CAPITOLO 8

Curvatura e topologia I – L'approccio "classico"

In questo capitolo vogliamo presentare alcuni teoremi "classici" in cui assunzioni sulla curvatura implicano conclusioni sulla geometria e topologia delle varietà riemanniane. Da un altro punto di vista, questi risultati forniscono "ostruzioni" topologiche all'esistenza di metriche con definite caratteristiche di curvatura sulle varietà.

Nelle prossime sezioni presenteremo le dimostrazioni classiche di alcuni di questi teoremi, generalmente basate sull'analisi della forma indice e sulle proprietà dei campi di Jacobi lungo le geodetiche della varietà, in un approccio di tipo variazionale. Mentre nel Capitolo 12 mostreremo delle dimostrazioni alternative di alcuni di questi teoremi, basate sulle proprietà delle funzioni distanza che discuteremo nel Capitolo 10, seguendo un approccio suggerito da Peter Petersen in [**156**].

Prima di passare a vedere tali risultati, mostriamo un paio di lemmi tecnici.

LEMMA 8.0.1. *Sia $\pi : M \to N$ un'isometria locale tra due varietà riemanniane (M, g) e (N, h), con N connessa. Allora, M è completa se e solo se N è completa e π è un rivestimento riemanniano.*
In particolare, se π è un rivestimento riemanniano, M è completa se e solo se N è completa.

DIMOSTRAZIONE. Il secondo punto segue ovviamente dal primo.
Se N è completa e π è un rivestimento riemanniano, fissato $p \in M$ e posto $q = \pi(p) \in N$, se $\widetilde{\gamma}$ è una geodetica uscente da p, la geodetica "immagine" $\gamma = \pi \circ \widetilde{\gamma}$ uscente da $q \in N$, essendo N completa, è definita su tutto $\mathbb{R}$. Ma allora, "sollevando" γ a M, abbiamo una geodetica che estende $\widetilde{\gamma}$, definita su tutto $\mathbb{R}$. Per il teorema di Hopf–Rinow 6.1.4, segue che M è completa.
Vediamo ora l'altra implicazione. Sia $q \in \pi(M)$ e $p \in \pi^{-1}(q)$, allora per ogni geodetica $\gamma : I \to N$ uscente da q esiste un'unica geodetica "sollevata" $\widetilde{\gamma} : \widetilde{I} \to M$, uscente da p e tale che $\gamma = \pi \circ \widetilde{\gamma}$ su $I \cap \widetilde{I}$. Ciò segue in modo immediato tenendo conto che essendo π un'isometria locale, esistono un intorno aperto U di p in M ed un intorno aperto V di q in N tali che $\pi : U \to V$ è un'isometria e che ogni geodetica viene mappata in una geodetica da un'isometria locale. Essendo M geodeticamente completa, si ha che $\widetilde{\gamma}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, dunque la geodetica $\pi \circ \widetilde{\gamma}$ estende γ a tutto $\mathbb{R}$, da cui anche N è geodeticamente completa, se la mappa π è surgettiva, per il Teorema 6.1.4.

Proviamo che la mappa π è surgettiva. Essendo N connessa, è sufficiente mostrare che $\pi(M)$ è un sottoinsieme aperto e chiuso di N. Che $\pi(M)$ sia aperto segue immediatamente dal fatto che π è un diffeomorfismo (isometria) locale. Consideriamo una successione convergente di punti $q_i = \pi(p_i) \to q \in N$, supponendo che $q_{\bar{i}} \in B_r(q)$, per un certo indice $\bar{i} \in \mathbb{N}$, con $r < \mathrm{inj}(q)$, dunque esiste un'unica geodetica minimale $\gamma : [0, \bar{t}] \to N$ da $q_{\bar{i}}$ a q data da $\gamma(t) = \exp_{q_{\bar{i}}}(tw)$. Essendo π un'isometria locale la geodetica "sollevata" $\widetilde{\gamma}(t) = \exp_{p_{\bar{i}}}(tv)$ con $d\pi_{p_{\bar{i}}}(v) = w$, che esiste per ogni $t \in \mathbb{R}$ per la completezza di M, soddisfa $\gamma = \pi \circ \widetilde{\gamma}$ da cui $q = \gamma(\bar{t}) = \pi(\widetilde{\gamma}(\bar{t}))$, quindi $q \in \pi(M)$ che allora è un sottoinsieme chiuso di N.
Infine, dimostriamo che π è un rivestimento riemanniano. Sia q un punto di N e sia $\pi^{-1}(q) = \{p_i : i \in I\}$. Se $r > 0$ è un numero reale minore del raggio di iniettività $\mathrm{inj}(q)$ di q in N, abbiamo che

$$\exp_q|_{B_r(O_q)} : B_r(O_q) \to B_r(q)$$

è un diffeomorfismo. Siano $U = B_r(q)$ e $U_i = B_r(p_i)$ per $i \in I$, essendo π un'isometria locale, le geodetiche di M vengono mandate in geodetiche di N della stessa lunghezza, di conseguenza,

$$\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq \pi^{-1}(U).$$

Fissato ora un qualsiasi indice $i \in I$, consideriamo un vettore $v \in T_{p_i}M$ e la corrispondente geodetica $\widetilde{\gamma}$ su M uscente da p_i con velocità iniziale v. Siano inoltre $w = d\pi_{p_i}(v)$ e γ la geodetica su N uscente da q con velocità iniziale w. Dal momento che π è un'isometria locale, manda $\widetilde{\gamma}$ in γ (in altre parole, $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$), quindi

$$\exp_q\big(d\pi_{p_i}(tv)\big) = \exp_q(tw) = \gamma(t) = \pi(\widetilde{\gamma}(t)) = \pi\big(\exp_{p_i}(tv)\big),$$

di conseguenza, il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
B_r(O_{p_i}) \arrow[r, "d\pi_{p_i}"] \arrow[d, "\exp_{p_i}"'] & B_r(O_q) \arrow[d, "\exp_q"] \\
U_i \arrow[r, "\pi"] & U
\end{tikzcd}$$

Poiché $d\pi_{p_i}$ è un'isometria lineare di $T_{p_i}M$ in T_qN (dunque un diffeomorfismo) e $\exp_q : B_r(O_q) \to U$ è un diffeomorfismo, ciò vale anche per la composizione $\exp_q \circ d\pi_{p_i} : B_r(O_{p_i}) \to U$. Segue dunque che $\pi \circ \exp_{p_i} : B_r(O_{p_i}) \to U$ è un diffeomorfismo, da cui la mappa (surgettiva)

$$\exp_{p_i} : B_r(O_{p_i}) \to U_i = B_r(p_i)$$

è iniettiva, quindi un diffeomorfismo anch'essa. Concludiamo allora che anche la mappa $\pi|_{U_i} : U_i \to U$ è un diffeomorfismo, inoltre è un'isometria, essendo $d\pi_p$ un'isometria lineare per ogni $p \in U_i$.
Dimostriamo ora che gli aperti U_i sono a due a due disgiunti. Fissati due indici distinti $i, j \in I$, sia $\widetilde{\gamma}$ una geodetica minimizzante da p_i a p_j. La composizione $\gamma = \pi \circ \widetilde{\gamma}$ è una geodetica (chiusa) da q a q della stessa lunghezza, che deve quindi necessariamente uscire dalla palla geodetica $B_r(q)$, altrimenti la geodetica $\widetilde{\gamma}$ non uscirebbe da U_i ($p_j \notin U_i$, altrimenti la mappa $\pi|_{U_i}$ non sarebbe iniettiva). Segue che

$$\mathscr{L}(\gamma) = \mathscr{L}(\pi \circ \widetilde{\gamma}) \geqslant 2r,$$

dunque $d(p_i, p_j) \geqslant 2r$, che implica che U_i e U_j sono disgiunti.
Infine vediamo che $\pi^{-1}(U)$ è uguale all'unione degli U_i. Sia $p \in \pi^{-1}(U)$ e $\overline{q} = \pi(p) \in U$. Chiamiamo $\ell < r$ la distanza tra $\overline{q}$ e q e consideriamo la geodetica minimizzante $\gamma : [0, \ell] \to N$ da $\overline{q}$ a q parametrizzata in lunghezza d'arco. Essendo π un'isometria locale, posto $\widetilde{\gamma}$ la geodetica uscente da p con velocità iniziale $d\pi_p^{-1}(\gamma'(0))$, segue che $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ e inoltre che la lunghezza di $\widetilde{\gamma}$ è ℓ. Di conseguenza, al tempo ℓ, la curva $\widetilde{\gamma}$ deve passare per uno dei p_i ed essendo $\ell < r$, ciò implica che $d(p, p_i) < r$, cioè p appartiene a $U_i = B_r(p_i)$. □

Osserviamo che la completezza di M è essenziale. Infatti, consideriamo il rivestimento standard $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$ dato dalla proiezione sul quoziente, dove $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{RP}^2$ si considerano dotati delle loro metriche canoniche. Se $M = \mathbb{S}^2 \setminus \{p\}$ (che non è completa) e $\varphi : M \to \mathbb{RP}^2$ è la restrizione di π a M, non è vero che φ è un rivestimento (la fibra sopra $\pi(p)$ ha un solo punto, mentre tutte le altre fibre ne hanno due).

LEMMA 8.0.2. *Siano (M, g) e (N, h) due varietà riemanniane con M connessa e $\varphi, \psi : M \to N$ due isometrie locali. Supponiamo che vi sia un punto $p \in M$ tale che $\varphi(p) = \psi(p)$ e $d\varphi_p = d\psi_p$, allora $\varphi = \psi$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Omega = \{q \in M \,:\, \varphi(q) = \psi(q), d\varphi_q = d\psi_q\}$. L'insieme Ω è non vuoto (p vi appartiene) e chiuso in M, facciamo vedere che è anche aperto, da cui segue la tesi.
Sia $q \in \Omega$ e sia $B_r(q)$ una palla geodetica in M, con $r < \mathrm{inj}(q)$. Allora ogni punto $q' \in B_r(q)$ è della forma $\exp_q(v)$ per qualche $v \in B_r(O_q) \subseteq T_qM$. Osserviamo che $\varphi \circ \exp_q = \exp_{\varphi(q)} \circ (d\varphi)_q$ perché un'isometria locale manda geodetiche in geodetiche; lo stesso, chiaramente, vale per ψ. Di conseguenza,

$$\varphi(q') = \varphi\big(\exp_q(v)\big) = \exp_{\varphi(q)}\big(d\varphi_q(v)\big) = \exp_{\psi(q)}\big(d\psi_q(v)\big) = \psi\big(\exp_q(v)\big) = \psi(q')\,,$$

per ogni $q' \in B_r(q)$. Questo chiaramente implica $d\varphi_{q'} = d\psi_{q'}$, pertanto $B_r(q) \subseteq \Omega$. Dall'arbitrarietà di $q \in \Omega$, segue che Ω è aperto ed essendo aperto, chiuso e non vuoto, coincide con l'intera varietà M, che è connessa. □

8.1. Il teorema di Bonnet–Myers

In questa sezione vedremo come, assumendo che la curvatura di Ricci sia positivamente limitata dal basso, si possa dedurre che la varietà è compatta e che il suo gruppo fondamentale è finito. Ciò è conseguenza del seguente *teorema di Bonnet–Myers*, detto anche "stima del diametro".

Con la notazione $\mathrm{Ric} \geqslant \lambda g$ *si intende che per ogni* $p \in M$*, il minimo autovalore dell'operatore* Ric_p *è maggiore o uguale a* λ*, equivalentemente, per ogni* $p \in M$ *e* $v \in T_pM$ *si ha* $\mathrm{Ric}_p(v, v) \geqslant \lambda g_p(v, v)$.

TEOREMA 8.1.1 (Teorema di Bonnet–Myers). *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana completa di dimensione* $n \geqslant 2$*, con* $\mathrm{Ric} \geqslant k(n-1)g$ *per un qualche numero reale* $k > 0$*. Allora il diametro di* M *è minore o uguale a* $\pi/\sqrt{k}$*, così come* $\mathrm{inj}(p)$*, per ogni* $p \in M$.

DIMOSTRAZIONE. Siano p e q due punti di M e sia $\gamma : [0, \ell] \to M$ una geodetica minimale da p a q parametrizzata per lunghezza d'arco. Per minimalità, si deve avere $I(Y, Y) \geqslant 0$ per ogni campo vettoriale Y lungo γ che sia nullo agli estremi. Siano $e_1, \dots, e_{n-1} \in T_pM$ dei vettori che completano $\dot\gamma(0)$ a una base ortonormale di T_pM e siano E_i le estensioni parallele lungo γ dei vettori e_i. Definiamo nel seguente modo, per $i \in \{1, \dots, n-1\}$, dei campi vettoriali Y_i lungo γ,

$$Y_i(t) = \sin\Bigl(\frac{\pi t}{\ell}\Bigr) E_i(t)\,.$$

Poiché gli E_i sono campi paralleli lungo γ, le derivate covarianti dei campi Y_i si ottengono semplicemente derivando $\sin\bigl(\frac{\pi t}{\ell}\bigr)$,

$$\begin{aligned} Y_i'(t) &= \frac{\pi}{\ell}\cos\Bigl(\frac{\pi t}{\ell}\Bigr) E_i(t)\,,\\ Y_i''(t) &= -\frac{\pi^2}{\ell^2}\sin\Bigl(\frac{\pi t}{\ell}\Bigr) E_i(t)\,. \end{aligned}$$

Per costruzione, gli Y_i sono campi nulli agli estremi, quindi $I(Y_i, Y_i) \geqslant 0$ e si ha

$$\begin{aligned} I(Y_i, Y_i) &= \int_0^\ell \bigl(|Y_i'|^2 - R(\dot\gamma, Y_i, \dot\gamma, Y_i)\bigr)\,dt\\ &= \int_0^\ell \bigl(-g\bigl(Y_i,\, Y_i''\bigr) - R(\dot\gamma, Y_i, \dot\gamma, Y_i)\bigr)\,dt\\ &= \int_0^\ell \Bigl(\frac{\pi^2}{\ell^2}\sin^2\Bigl(\frac{\pi t}{\ell}\Bigr) - R(\dot\gamma, E_i, \dot\gamma, E_i)\,\sin^2\Bigl(\frac{\pi t}{\ell}\Bigr)\Bigr)\,dt\,. \end{aligned}$$

Essendo $\{\dot\gamma(t), E_1(t), \dots, E_{n-1}(t)\}$ una base ortonormale di $T_{\gamma(t)}M$ per ogni $t \in [0, \ell]$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} R(\dot\gamma, E_i, \dot\gamma, E_i) = R(\dot\gamma, \dot\gamma) \geqslant k(n-1)\,g(\dot\gamma, \dot\gamma) = k(n-1)\,.$$

Concludiamo allora,

$$
\begin{aligned}
0 &\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} I(Y_i, Y_i) \\
&= \int_0^\ell \sin^2\Big(\frac{\pi t}{\ell}\Big)\Big(\frac{\pi^2(n-1)}{\ell^2} - \sum_{i=1}^{n-1} R(\dot\gamma, E_i, \dot\gamma, E_i)\Big)\, dt \\
&\leqslant \int_0^\ell \sin^2\Big(\frac{\pi t}{\ell}\Big)\Big(\frac{\pi^2(n-1)}{\ell^2} - k(n-1)\Big)\, dt \\
&= (n-1)\Big(\frac{\pi^2}{\ell^2} - k\Big)\int_0^\ell \sin^2\Big(\frac{\pi t}{\ell}\Big)\, dt\,.
\end{aligned}
$$

Di conseguenza, si deve avere $\pi^2/\ell^2 - k \geqslant 0$, da cui $\ell \leqslant \pi/\sqrt{k}$.
Abbiamo pertanto dimostrato che la distanza tra due qualsiasi punti di M è al più $\pi/\sqrt{k}$, dunque il diametro di M è minore o uguale a $\pi/\sqrt{k}$ e per la Proposizione 6.6.2, si ha $\mathrm{inj}(p) \leqslant \pi/\sqrt{k}$, per ogni $p \in M$. □

COROLLARIO 8.1.2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa con $\mathrm{Ric} \geqslant \lambda g$ per un qualche numero reale $\lambda > 0$. Allora M è compatta e il suo gruppo fondamentale è finito.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di Bonnet–Myers 8.1.1 la varietà (M, g) ha diametro limitato (ed è chiusa), quindi per il teorema di Hopf–Rinow 6.1.4, M è compatta. Sia $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \to (M, g)$ il rivestimento universale riemanniano di M. Essendo M completa, per il Lemma 8.0.1, anche $\widetilde{M}$ è completa. Poiché il tensore di curvatura è invariante per isometrie locali, la curvatura di Ricci di $\widetilde{M}$ è limitata inferiormente allo stesso modo di M. Applicando nuovamente il teorema di Bonnet–Myers, otteniamo allora che anche $\widetilde{M}$ è compatta. Di conseguenza il numero dei fogli del rivestimento è finito e da questo segue che il gruppo fondamentale di M è finito. □

Una conseguenza di questo corollario è ad esempio che sul toro $\mathbb{T}^2$ (o su una qualunque superficie compatta diversa dalla sfera, cioè di genere maggiore di zero) non si può mettere una metrica con $\mathrm{Ric} > 0$, in quanto $\pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}^2$ (analogamente, nemmeno su $\mathbb{T}^n$ o una metrica con $\mathrm{Ric} \geqslant \lambda g > 0$ su una qualunque varietà completa del tipo $M \times \mathbb{S}^1$).

OSSERVAZIONE 8.1.3. La condizione $\mathrm{Ric} \geqslant k(n-1)g$, con $k > 0$, non si può "indebolire" a $\mathrm{Ric} > 0$ o nemmeno modificare in $\mathrm{Sec} > 0$, in quanto per esempio il paraboloide di rotazione $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; z = x^2 + y^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ha tutte le curvature sezionali positive in ogni suo punto, ma non è compatto.

Si noti che la sfera standard $\mathbb{S}^n_{1/\sqrt{k}}$ di raggio $1/\sqrt{k}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Bonnet–Myers e il suo diametro è in effetti proprio uguale a $\pi/\sqrt{k}$, dunque la conclusione è ottimale. Vedremo nella Sezione 11.7, nelle ipotesi del teorema di Bonnet–Myers, che se siamo in tale situazione "massimale", cioè che il diametro è uguale a $\pi/\sqrt{k}$, allora la varietà riemanniana (M, g) è isometrica alla sfera standard di raggio $1/\sqrt{k}$ (*teorema massimale di Cheng* 11.7.1).

LEMMA 8.1.4 (Lemma di Synge). *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa con curvatura sezionale $\mathrm{Sec}_p(\pi) \geqslant k > 0$, per ogni 2–piano $\pi \subseteq T_pM$ e ogni $p \in M$. Allora M è compatta con diametro minore o uguale a $\pi/\sqrt{k}$ e il suo gruppo fondamentale è finito.*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo che $\mathrm{Ric} \geqslant k(n-1)g$, la tesi poi segue allora dal teorema di Bonnet–Myers 8.1.1 e dal Corollario 8.1.2. Sia $p \in M$, allora per ogni $v \in T_pM$ non nullo, per l'equazione (5.10) e l'ipotesi sulle curvature sezionali, si ha

$$\mathrm{Ric}_p(v, v) = \sum_{i=1}^{n-1} R_p(v, e_i, v, e_i) = |v|_p^2 \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Sec}_p(\langle v, e_i \rangle) \geqslant k(n-1)g_p(v, v)$$

dove $e_1, \dots, e_{n-1}$ completano $v/|v|_p$ a una base ortonormale di T_pM. $\square$

NOTA STORICA. Nel 1855 Bonnet dimostra la stima sul diametro per le superfici in $\mathbb{R}^3$, nel lemma di Synge, più precisamente dimostra che ogni curva di lunghezza maggiore di $\pi/\sqrt{k}$, dove $k > 0$ è il minimo della curvatura gaussiana della superficie, non può essere minimizzante. Tale stima viene estesa da Synge [**178**] a ogni dimensione nel 1926, come applicazione della formula di variazione seconda. Nel 1931 Hopf e Rinow [**112**], per le superfici e Myers [**147**] nel 1935, in ogni dimensione, osservano che assumendo la completezza nel lemma di Synge si ha la compattezza della varietà e dunque la conclusione di finitezza del gruppo fondamentale. Infine, Myers [**149**] nel 1941 dimostra il Teorema 8.1.1 e il Corollario 8.1.2, assumendo la positività soltanto del tensore di Ricci, invece che della curvatura sezionale.

8.2. Il teorema di Synge

Mostriamo un altro importante risultato di Synge in curvatura positiva.

TEOREMA 8.2.1 (Teorema di Synge [**179**]). *Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta, orientabile e di dimensione pari, con curvatura positiva, cioè $\mathrm{Sec} > 0$ in ogni punto. Allora M è semplicemente connessa.*
Se (M, g) è compatta e di dimensione dispari, con curvatura positiva, allora è orientabile.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il primo punto del teorema. Supponiamo per assurdo che M non sia semplicemente connessa, allora esiste una classe non banale di omotopia libera di curve chiuse in M, per la discussione dopo la Proposizione 6.1.21 e per il Corollario 6.1.22, abbiamo una geodetica chiusa

$\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$ di lunghezza minima positiva (dunque non banale) nella sua classe di omotopia libera. Sia $p = \gamma(0)$ e sia inoltre $P : T_pM \to T_pM$ l'operatore di trasporto parallelo lungo γ, definito nella Sezione 3.6. Sappiamo dall'Osservazione 3.6.8 che P è un'isometria lineare da (T_pM, g_p) in se stesso, inoltre P conserva l'orientazione, poiché M è orientabile (lo si mostri per esercizio). Essendo γ una geodetica P manda $\dot\gamma(0) \in T_pM$ in se stesso, di conseguenza, poiché il trasporto parallelo conserva l'ortogonalità, il sottospazio $W = \dot\gamma(0)^\perp$ di T_pM, di dimensione dispari $n-1$, viene a sua volta mandato in se stesso da P, quindi $P|_W : W \to W$ è un'isometria lineare che conserva l'orientazione di uno spazio vettoriale di dimensione dispari in se stesso. Ricordando che una qualsiasi isometria lineare $\varphi : \mathbb{R}^{2m+1} \to \mathbb{R}^{2m+1}$, con determinante uguale a 1, deve avere almeno un autovettore di autovalore 1, abbiamo che esiste $w \in W$ non nullo, tale che $Pw = w$.
Consideriamo allora il campo Y lungo γ con $Y(0) = w$, ottenuto trasportando parallelamente w lungo γ, che dunque è di classe C^∞, non nullo e ortogonale a $\dot\gamma$ in tutti i punti della geodetica. Abbiamo, per l'Osservazione 6.3.12,

$$I(Y,Y) = \int_{\mathbb{S}^1} \big(\underbrace{|Y'|^2}_{0} - \underbrace{R(\dot\gamma, Y, \dot\gamma, Y)}_{>0} \big)\, ds \, < \, 0\,,$$

in quanto

$$R(\dot\gamma(t), Y(t), \dot\gamma(t), Y(t)) = \mathrm{Sec}(\langle \dot\gamma(t), Y(t)\rangle)\, |Y(t)|^2\, |\dot\gamma(t)|^2 > 0\,,$$

per ogni $t \in \mathbb{S}^1$.
Tuttavia, γ è minimizzante quindi una qualsiasi variazione H associata a Y deve verificare

$$0 \leqslant \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{E}(\gamma_s)\Big|_{s=0} = I(Y,Y)$$

che è una contraddizione.

Se M ha dimensione dispari e per assurdo non è orientabile, allora non può essere semplicemente connessa (si veda la Sezione 1.4). Segue allora che esiste una classe non banale di omotopia libera di curve chiuse in M, tale che il trasporto parallelo lungo ogni curva in tale classe $P : T_pM \to T_pM$ sia un'isometria con determinante uguale a -1 (lo si mostri per esercizio). Argomentando come sopra, considerando la geodetica di lunghezza minima (positiva) γ in tale classe (che esiste, per la Proposizione 6.1.21), abbiamo un vettore w appartenente a $W = \dot\gamma(0)^\perp \subseteq$ sottospazio vettoriale di T_pM di dimensione pari $n-1$, tale che w è mandato in se stesso da P, quindi si trova di nuovo una contraddizione procedendo analogamente al primo punto. □

Se (M,g) è completa ma non compatta, con la sola ipotesi di curvatura sezionale positiva si mostra che M è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$ (indipendentemente dalla parità della sua dimensione), per il *teorema del soul* 12.3.9.

Assumendo la compattezza di M, tutte le altre ipotesi nel primo punto del teorema di Synge sono essenziali. Se si assumesse solamente $\mathrm{Sec} \geqslant 0$ (invece di $\mathrm{Sec} > 0$), un controesempio alla conclusione sarebbe dato dal toro $\mathbb{T}^2$ con la metrica flat (nella dimostrazione si otterrebbe solo $I(Y, Y) = 0$, che non porta ad alcuna contraddizione). Se si rimuovesse l'ipotesi di dimensione pari, $\mathbb{RP}^3$ sarebbe un controesempio (non si potrebbe concludere che esiste un autovettore $w \in W$ di P, di autovalore 1) e senza l'ipotesi di orientabilità, lo sarebbe $\mathbb{RP}^2$ ($P|_W : W \to W$ potrebbe non mantenere l'orientazione, dunque avrebbe determinante -1 e potrebbe non avere un autovalore uguale a 1).

Rimuovendo l'ipotesi di orientabilità, si ha comunque il seguente risultato, applicando il teorema di Synge al rivestimento a due fogli (che è orientabile).

COROLLARIO 8.2.2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta, non orientabile e di dimensione pari, con $\mathrm{Sec} > 0$ in ogni punto. Allora il suo rivestimento orientabile a due fogli è il rivestimento universale di M, per cui $\pi_1(M) \simeq \mathbb{Z}_2$.*

OSSERVAZIONE 8.2.3. Nel caso di dimensione dispari, invece non si può dire molto sul gruppo fondamentale. Infatti è ben noto che le sfere $\mathbb{S}^{2m+1}$ sono il rivestimento universale riemanniano di infiniti spazi con curvatura costante uguale a 1, per esempio in dimensione tre, gli spazi *lenticolari* [216].

Una conseguenza del teorema di Synge è che non esistono metriche riemanniane a curvatura sezionale positiva su una varietà compatta, orientabile e di dimensione pari, se non è semplicemente connessa. In particolare, $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ non ammette tali metriche, avendo gruppo fondamentale $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Menzioniamo qui la famosa *congettura di Hopf*, degli anni '50, che asserisce che non esistono metriche riemanniane a curvatura sezionale positiva su $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

OSSERVAZIONE 8.2.4. Ricordando l'Osservazione 7.6.19, i teoremi di Bonnet–Myers e Synge (e il *teorema del soul* 12.3.9) mostrano che le varietà riemanniane con curvatura positiva hanno forti restrizioni sulla loro possibile topologia (si veda il survey di Ziller [225], per approfondire).

8.3. Il teorema di Cartan–Hadamard

Vediamo ora un risultato in ipotesi di curvatura sezionale negativa, il *teorema di Cartan–Hadamard*, che consente di dedurre che il rivestimento universale della varietà è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 8.3.1 (Cartan–Hadamard). *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa con $\mathrm{Sec} \leqslant 0$ in ogni punto. Allora il rivestimento universale di M è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario 6.4.14, la mappa esponenziale $\exp_p : T_pM \to M$ è un diffeomorfismo locale per ogni punto $p \in M$. Fissiamo allora p e definiamo $\widetilde{g}_p$ come la metrica su T_pM data dal pull–back di g tramite $\exp_p$ che è non degenere poiché $\exp_p$ è un diffeomorfismo locale. Per definizione di $\widetilde{g}_p$, la mappa $\exp_p$ è un'isometria locale tra $(T_pM, \widetilde{g}_p)$ e (M, g). Le geodetiche su M uscenti da p sono della forma $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ per $v \in T_pM$, di conseguenza, le geodetiche uscenti da $O_p \in T_pM$ rispetto alla metrica $\widetilde{g}_p$ sono proprio le rette tv per l'origine, essendo $\exp_p$ un'isometria, dunque definite per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi la mappa esponenziale di $(T_pM, \widetilde{g}_p)$ nel punto O_p è definita su tutto $T_{O_p}T_pM$, da cui la varietà $(T_pM, \widetilde{g}_p)$ è geodeticamente completa, per il teorema di Hopf–Rinow 6.1.4. Allora il Lemma 8.0.1 consente di dedurre che $\exp_p : T_pM \to M$ è un rivestimento riemanniano. Essendo lo spazio tangente T_pM diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$ e semplicemente connesso, è il rivestimento universale di M. □

Il seguente corollario è un'immediata conseguenza dell'argomento nella dimostrazione del teorema di Cartan–Hadamard e del Corollario 6.5.5.

COROLLARIO 8.3.2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa, semplicemente connessa, con $\mathrm{Sec} \leqslant 0$ in ogni punto. Allora $\exp_p : T_pM \to M$ è un diffeomorfismo, per ogni $p \in M$. In particolare, ogni geodetica è minimale tra ogni sua coppia di punti, dunque $\mathrm{inj}(p) = +\infty$, per ogni $p \in M$.*

OSSERVAZIONE 8.3.3. Si faccia attenzione che in questo corollario e nella dimostrazione del teorema di Cartan–Hadamard *non* si conclude che la mappa esponenziale $\exp_p : T_pM \to M$ è un'isometria tra T_pM con la sua metrica g_p e (M, g).

NOTA STORICA. Il Teorema 8.3.1 è stato provato da Mangoldt nel 1881 per le superfici, poi Hadamard ne ha dato una nuova dimostrazione nel 1898. Cartan nel 1928 lo ha esteso alle varietà di ogni dimensione.

DEFINIZIONE 8.3.4. Le varietà riemanniane complete e semplicemente connesse con curvatura sezionale minore o uguale a zero in ogni punto, si dicono *varietà di Cartan–Hadamard* (o anche *varietà di Hadamard*).

OSSERVAZIONE 8.3.5. Menzioniamo l'importante e famosa *congettura di Cartan–Hadamard* che asserisce che in una tale varietà n–dimensionale vale la disuguaglianza isoperimetrica con la stessa costante di $\mathbb{R}^n$, dimostrata per $n \leqslant 4$, si veda [**192**] per approfondire.

Una conseguenza del teorema di Cartan–Hadamard è che sulla sfera $\mathbb{S}^n$ o su $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ o $\mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^{n-k}$ (per $n, k \geqslant 2$) non si può mettere una metrica completa con $\mathrm{Sec} \leqslant 0$, in quanto coincidono con il loro rivestimento universale e non sono diffeomorfe a $\mathbb{R}^n$.

OSSERVAZIONE 8.3.6. La condizione $\mathrm{Ric} \leqslant 0$ non è sufficiente per avere la conclusione del teorema di Cartan–Hadamard (né a maggior ragione $\mathrm{R} \leqslant 0$), ci sono infatti metriche complete con $\mathrm{Ric} = 0$ su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$ e metriche complete con $\mathrm{R} = 0$ su $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ (si provi a esibirle, per esercizio, come prodotti warped). La completezza è inoltre fondamentale, infatti per esempio, la metrica (warped) *non* completa $g = e^{2t}dt^2 + e^{2t}g^{\mathbb{S}^2}_{\mathrm{can}}$ su $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ è flat (è isometrica a $\mathbb{R}^3$ senza un punto con la metrica canonica, dunque ha $\mathrm{Riem} = 0$, lo si provi per esercizio). A differenza delle assunzioni di positività sul tensore di Ricci (come nel teorema di Bonnet–Myers), la condizione $\mathrm{Ric} \leqslant 0$ non è stringente, vale infatti un risultato di Lohkamp [130] che afferma che ogni varietà differenziabile di dimensione almeno tre ammette una metrica completa, di volume finito, con tensore di Ricci definito negativo in ogni punto.

OSSERVAZIONE 8.3.7. Confrontando le conclusioni dei teoremi di Bonnet–Myers e Synge (e del *teorema del soul* 12.3.9) con quella del teorema di Cartan–Hadamard e tenendo presente (si veda la prossima sezione) che, per il teorema di Gauss–Bonnet 7.5.4 (e il teorema di classificazione 7.5.4), tra le superfici compatte orientate solo la sfera può ammettere una metrica a curvatura nonnegativa non identicamente nulla, solo il toro a curvatura nulla e tutte le altre, di genere superiore (che sono infinite), curvatura negativa non identicamente nulla (ricordiamo che si possono trovare metriche tali che queste curvature siano anche costanti, per il teorema di uniformizzazione 7.5.8), si può affermare euristicamente che su una varietà differenziabile è "più facile" trovare una metrica a curvatura negativa che positiva, oppure che le varietà a curvatura negativa sono le "più numerose" (Thurston [182] ha mostrato che vi sono "molte" curve chiuse embedded in $\mathbb{S}^3$, sul cui complementare si può mettere una metrica *iperbolica*, cioè di curvatura costante -1, completa e di volume finito).

OSSERVAZIONE 8.3.8. Riprendendo quanto detto nell'osservazione precedente, nel caso delle superfici compatte la comprensione è completa. Assumendo (S, g) compatta, connessa e orientabile, se ha curvatura positiva S deve essere diffeomorfa alla sfera $\mathbb{S}^2$, al toro $\mathbb{T}^2$ se nulla, se infine la curvatura è negativa, a una superficie di genere maggiore o uguale a due, per il teorema di classificazione delle superfici 7.5.4 e il teorema di Gauss–Bonnet 7.5.4. Se (M, g), sempre compatta, non è orientabile, si deve avere che una delle precedenti deve essere il suo rivestimento orientabile a due fogli, dunque con curvatura positiva abbiamo solo il piano proiettivo, se la curvatura è nulla solo la bottiglia di Klein e un quoziente di una superficie di genere maggiore o uguale a due, in curvatura negativa.