchet di $\mathcal{F}$ esiste nel punto $u \in B$, possiamo indicare anch'esso con $d\mathcal{F}_u$.

Tornando al nostro funzionale integrale standard su $C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$, abbiamo il seguente fatto.

TEOREMA A.0.3. *Se $f, f_{y_i}, f_{\xi_i} \in C^0$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$, allora il funzionale integrale $\mathcal{F}$ associato a f è differenziabile secondo Fréchet sullo spazio di Banach $(C^1([a, b], \mathbb{R}^n), \|\cdot\|)$, con differenziale (secondo Fréchet) dato da*

$$d\mathcal{F}_y(v) = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \left[f_{y_i}(t, y(t), y'(t))v_i(t) + f_{\xi_i}(t, y(t), y'(t))v_i'(t)\right] dt,$$

per ogni $v \in C^1([a, b], \mathbb{R}^n)$.

Nell'ambito del calcolo delle variazioni, il differenziale di Gateaux in y di un funzionale $\mathcal{F}$ viene comunemente chiamato *variazione prima* di $\mathcal{F}$ in y e indicato con $\delta\mathcal{F}_y$. Analogamente, se v è una direzione si usa il termine *variazione prima* di $\mathcal{F}$ in y lungo v (*generatore infinitesimale della variazione*) per $\delta\mathcal{F}_y(v) = d\mathcal{F}_y(v)$. Di conseguenza, in un minimo debole y di $\mathcal{F}$ si ha $\delta\mathcal{F}_y = 0$. Allora, per il precedente teorema, sappiamo che la variazione prima del nostro funzionale integrale standard è data da

$$\sum_{i=1}^{n} \int_a^b \left[f_{y_i}(t, y(t), y'(t))v_i(t) + f_{\xi_i}(t, y(t), y'(t))v_i'(t)\right] dt,$$

ma a differenza di $\mathbb{R}^n$, lo spazio $C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ non è uno spazio di Hilbert, quindi il gradiente di $\mathcal{F}$ non è definito. Possiamo comunque pensare a

$$\Big(f_{y_1}(t,y,y') - \frac{d}{dt}f_{\xi_1}(t,y,y'),\ \ldots,\ f_{y_n}(t,y,y') - \frac{d}{dt}f_{\xi_n}(t,y,y')\Big)$$

come il concetto più vicino al gradiente, non appena i termini di ciascuna componente esistono e sono continui, in quanto

$$\delta\mathcal{F}_y(v) = \sum_{i=1}^n \int_a^b \Big(f_{y_i} - \frac{d}{dt}f_{\xi_i}\Big)v_i\,dt$$

per ogni $v \in C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. Allora l'equazione (EL1), generalizza il fatto che in un punto di massimo/minimo di una funzione $\widetilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, il suo gradiente è nullo.

Se il funzionale $\mathcal{F}$ non è definito su tutto $C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ ma solo sul sottospazio $\mathcal{A} = \{y \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)\ :\ y(a) = y_a \text{ e } y(b) = y_b\}$, che, in generale, non è uno spazio vettoriale (lo è soltanto nel caso $y_a = y_b = 0$), nell'ottica della ricerca dei minimi, le direzioni/variazioni *ammissibili* sono date da generatori infinitesimali che appartengono allo spazio (di Banach) $C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n) = \{v \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)\ :\ v(a) = 0 \text{ e } v(b) = 0\}$. Abbiamo dunque che se y è un minimo debole di $\mathcal{F}$ su $\mathcal{A}$, si ha $\delta\mathcal{F}_y|_{C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)} = 0$, cioè

$$\delta\mathcal{F}_y(v) = \sum_{i=1}^n \int_a^b \big[f_{y_i}(t,y(t),y'(t))v_i(t) + f_{\xi_i}(t,y(t),y'(t))v_i'(t)\big]\,dt = 0\,,$$

per ogni $v \in C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. Se anziché considerare $C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ consideriamo lo spazio delle curve C^1 a tratti, definite in $[a,b]$ e a valori in $\mathbb{R}^n$, valgono i seguenti analoghi risultati.

TEOREMA A.0.4. *Se $f, f_{y_i}, f_{\xi_i} \in C^0$, per ogni $i \in \{1,\ldots,n\}$, allora $\mathcal{F}$ è differenziabile secondo Fréchet in ogni $y \in C_S^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ nella norma C^1, con differenziale dato da*

$$d\mathcal{F}_y(v) = \sum_{i=1}^n \int_a^b \big[f_{y_i}(t,y(t),y'(t))v_i(t) + f_{\xi_i}(t,y(t),y'(t))v_i'(t)\big]\,dt$$

per ogni $v \in C_S^1([a,b],\mathbb{R}^n)$.

PROPOSIZIONE A.0.5. *Sia $y \in \mathcal{A}$ minimo debole di $\mathcal{F}$, allora $\delta\mathcal{F}_y(v) = 0$ per ogni $v \in C_S^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ zero ai bordi.*

La stretta convessità della lagrangiana f influisce sulla regolarità di ogni minimo debole y del funzionale associato $\mathcal{F}$ su $\mathcal{A}$, come conseguenza, è equivalente cercare minimi deboli di $\mathcal{F}$ in C^1 o in C^1 a tratti. Questo è contenuto nella seguente proposizione.

PROPOSIZIONE A.0.6. *Sia $y \in C^1_S([a,b],\mathbb{R}^n)$ minimo debole del funzionale $\mathcal{F}$, nelle ipotesi del Teorema A.0.2. Se per ogni punto c di discontinuità di y', la funzione*

$$\mathbb{R}^n \ni \xi \mapsto f(c, y(c), \xi)$$

è strettamente convessa, allora $y \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$.
Di conseguenza, se $f \in C^2$ e la matrice $f_{\xi_i\xi_j}(c, y(c), \xi)$ è definita positiva per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$, allora $y \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$.
Inoltre:

- (i) *Se $f \in C^k$, con $k \geq 2$, e la matrice $f_{\xi_i\xi_j}(t, y(t), \xi)$ è definita positiva per ogni $t \in [a,b]$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, allora $y \in C^k([a,b])$;*
- (ii) *Se $f \in C^\infty$ e la matrice $f_{\xi_i\xi_j}(t, y(t), \xi)$ è definita positiva per ogni $t \in [a,b]$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$, allora $y \in C^\infty([a,b])$.*

Sottolineamo che i punti (i) e (ii) continuano a valere per una qualunque soluzione $y \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ dell'equazione di Eulero–Lagrange (EL1) del funzionale $\mathcal{F}$.

La convessità/stretta convessità del funzionale $\mathcal{F}$, associato ad una lagrangiana f, influisce invece sul carattere, da locale a assoluto, di un minimo debole e sulla sua unicità. Dunque introduciamo la nozione di convessità/stretta convessità per un funzionale definito su uno spazio vettoriale. Sia V uno spazio vettoriale e $\mathcal{F} : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ un funzionale definito su un sottoinsieme $\mathcal{A}$ *convesso* di V, cioè tale che per ogni $v, w \in \mathcal{A}$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$ si ha che

$$\lambda v + (1-\lambda) w \in \mathcal{A}.$$

Diciamo che $\mathcal{F}$ è *convesso* se per ogni $v, w \in \mathcal{A}$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$ risulta

$$\mathcal{F}(\lambda v + (1-\lambda)w) \leq \lambda \mathcal{F}(v) + (1-\lambda)\mathcal{F}(w).$$

Diciamo che $\mathcal{F}$ è *strettamente convesso* se inoltre

$$\mathcal{F}(\lambda v + (1-\lambda)w) = \lambda \mathcal{F}(v) + (1-\lambda)\mathcal{F}(w) \iff v = w \text{ o } \lambda = 0, 1.$$

Consideriamo il funzionale

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b f(t, y(t), y'(t))\, dt$$

con $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e $f_{y_i}, f_{\xi_i} \in C^0$, per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$.

Se f è *parzialmente convessa*, cioè se per ogni $(t, y, z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ si ha

$$f(t, y+v, z+w) - f(t, y, z) \geq \sum_{i=1}^n f_{y_i}(t, y, z) v_i + f_{\xi_i}(t, y, z) w_i,$$

per ogni coppia di vettori $(v, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, allora $\mathcal{F}$ è convesso.

Se f è *fortemente parzialmente convessa*, cioè se f è parzialmente convessa e per ogni $(t,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ si ha

$$f(t,y+v,z+w) - f(t,y,z) = \sum_{i=1}^n f_{y_i}(t,y,z)v_i + f_{\xi_i}(t,y,z)w_i \iff v = w = 0,$$

allora $\mathcal{F}$ è strettamente convesso.

Si vede facilmente che se f è convessa, allora f è parzialmente convessa e se f è strettamente convessa, allora f è fortemente parzialmente convessa.

Ci sono alcune relazioni tra la convessità di $\mathcal{F}$ e il suo differenziale di Gateaux (se esiste). Si dimostra infatti che, dato un funzionale $\mathcal{F} : V \to \mathbb{R}$ differenziabile secondo Gateaux su uno spazio vettoriale V, $\mathcal{F}$ è convesso se e solo se $\mathcal{F}(y+v) \geq \mathcal{F}(y)+d\mathcal{F}_y(v)$ per ogni $y, v \in V$. Come conseguenza, una volta fissato y, abbiamo $\mathcal{F}(y+v) - \mathcal{F}(y) \geq d\mathcal{F}_y(v)$ per ogni $v \in V$. Quindi, se y è tale che $d\mathcal{F}_y = 0$, allora y è minimo assoluto di $\mathcal{F}$ e se $\mathcal{F}$ è strettamente convesso, tale minimo è unico.

Applicando quanto detto al problema standard del calcolo delle variazioni, si possono provare le seguenti rilevanti affermazioni.

TEOREMA A.0.7. *Data una lagrangiana $f \in C^0$ con $f_{y_i}, f_{\xi_i} \in C^0$, per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$, se il funzionale*

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b f(t,y(t),y'(t))\,dt$$

è convesso e $y \in \mathcal{A} = \{y \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n) : y(a) = y_a \text{ e } y(b) = y_b\}$ verifica la prima equazione di Eulero–Lagrange (EL1), allora y è minimo assoluto di $\mathcal{F}$ su $\mathcal{A}$ (ogni minimo locale debole è dunque assoluto).

COROLLARIO A.0.8. *Nelle ipotesi del teorema precedente, se $\mathcal{F}$ è strettamente convesso e y verifica (EL1) allora y è l'unico minimo assoluto di $\mathcal{F}$ (non ci possono essere altri minimi locali o altre funzioni che soddisfano la prima equazione di Eulero–Lagrange).*

Ci sono condizioni necessarie e sufficienti per un minimo debole simili a quelle sull'hessiano di una funzione nell'analisi classica. Introduciamo, quindi, l'analogo di quest'ultimo, detto *variazione seconda* di un funzionale.

Definiamo allora, per ogni $v \in C^1_S([a,b],\mathbb{R}^n)$,

$$\delta^2\mathcal{F}_y(v) = \int_a^b \sum_{i,j=1}^n \left[f_{\xi_i\xi_j}(t,y,y')v_i'v_j' + 2f_{y_i\xi_j}(t,y,y')v_iv_j' + f_{y_iy_j}(t,y,y')v_iv_j\right] dt,$$

variazione seconda di $\mathcal{F}$ in y secondo la direzione v. Si noti che vale ovviamente

$$\left.\frac{d^2\mathcal{F}(y+\varepsilon v)}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0} = \delta^2\mathcal{F}_y(v)$$

per ogni $y, v \in C^1_S([a,b],\mathbb{R}^n)$. La mappa $\delta^2\mathcal{F}_y$ è una forma quadratica continua sullo spazio $C^1_S([a,b],\mathbb{R}^n)$ la cui forma bilineare simmetrica (e anch'essa continua) associata per polarizzazione, gioca sostanzialmente il ruolo dell'hessiano in dimensione finita. Infatti:

PROPOSIZIONE A.0.9. *Sia y minimo debole del funzionale*

$$\mathcal{F}(y) = \int_a^b f(t, y(t), y'(t))\, dt$$

su $\mathcal{A} = \{y \in C^1_S([a,b],\mathbb{R}^n) \,:\, y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b\}$, con $f \in C^2$. Allora $\delta\mathcal{F}_y(v) = 0$ e $\delta^2\mathcal{F}_y(v) \geq 0$, per ogni $v \in C^1_S([a,b],\mathbb{R}^n)$ zero ai bordi.

PROPOSIZIONE A.0.10. *Sia $y \in \mathcal{A} = \{y \in C^1_S([a,b],\mathbb{R}^n) \,:\, y(a) = y_a$ e $y(b) = y_b\}$ con $\delta\mathcal{F}_y(v) = 0$ per ogni $v \in C^1_S([a,b],\mathbb{R}^n)$ zero ai bordi e $\delta^2\mathcal{F}_y$ strettamente definita positiva su tale spazio, cioè esiste $\lambda > 0$ tale che*

$$\delta^2\mathcal{F}_y(v) \geq \lambda \int_a^b \left(|v|^2 + |v'|^2\right) dt$$

per ogni $v \in C^1_S([a,b],\mathbb{R}^n)$ zero ai bordi, allora y è minimo debole (stretto) di $\mathcal{F}$ su $\mathcal{A}$.

Le Proposizioni A.0.9 e A.0.10 continuano a valere se minimizziamo su funzioni C^1 e non C^1 a tratti.

Mostriamo una condizione sulla lagrangiana f indotta dalla condizione necessaria di minimo debole vista sopra.

TEOREMA A.0.11. *Sia $y \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ tale che $\delta^2\mathcal{F}_y(v) \geq 0$, per ogni $v \in C^1_0([a,b],\mathbb{R}^n)$, dove $\mathcal{F}$ è un funzionale con lagrangiana $f \in C^2$. Allora*

$$\boxed{\text{la matrice } f_{\xi_i\xi_j}(t, y(t), y'(t)) \text{ è semidefinita positiva}} \tag{LC}$$

per ogni $t \in [a,b]$. Tale condizione è chiamata condizione di Legendre.

La condizione più stringente

$$\boxed{\text{la matrice } f_{\xi_i\xi_j}(t, y(t), y'(t)) \text{ è definita positiva}} \tag{SLC}$$

per ogni $t \in [a,b]$, è detta *condizione di Legendre forte* (*strong Legendre condition*).

PROPOSIZIONE A.0.12. *Se $\delta^2\mathcal{F}_y$ è strettamente definita positiva sullo spazio delle funzioni in $C^1_0([a,b])$, allora vale la* (SLC).

Ricapitoliamo dunque nel seguente diagramma *tutte e sole* le implicazioni che valgono tra le varie condizioni viste in quest'ultima parte, per una funzione $y \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ che soddisfi $\delta\mathcal{F}_y = 0$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\begin{array}{c}\delta^2\mathcal{F}_y\\ \text{semidefinita}\\ \text{positiva}\end{array}} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{y \text{ soddisfa (LC)}} \\
\begin{array}{c} y \text{ minimo}\\ \text{debole}\end{array} \arrow[ur, Rightarrow] & \boxed{\begin{array}{c}\delta^2\mathcal{F}_y\\ \text{definita positiva}\end{array}} \arrow[u, Rightarrow] & \\
 & \boxed{\begin{array}{c}\delta^2\mathcal{F}_y\\ \text{strettamente}\\ \text{definita positiva}\end{array}} \arrow[u, Rightarrow] \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{y \text{ soddisfa (SLC)}} \arrow[uu, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

Supponiamo ora $f \in C^3$, e sia $v \in C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$. Riscriviamo la variazione seconda

$$\delta^2\mathcal{F}_y(v) = \int_a^b \sum_{i,j=1}^n \left[f_{\xi_i\xi_j}(t,y,y')v_i'v_j' + 2f_{y_i\xi_j}(t,y,y')v_iv_j' + f_{y_iy_j}(t,y,y')v_iv_j\right] dt,$$

ponendo

$$\begin{aligned} P_{ij}(t) &= f_{\xi_i\xi_j}(t,y(t),y'(t)) \\ Q_{ij}(t) &= f_{y_i\xi_j}(t,y(t),y'(t)) \\ R_{ij}(t) &= f_{y_iy_j}(t,y(t),y'(t)) \end{aligned}$$

quindi

$$\delta^2\mathcal{F}_y(v) = \int_a^b \sum_{i,j=1}^n \left[P_{ij}v_i'v_j' + 2Q_{ij}v_iv_j' + R_{ij}v_iv_j\right] dt\,.$$

Osserva che le matrici $P_{ij}(t)$ e $R_{ij}(t)$ sono simmetriche per ogni $t \in [a,b]$, per il teorema di Schwarz, e trattiamo il caso in cui la matrice $Q_{ij}(t)$ è simmetrica per ogni $t \in [a,b]$. Se la matrice $Q_{ij}(t)$ *non* è simmetrica per ogni $t \in [a,b]$, questa integrazione per parti che "elimina" il termine "misto" dall'espressione della variazione seconda non è possibile, il che rende la teoria molto più complessa. Ci limiteremo in questa sezione a discutere il caso simmetrico, rimandando il lettore a [94, Capitoli 5 e 6] e alle referenze ivi contenute, per il caso generale. Inoltre, assumiamo che valga la condizione (SLC), cioè la matrice simmetrica $P_{ij}(t)$ sia definita positiva per ogni $t \in [a,b]$. Allora, se y è una soluzione dell'equazione (EL1) (in particolare se y è un minimo debole di $\mathcal{F}$) si ha che $y \in C^2$, per la Proposizione A.0.6, dunque le funzioni P_{ij}, Q_{ij}, R_{ij} sono di classe C^1. Possiamo riscrivere la variazione seconda di $\mathcal{F}$ per ogni $v \in C^1_0([a,b],\mathbb{R}^n)$, come

COMM: Vedere foglietto2

$$\begin{aligned}\delta^2\mathcal{F}_y(v) &= \int_a^b \sum_{i,j=1}^n \big[P_{ij}v_i'v_j' + 2Q_{ij}v_iv_j' + R_{ij}v_iv_j\big]\,dt\\ &= \int_a^b \sum_{i,j=1}^n \big[P_{ij}v_i'v_j' + (R_{ij} - Q_{ij}')v_iv_j\big]\,dt\end{aligned}$$

dove abbiamo integrato per parti il termine centrale (sfruttando la simmetria della matrice $Q_{ij}(t)$).

OSSERVAZIONE A.0.13. Se vale la condizione (SLC) (che insieme alla compatezza di $[a,b]$ implica $\sum_{i,j=1}^n P_{ij}q_iq_j \geq \alpha|q|^2$ per ogni $q \in \mathbb{R}^n$, per qualche $\alpha > 0$) con y che soddisfa $\delta\mathcal{F}_y = 0$ ed esiste una costante $\beta > 0$ tale che $\sum_{i,j=1}^n (R_{ij} - Q_{ij}')q_iq_j \geq \beta|q|^2 > 0$ per ogni $q \in \mathbb{R}^n$, allora y è un minimo debole. Infatti

$$\delta^2\mathcal{F}_y(v) = \int_a^b \sum_{i,j=1}^n \big[P_{ij}v_i'v_j' + (R_{ij} - Q_{ij}')v_iv_j\big]\,dt \geq \lambda(|v'|^2 + |v|^2),$$

per $\lambda > 0$, cioè $\delta^2\mathcal{F}_y$ è strettamente definita positiva e la conclusione segue da quanto scritto successivamente alla dimostrazione della Proposizione A.0.10.

Prima di presentare la teoria che segue (dovuta a Jacobi), vogliamo darne una motivazione informale. Consideriamo la forma

$$Z_y^c(v) = \int_a^c \sum_{i,j=1}^n \big[P_{ij}v_i'v_j' + (R_{ij} - Q_{ij}')v_iv_j\big]\,dt$$

sulle funzioni di $C^1_0([a,c],\mathbb{R}^n)$ dove $c \in (a,b]$, cioè su un sottointervallo $[a,c]$ di $[a,b]$. Sfruttando la compatezza dell'intervallo $[a,b]$ e la continuità del minimo autovalore delle matrici reali simmetriche P_{ij} e $R_{ij} - Q_{ij}'$, esistono delle costanti

$\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ tali che

$$\sum_{i,j=1}^{n} P_{ij} q_i q_j \geq \alpha |q|^2 \text{ (per la condizione (SLC))}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ij} - Q'_{ij}) q_i q_j \geq -\beta |q|^2$$

per ogni $q \in \mathbb{R}^n$ e tutti $t \in [a, b]$, di conseguenza

$$Z_y^c(v) \geq \int_a^c \big[\alpha |v'|^2 - \beta |v|^2\big]\, dt\,,$$

allora la disuguaglianza di Poincaré (P1), che afferma che

$$\int_0^L |z|^2\, dt \leq \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L |z'|^2\, dt \tag{P1}$$

per ogni $z \in C^1_S([0, L], \mathbb{R}^n)$ tale che $z^i(0) = z^i(L) = 0$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$, applicata al v, implica

$$Z_y^c(v) \geq \beta \int_a^c \left[\frac{\alpha}{\beta} |v'|^2 - |v|^2\right] dt \geq \beta \int_a^c \left[\frac{\alpha}{\beta} - \frac{(c-a)^2}{\pi^2}\right] |v'|^2\, dt \geq 0\,,$$

per c abbastanza piccolo, in particolare la diseguaglianza centrale è stretta se v^i non è identicamente nullo per qualche i. Quindi, Z_y^c è una forma strettamente definita positiva su $C^1_0([a, c], \mathbb{R}^n)$. Se tale positività (stretta) non vale quando $c = b$, al variare di c in $[a, b]$ la forma deve diventare semidefinita positiva per un certo (primo) valore di c ed esistere una funzione $v \in C^1_0([a, c], \mathbb{R}^n)$ non nulla e tale che $Z_y^c(v) = 0$. Allora, se B è la forma bilineare definita su $C^1_0([a, c], \mathbb{R}^n)$ ottenuta per polarizzazione da Z_y^c, cioè

$$B(z, w) = \frac{Z_y^c(z + w) - Z_y^c(z - w)}{4} = \int_a^c \sum_{i,j=1}^{n} \big[P_{ij} z'_i w'_j + (R_{ij} - Q'_{ij}) z_i w_j\big]\, dt,$$

B è simmetrica e $B(v, w) = 0$ per ogni $w \in C^1_0([a, c], \mathbb{R}^n)$. Infatti, essendo Z_y^c semidefinita positiva e $Z_y^c(v) = 0$, valgono le diseguaglianze $B(w, w) \geq 0$ e $B(w, w) - 2\alpha B(v, w) = B(w - \alpha v, w - \alpha v) \geq 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, che portano, argomentando per assurdo, alla conclusione $B(v, w) = 0$ per ogni $w \in C^1_0([a, c], \mathbb{R}^n)$.

Quindi si deve avere

$$\begin{aligned}
0 &= \int_a^c \sum_{i,j=1}^n \big[P_{ij}v_i'w_j' + (R_{ij} - Q_{ij}')v_iw_j\big]\,dt\\
&= \int_a^c \sum_{i,j=1}^n \big[-\big(P_{ij}v_i'\big)'w_j + (R_{ij} - Q_{ij}')v_iw_j\big]\,dt\\
&= \int_a^c \sum_{i,j=1}^n \big[-\big(P_{ij}v_i'\big)' + (R_{ij} - Q_{ij}')v_i\big]w_j\,dt,
\end{aligned}$$

per ogni $w \in C_0^1([a,c],\mathbb{R}^n)$, da cui deve essere

$$\Big(\sum_{j=1}^n P_{ij}v_j'\Big)' = \sum_{j=1}^n \big(R_{ij} - Q_{ij}'\big)v_j$$

per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$, in $[a,c]$, assumendo $v \in C_0^2([a,c],\mathbb{R}^n)$. Quindi l'esistenza di soluzioni per questo problema implica la perdita di stretta positività della forma Z_y^c (al variare di c in $[a,b]$) e dunque della variazione seconda del funzionale $\mathcal{F}$. Si ha inoltre che tale equazione è l'equazione di Eulero–Lagrange della forma Z_y^c, vista come un funzionale su $C^1([a,c],\mathbb{R}^n)$. Infatti, consideriamo il *funzionale di Jacobi*

$$\mathcal{J}(v) = \int_a^b \sum_{i,j=1}^n \big[P_{ij}v_i'v_j' + (R_{ij} - Q_{ij}')v_iv_j\big]\,dt. \tag{JF}$$

La Lagrangiana di $\mathcal{J}$ è data da

$$H(t,v,\xi) = \sum_{i,j=1}^n \big[P_{ij}\xi_i\xi_j + (R_{ij} - Q_{ij}')v_iv_j\big]$$

e poiché $P,Q,R \in C^1$ abbiamo che $H, H_v, H_\xi \in C^0$, dove

$$H_{v_i} = 2\sum_{j=1}^n \big(R_{ij} - Q_{ij}'\big)v_j \quad \text{e} \quad H_{\xi_i} = 2\sum_{j=1}^n P_{ij}\xi_j\,.$$

Allora, l'equazione di Eulero–Lagrange del funzionale $\mathcal{J}$ è

$$\Big(\sum_{j=1}^n P_{ij}v_j'\Big)' = \sum_{j=1}^n \big(R_{ij} - Q_{ij}'\big)v_j \tag{J}$$

per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$, che prende il nome di *equazione di Jacobi (vettoriale)*, mentre le sue soluzioni sono dette *campi di Jacobi*.

Con l'idea discussa sopra, per studiare la positività di $\mathcal{J}$ su $C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$, consideriamo le soluzioni della sua equazione di Eulero–Lagrange nulle in a, precisamente, le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \left(\sum_{j=1}^n P_{ij}v_j'\right)' = \sum_{j=1}^n (R_{ij} - Q_{ij}')v_j \\ v(a) = 0 \\ v'(a) = \lambda \end{cases} \tag{JP}$$

per ogni $i \in \{1,\dots,n\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}^n$, chiamato *problema di Jacobi (vettoriale)*. Supponiamo che $v \in C^2([a,b],\mathbb{R}^n)$ sia una soluzione del problema di Jacobi (vettoriale) per qualche $\lambda \in \mathbb{R}^n$, allora, valutando il funzionale $\mathcal{J}$ sulla funzione v, si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(v) &= \int_a^b \sum_{i,j=1}^n \left[P_{ij}v_i'v_j' + (R_{ij} - Q_{ij}')v_iv_j\right] dt \\
&= \int_a^b \sum_{i,j=1}^n \left[-(P_{ij}v_i')' + (R_{ij} - Q_{ij}')v_i\right] v_j\, dt + \sum_{i,j=1}^n P_{ij}v_i'v_j\Big|_a^b \\
&= \sum_{i,j=1}^n P_{ij}(b)v_i'(b)v_j(b)
\end{aligned}$$

dove abbiamo integrato per parti e sfruttato il fatto che v è soluzione del problema di Jacobi (JP).

Vediamo ora, come detto sopra, che il segno della forma $\delta^2\mathcal{F}_y$ è legato ai punti dove la soluzione del Problema (JP) si annulla, oltre ad a.

Definizione A.0.14. Dato l'intervallo $[a,b]$ si dice che $c \in (a,b]$ è un *punto coniugato* ad a se esiste un vettore $\lambda \neq 0$ tale che la soluzione (unica) del Problema (JP) si annulla in c (cioè esiste un campo di Jacobi, non identicamente nullo, che si annulla in a e c).

Diciamo che vale la *condizione di Jacobi* se

$$\boxed{\text{nell'intervallo aperto } (a,b) \text{ non ci sono punti coniugati ad } a} \tag{JC}$$

Diciamo che vale la *condizione forte di Jacobi* (*strong Jacobi condition*) se

$$\boxed{\text{nell'intervallo } (a,b] \text{ non ci sono punti coniugati ad } a} \tag{SJC}$$

Si può mostrare che, se $f \in C^3$ e la condizione forte di Legendre (SLC) vale:

- Le condizioni
  (1) (JC)
  (2) $\delta^2\mathcal{F}_y(v) \geq 0$ per ogni $v \in C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$,

  sono equivalenti e implicate dal fatto che y sia un minimo debole di $\mathcal{F}$ su $\mathcal{A}$.
- Le condizioni

(1) (SJC)
(2) $\delta^2\mathcal{F}_y(v) > 0$ per ogni $v \in C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ non nulla,
(3) $\delta^2\mathcal{F}_y$ è strettamente definita positiva sullo spazio delle funzioni $C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$,

sono equivalenti e implicano che se y soddisfa l'equazione di Eulero–Lagrange (EL1) (o equivalentemente $\delta\mathcal{F}_y(v) = 0$ per ogni $v \in C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$) allora y è minimo debole (stretto) di $\mathcal{F}$ su $\mathcal{A}$.

Concludiamo questa appendice riassumendo le condizioni necessarie e sufficienti che abbiamo ottenuto affinché una funzione $y \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ sia un minimo debole del funzionale $\mathcal{F}$ sull'insieme di funzioni $\mathcal{A}$.

- *Condizioni necessarie:*
  (1) Se $f \in C^1$, si deve avere $\delta\mathcal{F}_y(v) = 0$ per ogni $v \in C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$, cioè y deve soddisfare la prima equazione di Eulero–Lagrange (EL1).
  (2) Se $f \in C^2$, oltre alla condizione precedente, si deve avere $\delta^2\mathcal{F}_y(v) \geq 0$ per ogni $v \in C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ ($\delta^2\mathcal{F}_y$ è semidefinita positiva) e deve valere la condizione di Legendre (LC).
  (3) Se $f \in C^3$ e vale la condizione forte di Legendre (SLC), oltre alle condizioni precedenti deve valere la condizione di Jacobi (JC).
- *Condizioni sufficienti:*
  (1) Se $f \in C^2$, si ha $\delta\mathcal{F}_y(v) = 0$ per ogni $v \in C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$, cioè y soddisfa la prima equazione di Eulero–Lagrange (EL1) e esiste $\lambda > 0$ tale che $\delta^2\mathcal{F}_y(v) \geq \lambda(|v|^2 + |v'|^2)$ per ogni $v \in C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ ($\delta^2\mathcal{F}_y$ è strettamente definita positiva).
  (2) Se $f \in C^3$, si ha $\delta\mathcal{F}_y(v) = 0$ per ogni $v \in C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$, cioè y soddisfa la prima equazione di Eulero–Lagrange (EL1), vale la condizione forte di Legendre (SLC) e $\delta^2\mathcal{F}_y(v) > 0$ per ogni $v \in C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ non nulla.
  (3) Se $f \in C^3$, si ha $\delta\mathcal{F}_y(v) = 0$ per ogni $v \in C_0^1([a,b],\mathbb{R}^n)$, cioè y soddisfa la prima equazione di Eulero–Lagrange (EL1), valgono la condizione forte di Legendre (SLC) e la condizione forte di Jacobi (SJC).

  Inoltre, nel caso una di queste condizioni sufficienti di minimo debole sia verificata, il minimo è stretto.

Il materiale qui presentato è una sintesi del lavoro [17].