

Geodetiche – Teoria globale

Le proprietà delle geodetiche prese in considerazione finora sono esclusivamente di natura locale. Molti risultati rilevanti in geometria riemanniana si ottengono tuttavia studiando le “geodetiche lunghe”, esaminandole cioè anche dal punto di vista globale. Per fare ciò studieremo con i metodi del calcolo delle variazioni il funzionale energia (e il funzionale lunghezza) di una curva, la cui equazione di Eulero–Lagrange è l’equazione delle geodetiche, di conseguenza queste ultime ne sono i punti critici.

6.1. Completezza e teorema di Hopf–Rinow

DEFINIZIONE 6.1.1. Una varietà riemanniana (M, g) si dice *geodeticamente completa* se qualsiasi geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ può essere estesa a una geodetica $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow M$.

Osserviamo che, per il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni per equazioni differenziali ordinarie, qualsiasi geodetica γ può essere estesa a una geodetica massimale definita su un intervallo aperto (a, b) . Non è tuttavia garantito che sia possibile estenderla a tutto \mathbb{R} : per esempio, se $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (con la metrica flat indotta da \mathbb{R}^n) e v appartiene a M , la geodetica $\gamma(t) = tv$ non si può estendere a $t = 0$, la geodetica infatti, per $t = 0$ dovrebbe passare dall’origine, che tuttavia non appartiene a M . Più in generale, rimuovendo un punto da una qualsiasi varietà riemanniana si ottiene (per lo stesso motivo) una varietà non geodeticamente completa. Notiamo che abbiamo visto negli esempi del capitolo precedente che \mathbb{R}^n , S^n e \mathbb{H}^n con le loro metriche canoniche sono varietà geodeticamente complete.

TEOREMA 6.1.2. Sia (M, g) una varietà riemanniana connessa.

- Se per $p \in M$ la mappa esponenziale \exp_p è definita su tutto $T_p M$, allora per ogni $q \in M$ esiste una geodetica minimale da p a q .
- Se la mappa esponenziale \exp è definita su tutto TM , per ogni coppia di punti $p, q \in M$ esiste una geodetica minimale che li congiunge.

Per la dimostrazione, ci servirà il seguente lemma.

LEMMA 6.1.3. Siano $p, q \in M$ e sia $S = \partial B_\delta(p)$ la sfera metrica di raggio $\delta > 0$. Se δ è abbastanza piccolo, esiste un punto $p_0 \in S$ tale che $d(p, q) = d(p, p_0) + d(p_0, q)$.

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo visto nel Corollario 4.3.6 che per $\delta < \text{inj}(p)$ si ha $S = \exp_p(\delta \mathbb{S}_p^{n-1})$. Allora, per ogni $\delta > 0$ tale che $\delta < \text{inj}(p)$ e $q \notin B_\delta(p)$, sia p_0 il punto di S a minima distanza da q (che esiste in quanto d è continua e S è compatta). Chiaramente si ha $d(p, p_0) = \delta$ e se $\gamma : I \rightarrow M$ è una qualunque curva che congiunge p a q , poiché deve passare per S , esiste $t_0 \in I$ tale che $\gamma(t_0) \in S$, da cui

$$\mathcal{L}(\gamma) \geq d(p, \gamma(t_0)) + d(\gamma(t_0), q) \geq \delta + d(p_0, q) = d(p, p_0) + d(p_0, q),$$

per la minimalità di p_0 , dunque (prendendo l'estremo inferiore su tutte le curve γ) concludiamo

$$d(p, q) \geq d(p, p_0) + d(p_0, q).$$

Per la disuguaglianza triangolare abbiamo l'altra disuguaglianza e la tesi. \square

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 6.1.2. Siano ora $p, q \in M$ e $\delta > 0$, $p_0 \in \partial B_\delta(p)$ come nel lemma, esiste dunque $v \in T_p M$ con $|v|_p = 1$ tale che $\exp_p(\delta v) = p_0$, sia $\gamma(t) = \exp_p(tv)$. Definiamo

$$I = \{t \in [0, +\infty) : d(\gamma(t), q) + t = d(p, q)\}$$

che è un sottoinsieme chiuso e non vuoto, in quanto $0, \delta \in I$ e poniamo $T = \sup I$, che chiaramente soddisfa $T \leq d(p, q)$ e $T \in I$. Se $T = d(p, q)$, ovviamente $\gamma(T) = q$ da cui la tesi, dunque assumiamo che $T < d(p, q)$ e poniamo $m = \gamma(T)$ e riutilizziamo il lemma per m e q , ottenendo per $\varepsilon > 0$ un punto $m_0 \in \partial B_\varepsilon(m)$ tale che $d(m, q) = d(m, m_0) + d(m_0, q)$.

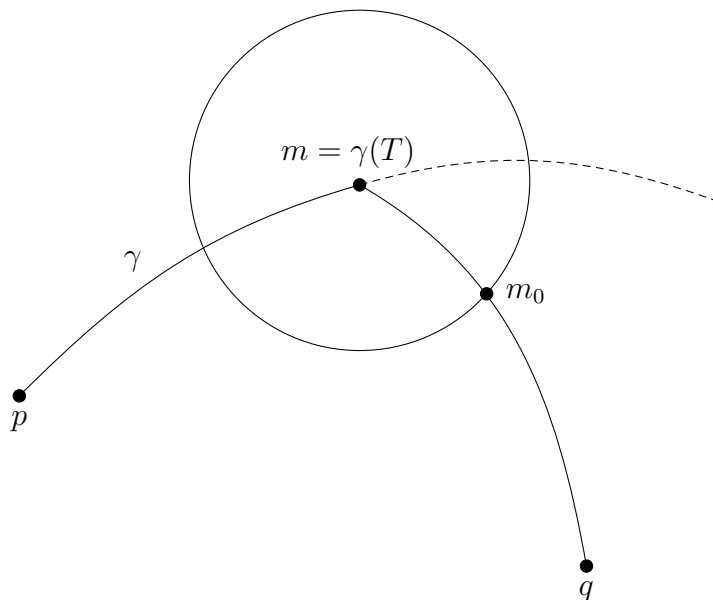


FIGURA 6.1

Abbiamo allora, poiché $d(m, q) + T = d(p, q)$,

$$d(m_0, q) = d(m, q) - d(m, m_0) = d(p, q) - T - \varepsilon, \quad (6.1)$$

dunque

$$d(p, m_0) \geq d(p, q) - d(m_0, q) = T + \varepsilon.$$

Ma allora la curva data dalla geodetica γ da p a m e poi dalla geodetica minimale da m a m_0 parametrizzata in lunghezza d'arco, è minimale, avendo lunghezza $T + \varepsilon$, dunque è un'estensione di $\gamma|_{[0, T]}$ all'intervallo $[0, T + \varepsilon]$ e $\gamma(T + \varepsilon) = m_0$. Dall'equazione (6.1) segue allora che $T + \varepsilon \in I$, che è una contraddizione con $T = \sup I$. \square

TEOREMA 6.1.4 (Teorema di Hopf–Rinow [111]). *Data una varietà riemanniana (M, g) , i seguenti fatti sono equivalenti.*

- La varietà (M, g) è geodeticamente completa.
- La mappa esponenziale \exp è definita su tutto TM .
- Esiste un punto $p \in M$ tale che \exp_p sia definita su tutto T_pM .
- I sottoinsiemi chiusi e limitati di M sono compatti.
- Lo spazio metrico (M, d) è completo, dove d è la distanza riemanniana.

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente il primo punto implica il secondo e il secondo il terzo.

Vediamo che se \exp_p è definita su tutto T_pM allora i chiusi e limitati di M sono compatti. Notiamo che basta provare che per ogni $r > 0$ la palla metrica chiusa $\overline{B}_r(p)$ è compatta, infatti, una volta mostrato ciò, se K è chiuso e limitato esiste $R > 0$ tale che K è contenuto in $\overline{B}_R(p)$, da cui la tesi. La compattezza di $\overline{B}_r(p)$, segue dall'uguaglianza $\overline{B}_r(p) = \exp_p(\overline{B}_r(O_p))$, essendo ovviamente compatta la palla $\overline{B}_r(O_p)$. Per la definizione di distanza riemanniana, la palla geodetica è contenuta nella palla metrica. Se ora $d(p, q) \leq r$, per il Teorema 6.1.2 esiste una geodetica minimale da p a q data da $t \mapsto \exp_p(tv)$ per $t \in [0, 1]$, dunque con $|v|_p = d(p, q) \leq r$, da cui $\exp_p(v) = q$, cioè $q \in \exp_p(\overline{B}_r(O_p))$ e abbiamo l'uguaglianza asserita.

Se i chiusi e limitati di M sono compatti e p_i è una successione di Cauchy in (M, d) , allora p_i è limitata dunque ha una sottosuccessione convergente a un punto $p \in M$, ma allora tutta la successione converge a p .

Se infine M è completa e $\gamma : I \rightarrow M$ è una geodetica su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, possiamo sempre supporre che $0 \in I$ e $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ per un punto $p \in M$ e $v \in T_pM$. Sia $J = \{t \in \mathbb{R} : \exp_p(tv) \text{ è definito}\} \supseteq I$, dal Teorema 4.1.11 segue che J è un intervallo aperto, se mostriamo che è anche chiuso deve coincidere con \mathbb{R} . Sia $t_i \in J$ e $t_i \rightarrow t$, si ha $d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) \leq \mathcal{L}(\gamma|_{[t_i, t_j]}) = |v|_p |t_i - t_j|$ dunque $\gamma(t_i)$ è una successione di Cauchy, quindi convergente a un punto $q \in M$. Sappiamo dalla Proposizione 4.2.5 che esistono un intorno U_q di q e $\varepsilon > 0$ tali che ogni geodetica uscente da punti di U_q con velocità unitaria è definita almeno per $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Se dunque t_i è tale che $\gamma(t_i) \in U_q$ e $|v|_p |t_i - t| < \varepsilon/2$ si ha che la

geodetica γ (che esce da $\gamma(t_i)$ con velocità v) è definita almeno fino a $t_i + \varepsilon/|v|_p$, che è maggiore di t , per la scelta di t_i . Quindi $t \in J$, che dunque è chiuso. \square

In virtù di questo risultato di equivalenza tra completezza geodetica e come spazio metrico, chiameremo d'ora in poi semplicemente completa una varietà riemanniana che soddisfa tale proprietà.

Segue che se la varietà (M, g) soddisfa una qualunque delle condizioni del teorema, in particolare se è completa, c'è sempre una geodetica minimale tra ogni coppia di suoi due punti. Anche questo fatto viene spesso chiamato *teorema di Hopf–Rinow*

TEOREMA 6.1.5. *In una varietà riemanniana connessa e completa (M, g) , per ogni coppia di punti p, q esiste una geodetica minimale che li congiunge.*

OSSERVAZIONE 6.1.6. Si noti la varia natura delle condizioni che intervengono nel teorema di Hopf–Rinow: il comportamento delle soluzioni di un sistema di equazioni differenziali ordinarie, la completezza, la proprietà metrico/topologica di Heine–Borel (i chiusi e limitati sono compatti) e l'esistenza di minimi del funzionale lunghezza.

OSSERVAZIONE 6.1.7. Sebbene la completezza geodetica sia equivalente alla completezza in senso metrico, non è vero che una qualsiasi varietà riemanniana non completa possa essere completata nello stesso modo in cui si possono completare gli spazi metrici. Come esempio, si consideri il “cono senza vertice”

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$$

con la metrica indotta dalla metrica canonica di \mathbb{R}^3 . Il completamento di M come spazio metrico è dato da $\overline{M} = M \cup \{0\}$, dove 0 è il vertice del cono. Supponiamo per assurdo che \overline{M} ammetta una struttura di varietà riemanniana che estenda quella di M e compatibile con la metrica. La curvatura scalare in tutti i punti di M è nulla, quindi deve essere nulla anche in 0 , per continuità. Allora \overline{M} è una superficie semplicemente connessa, completa (per il teorema di Hopf–Rinow) e con curvatura scalare nulla in tutti i punti. Questo è sufficiente per concludere che \overline{M} è isometrica a \mathbb{R}^2 con la metrica canonica (per il Teorema 9.1.1). Allora M dovrebbe essere isometrica a $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ma ciò non è vero in quanto su M ci sono coppie di punti collegati da più di una geodetica (come si vede chiaramente nella figura seguente), mentre in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ questo non succede.

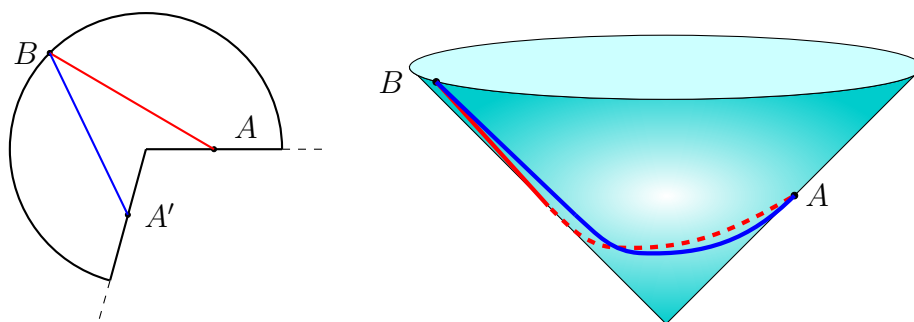


FIGURA 6.2

Nel dimostrare il teorema di Hopf–Rinow abbiamo visto il seguente fatto, di interesse indipendente.

PROPOSIZIONE 6.1.8. *Se (M, g) è completa, per ogni $p \in M$ e $r > 0$, la palla geodetica $\exp_p(B_r(O_p))$ coincide con la palla metrica $B_r(p)$, rispetto alla distanza riemanniana.*

OSSERVAZIONE 6.1.9. Segue che se $r \leq \text{inj}(p)$, anche le sfere geodetiche $S_r(p)$ e le sfere metriche $\partial B_r(p)$ coincidono, mentre se $r > \text{inj}(p)$ sono sicuramente diverse (lo si mostri per esercizio). Si noti che la completezza, dunque la definizione di \exp_p su tutto $T_p M$ implica che $S_r(p)$ è sempre un'immagine di \mathbb{S}^{n-1} , possibilmente non iniettiva se $r > \text{inj}(p)$.

Vediamo ora un'altra linea dimostrativa del Teorema 6.1.5 che si può estendere anche al contesto degli spazi metrici di lunghezza (Definizione 4.3.15). Dimostriamo inizialmente direttamente che gli ultimi due punti del Teorema 6.1.4 sono equivalenti.

LEMMA 6.1.10. *Sia (M, g) una varietà riemanniana e d la sua distanza riemanniana, allora lo spazio metrico (M, d) è completo se e solo se i chiusi e limitati sono compatti.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo provato una delle due implicazioni nella dimostrazione che il quarto punto del Teorema 6.1.4 implica il quinto (vale per qualunque spazio metrico). Supponiamo ora (M, d) completo e vediamo che le palle di qualunque raggio sono compatte, questo ovviamente implica la tesi. Fissato $p \in M$, sia $I = \{r > 0 : \text{la palla } \overline{B}_r(p) \text{ è compatta}\}$, allora per la locale compattezza I è un intervallo non vuoto, da zero a $R = \sup I$, che supponiamo sia finito, altrimenti abbiamo la conclusione. Inoltre, I è aperto in quanto se $r \in I$ possiamo ricoprire $\overline{B}_r(p)$ (in quanto compatta) con un numero finito di palle aperte con chiusura compatta ottenendo un suo intorno aperto a chiusura compatta, che dunque deve contenere una palla chiusa (dunque compatta) $\overline{B}_{r+\delta}(p)$,

per un qualche $\delta > 0$. Dimostriamo che I è anche chiuso, quindi per connessione, deve coincidere con $(0, +\infty)$, da cui la tesi. Supponiamo che $x_n \in \overline{B}_R(p)$, per ogni $n, i \in \mathbb{N}$ possiamo sempre trovare $y_n^i \in B_{R-1/2i}(p)$ tale che $d(x_n, y_n^i) < 1/i$ in quanto se le due palle $B_{R-1/2i}(p)$ e $B_{1/i}(x_n)$ avessero intersezione vuota, ogni curva rettificabile da p e x_n avrebbe lunghezza maggiore o uguale di

$$d(p, \partial B_{R-1/2i}(p)) + d(x_n, \partial B_{1/i}(x_n)) = R - 1/2i + 1/i = R + 1/2i > R,$$

che sarebbe assurdo, essendoci sempre una curva rettificabile la cui lunghezza è arbitrariamente vicina a $d(p, x_n) \leq R$. Per la compattezza delle palle $\overline{B}_{R-1/2i}(p)$, passando a una sottosuccessione con l'usuale procedimento diagonale, possiamo supporre che $y_n^i \rightarrow y^i$ e $d(y_n^i, y^i) < 1/n$ per ogni $n, i \in \mathbb{N}$, dunque abbiamo

$$d(x_j, x_k) \leq d(x_j, y_j^i) + d(y_j^i, y^i) + d(y^i, y_k^i) + d(y_k^i, x_k) \leq 1/i + 1/j + 1/k + 1/i.$$

Questa disuguaglianza mostra chiaramente che la successione x_n è una successione di Cauchy quindi convergente, essendo (M, d) completo. Segue da questo argomento, che essendo la palla $\overline{B}_R(p)$ chiusa, è compatta, dunque $R \in I$, cioè I è chiuso. \square

OSSERVAZIONE 6.1.11. Si noti che la proprietà fondamentale in questa dimostrazione è il fatto che la distanza di due punti dello spazio metrico coincida con l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve rettificabili che li congiungono, si veda la Definizione 4.3.15. Come ivi detto, gli spazi metrici con questa proprietà si dicono *spazi di lunghezza* (*length spaces*) e gli spazi metrici tali che i chiusi e limitati sono compatti, si dicono *propri*. Con la stessa dimostrazione di questo lemma, segue allora che uno spazio di lunghezza completo e localmente compatto è proprio. La locale compattezza (esistenza per ogni punto di un intorno relativamente compatto) e la completezza non sono sufficienti per avere che i chiusi e limitati sono compatti, infatti se su \mathbb{R} consideriamo la metrica $d(x, y) = \arctan |x - y|$ abbiamo un controesempio (lo si provi per esercizio), tale spazio metrico è completo e localmente compatto ma non è uno spazio di lunghezza.

Possiamo allora mostrare come segue la conclusione del Teorema 6.1.5, sottolineando che la stessa dimostrazione prova l'esistenza di una curva di lunghezza minimale tra ogni coppia di punti di uno spazio metrico di lunghezza completo e localmente compatto.

DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA DEL TEOREMA 6.1.5. Sia γ_i una successione di curve rettificabili che congiungono p e q , definite su $[0, 1]$ e parametrizzate per un multiplo della lunghezza d'arco, tali che le lunghezze $\ell_i = \mathcal{L}(\gamma_i)$ convergono a $\ell = d(p, q)$, per $i \rightarrow \infty$.

La famiglia di curve γ_i è equilipschitziana, infatti ponendo $C = \sup_{i \in \mathbb{N}} \ell_i$ si ha

$$d(\gamma_i(s), \gamma_i(t)) \leq \mathcal{L}(\gamma_i|_{[s,t]}) = \ell_i(t-s) \leq C(t-s), \quad (6.2)$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$ e $t, s \in [0, 1]$, con $s < t$ ed è anche puntualmente relativamente compatta, in quanto $\gamma_i(t)$ appartiene alla palla $B_C(p)$ (rispetto alla distanza riemanniana) e le palle sono relativamente compatte, per il lemma precedente. Sono pertanto soddisfatte le ipotesi del teorema di Ascoli–Arzelà, di conseguenza, a meno di sottosuccessioni, γ_i converge uniformemente a una curva continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$.

La curva γ è lipschitziana, infatti per ogni $s, t \in [0, 1]$ con $s < t$, passando al limite nella formula (6.2) per $i \rightarrow \infty$, si ottiene

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq (t - s)\ell. \quad (6.3)$$

Dunque γ è una curva rettificabile di lunghezza minore o uguale a $\ell = d(p, q)$, per la Definizione 4.3.15, quindi necessariamente minimale, in quanto segue $\mathcal{L}(\gamma) = d(p, q)$. Inoltre, la disuguaglianza (6.3) è un’uguaglianza, per ogni $s, t \in [0, 1]$, altrimenti

$$\ell = d(p, q) \leq d(p, \gamma(s)) + d(\gamma(s), \gamma(t)) + d(\gamma(t), q) < s\ell + (t - s)\ell + (1 - t)\ell = \ell$$

che è impossibile, dunque $\mathcal{L}(\gamma|_{[s,t]}) = \ell(t - s) = d(\gamma(s), \gamma(t))$. Per la Proposizione 4.3.19, la curva γ è allora una geodetica minimale, notando che è parametrizzata proporzionalmente alla sua lunghezza d’arco. \square

Enunciamo, per comodità del lettore il teorema di Ascoli–Arzelà, nella versione che abbiamo utilizzato in questa dimostrazione, si veda [69], per esempio.

TEOREMA 6.1.12 (Ascoli–Arzelà). *Sia (X, d^X) uno spazio metrico separabile e (Y, d^Y) uno spazio metrico compatto, allora ogni successione di mappe equicontinue $f_n : X \rightarrow Y$ ammette una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti di X a una mappa continua $f : X \rightarrow Y$.*

Nello stesso spirito della dimostrazione alternativa del Teorema 6.1.5 vista sopra, mostriamo il seguente lemma che ci sarà utile in varie occasioni. Diciamo che una geodetica definita su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$ (possibilmente non limitato) è minimale, se è minimale tra ogni coppia di suoi punti.

LEMMA 6.1.13. *Sia $\gamma_i : I \rightarrow M$ una successione di geodetiche di lunghezza localmente equilimitata in una varietà riemanniana (M, g) che convergono puntualmente a una curva $\gamma : I \rightarrow M$, allora γ è una geodetica.*

Se inoltre tutte le geodetiche γ_i sono minimali, l’ipotesi di lunghezza localmente equilimitata è superflua e anche γ è minimale.

DIMOSTRAZIONE. Scelto un intervallo chiuso e limitato $J \subseteq I$ tale che le lunghezze $\ell_i = \mathcal{L}(\gamma_i|_J)$ siano equilimitate, la famiglia di curve $\gamma_i|_J$ è equilipschitziana, perché le velocità sono tutte limitate in modulo da $\sup_{i \in \mathbb{N}} \ell_i / |J|$ (dove $|J|$ denota la lunghezza di J), dunque anche la curva γ è lipschitziana, quindi continua. Inoltre, fissando un intorno a chiusura compatta di $\gamma(J)$ (che esiste per la locale compattezza di M), se $i \in \mathbb{N}$ è sufficientemente grande tutte le curve $\gamma_i|_J$ hanno immagine contenuta in tale intorno, per la convergenza puntuale

a γ e l'equilipschitzianità. Allora, per il teorema di Ascoli-Arzelà, a meno di sottosuccessioni, $\gamma_i|_J$ converge uniformemente a una curva continua che dunque deve essere $\gamma|_J$. Ciò implica che, eventualmente restringendo J , possiamo supporre che i sostegni delle curve $\gamma_i|_J$ siano tutti contenuti in un aperto \tilde{U} tale che la chiusura di \tilde{U} sia compatta e contenuta in U , con (U, φ) carta coordinata. Poiché

$$\alpha|v|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq (\varphi_*g)_x(v, v) \leq \beta|v|_{\mathbb{R}^n}^2,$$

per ogni $x \in \varphi(\tilde{U})$ e $v \in \mathbb{R}^n$, per una coppia di costanti positive $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, in queste coordinate locali le funzioni $\gamma_i^k|_J$ e le derivate $\dot{\gamma}_i^k|_J$ sono equilimitate e valendo l'equazione delle geodetiche $\ddot{\gamma}_i^k = -\Gamma_{jm}^k(\gamma_i)\dot{\gamma}_i^j\dot{\gamma}_i^m$ per ogni curva γ_i , segue che anche le derivate seconde sono equilimitate, quindi la curva limite $\gamma|_J$ è di classe C^1 (per il teorema di Ascoli-Arzelà applicato alla successione $\dot{\gamma}_i|_J$). Derivando tale equazione e ragionando iterativamente, si ottiene che $\gamma|_J$ (dunque allora γ) è di classe C^∞ ed è una geodetica, inoltre la convergenza di $\gamma_i|_J$ a $\gamma|_J$ è C^∞ , in particolare $\mathcal{L}(\gamma_i|_J) \rightarrow \mathcal{L}(\gamma|_J)$.

Se tutte le geodetiche $\gamma_i : I \rightarrow M$ sono minimali, convergendo puntualmente negli estremi di ogni intervallo $J = [s, t]$ come sopra, si ha chiaramente che le lunghezze $l_i = \mathcal{L}(\gamma_i|_J)$ sono equilimitate, inoltre per ogni $\bar{s}, \bar{t} \in I$, con $\bar{s} < \bar{t}$, si ha

$$\frac{d(\gamma_i(t), \gamma_i(s))}{t-s} = \frac{\mathcal{L}(\gamma_i|_{[s,t]})}{t-s} = \frac{\int_s^t |\dot{\gamma}_i| d\xi}{t-s} = \frac{\int_{\bar{s}}^{\bar{t}} |\dot{\gamma}_i| d\xi}{\bar{t}-\bar{s}} = \frac{\mathcal{L}(\gamma_i|_{[\bar{s},\bar{t}]})}{\bar{t}-\bar{s}} = \frac{d(\gamma_i(\bar{t}), \gamma_i(\bar{s}))}{\bar{t}-\bar{s}},$$

da cui segue, passando al limite per $i \rightarrow \infty$,

$$\frac{d(\gamma(t), \gamma(s))}{t-s} = \frac{\mathcal{L}(\gamma|_{[s,t]})}{t-s} = \frac{d(\gamma(\bar{t}), \gamma(\bar{s}))}{\bar{t}-\bar{s}}.$$

Ciò implica che γ è minimale e l'esistenza di una costante $C > 0$ tale che

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) = C(t-s)$$

per ogni $t, s \in I$, con $s < t$. Quindi, essendo γ una curva lipschitziana minimale, parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco, è una geodetica minimale. \square

OSSERVAZIONE 6.1.14. Si noti che dalla dimostrazione segue che se (M, g) è completa, una famiglia di geodetiche $\gamma : I \rightarrow M$ con lunghezze localmente equilimitate è relativamente compatta per la convergenza uniforme sui compatti.

OSSERVAZIONE 6.1.15. La seconda asserzione di questo lemma si può estendere agli spazi metrici di lunghezza, richiedendo che la sequenza di geodetiche minimali considerata sia parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco. Infatti, il punto principale della dimostrazione è il fatto che per ogni

$i \in \mathbb{N}$, esista una costante positiva $C_i \in \mathbb{R}$ tale che

$$d(\gamma_i(t), \gamma_i(s)) = C_i(t - s)$$

per ogni $t, s \in I$, con $s < t$ e che tali costanti C_i siano uniformemente limitate. La conclusione allora segue dal teorema di Ascoli–Arzelà e dall’esercizio seguente.

ESERCIZIO 6.1.16. Si mostri con gli argomenti precedenti che il funzionale lunghezza \mathcal{L} è semicontinuo inferiormente per la convergenza uniforme delle curve continue $\gamma : [a, b] \rightarrow M$.

Vediamo ora dei risultati di esistenza di geodetiche minimali particolari in varietà riemanniane complete.

PROPOSIZIONE 6.1.17. *Se (M, g) è una varietà riemanniana completa ma non compatta, allora esiste una semiretta uscente da ogni punto $p \in M$ (si veda la Definizione 4.3.26).*

DIMOSTRAZIONE. Sia $q_i \in M$ una successione di punti tali che $d(p, q_i) \rightarrow +\infty$, tale successione esiste in quanto M non è compatta (se M fosse limitata sarebbe compatta per il Teorema 6.1.4) e siano $\gamma_i = [0, d(p, q_i)] \rightarrow M$ le geodetiche minimali da p a q_i con velocità unitarie iniziali $v_i \in T_p M$, date dal Teorema 6.1.2, cioè $\gamma_i(t) = \exp_p(tv_i)$. Essendo $|v_i|_p = 1$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ e la sfera \mathbb{S}_p^{n-1} compatta, possiamo supporre che $v_i \rightarrow v \in \mathbb{S}_p^{n-1}$, dunque $\gamma_i(t) \rightarrow \gamma(t)$ per ogni $t \in [0, +\infty)$, dove $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ per ogni $t \in [0, +\infty)$. Per il Lemma 6.1.13 applicato alla successione di geodetiche minimali $\gamma_i|_{[0, T]}$, per ogni $T > 0$ (con $i \in \mathbb{N}$ abbastanza grande in modo tale che ciascuna γ_i sia definita nell’intervallo $[0, T]$), segue allora che la geodetica γ è una semiretta da p , in quanto minimale tra ogni coppia di suoi due punti. \square

PROPOSIZIONE 6.1.18. *Se (M, g) è una varietà riemanniana completa, allora ogni classe non banale del gruppo fondamentale di M di punto base $p \in M$ contiene un laccio geodetico di lunghezza minima positiva tra tutte le curve in tale classe.*

DIMOSTRAZIONE. Data una classe non banale $[\sigma] \in \pi_1(M, p)$, dobbiamo minimizzare $\mathcal{L}(\gamma)$ tra tutti i laccio $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ di punto base p , omotopi a σ . Sia ℓ l’estremo inferiore delle lunghezze delle curve continue in tale classe (si veda la Definizione 4.3.15) e γ_i una successione minimizzante, cioè $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma_i) = \ell$. Argomentando in coordinate locali, possiamo approssimare tali curve con dei laccio $\tilde{\gamma}_i$ di classe C^1 a tratti, appartenenti alla stessa classe di omotopia e che anch’essi soddisfano $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\tilde{\gamma}_i) = \ell$, infatti, considerando un’opportuna suddivisione $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ dell’intervallo $[0, 1]$ in modo tale che $\gamma_i|_{[t_j, t_{j+1}]}$ e la geodetica minimale σ_i^j da $\gamma_i(t_j)$ a $\gamma_i(t_{j+1})$, definita sull’intervallo $[t_j, t_{j+1}]$, siano contenute in un comune aperto di M semplicemente connesso (ciò può essere ottenuto, per esempio, utilizzando le palle convesse date dal Teorema 4.3.25,

per la compattezza di ogni curva γ_i), si ha che la curva definita sull'intervallo $[0, 1]$ ottenuta “incollando” tali geodetiche minimali σ_i^j , appartiene anch'essa alla classe di omotopia di σ ed ha banalmente lunghezza finita. Ovviamente, questo argomento mostra anche che $\ell < +\infty$. Riparametrizzando dunque tutte le curve $\tilde{\gamma}_i$ proporzionalmente alla loro lunghezza d'arco sull'intervallo $[0, 1]$ e seguendo la dimostrazione alternativa del Teorema 6.1.5 (notiamo che essendo $\tilde{\gamma}_i(0) = p$ e le lunghezze equilimitate, tutte le curve γ_i hanno immagine in una palla chiusa di M , dunque compatta), otteniamo una curva continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ limite uniforme (eventualmente passando a una sottosuccessione) delle curve $\tilde{\gamma}_i$, che è un laccio di punto base p con $\mathcal{L}(\gamma) \leq \ell$. Dobbiamo solo dimostrare che $[\gamma] = [\sigma]$ e questo segue dalla stabilità della classe di omotopia per convergenza uniforme (si veda [105, Capitolo 7] o [125, Pagina 6], per esempio), di conseguenza $\mathcal{L}(\gamma) = \ell$ e notiamo che $\ell > 0$ altrimenti l'immagine di γ sarebbe un singolo punto, dunque $[\gamma] = [\sigma]$ sarebbe la classe banale di $\pi_1(M, p)$. Infine, γ è una geodetica una volta riparametrizzata proporzionalmente alla sua lunghezza d'arco, essendo localmente minimizzante (piccole perturbazioni di γ non ne modificano la classe di omotopia), per la Proposizione 4.3.13. \square

OSSERVAZIONE 6.1.19. Un modo esplicito di mostrare che $[\gamma] = [\tilde{\gamma}_i] = [\sigma]$ nella conclusione della dimostrazione precedente, è il seguente (legato all'argomento nella prima parte della dimostrazione della proposizione): per compattezza, esiste un ricoprimento finito aperto dell'immagine di γ con palle convesse date dal Teorema 4.3.25, possiamo allora suddividere l'intervallo $[0, 1]$ in $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ in modo tale che ogni tratto di curva $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$ sia contenuto in una di tali palle. Se ora $i \in \mathbb{N}$ è abbastanza grande, per convergenza uniforme si deve avere che anche $\gamma_i|_{[t_j, t_{j+1}]}$ appartiene alla stessa palla che contiene $\gamma|_{[t_j, t_{j+1}]}$, per ogni $j \in \{0, \dots, k-1\}$, dunque si vede allora facilmente che γ_i si deforma “pezzo per pezzo” in γ mantenendo p fissato, quindi stanno nella stessa classe di omotopia, che è quella di σ .

OSSERVAZIONE 6.1.20. Secondo la stessa linea si può mostrare che in ogni classe di omotopia di curve che congiungono due punti p e q di M , c'è una geodetica di lunghezza minima tra tutte le curve della classe.

Considerando curve chiuse $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$, abbiamo anche il seguente risultato.

PROPOSIZIONE 6.1.21. *Se (M, g) è una varietà riemanniana compatta, allora ogni classe non banale di omotopia libera di curve chiuse in M contiene una geodetica chiusa di lunghezza minima positiva tra tutte le curve in tale classe.*

DIMOSTRAZIONE. Una volta mostrato come nella Proposizione 6.1.18, che l'estremo inferiore ℓ delle lunghezze delle curve continue nella classe non banale $[\sigma]$ è finito, la dimostrazione continua analogamente, tenendo presente la compattezza della varietà M . \square

Visto l'uso che ne faremo nel *teorema di Synge* 8.2.1, discutiamo brevemente la relazione tra il gruppo fondamentale e l'insieme delle classi di omotopia libera di curve chiuse di M . Quest'ultimo (che generalmente non ha una struttura di gruppo) è in corrispondenza biunivoca con le classi di coniugio di $\pi_1(M) \approx \pi_1(M, p)$, per ogni $p \in M$, si veda [106, Sezione 1.1, Esercizio 6]. Se M è semplicemente connessa, chiaramente ogni curva chiusa si contrae liberamente a un punto, viceversa, se $\pi_1(M)$ non è banale ha almeno due classi di coniugio (l'elemento neutro di un gruppo è coniugato solo a se stesso) quindi esiste almeno una classe di omotopia libera di curve chiuse di M non banale. Questo fatto che ogni curva chiusa si contrae (liberamente) a un punto se e solo se la varietà è semplicemente connessa, si può ottenere anche direttamente costruendo un'omotopia esplicita che contrae un generico laccio di punto base $p \in M$, assumendo che tutte le curve chiuse si possano contrarre (l'altra implicazione è ovvia), lo si mostri per esercizio. Abbiamo allora il seguente corollario.

COROLLARIO 6.1.22. *Se (M, g) è una varietà riemanniana compatta non semplicemente connessa, allora esiste una geodetica chiusa non banale che minimizza la lunghezza nella sua classe (non banale) di omotopia libera di curve chiuse in M .*

OSSERVAZIONE 6.1.23. La ricerca di geodetiche chiuse su una varietà riemanniana è un problema che ha dato un grande impulso al calcolo delle variazioni. La Proposizione 6.1.21 mostra l'esistenza di geodetiche chiuse in ogni classe non banale di omotopia libera di curve chiuse di una varietà riemanniana compatta (M, g) , ma segue dalla discussione precedente che rimane aperto il problema dell'esistenza di almeno una geodetica chiusa nel caso in cui M sia compatta e semplicemente connessa. Tale risultato si può ottenere con tecniche di teoria dei punti critici o analisi nonlineare (in particolare con la teoria di Morse), ma non si sa se esista sempre almeno una geodetica chiusa *embedded*. È inoltre una congettura l'esistenza di *infinite* geodetiche chiuse geometricamente distinte (*embedded* o meno), per approfondire si veda [140]. Menzioniamo infine un famoso problema/risultato "classico", detto *teorema delle tre geodetiche* che asserisce l'esistenza di almeno tre distinte geodetiche chiuse *embedded* in ogni superficie riemanniana topologicamente omeomorfa alla sfera \mathbb{S}^2 (si veda [199], per approfondire).

6.2. Il funzionale energia

I risultati visti consentono di caratterizzare le geodetiche come quelle curve rettificabili che sono parametrizzate proporzionalmente alla lunghezza d'arco e localmente minimizzano la distanza tra i punti della varietà. Si pone allora in modo naturale il problema di stabilire quando una geodetica smette di essere minimale. Ad esempio, su \mathbb{R}^n questo non succede mai, su \mathbb{S}^n invece, tutte le geodetiche uscenti dal polo nord smettono di essere minimali non appena

superano il polo sud. Nell'ottica di trovare condizioni di minimalità per le geodetiche "lunghe", studiamo ora dal punto di vista variazionale il funzionale *energia* che come vedremo ha come punti critici, proprio le curve geodetiche.

D'ora in avanti considereremo solo varietà riemanniane complete, dunque le geodetiche saranno definite su tutto \mathbb{R} .

Il funzionale lunghezza ha la proprietà di essere invariante per riparametrizzazione delle curve, ciò risulta scomodo quando se ne studiano i minimi, a causa della perdita di compattezza. Per questo motivo conviene introdurre un secondo funzionale, l'*energia* di una curva. Data $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, di classe C^1 a tratti (o soltanto Lipschitz), definiamo

$$\mathcal{E}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|^2 dt.$$

Come si può facilmente verificare, l'energia non è invariante per riparametrizzazione, quindi non ha senso studiare i minimi di \mathcal{E} al variare di tutte le curve a estremi fissati, in quanto l'estremo inferiore sarebbe sempre zero (lo si provi per esercizio), mentre possiamo farlo fissando anche l'intervallo che viene utilizzato per parametrizzare le curve.

ESERCIZIO 6.2.1. Analogamente al funzionale lunghezza (si veda l'Esercizio 4.3.2), si mostri che

$$\inf_{\gamma \in C_S^1([a,b])} \mathcal{E}(\gamma) = \inf_{\gamma \in C^1([a,b])} \mathcal{E}(\gamma) = \inf_{\gamma \in Lip([a,b])} \mathcal{E}(\gamma),$$

dove gli estremi inferiori sono presi sulle curve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ che congiungono i punti p e q .

Energia e lunghezza di una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, di classe C^1 a tratti, sono tra loro legate. Infatti, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ottiene:

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt \leq \sqrt{b-a} \left(\int_a^b |\dot{\gamma}(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \sqrt{b-a} [2\mathcal{E}(\gamma)]^{1/2}$$

da cui

$$2\mathcal{E}(\gamma) \geq \frac{[\mathcal{L}(\gamma)]^2}{b-a}.$$

L'uguaglianza, inoltre, si ha se e solo se $|\dot{\gamma}|^2$ è proporzionale a 1, cioè se e solo se γ è parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco. Ciò implica che, ad intervallo fissato, l'energia è minima quando una curva è parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco. Il legame tra minimi del funzionale lunghezza e minimi del funzionale energia è precisato nella seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 6.2.2. *La curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ minimizza \mathcal{E} tra tutte le curve C^1 a tratti da $[a, b]$ in M a estremi fissati, se e solo se γ minimizza \mathcal{L} ed è parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già notato che se γ minimizza \mathcal{E} , allora è parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco. Le curve γ parametrizzate per un multiplo della lunghezza d'arco sono caratterizzate dalla relazione

$$2\mathcal{E}(\gamma) = \frac{[\mathcal{L}(\gamma)]^2}{b-a},$$

di conseguenza, i minimi dell'energia coincidono con i minimi della lunghezza, parametrizzati per un multiplo della lunghezza d'arco. \square

Per il Corollario 4.3.13, abbiamo allora la seguente conclusione.

PROPOSIZIONE 6.2.3. *Fissato un intervallo $[a, b]$, i minimi a estremi fissati del funzionale energia \mathcal{E} sulle curve $C^1_{\mathbb{S}}([a, b])$ sono curve geodetiche, dunque di classe C^∞ .*

Segue allora da questa proposizione e dal teorema di Hopf–Rinow 6.1.5 che se (M, g) è una varietà riemanniana connessa e completa, per ogni coppia di punti p, q esiste una geodetica minimale (dunque C^∞) che li congiunge e minimizza il funzionale \mathcal{E} tra tutte le curve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ di classe C^1 a tratti, con $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$.

OSSERVAZIONE 6.2.4. Dati due punti $p, q \in M$ e un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, sia

$$\Omega_{a,b}^{p,q} = \{\gamma : [a, b] \rightarrow M : \gamma \in C^1, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}.$$

Sullo spazio $\Omega_{a,b}^{p,q}$ si può mettere una struttura di varietà differenziabile di dimensione infinita (*varietà di Hilbert*). Inoltre possiamo scegliere che metrica/topologia considerare su tale spazio, per esempio $C^0, C^1, Lip, W^{1,1}, W^{1,2}$ e dimostrare che i funzionali lunghezza ed energia sono continui o semicontinui inferiormente in tali topologie, quindi cercarne i minimi con i metodi diretti del calcolo delle variazioni (si veda [16], per esempio).

6.3. Variazione prima e seconda dei funzionali energia e lunghezza

Dai risultati del Capitolo 4 e delle sezioni precedenti seguono l'esistenza e la regolarità dei minimi dei funzionali lunghezza e energia a estremi fissati, in una varietà riemanniana connessa e completa. Ora continuiamo l'analisi nello spirito del calcolo delle variazioni, calcolando le equazioni di Eulero–Lagrange di tali funzionali e studiandone la variazione prima e seconda.

Ci servirà la seguente generalizzazione, menzionata nell'Osservazione 3.5.4, della definizione di derivata covariante lungo una curva, data nella Sezione 3.5. Se $H : N \rightarrow M$ è una funzione C^∞ tra due varietà differenziabili, definiamo *campi vettoriali lungo H* le applicazioni $X : N \rightarrow TM$ tali che $X(p) \in T_{H(p)}M$ per ogni $p \in N$ (equivalentemente, le sezioni del fibrato pull-back H^*TM , si veda [202], per esempio). Indicheremo con $\mathcal{T}(H)$ l'insieme dei *campi vettoriali lungo H* , che ha una naturale struttura di $C^\infty(N)$ -modulo (e quindi di spazio

vettoriale reale). Si osservi che non richiediamo che H sia un'immersione (sebbene sia un caso particolarmente rilevante) o che vi sia una struttura di varietà riemanniana su N .

Se $X \in \Gamma(TN)$, possiamo definire $\bar{X} \in \mathcal{T}(H)$ nel seguente modo,

$$\bar{X}_p = dH_p(X_p),$$

mentre se $\tilde{Y} \in \Gamma(TM)$, allora $Y = \tilde{Y} \circ H \in \mathcal{T}(H)$.

Definiamo ora, analogamente alla derivata covariante lungo una curva, un operatore $\bar{\nabla}$ di derivazione dei campi lungo H , rispetto a campi su N . Tale operatore è formalmente la connessione pull-back $H^*\nabla$ della connessione di Levi-Civita ∇ su TM , sul fibrato vettoriale H^*TM di N (Osservazione 3.5.6).

PROPOSIZIONE 6.3.1. *Sia $H : N \rightarrow M$ una funzione di classe C^∞ da una varietà differenziabile N in una varietà riemanniana (M, g) . Esiste ed è unico un operatore $\bar{\nabla} : \Gamma(TN) \times \mathcal{T}(H) \rightarrow \mathcal{T}(H)$, per il quale utilizziamo la notazione $(X, Y) \mapsto \bar{\nabla}_X Y$, tale che si abbia*

- $\bar{\nabla}$ è \mathbb{R} -lineare e $C^\infty(N)$ -lineare nella prima componente,
- per ogni $f \in C^\infty(N)$ vale la formula

$$\bar{\nabla}_X(fY) = (Xf)Y + f\bar{\nabla}_X Y,$$

- se Y è localmente estendibile in un intorno di $H(p)$ in M , ovvero esistono un intorno U di $p \in N$ e $\tilde{Y} \in \Gamma(TM)$ tale che $Y_q = \tilde{Y}_{H(q)}$ per ogni $q \in U$, allora

$$(\bar{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_{dH_p(X_p)} \tilde{Y})_{H(p)}.$$

Inoltre, l'operatore $\bar{\nabla}$ soddisfa le seguenti proprietà:

- $\bar{\nabla}_X \bar{Y} - \bar{\nabla}_Y \bar{X} = \overline{[X, Y]}$ per ogni $X, Y \in \Gamma(TN)$,
- $Xg(Y, Z) = g(\bar{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \bar{\nabla}_X Z)$ per ogni $X \in \Gamma(TN)$ e $Y, Z \in \mathcal{T}(H)$,
- $\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_{[Y, X]} Z = R(\bar{X}, \bar{Y})Z$ per ogni $X, Y \in \Gamma(TN)$ e $Z \in \mathcal{T}(H)$.

Dunque l'operatore $\bar{\nabla}$ è una connessione sul fibrato H^*TM di N "simmetrica" e "compatibile con la metrica".

OSSERVAZIONE 6.3.2. Si vede facilmente, per la formula (3.9), che se H è un'immersione isometrica di (N, h) (per esempio, se coincide con la mappa di inclusione $\iota : S \hookrightarrow M$ di una sottovarietà riemanniana S di (M, g) , oppure se H è un'immersione e su N consideriamo la metrica indotta $h = H^*g$) e $X, Y \in \Gamma(TN)$, allora si ha che $(\bar{\nabla}_X Y)^\top$ è la derivata covariante $\nabla_X^N Y$ relativa alla connessione di Levi-Civita di N (lo si mostri per esercizio), con la naturale identificazione tra i campi $Y \in \Gamma(TN)$ e $\bar{Y} \in \mathcal{T}(H)$ data dal considerare $T_p N$ un sottospazio vettoriale di $T_{H(p)} M$, per ogni $p \in N$.

DEFINIZIONE 6.3.3. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva C^∞ . Una *variazione* di γ è un'applicazione di classe C^∞

$$H : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

tale che $H(t, 0) = \gamma(t)$ per ogni $t \in [a, b]$. Se inoltre, $H(a, s) = \gamma(a)$ e $H(b, s) = \gamma(b)$ per ogni $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, chiamiamo H *variazione a estremi fissati* di γ .

Data una variazione H , indichiamo per comodità con $\gamma_s : [a, b] \rightarrow M$ la curva definita da $\gamma_s(t) = H(t, s)$. Chiaramente, tutte le curve γ_s hanno gli stessi estremi se H è a estremi fissati. In generale, l'idea è che la variabile $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ parametrizzi una famiglia di curve "vicine" a γ , mentre $t \in [a, b]$ parametrizza ciascuna delle curve.

Su $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ sono definiti i campi vettoriali $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\frac{\partial}{\partial s}$, che in ogni punto (t, s) sono una base dello spazio tangente. Le loro immagini tramite dH sono i due campi vettoriali lungo H che denotiamo con $\bar{\frac{\partial}{\partial t}}$ e $\bar{\frac{\partial}{\partial s}}$, conformemente alle notazioni di prima,

$$\bar{\frac{\partial}{\partial t}}(t, s) = dH_{(t,s)}\left(\frac{\partial}{\partial t}(t, s)\right), \quad \bar{\frac{\partial}{\partial s}}(t, s) = dH_{(t,s)}\left(\frac{\partial}{\partial s}(t, s)\right).$$

Il campo $\bar{\frac{\partial}{\partial t}}$ coincide con la velocità della curva γ_s al tempo t , cioè $\dot{\gamma}_s$, il campo $\bar{\frac{\partial}{\partial s}}$ indica invece la "velocità" con cui sta variando ogni punto della curva γ_s al tempo fissato t .

DEFINIZIONE 6.3.4. A ogni variazione H di γ è associato il campo vettoriale lungo γ dato da $Y(t) = \bar{\frac{\partial}{\partial s}}(t, 0) = dH_{(t,0)}\left(\frac{\partial}{\partial s}(t, 0)\right)$ chiamato *generatore infinitesimale* della variazione (tale campo indica, come già detto, la "velocità" con cui sta variando la curva γ).

Viceversa, dato un campo vettoriale Y lungo γ , la variazione

$$H(t, s) = \exp_{\gamma(t)}(sY(t))$$

lo ha come generatore infinitesimale.

Inoltre, una variazione a estremi fissati ha un generatore infinitesimale nullo agli estremi a, b e se Y è un campo vettoriale lungo γ che soddisfa $Y(a) = 0$ e $Y(b) = 0$, la formula sopra definisce una variazione a estremi fissati.

Sia H una variazione di una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$. Allora, dato un campo X lungo H e fissato $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, l'applicazione $t \mapsto X(t, s)$ è un campo lungo la curva γ_s e la derivata covariante $\frac{D}{dt}X(\cdot, s)(t)$ lungo γ_s coincide con $\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}X(t, s)$, per confronto delle espressioni in coordinate locali. Lo stesso vale se fissiamo $t \in [a, b]$ e facciamo variare solo s in $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Indicheremo dunque con $\frac{D}{dt}$ la derivata covariante lungo le curve γ_s , per le quali il parametro che varia è t e con $\frac{D}{ds}$ la derivata covariante lungo le curve $s \mapsto H(t, s)$, per le quali t è invece il parametro fissato, inoltre tenderemo a omettere la valutazione in s e t (per

esempio, scrivendo semplicemente $\bar{\partial}$ al posto di $\bar{\partial}(t, s)$ per non appesantire la notazione. Si ha allora

$$\frac{D}{dt}X = \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}X \quad \text{e} \quad \frac{D}{ds}X = \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}}X,$$

per ogni $X \in \mathcal{T}(H)$, da cui seguono le uguaglianze

$$\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \quad (6.4)$$

$$\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s} = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial s} + R\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial s}\right) \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \quad (6.5)$$

$$\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} = \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} + R\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) \frac{\bar{\partial}}{\partial t},$$

per le proprietà di $\bar{\nabla}$ nella Proposizione 6.3.1 e dove abbiamo sfruttato il fatto che $[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}] = 0$.

PROPOSIZIONE 6.3.5 (Variazione prima del funzionale energia). *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva C^∞ in una varietà riemanniana (M, g) e sia H una variazione di γ , con generatore infinitesimale Y . Allora,*

$$\frac{d}{ds} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = g(Y, \dot{\gamma}) \Big|_a^b - \int_a^b g\left(Y, \frac{D}{dt} \dot{\gamma}\right) dt. \quad (6.6)$$

In particolare, se H è una variazione a estremi fissati,

$$\frac{d}{ds} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = - \int_a^b g\left(Y, \frac{D}{dt} \dot{\gamma}\right) dt.$$

DIMOSTRAZIONE. Calcoliamo

$$\frac{d}{ds} \mathcal{E}(\gamma_s) = \frac{d}{ds} \frac{1}{2} \int_a^b g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s) dt = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt = \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt.$$

Dall'uguaglianza (6.4) segue allora

$$\begin{aligned} \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt &= \int_a^b g\left(\frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) - g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) \right] dt \\ &= g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) \Big|_a^b - \int_a^b g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt. \end{aligned}$$

Valutando dunque in $s = 0$ si ottiene la tesi. \square

Una conseguenza di questa Proposizione è che, se γ è una curva C^∞ minimale per \mathcal{E} nella famiglia delle curve definite su uno stesso intervallo chiuso e limitato e congiungenti gli stessi due punti, o più in generale è un *punto critico* di \mathcal{E} nella

stessa famiglia, cioè in γ ogni variazione prima di \mathcal{E} a estremi fissati è zero, allora

$$\int_a^b g\left(Y, \frac{D}{dt}\dot{\gamma}\right) dt = 0,$$

per ogni campo Y lungo γ che sia nullo agli estremi. Da ciò si deduce facilmente che $\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0$, ovvero che γ è una geodetica. Infatti, scegliendo $Y = \varphi \frac{D}{dt}\dot{\gamma}$ con $\varphi \in C_c^\infty(a, b)$ si ha

$$\int_a^b \varphi \left| \frac{D}{dt}\dot{\gamma} \right|^2 dt = 0$$

e la conclusione segue dal *lemma fondamentale del calcolo delle variazioni* ([16, Lemma 2.2.1], per esempio) che afferma che se $u \in L^1_{loc}(a, b)$ soddisfa

$$\int_a^b uv dt = 0$$

per ogni $v \in C_c^\infty(a, b)$, allora $u = 0$ quasi ovunque in (a, b) .

Possiamo dunque dire che l'equazione delle geodetiche $\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0$ è l'equazione di Eulero–Lagrange del funzionale energia \mathcal{E} .

OSSERVAZIONE 6.3.6. Se studiamo il funzionale energia sullo spazio

$$\Omega_{a,b}^{p,q} = \{\gamma : [a, b] \rightarrow M : \gamma \in C^1, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}.$$

delle curve soltanto C^1 e vogliamo la conclusione analoga che i punti critici di \mathcal{E} su $\Omega_{a,b}^{p,q}$ siano geodetiche, dobbiamo estendere l'analisi precedente ai campi Y nulli agli estremi di $[a, b]$ di classe soltanto C^1 , a cui corrispondono allora variazioni a estremi fissati $H(t, s) = \exp_{\gamma(t)}(sY(t))$ anch'esse di classe C^1 . Nel calcolo della variazione prima di \mathcal{E} nella dimostrazione della *Proposizione 6.3.5*, notiamo che per queste speciali variazioni (sebbene siano soltanto di classe C^1) esistono e coincidono

$$\frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s},$$

che sono campi continui lungo H (lo si mostri per esercizio usando coordinate locali e tenendo conto della regolarità della mappa esponenziale). Il calcolo è dunque giustificato e si ottiene

$$0 = \frac{d}{ds} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \int_a^b g\left(\frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \Big|_{s=0} dt = \int_a^b g\left(\frac{D}{dt} Y(t), \dot{\gamma}(t)\right) dt.$$

Se $t_0 \in (a, b)$ e $\delta > 0$ sono tali che il tratto di curva $\gamma|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$ è contenuto in una singola carta coordinata, per ogni campo Y di classe C^1 con supporto compatto contenuto in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, si ha in coordinate

$$0 = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t) (\dot{Y}^i(t) + \Gamma_{km}^i(\gamma(t)) Y^k(t) \dot{\gamma}^m(t)) dt.$$

Poiché i campi $Y = v(t)g^{s\ell}(\gamma(t))\frac{\partial}{\partial x^\ell}\big|_{\gamma(t)}$, per ogni $s \in \{1, \dots, n\}$, sono di classe C^1 con supporto compatto contenuto in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, per ogni $v \in C_c^\infty(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, per essi vale questa l'uguaglianza. Essendo

$$\begin{aligned} \dot{Y}^i(t) &= g^{is}(\gamma(t))\dot{v}(t) - g^{il}(\gamma(t))g^{sm}(\gamma(t))\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^p}(\gamma(t))\dot{\gamma}^p(t)v(t) \\ &= g^{is}(\gamma(t))\dot{v}(t) - g^{il}(\gamma(t))g^{sm}(\gamma(t))[\Gamma_{pl}^r(\gamma(t))g_{rm}(\gamma(t)) + \Gamma_{pm}^r(\gamma(t))g_{rl}(\gamma(t))]\dot{\gamma}^p(t)v(t), \end{aligned}$$

per le uguaglianze $\frac{\partial g^{is}}{\partial x^p} = -g^{il}g^{sm}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x^p}$ e (3.1), otteniamo allora

$$0 = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} (\dot{\gamma}^s(t)\dot{v}(t) - \Gamma_{jk}^s(\gamma(t))\dot{\gamma}^j(t)\dot{\gamma}^k(t)v(t)) dt$$

per ogni $s \in \{1, \dots, n\}$. Segue dunque che $\gamma \in C^2(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ e soddisfa l'equazione delle geodetiche (4.2), per il lemma di Du Bois–Reymond (si veda [16, Lemma 2.3.2], per esempio) che afferma che se $u \in L_{loc}^1(c, d)$ e $f \in C^0(c, d)$ soddisfano

$$\int_c^d (uv' + fv) dt = 0$$

per ogni $v \in C_c^\infty(c, d)$, allora u coincide quasi ovunque in (c, d) con una funzione in $C^1(c, d)$ la cui derivata è f . Per l'arbitrarietà di $t_0 \in (a, b)$ ed essendo $\gamma \in C^1([a, b])$, allora $\gamma \in C^2([a, b])$ ed è una geodetica (dunque C^∞ per l'Osservazione 4.1.3).

Un'analisi analoga può essere fatta se il funzionale energia viene studiato sullo spazio delle curve C^1 a tratti

$$\overline{\Omega}_{a,b}^{p,q} = \{\gamma : [a, b] \rightarrow M : \gamma \in C_S^1, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\},$$

concludendo che un punto critico γ è una geodetica in tutti i tratti dove $\dot{\gamma}$ è continua. Inoltre, devono valere le condizioni di Erdmann–Weierstrass per i punti critici C^1 a tratti (si veda [16, Sezione 3.1], per esempio) che in questo contesto sono date, in ogni punto $t \in (a, b)$ di discontinuità di $\dot{\gamma}$, da

$$g(Y(t), \dot{\gamma}_-(t)) = g(Y(t), \dot{\gamma}_+(t))$$

per ogni campo Y lungo γ di classe C^1 (lo si mostri per esercizio). Segue facilmente (dalla positività della metrica g) che deve essere $\dot{\gamma}_+(t) = \dot{\gamma}_-(t)$ per ciascuno di tali punti t , quindi γ è di classe C^1 e dunque una geodetica su tutto l'intervallo $[a, b]$, per unicità.

Si noti che per la Proposizione 6.2.2, questa conclusione fornisce una dimostrazione di una delle due implicazioni della Proposizione 4.3.12 (le curve C^1 a tratti, localmente minimali e parametrizzate proporzionalmente alla lunghezza d'arco, essendo localmente minimi per l'energia, sono geodetiche).

OSSERVAZIONE 6.3.7. La formula (6.6) di variazione prima dell'energia vale anche per una variazione $H : \mathbb{S}^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ di una curva chiusa $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$, con generatore infinitesimale Y lungo γ , ma in tal caso il "termine di bordo" non è presente,

$$\frac{d}{ds} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = - \int_{\mathbb{S}^1} g\left(Y, \frac{D}{dt} \dot{\gamma}\right) dt.$$

Con la stessa analisi di cui sopra, si conclude che le curve minimali sono geodetiche chiuse.

ESERCIZIO 6.3.8. Se $N \subseteq M$ è una sottovarietà (embedded) chiusa e p un punto di (M, g) completa, possiamo considerare i minimi dell'energia tra le curve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ da p a N , cioè con l'altro estremo $q \in N$ (la lunghezza di tali minimi è dunque la distanza tra p e N). Si mostri che tali minimi γ esistono, che devono essere geodetiche e che soddisfano

$$g(v, \dot{\gamma}(b)) = 0,$$

per ogni vettore $v \in T_{\gamma(q)}N$, cioè i minimi "arrivano" su N perpendicolarmente (questo è un "problema a estremi liberi", si veda [16, Sezione 3.3]).

Analogamente, si provi che i minimi dell'energia tra tutte le curve con estremi su due sottovarietà (embedded) disgiunte di (M, g) completa, una chiusa e l'altra compatta, arrivano perpendicolarmente sulle due sottovarietà.

Analogamente all'energia, vediamo la variazione prima del funzionale lunghezza. Supponiamo che γ sia parametrizzata in lunghezza d'arco, in quanto ciò non è chiaramente restrittivo.

PROPOSIZIONE 6.3.9 (Variazione prima del funzionale lunghezza). Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva C^∞ in una varietà riemanniana (M, g) , parametrizzata in lunghezza d'arco (dunque $|\dot{\gamma}|$ è costante uguale a uno) e sia H una variazione di γ , con generatore infinitesimale Y lungo γ . Allora,

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = g(Y, \dot{\gamma}) \Big|_a^b - \int_a^b g\left(Y, \frac{D}{dt} \dot{\gamma}\right) dt.$$

In particolare, se H è una variazione a estremi fissati,

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = - \int_a^b g\left(Y, \frac{D}{dt} \dot{\gamma}\right) dt.$$

DIMOSTRAZIONE. Calcolando come nella Proposizione 6.3.5, abbiamo

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\gamma_s) = \frac{d}{ds} \int_a^b \sqrt{g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s)} dt = \int_a^b \frac{g\left(\frac{D}{ds} \bar{\partial}, \bar{\partial}\right)}{\sqrt{g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s)}} dt$$

dunque,

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \bar{\partial}, \bar{\partial}\right) \Big|_{s=0} dt,$$

da cui si ha la tesi procedendo col calcolo come in tale proposizione. \square

La discussione dell'Osservazione 6.3.6 vale dunque anche per il funzionale lunghezza e l'equazione delle geodetiche $\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0$ è l'equazione di Eulero-Lagrange anche di \mathcal{L} (una volta riparametrizzate le curve proporzionalmente alla lunghezza d'arco). Inoltre, le Proposizioni 6.3.5 e 6.3.9 mostrano chiaramente che la connessione tra i minimi dei due funzionali lunghezza e energia, stabilita nella Proposizione 6.2.2 si estende anche ai punti critici.

OSSERVAZIONE 6.3.10. Il calcolo per una generica curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ ha il problema che la lagrangiana del funzionale lunghezza $|\dot{\gamma}| = \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$ non è C^1 quando $\dot{\gamma} = 0$. Si provi comunque, per esercizio, a calcolare la variazione prima di \mathcal{L} per una curva γ con $\dot{\gamma}$ diverso da zero in ogni punto di $[a, b]$.

Una curva minimale per l'energia a estremi (e intervallo) fissati chiaramente deve soddisfare anche la seguente condizione,

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} \geq 0$$

per una qualsiasi variazione H di γ a estremi fissati. Pertanto calcoliamo ora la variazione seconda dell'energia, nel caso in cui γ sia una geodetica.

Per comodità di notazione, indichiamo $\frac{D}{dt}Y$ con Y' .

PROPOSIZIONE 6.3.11 (Variazione seconda del funzionale energia). *Siano (M, g) una varietà riemanniana e sia H una variazione di una geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$. Denotando con Y il generatore infinitesimale di H , si ha*

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = g\left(\frac{D}{ds}\frac{\bar{\partial}}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{\gamma}\right) \Big|_a^b + \int_a^b (|Y'|^2 - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)) dt. \quad (6.7)$$

In particolare, se H è una variazione a estremi fissati,

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \int_a^b (|Y'|^2 - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)) dt.$$

DIMOSTRAZIONE. Analogamente al calcolo della variazione prima dell'energia, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{E}(\gamma_s) &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial s^2} g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial s^2} g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt \\ &= \int_a^b g\left(\frac{D}{ds}\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{D}{ds}\frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt + \int_a^b g\left(\frac{D}{ds}\frac{D}{ds}\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt. \end{aligned}$$

Ricordando la relazione $\frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s} = \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}$, il primo dei due integrali diventa, valutato per $s = 0$,

$$\begin{aligned} \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) \Big|_{s=0} dt &= \int_a^b g\left(\frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}\right) \Big|_{s=0} dt \\ &= \int_a^b g\left(\frac{D}{dt} Y, \frac{D}{dt} Y\right) dt \\ &= \int_a^b |Y'|^2 dt. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Riscriviamo ora il secondo integrale, scambiando le derivate covarianti (il che comporta la comparsa di un termine di curvatura, per l'uguaglianza (6.5)),

$$\begin{aligned} \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt &= \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt \\ &= \int_a^b g\left(\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt - \int_a^b g\left(R\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt - \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt \\ &\quad - \int_a^b R\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt \\ &= g\left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) \Big|_a^b - \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt \\ &\quad - \int_a^b R\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial s}\right) dt. \end{aligned}$$

Valutando in $s = 0$, l'addendo intermedio si annulla in quanto γ è una geodetica e sommando con l'equazione (6.8), si ottiene

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = g\left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{\gamma}\right) \Big|_a^b + \int_a^b (|Y'|^2 - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)) dt,$$

che è la tesi.

Se H è una variazione a estremi fissati, il termine di bordo si annulla perché $Y(a, s) = dH_{(a,s)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = 0$ e $Y(b, s) = dH_{(b,s)}\left(\frac{\partial}{\partial s}\right) = 0$, per ogni $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. \square

OSSERVAZIONE 6.3.12. Come per la formula di variazione prima, la formula (6.7) di variazione seconda dell'energia vale per una variazione $H : \mathbb{S}^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ di una geodetica chiusa $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$, con generatore infinitesimale Y lungo γ , senza il "termine di bordo",

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \int_{\mathbb{S}^1} (|Y'|^2 - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)) dt.$$

Vediamo anche la variazione seconda del funzionale lunghezza per una geodetica γ parametrizzata in lunghezza d'arco (come per la variazione prima, cioè non è restrittivo).

PROPOSIZIONE 6.3.13 (Variazione seconda del funzionale lunghezza). *Siano (M, g) una varietà riemanniana e sia H una variazione di una geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, parametrizzata in lunghezza d'arco (dunque $|\dot{\gamma}|$ è costante uguale a uno). Denotando con Y il generatore infinitesimale di H , si ha*

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = g \left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{\gamma} \right) \Big|_a^b + \int_a^b (|\tilde{Y}'|^2 - R(\dot{\gamma}, \tilde{Y}, \dot{\gamma}, \tilde{Y})) dt, \quad (6.9)$$

dove $\tilde{Y} = Y - g(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma}$ è la componente normale di Y rispetto a γ .
In particolare, se H è una variazione a estremi fissati,

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \int_a^b (|\tilde{Y}'|^2 - R(\dot{\gamma}, \tilde{Y}, \dot{\gamma}, \tilde{Y})) dt.$$

DIMOSTRAZIONE. Analogamente al calcolo della variazione prima dell'energia, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(\gamma_s) &= \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial s^2} \sqrt{g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s)} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \frac{\frac{\partial}{\partial s} g \left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \right)}{\sqrt{g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s)}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\frac{\partial^2}{\partial s^2} g \left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \right)}{\sqrt{g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s)}} dt - \frac{1}{4} \int_a^b \frac{\left[\frac{\partial}{\partial s} g \left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \right) \right]^2}{\left(\sqrt{g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s)} \right)^3} dt, \end{aligned}$$

dunque, valutando per $s = 0$, abbiamo

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial s^2} g \left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \right) \Big|_{s=0} dt - \frac{1}{4} \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial s} g \left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \right) \right]^2 \Big|_{s=0} dt.$$

Dal primo integrale si ottiene lo stesso risultato della variazione seconda dell'energia, mentre dal secondo,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial s} g \left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \right) \right]^2 \Big|_{s=0} dt &= - \int_a^b \left[g \left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \right) \right]^2 \Big|_{s=0} dt \\ &= - \int_a^b \left[g \left(\frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \right) \right]^2 \Big|_{s=0} dt \\ &= - \int_a^b [g(Y', \dot{\gamma})]^2 dt. \end{aligned}$$

Ponendo $\tilde{Y} = Y - g(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma}$, abbiamo

$$\tilde{Y}' = Y' - \frac{D}{dt}g(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = Y' - g(Y', \dot{\gamma})\dot{\gamma},$$

essendo γ una geodetica. Inoltre, per le proprietà del tensore di Riemann, $R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y) = R(\dot{\gamma}, \tilde{Y}, \dot{\gamma}, \tilde{Y})$, da cui la tesi segue in quanto

$$|\tilde{Y}'|^2 = |Y'|^2 - [g(Y', \dot{\gamma})]^2.$$

□

OSSERVAZIONE 6.3.14. Volendo connettere l'analisi di questa sezione con la trattazione "classica" (si veda [16], per esempio), per ogni curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ abbiamo

$$\mathcal{E}(\gamma) = \int_a^b f(\dot{\gamma}(t)) dt,$$

con una lagrangiana $f : TM \rightarrow \mathbb{R}$ (indipendente dal "tempo") data in una banalizzazione locale di TM da

$$f(x, v) = g_{jk}(x)v^jv^k/2.$$

Si ha allora

$$f_{x^i}(x, v) = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}(x)v^jv^k/2, \quad f_{v^i}(x, v) = g_{ij}(x)v^j$$

e

$$\begin{aligned} f_{x^i x^j}(x, v) &= f_{x^j x^i}(x, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{km}}{\partial x^i \partial x^j}(x)v^k v^m, \\ f_{x^i v^j}(x, v) &= f_{v^j x^i}(x, v) = \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}(x)v^k, \\ f_{v^i v^j}(x, v) &= g_{ij}(x). \end{aligned}$$

L'equazione di Eulero–Lagrange che "classicamente" si ottiene (sfruttando l'uguaglianza (3.1)) è dunque

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} f_{v^i}(\gamma^1, \dots, \gamma^n, \dot{\gamma}^1, \dots, \dot{\gamma}^n) - f_{x^i}(\gamma^1, \dots, \gamma^n, \dot{\gamma}^1, \dots, \dot{\gamma}^n) \\ &= \frac{d}{dt} (g_{ij}(\gamma^1, \dots, \gamma^n) \dot{\gamma}^j) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}(\gamma^1, \dots, \gamma^n) \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^l \\ &= g_{ij}(\gamma^1, \dots, \gamma^n) \ddot{\gamma}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}(\gamma^1, \dots, \gamma^n) \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^l - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}(\gamma^1, \dots, \gamma^n) \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^l \\ &= g_{ij}(\gamma^1, \dots, \gamma^n) \ddot{\gamma}^j + [\Gamma_{li}^m(\gamma) g_{mj}(\gamma^1, \dots, \gamma^n) + \Gamma_{lj}^m(\gamma) g_{mi}(\gamma^1, \dots, \gamma^n)] \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^l \\ &\quad - [\Gamma_{ij}^m(\gamma) g_{ml}(\gamma^1, \dots, \gamma^n) + \Gamma_{il}^m(\gamma) g_{mj}(\gamma^1, \dots, \gamma^n)] \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^l / 2 \\ &= g_{ij}(\gamma^1, \dots, \gamma^n) \ddot{\gamma}^j + \Gamma_{lj}^m(\gamma) g_{mi}(\gamma^1, \dots, \gamma^n) \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^l \\ &= g_{ij}(\gamma^1, \dots, \gamma^n) \ddot{\gamma}^j + g_{ij}(\gamma^1, \dots, \gamma^n) \Gamma_{lm}^j(\gamma) \dot{\gamma}^m \dot{\gamma}^l \end{aligned}$$

che implica $\ddot{\gamma}^m + \Gamma_{ij}^m(\gamma)\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0$ (essendo la matrice di coefficienti $g_{ij}(\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ invertibile), cioè l'equazione delle geodetiche, coerentemente con quanto ottenuto sopra.

OSSERVAZIONE 6.3.15. Si confronti il calcolo delle variazioni prima e seconda del funzionale energia in questa sezione con l'analogo calcolo per le ipersuperfici immerse in \mathbb{R}^n , sviluppato in modo "classico" in [16, Sezioni 6.4 e 8.5.3], per apprezzare la forza del formalismo riemanniano, meno "naturale" a prima vista, ma molto potente una volta acquisito.

ESERCIZIO 6.3.16. Si calcolino le variazioni prima e seconda di un generico funzionale definito sulle curve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$

$$\mathcal{F}(\gamma) = \int_a^b f(t, \dot{\gamma}(t)) dt$$

con una lagrangiana $f : [a, b] \times TM \rightarrow \mathbb{R}$, usando il formalismo riemanniano, analogamente a quanto fatto per il funzionale energia in questa sezione.

6.4. Campi di Jacobi

Analizziamo la variazione seconda del funzionale energia come nel caso classico del calcolo delle variazioni, sottolineando che è un funzionale "vettoriale" e definito su curve a valori in una varietà, invece che in \mathbb{R}^n . In particolare, vogliamo sviluppare la *teoria di Jacobi*, notando che la *condizione di Legendre forte* è soddisfatta, in quanto con le notazioni dell'Osservazione 6.3.14, si ha $f_{\xi^i \xi^j}(\gamma, \xi) = g_{ij}(\gamma)$, che è una matrice sempre definita positiva (si veda [16, Capitolo 8] e si provi a studiare la variazione seconda in modo "classico" con le notazioni dell'Osservazione 6.3.14 – si tenga presente [16, Sezione 8.5.3]). Un interessante esercizio per il lettore è inquadrare (usando il formalismo riemanniano) tutta l'analisi della minimalità delle geodetiche in questa e nelle sezioni seguenti, nella teoria generale fornita dal calcolo delle variazioni ([16, Capitoli 8 e 9], per esempio).

DEFINIZIONE 6.4.1. Data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, sullo spazio vettoriale dei campi vettoriali lungo γ nulli agli estremi, definiamo la *forma indice* di γ come

$$I(X, Y) = \int_a^b (g(X', Y') - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, X)) dt.$$

La forma indice $I(X, Y)$ è dunque una forma bilineare simmetrica (per le simmetrie del tensore di Riemann), che può essere pensata come l'hessiano del funzionale energia e la cui forma quadratica associata è data da

$$I(Y, Y) = \int_a^b (|Y'|^2 - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)) dt. \quad (6.10)$$

OSSERVAZIONE 6.4.2. Viceversa, la forma bilineare I si ottiene per “polarizzazione” dalla forma quadratica $Y \mapsto I(Y, Y)$,

$$I(X, Y) = \frac{I(X + Y, X + Y) - I(X - Y, X - Y)}{4}.$$

OSSERVAZIONE 6.4.3. La forma I si può chiaramente estendere a tutto lo spazio vettoriale dei campi lungo $\gamma : [a, b] \rightarrow M$. Integrando per parti, otteniamo

$$I(X, Y) = g(X, Y') \Big|_a^b - \int_a^b g(X, Y'' + R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma}) dt \quad (6.11)$$

e

$$I(Y, Y) = g(Y, Y') \Big|_a^b - \int_a^b g(Y, Y'' + R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma}) dt \quad (6.12)$$

dove, coerentemente con la notazione precedente, abbiamo utilizzato Y'' per indicare $\frac{D^2}{dt^2}Y = \frac{D}{dt}Y'$, per ogni campo vettoriale Y lungo γ .

Se allora X nella prima formula oppure Y nella seconda, rispettivamente, è nullo agli estremi, si ha

$$\begin{aligned} I(X, Y) &= - \int_a^b g(X, Y'' + R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma}) dt & (6.13) \\ I(Y, Y) &= - \int_a^b g(Y, Y'' + R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma}) dt. \end{aligned}$$

La formula fornita dalla Proposizione 6.3.11, nel caso in cui si abbia una variazione a estremi fissati di una geodetica γ , si può quindi riscrivere come

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = I(Y, Y).$$

In particolare, se γ è minimale tra i suoi due estremi, si ha $I(Y, Y) \geq 0$, per ogni campo Y lungo di essa, nullo agli estremi.

Vedremo inoltre (Proposizione 6.4.9) che in un certo senso la forma indice, dunque l'integrale (6.10), “misura” quanto le curve γ_s falliscono nell'essere geodetiche.

OSSERVAZIONE 6.4.4. Analogamente, possiamo definire una forma quadratica che rappresenta la variazione seconda del funzionale lunghezza a estremi fissati di una geodetica γ in lunghezza d'arco,

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = I'(Y, Y) = \int_a^b (|\tilde{Y}'|^2 - R(\dot{\gamma}, \tilde{Y}, \dot{\gamma}, \tilde{Y})) dt,$$

dove \tilde{Y} è la componente normale di Y rispetto a γ . La forma bilineare simmetrica I' si può ottenere poi per polarizzazione (e integrando per parti),

$$I'(X, Y) = \int_a^b (g(\tilde{X}', \tilde{Y}') - R(\dot{\gamma}, \tilde{Y}, \dot{\gamma}, \tilde{X})) dt = - \int_a^b g(\tilde{X}, \tilde{Y}'' + R(\dot{\gamma}, \tilde{Y})\dot{\gamma}) dt,$$

con \tilde{X}, \tilde{Y} le componenti normali di X, Y rispetto a γ .

Osserviamo che, se γ è una geodetica e $Y = \lambda \dot{\gamma}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ costante, allora $Y' = 0$ (per l'equazione delle geodetiche) e $R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y) = \lambda^2 R(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$, per le proprietà di antisimmetria del tensore di Riemann.

Comprendere in quali situazioni la forma indice I associata a una geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ è *degenere* è importante per lo studio delle geodetiche "lunghe", così come l'analoga forma data dalla variazione seconda, nello studio della (perdita di) minimalità delle soluzioni delle equazioni di Eulero–Lagrange di funzionali "classici" del calcolo delle variazioni (si veda [16, Capitolo 8], per esempio). Questo chiaramente succede, per la formula (6.13) nell'Osservazione 6.4.3, se e solo se esiste un campo vettoriale Y lungo γ , non identicamente nullo ma nullo agli estremi, tale che $I(X, Y) = 0$, per ogni campo X lungo γ , nullo agli estremi, cioè

$$Y'' + R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} = 0.$$

DEFINIZIONE 6.4.5. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodetica, un campo vettoriale Y lungo γ si dice *campo di Jacobi* se soddisfa il sistema lineare di ODE del second'ordine,

$$Y'' + R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} = 0. \quad (6.14)$$

Fissati i dati iniziali $Y(a)$ e $Y'(a)$, questa equazione differenziale ammette una soluzione unica e C^∞ su tutto $[a, b]$ (il sistema è lineare e a coefficienti C^∞). Segue che l'insieme dei campi di Jacobi lungo γ è uno spazio vettoriale di dimensione $2n$, con n la dimensione di (M, g) .

È più difficile stabilire se esistano soluzioni con $Y(a)$ e $Y(b)$ entrambi nulli (condizione affinché I sia degenere) e in effetti non ne è in generale garantita né l'esistenza, né l'unicità.

OSSERVAZIONE 6.4.6. Se Y è un campo di Jacobi lungo la geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, si ha

$$I(X, Y) = g(X, Y') \Big|_a^b \quad \text{e} \quad I(Y, Y) = g(Y, Y') \Big|_a^b \quad (6.15)$$

per le formule (6.11) e (6.12).

DEFINIZIONE 6.4.7. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodetica da p a q in (M, g) , diciamo che q è *coniugato a p lungo γ* se la forma indice associata a γ è degenere, cioè se esiste un campo di Jacobi non nullo lungo γ tale che $Y(a) = Y(b) = 0$.

Si noti che la relazione di essere coniugato lungo una geodetica è simmetrica, cioè se q è coniugato a p lungo γ , allora p è coniugato a q lungo γ percorsa nel verso opposto.

La seguente proposizione implica che se esiste un campo di Jacobi come nella Definizione 6.4.7, deve essere ortogonale alla geodetica in ogni punto (lo si provi per esercizio). Chiameremo nel seguito *normali* tali campi di Jacobi lungo una geodetica.

PROPOSIZIONE 6.4.8. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodetica in una varietà riemanniana (M, g) , di dimensione n e Y un campo di Jacobi lungo γ ,

- se $Y(a) = \alpha \dot{\gamma}(a)$ e $Y'(a) = \beta \dot{\gamma}(a)$, per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $Y(t) = (\alpha + \beta(t-a))\dot{\gamma}(t)$, per ogni $t \in [a, b]$. In particolare, se $Y(a) = 0$ e $Y'(a) = \beta \dot{\gamma}(a)$, per $\beta \in \mathbb{R}$, allora $Y(t) = \beta(t-a)\dot{\gamma}(t)$, per ogni $t \in [a, b]$,
- se $Y(a)$ e $Y'(a)$ sono entrambi ortogonali a $\dot{\gamma}(a)$, allora $Y(t)$ e $Y'(t)$ sono ortogonali a $\dot{\gamma}(t)$, per ogni $t \in [a, b]$, dunque l'insieme dei campi di Jacobi ortogonali a γ è uno spazio vettoriale di dimensione $2n - 2$,
- se $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(c + \lambda t)$ è una riparametrizzazione di γ sull'intervallo $[\frac{a-c}{\lambda}, \frac{b-c}{\lambda}]$, il campo vettoriale

$$\tilde{Y}(t) = Y(c + \lambda t)$$

è di Jacobi lungo $\tilde{\gamma}$. In particolare, la definizione di punto coniugato non dipende dalla parametrizzazione della geodetica γ , ma è un concetto geometrico.

DIMOSTRAZIONE.

- Il campo $\bar{Y}(t) = (\alpha + \beta(t-a))\dot{\gamma}(t)$ soddisfa l'equazione per i campi di Jacobi e le condizioni iniziali, quindi deve essere uguale a Y per unicità della soluzione. Infatti, $\bar{Y}'' = 0$ (la derivata di $\dot{\gamma}$ è nulla per l'equazione delle geodetiche) e $R(\dot{\gamma}, \bar{Y})\dot{\gamma} = 0$ (per l'antisimmetria del tensore di Riemann).
- Sia $f(t) = g(Y(t), \dot{\gamma}(t))$. Calcoliamo le derivate prima e seconda di f , tenendo conto del fatto che γ soddisfa l'equazione delle geodetiche e che Y'' si ricava dall'equazione per i campi di Jacobi,

$$f' = g(Y', \dot{\gamma}) + g\left(Y, \frac{D}{dt}\dot{\gamma}\right) = g(Y', \dot{\gamma}),$$

$$f'' = g(Y'', \dot{\gamma}) + g\left(Y', \frac{D}{dt}\dot{\gamma}\right) = g(Y'', \dot{\gamma}) = -R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0.$$

Per ipotesi, $f(a) = 0$ e $f'(a) = 0$. Pertanto, essendo f'' identicamente nulla, f stessa deve essere identicamente nulla. Ciò significa che $Y(t)$ è ortogonale a $\dot{\gamma}(t)$ per ogni t . Lo stesso vale per $Y'(t)$, perché anche f' è identicamente nulla.

- Basta verificare che \tilde{Y} soddisfa l'equazione dei campi di Jacobi. Osserviamo che $\tilde{Y}''(t) = \lambda^2 Y''(c + \lambda t)$ e

$$\begin{aligned} R(\dot{\tilde{\gamma}}(t), \tilde{Y}(t))\dot{\tilde{\gamma}}(t) &= R(\lambda \dot{\gamma}(c + \lambda t), Y(c + \lambda t))\lambda \dot{\gamma}(c + \lambda t) \\ &= \lambda^2 R(\dot{\gamma}(c + \lambda t), Y(c + \lambda t))\dot{\gamma}(c + \lambda t). \end{aligned}$$

Quindi l'equazione dei campi di Jacobi per \tilde{Y} non è altro che quella per Y moltiplicata per λ^2 e valutata in $c + \lambda t$.

□

La proposizione seguente mostra come i campi di Jacobi siano i generatori infinitesimali di variazioni composte da curve geodetiche.

PROPOSIZIONE 6.4.9. *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodetica in una varietà riemanniana (M, g) . Se $H : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ è una variazione geodetica di γ (cioè γ_s è una geodetica per ogni s), allora il campo vettoriale Y lungo γ associato a H è un campo di Jacobi.*

Viceversa, se Y è un campo di Jacobi lungo γ , allora esiste una variazione geodetica H di γ associata a Y .

DIMOSTRAZIONE. Sia $H : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ una variazione geodetica di γ e Y il suo generatore infinitesimale, allora

$$Y'' = \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \Big|_{s=0} = \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \Big|_{s=0} + R\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \Big|_{s=0}.$$

Poiché la variazione è geodetica, $\frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} = 0$ in ogni punto $(t, s) \in [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, di conseguenza, rimane solamente il termine di curvatura,

$$Y'' = R\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \Big|_{s=0} = R(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = -R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma},$$

dunque Y è un campo di Jacobi.

Viceversa, consideriamo un campo di Jacobi Y e costruiamo una variazione geodetica H ad esso associata. Sia $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ la geodetica con $\sigma(0) = \gamma(a)$, $\dot{\sigma}(0) = Y(a)$ e siano inoltre X_0, X_1 i due campi paralleli lungo σ con $X_0(0) = \dot{\gamma}(a)$ e $X_1(0) = Y'(a)$. Poniamo $X(s) = X_0(s) + sX_1(s) \in T_{\sigma(s)}M$ e consideriamo la variazione

$$H(t, s) = \exp_{\sigma(s)}((t-a)X(s)).$$

Chiaramente si tratta di una variazione geodetica con γ_s la geodetica uscente da $\sigma(s)$ con velocità iniziale $X(s)$, dunque il campo \tilde{Y} associato a H è necessariamente un campo di Jacobi. Per dimostrare che \tilde{Y} coincide con Y , è pertanto sufficiente verificare che si abbia $\tilde{Y}(a) = Y(a)$ e $\tilde{Y}'(a) = Y'(a)$,

$$\begin{aligned} \tilde{Y}(a) &= \frac{\bar{\partial}}{\partial s}(a, 0) = \frac{\partial H}{\partial s}(a, s) \Big|_{s=0} = \dot{\sigma}(0) = Y(a), \\ \tilde{Y}'(a) &= \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}(a, 0) = \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}(a, 0) = \frac{D}{ds} X(s) \Big|_{s=0} \\ &= \left(\underbrace{\frac{D}{ds} X_0(s)}_0 + X_1(s) + s \underbrace{\frac{D}{ds} X_1(s)}_0 \right) \Big|_{t=0} = X_1(0) = Y'(a). \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 6.4.10. Il calcolo in questa proposizione mostra che (come nel caso classico) l'equazione dei campi di Jacobi si ottiene per variazione dell'equazione delle geodetiche. Infatti, derivando (in modo covariante) in $s = 0$ l'equazione $\nabla_{\dot{\gamma}_s} \dot{\gamma}_s = 0$ si ha l'equazione di Jacobi $Y'' + R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} = 0$, con $Y = \frac{\partial \gamma_s}{\partial s} \Big|_{s=0}$. Osserviamo inoltre che tale equazione è l'equazione di Eulero-Lagrange della

forma quadratica associata alla forma indice sui campi nulli agli estremi di una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, infatti se $Y_s = Y + sX$, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} I(Y_s, Y_s) \Big|_{s=0} &= \frac{d}{ds} \int_a^b (g(Y' + sX', Y' + sX') - R(\dot{\gamma}, Y + sX, \dot{\gamma}, Y + sX)) dt \Big|_{s=0} \\ &= 2 \int_a^b (g(Y', X') - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, X)) dt \\ &= -2 \int_a^b g(Y'' + R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma}, X) dt \end{aligned}$$

da cui segue la conclusione, per l'arbitrarietà di X .

Si noti che, nel caso in cui $Y(a) = 0$ nella Proposizione 6.4.9, la curva σ è la geodetica costante in p e $X(s)$ è il segmento $X(s) = \dot{\gamma}(a) + sY'(a)$ in T_pM , dunque $H(a, s) = p$, per ogni $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (il primo estremo delle variazioni è fissato). Vediamo come questo ci permetta di calcolare il differenziale della mappa esponenziale \exp_p nei vettori diversi dall'origine O_p di T_pM , in termini dei campi di Jacobi.

COROLLARIO 6.4.11. *Sia p un punto di una varietà riemanniana completa (M, g) e siano $v, w \in T_pM$. Sia $t \mapsto \gamma(t) = \exp_p(tv)$, per $t \in \mathbb{R}$, la geodetica uscente da p con velocità iniziale v e Y un campo di Jacobi lungo γ con $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = w$. Allora, identificando gli spazi tangenti $T_{\gamma(t)}T_pM \simeq T_pM$, si ha*

$$Y(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw).$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la variazione geodetica

$$H(t, s) = \exp_p(t(v + sw))$$

di γ , infatti γ_s è la geodetica uscente da p con velocità iniziale $v + sw$. Per la Proposizione 6.4.9, il campo lungo γ

$$\tilde{Y}(t) = \frac{\partial}{\partial s}(t, 0) = \frac{\partial H}{\partial s}(t, s) \Big|_{s=0} = (d\exp_p)_{tv}(tw)$$

è un campo di Jacobi, nullo in $t = 0$. Per avere la tesi è pertanto sufficiente mostrare che \tilde{Y} coincide con Y , che chiaramente segue da $\tilde{Y}'(0) = w$. Si ha infatti,

$$\tilde{Y}'(0) = \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s}(0, 0) = \frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial t}(0, s) \Big|_{s=0} = \frac{D}{ds}(v + sw) \Big|_{s=0} = w.$$

□

Il comportamento dei campi di Jacobi determina dunque l'invertibilità o meno del differenziale della mappa esponenziale.

PROPOSIZIONE 6.4.12. *Sia p un punto di una varietà riemanniana completa (M, g) e sia $v \in T_p M$. Allora $(d \exp_p)_v$ è singolare se e solo se $q = \exp_p(v)$ è un punto coniugato a p lungo la geodetica $t \mapsto \gamma_v(t) = \exp_p(tv)$. In particolare, se non esistono punti coniugati a p lungo γ_v , per ogni $v \in T_p M$, allora $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ è un diffeomorfismo locale.*

DIMOSTRAZIONE. Si tratta di un'immediata conseguenza del Corollario 6.4.11, infatti $q = \exp_p(v)$ è coniugato a p se e solo se esiste un campo di Jacobi (non costantemente nullo) Y lungo $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ che si annulla agli estremi di $[0, 1]$, dunque

$$0 = Y(1) = (d \exp_p)_v(w)$$

con $Y(0) = 0$ e $w = Y'(0)$. □

OSSERVAZIONE 6.4.13. Le tre seguenti condizioni sono dunque equivalenti per una geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ da $p = \gamma(a)$ a $q = \gamma(b)$:

- il punto q è coniugato a p lungo γ ,
- la forma indice associata a γ è degenera,
- se $q = \exp_p(v)$ allora il differenziale della mappa esponenziale $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ è singolare in $v \in T_p M$.

COROLLARIO 6.4.14. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa con curvatura sezionale minore o uguale a zero. Allora non vi sono punti coniugati e per ogni $p \in M$, la mappa esponenziale $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ è un diffeomorfismo locale.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che vi siano due punti p e q coniugati lungo una geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ da p a q , allora esiste un campo di Jacobi non banale Y lungo γ che si annulla agli estremi (ricordiamo che segue che Y deve essere ortogonale a γ). Si ha dunque

$$0 = I(Y, Y) = \int_a^b (|Y'|^2 - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)) dt \geq \int_a^b |Y'|^2 dt,$$

poiché (essendo Y e $\dot{\gamma}$ ortogonali)

$$R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y) = \text{Sec}(\langle \dot{\gamma}, Y \rangle) |\dot{\gamma}|^2 |Y|^2 \leq 0.$$

Segue che $Y'(t) = 0$ per ogni $t \in [a, b]$, da cui la contraddizione $Y(t) = 0$ per ogni $t \in [a, b]$. □

OSSERVAZIONE 6.4.15. Vediamo una dimostrazione alternativa. Sia Y un campo di Jacobi lungo $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ e definiamo $f(t) = g(Y(t), Y(t))$,

allora si ha $f'(t) = 2g(Y(t), Y'(t))$ e

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2g(Y'(t), Y'(t)) + 2g(Y(t), Y''(t)) \\ &= 2|Y'(t)|^2 - 2g(Y(t), R(\dot{\gamma}(t), Y(t))\dot{\gamma}(t)) \\ &= 2|Y'(t)|^2 - 2R(\dot{\gamma}(t), Y(t), \dot{\gamma}(t), Y(t)) \\ &= 2|Y'(t)|^2 - 2\text{Sec}(\langle \dot{\gamma}(t), Y(t) \rangle)|Y(t)|^2 \\ &\geq 2|Y'(t)|^2. \end{aligned}$$

Quindi la funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa e soddisfa con $f(a) = f'(a) = 0$, segue che se $f(b) = 0$, allora f è sempre nulla, quindi anche Y . Non ci sono dunque campi di Jacobi non banali lungo γ che si annullano agli estremi.

ESEMPIO 6.4.16 (Campi di Jacobi in \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n). Consideriamo $p \in M$, $v \in \mathbb{S}_p^{n-1} \subseteq T_pM$ e la geodetica di velocità unitaria $t \mapsto \gamma(t) = \exp_p(tv)$. Allora per ogni vettore $w \in T_pM$ ortogonale a v , se W è l'estensione parallela di w lungo γ , abbiamo che il campo di Jacobi normale Y lungo γ tale che $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = w$ è dato da

- $Y(t) = tW(t)$ se M è \mathbb{R}^n
- $Y(t) = \sin t W(t)$ se M è \mathbb{S}^n ,
- $Y(t) = \sinh t W(t)$ se M è \mathbb{H}^n ,

con le loro metriche canoniche.

Infatti, nei tre casi si ha $Y(0) = 0$, $Y'(0) = W(0) = w$ e rispettivamente, $Y'' = 0$, $Y'' = -Y$ e $Y'' = Y$, dunque valendo $R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} = KY$, con K rispettivamente uguale a 0, 1 e -1 , si ha che Y è un campo di Jacobi.

Si noti inoltre che in \mathbb{R}^n , per qualunque due campi paralleli X e W lungo γ , il campo $Y = X + tW$ è un campo di Jacobi con $Y(0) = X(0)$ e $Y'(0) = W(0)$.

Poiché sappiamo esprimere il differenziale della mappa esponenziale in ogni punto di T_pM per mezzo dei campi di Jacobi, possiamo estendere a tutto T_pM il lemma di Gauss [4.2.13](#).

LEMMA 6.4.17 (Lemma di Gauss "esteso"). Sia $p \in M$, per ogni $v, w \in T_pM$, si ha

$$g_{\exp_p(v)}((d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w)) = g_p(v, w).$$

In particolare, per ogni $r \in \mathbb{R}^+$ e $v \in \mathbb{S}_p^{n-1}$, la geodetica $t \mapsto \gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ è normale in $\gamma_v(r)$, se tale punto non è coniugato a p lungo γ_v , alla sfera geodetica $S_r(p) = \exp_p(r\mathbb{S}_p^{n-1})$, di raggio r e centro p (che nell'intorno del punto $\gamma_v(r)$ è un'ipersuperficie regolare).

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che

$$(d \exp)_v(v) = Y(1) \quad \text{e} \quad (d \exp)_v(w) = W(1)$$

dove Y e W sono due campi di Jacobi lungo la geodetica $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ (non necessariamente minimale), con $Y(0) = 0$, $Y'(0) = v$, $W(0) = 0$, $W'(0) = w$. Per la Proposizione 6.4.8, abbiamo $Y(t) = t\dot{\gamma}(t)$ e se $w = \tilde{w} + \beta v$, si ha $W(t) = \tilde{W}(t) + t\beta\dot{\gamma}(t)$, dove \tilde{W} è un campo di Jacobi ortogonale a γ . Abbiamo allora

$$g_{\gamma(1)}(Y(1), W(1)) = g_{\gamma(1)}(\dot{\gamma}(1), \tilde{W}(1) + \beta\dot{\gamma}(1)) = \beta|\dot{\gamma}(1)|_{\gamma(1)}^2 = \beta|v|_p^2 = g_p(v, w),$$

da cui la tesi. \square

I campi di Jacobi possono essere utilizzati per calcolare la curvatura di una varietà. Infatti, se conosciamo le geodetiche, possiamo costruire variazioni geodetiche che hanno come generatori infinitesimali campi di Jacobi e dall'equazione di questi ultimi ottenere la curvatura, come nei seguenti esempi.

ESEMPIO 6.4.18 (Curvatura delle superfici). Data un punto p di una superficie (M, g) e due vettori ortonormali $v, w \in T_pM$, per il Corollario 4.2.14 al lemma di Gauss, in coordinate polari, la palla $(B_{\text{inj}(p)}(p) \setminus \{p\}, g)$ è isometrica al prodotto $(0, \text{inj}(p)) \times \mathbb{S}^1$ con la metrica

$$\exp_p^* g = dr^2 + f^2(r, \theta)d\theta^2,$$

per una funzione positiva f che soddisfa $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(r, \theta) = 0$ e $\lim_{r \rightarrow 0^+} f'(r, \theta) = 1$, per l'Esercizio 4.2.15.

Se γ è la geodetica uscente da p con velocità v e denotiamo con W il trasporto parallelo di w lungo γ , si deve avere $\frac{\partial}{\partial \theta} = rw$ e

$$(d \exp_p)_{rv} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right) = \dot{\gamma}(r) \quad \text{e} \quad (d \exp_p)_{rv} (rw) = (d \exp_p)_{rv} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) = f(r, \theta)W(r)$$

In quanto il vettore $(d \exp_p)_{rv} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)$ deve essere proporzionale a $W(r)$, essendo ortogonale a $\dot{\gamma}(r)$ e

$$\left| (d \exp_p)_{rv} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right|^2 = (\exp_p^* g) \left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = f^2(r, \theta).$$

Dunque, $Y(r) = f(r, \theta)W(r)$ è il campo di Jacobi lungo γ con $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = w$, che deve allora soddisfare $Y''(r) + R(\dot{\gamma}(r), Y(r))\dot{\gamma}(r) = 0$. Segue che

$$\begin{aligned} 0 &= g(Y''(r), W(r)) + g(R(\dot{\gamma}(r), Y(r))\dot{\gamma}(r), W(r)) \\ &= \partial_{rr}^2 f(r, \theta) + R(\dot{\gamma}(r), W(r), \dot{\gamma}(r), W(r))f(r, \theta) \\ &= \partial_{rr}^2 f(r, \theta) + \text{Sec}(\langle \dot{\gamma}(r), W(r) \rangle)f(r, \theta), \end{aligned}$$

cioè la curvatura sezionale di (M, g) in $\gamma(r)$ è data da $-\partial_{rr}^2 f(r, \theta)/f(r, \theta)$.

ESEMPIO 6.4.19 (Spazi proiettivi complessi). Calcoliamo la curvatura dello spazio proiettivo complesso n -dimensionale $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ con la metrica di Fubini–Study, visto negli Esempi 2.3.17 e 4.4.1. Con le stesse notazioni, usiamo la descrizione di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ come il quoziente $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$, con sommersione (fibrante) associata $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Abbiamo visto nell'Esempio 4.4.1 che una geodetica γ di velocità unitaria in $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ con $\gamma(0) = x = \pi(z)$ e $\dot{\gamma}(0) = v \in T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è data dalla proiezione della geodetica orizzontale $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = z \cos t + \tilde{v} \sin t$, con $\tilde{v} \in H_z$ (lo spazio orizzontale in $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$) tale che $d\pi_z(\tilde{v}) = v$. Sia $w \in v^\perp \subseteq T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, anch'esso di norma unitaria e sia $\tilde{w} \in H_z$ tale che $d\pi_z(\tilde{w}) = w$. Essendo

$$H_z = \{y \in \mathbb{R}^{2n+2} : \langle y, z \rangle = \langle y, iz \rangle = 0\}, \quad (6.16)$$

la variazione della geodetica $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = z \cos t + \tilde{v} \sin t$ data da

$$\tilde{H}(t, s) = z \cos t + (\tilde{v} \cos s + \tilde{w} \sin s) \sin t$$

consiste di geodetiche "orizzontali" di \mathbb{S}^{2n+1} , dunque la sua proiezione $H = \pi \circ \tilde{H}$ è una variazione geodetica di γ . Il campo di Jacobi associato a \tilde{H} è $t \mapsto \tilde{w} \sin t$, quindi quello associato a H è dato da $Y(t) = d\pi_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{w}) \sin t = W(t) \sin t$, dove abbiamo posto $W(t) = d\pi_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{w})$. Consideriamo la moltiplicazione per i in H_z (che è un isomorfismo di H_z in sé, per la formula (6.16)), allora l'isometria $d\pi$ tra H_z e $T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ induce un isomorfismo J_x in $T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, per ogni $x \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ (si mostri per esercizio che J_x non dipende da z nella fibra su x e che la 2-forma definita da $\omega_x(v, w) = g_x(J_x v, w)$ è parallela, usando la Proposizione 3.4.4). Vediamo preliminarmente due casi:

- \tilde{w} è ortogonale a $i\tilde{v}$. Dunque w è ortogonale a $J_x v$ e \tilde{w} è ortogonale a $\dot{\tilde{\gamma}}(t)$ e $i\dot{\tilde{\gamma}}(t)$, per ogni t , il che implica che $\tilde{w} \in H_{\tilde{\gamma}(t)}$ e poiché è parallelo, si ha che anche W è parallelo lungo γ . Segue allora che $Y''(t) = -W(t) \sin t$ e, usando l'equazione dei campi di Jacobi (6.14), abbiamo $R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} = Y$, dunque

$$R(v, w)v = w,$$

- \tilde{w} è uguale a $i\tilde{v}$. Che è come dire $w = J_x v$. Il campo \tilde{w} non è orizzontale, la sua componente orizzontale in $\tilde{\gamma}(t)$ è data da

$$i\tilde{v} - \langle i\tilde{v}, i\tilde{\gamma}(t) \rangle i\tilde{\gamma}(t) = (i\tilde{v} \cos t - iz \sin t) \cos t = i\dot{\tilde{\gamma}}(t) \cos t$$

dunque $Y(t) = J_{\tilde{\gamma}(t)}\dot{\tilde{\gamma}}(t) \cos t \sin t$.

Essendo J parallelo (segue da quanto detto sopra), si ha $\nabla_{\dot{\gamma}}(J\dot{\gamma}) = 0$. Un altro modo di vedere questo è notare che, per la Proposizione 3.4.4, si ha

$$(\nabla_{\dot{\gamma}}(J\dot{\gamma}))_{\tilde{\gamma}(t)} = d\pi_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{\nabla}_{\dot{\tilde{\gamma}}(t)} i\dot{\tilde{\gamma}}(t))$$

e

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\tilde{\gamma}}(t)} i\dot{\tilde{\gamma}}(t) = -iz \cos t - i\tilde{v} \sin t = -i\tilde{\gamma}(t),$$

che è un campo verticale. Dunque $Y''(t) = J_{\tilde{\gamma}(t)}\dot{\tilde{\gamma}}(t)(\cos t \sin t)'' = -4Y(t)$, da cui segue $R(\dot{\gamma}, J\dot{\gamma})\dot{\gamma} = 4J\dot{\gamma}$, dunque

$$R(v, Jv)v = 4Jv.$$

Nel caso generale, ogni vettore $w \in T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ di norma unitaria può esser scritto come

$$w = w_0 \cos \alpha + Jv \sin \alpha$$

con w_0 ortogonale a Jv , si ha allora

$$\begin{aligned} R(v, w)v &= R(v, w_0 \cos \alpha + Jv \sin \alpha)v \\ &= R(v, w_0)v \cos \alpha + R(v, Jv)v \sin \alpha \\ &= w_0 \cos \alpha + 4Jv \sin \alpha \end{aligned}$$

e la curvatura sezionale del piano generato da v e w è data da

$$\text{Sec}_x(\langle v, w \rangle) = g(w_0 \cos \alpha + 4Jv \sin \alpha, w_0 \cos \alpha + Jv \sin \alpha) = 1 + 3 \sin^2 \alpha. \quad (6.17)$$

Concludiamo allora che la curvatura sezionale dei piani in $T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è positiva e varia tra 1 (per $\text{Sec}_x(\langle v, w_0 \rangle)$) e 4 (per $\text{Sec}_x(\langle v, Jv \rangle)$). Per l'azione transitiva di $U(n+1) \subseteq SO(2n+2)$, il gruppo delle isometrie di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ agisce transitivamente sul fibrato tangente unitario, quindi il tensore di curvatura è completamente determinato. Considerando la forma ω menzionata sopra, definita da $\omega(v, w) = g(Jv, w)$, si ha (lo si provi per esercizio)

$$\begin{aligned} R(v, w, u, z) &= g(v, u)g(w, z) - g(v, z)g(w, u) + \omega(v, u)\omega(w, z) - \omega(v, z)\omega(w, u) \\ &\quad + 2\omega(v, w)\omega(u, z) \\ &= g(v, u)g(w, z) - g(v, z)g(w, u) + 2g(Jv, w)g(Ju, z) \\ &\quad + g(Jv, u)g(Jw, z) - g(Jv, z)g(Jw, u) \end{aligned} \quad (6.18)$$

per ogni quaterna di vettori $v, w, u, z \in T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Segue che se $n \geq 2$, scegliendo due vettori unitari $u, v \in T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, tali che u, v, Ju, Jv siano mutualmente ortogonali (si mostri che si può trovare una base ortonormale di $T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ del tipo $\{e_1, Je_1, \dots, e_n, Je_n\}$), si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(v \wedge w - Jv \wedge Jw, v \wedge w - Jv \wedge Jw) &= R(v, w, v, w) + R(Jv, Jw, Jv, Jw) \\ &\quad - 2R(v, w, Jv, Jw) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dunque, malgrado tutte le curvatures sezionali positive, l'operatore di curvatura \mathcal{R} di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, per $n \geq 2$, ha un autovalore nullo, cioè la forma \mathcal{R} è soltanto *semidefinita* positiva (segue dalla formula (6.18), si veda [39, Sezioni 5.1–5.2] per maggiori dettagli), come anticipato nell'Esempio 5.8.12.

ESERCIZIO 6.4.20. Si calcoli la curvatura di \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n come fatto per $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, usando i campi di Jacobi dell'Esempio 6.4.16.

ESERCIZIO 6.4.21. Si mostri che l'operatore di curvatura di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ non è semplice (si veda dopo la Definizione 5.3.11).

OSSERVAZIONE 6.4.22. La formula (6.17) che ci dà la curvatura di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è un caso particolare della seguente *formula di O'Neill* (lo si mostri per esercizio).

PROPOSIZIONE 6.4.23. *Data una sommersione riemanniana $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \rightarrow (M, g)$, siano $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \Gamma(T\widetilde{M})$ i sollevamenti orizzontali di due campi vettoriali ortonormali $X, Y \in \Gamma(TM)$, allora*

$$\text{Sec}(\langle X, Y \rangle) = \text{Sec}(\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y} \rangle) + \frac{3}{4} |[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V|^2,$$

dove abbiamo indicato con $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V$ la componente verticale di $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$.

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 3.4.3, se \widetilde{W} è un campo verticale, si ha

$$\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{W}} \widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{W}, \widetilde{Y}) + \widetilde{g}([\widetilde{W}, \widetilde{X}], \widetilde{Y}) = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{W}, \widetilde{Y}),$$

e per la Proposizione 3.4.4,

$$\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{W}, \widetilde{Y}) = -\widetilde{g}(\widetilde{W}, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}) = -\frac{1}{2} \widetilde{g}([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V, \widetilde{W}),$$

dunque

$$\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{W}} \widetilde{X}, \widetilde{Y}) = -\frac{1}{2} \widetilde{g}([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V, \widetilde{W}).$$

La tesi segue allora per calcolo diretto, usando la Proposizione 3.4.4 e questa uguaglianza. \square

Questa formula dice “euristicamente” che la base di una sommersione ha “più curvatura” dello spazio totale.

Per mezzo dei campi di Jacobi possiamo dare una dimostrazione della formula per l’espansione di Taylor della metrica al second’ordine, in coordinate normali centrate in $p \in M$, menzionata nell’Osservazione 5.1.9. Il fatto rilevante è che in coordinate normali i campi $t \frac{\partial}{\partial x^i}$ sono campi di Jacobi lungo ogni geodetica $t \mapsto \gamma(t) = \exp_p(tv)$ uscente da p , infatti sono generatori infinitesimali della variazione geodetica $H(t, s) = \exp_p(t(v + se_i))$ di γ ,

$$\frac{\partial H}{\partial s}(t, s) \Big|_{s=0} = \frac{\partial \exp_p(t(v + se_i))}{\partial s} \Big|_{s=0} = (d \exp_p)_{tv}(te_i) = t \frac{\partial}{\partial x^i},$$

dove $\{e_i\}$ è la base ortonormale di $T_p M$ a cui sono associate le coordinate normali.

PROPOSIZIONE 6.4.24. *In coordinate normali centrate in $p \in M$, si ha*

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}(p) = -\frac{1}{3} (R_{ikjl}(p) + R_{iljk}(p)),$$

nel punto p , dunque

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{6} (R_{ikjl}(p) + R_{iljk}(p)) x^k x^l + o(|x|^2) = \delta_{ij} + \frac{1}{3} R_{kijl}(p) x^k x^l + o(|x|^2).$$

DIMOSTRAZIONE. Per quanto detto sopra, in coordinate normali centrate in $p \in M$, considerato $w \in \mathbb{R}^n$, i campi $Y(t) = tw^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ lungo la geodetica di velocità unitaria $\exp_p(tv)$ con $v \in \mathbb{S}_p^{n-1} \subseteq T_pM$, sono campi di Jacobi con $Y'(0) = w$. Sia $f(t) = g(Y(t), Y(t))$, allora

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2g(Y', Y), \\ f''(t) &= 2g(Y', Y') + 2g(Y'', Y) = 2g(Y', Y') - 2R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y), \\ f'''(t) &= 4g(Y'', Y') - 4R(\dot{\gamma}, Y', \dot{\gamma}, Y) - 2\nabla_{\dot{\gamma}}R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y) \\ &= -8R(\dot{\gamma}, Y', \dot{\gamma}, Y) - 2\nabla_{\dot{\gamma}}R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y), \\ f''''(t) &= -8R(\dot{\gamma}, Y'', \dot{\gamma}, Y) - 8R(\dot{\gamma}, Y', \dot{\gamma}, Y') \\ &\quad - 2\nabla_{\dot{\gamma}, \dot{\gamma}}^2 R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y) - 4\nabla_{\dot{\gamma}}R(\dot{\gamma}, Y', \dot{\gamma}, Y) \\ &= 8R(R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma}, \dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}) - 8R(\dot{\gamma}, Y', \dot{\gamma}, Y') \\ &\quad - 2\nabla_{\dot{\gamma}, \dot{\gamma}}^2 R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y) - 4\nabla_{\dot{\gamma}}R(\dot{\gamma}, Y', \dot{\gamma}, Y), \end{aligned}$$

da cui (essendo $Y(0) = 0$)

$$\begin{aligned} f(0) &= f'(0) = f'''(0) = 0, \\ f''(0) &= 2g_p(Y'(0), Y'(0)) = 2|w|_p^2 = 2g_{ij}(p)w^i w^j \end{aligned}$$

e

$$f''''(0) = -8R_p(Y'(0), \dot{\gamma}(0), Y'(0), \dot{\gamma}(0)) = -8R_p(w, v, w, v) = -8R_{ikjl}(p)v^k v^l w^i w^j.$$

Dunque, per la formula di Taylor, si ha

$$\begin{aligned} f(t) &= g_{ij}(\gamma(t))w^i w^j t^2 \\ &= g_{ij}(p)w^i w^j t^2 - \frac{8}{4!}R_{ikjl}(p)v^k v^l w^i w^j t^4 + o(t^4) \\ &= g_{ij}(p)w^i w^j t^2 - \frac{1}{3}R_{ikjl}(p)v^k v^l w^i w^j t^4 + o(t^4), \end{aligned}$$

per ogni $w \in \mathbb{R}^n$, cioè

$$g_{ij}(\gamma(t)) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{ikjl}(p)v^k v^l t^2 + o(t^2),$$

che in coordinate normali $x = tv$, si scrive allora

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{ikjl}(p)x^k x^l + o(|x|^2),$$

in quanto $x = g_p(tv, e_i) = tv^i$ e $|x|^2 = |tv|_p^2 = t^2$, essendo $|v|_p = 1$. Le formule dell'enunciato dunque seguono per l'unicità dei coefficienti dello sviluppo di Taylor della metrica g_{ij} . \square

OSSERVAZIONE 6.4.25. Si noti che allora in coordinate normali

$$\Delta g_{ij}(p) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^k}(p) = -\frac{1}{3}(R_{ikjk}(p) + R_{ikjk}(p)) = -\frac{2}{3}R_{ij}(p).$$

Vediamo infine l'utilizzo dei campi di Jacobi nel calcolo dei volumi. In coordinate polari $\varphi = (r, \theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ rispetto a un punto $p \in M$ su $B_{\text{inj}(p)}(p)$, scelte in modo tale che le coordinate $(\theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ "coprano" $\mathbb{S}_p^{n-1} \setminus \{w\}$, cioè $\theta(q) = \sigma(\pi^{\mathbb{S}_p^{n-1}}(\Psi^{-1}(q)))$, con $\Psi(r, v) = \exp_p(r, v)$ e $\sigma : \mathbb{S}_p^{n-1} \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ un diffeomorfismo, per ogni insieme $A \subseteq M$ misurabile contenuto in $B_{\text{inj}(p)}(p)$, si ha

$$\text{Vol}(A) = \mu_g(A) = \mu_g(A \setminus \{\exp_p(tw) : t \in [0, \bar{\rho}_p(w)]\})$$

in quanto la geodetica $t \mapsto \exp_p(tw)$ (come ogni curva lipschitziana in M) ha chiaramente misura μ_g nulla. Dunque, per il teorema di Fubini,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(A) &= \int_{\varphi(A \setminus \{\exp_p(tw) : t \in [0, \bar{\rho}_p(w)]\})} \sqrt{\det g_{ij}} d\mathcal{L}^n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\text{inj}(p)} \chi_{\varphi(A)}(r, \theta) \sqrt{\det g_{ij}(r, \theta)} dr d\theta \\ &= \int_0^{\text{inj}(p)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_{\varphi(A)}(r, \theta) \sqrt{\det g_{ij}(r, \theta)} d\theta dr \\ &= \int_0^{\text{inj}(p)} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sqrt{\det g\left((d \exp_p)_{rv}(\theta) \left(r \frac{\partial}{\partial \sigma^i}\right), (d \exp_p)_{rv}(\theta) \left(r \frac{\partial}{\partial \sigma^j}\right)\right)} d\theta dr \\ &= \int_0^{\text{inj}(p)} \int_{\mathbb{S}_p^{n-1}} \frac{r^{n-1} \sqrt{\det g\left((d \exp_p)_{rv}(\frac{\partial}{\partial \sigma^i}), (d \exp_p)_{rv}(\frac{\partial}{\partial \sigma^j})\right)}}{\sqrt{\det g_p(\frac{\partial}{\partial \sigma^i}, \frac{\partial}{\partial \sigma^j})}} d\mu^{\mathbb{S}_p^{n-1}}(v) dr \\ &= \int_{\mathbb{S}_p^{n-1}} \int_0^{\text{inj}(p)} \frac{\sqrt{\det g\left((d \exp_p)_{rv}(e_i), (d \exp_p)_{rv}(e_j)\right)}}{\sqrt{\det g_p(e_i, e_j)}} r^{n-1} dr d\mu^{\mathbb{S}_p^{n-1}}(v) \end{aligned} \tag{6.19}$$

dove $\mu^{\mathbb{S}_p^{n-1}}$ è la misura canonica di \mathbb{S}_p^{n-1} con la metrica g_p e e_i è una qualunque base di $T_{rv} r\mathbb{S}_p^{n-1} = T_v \mathbb{S}_p^{n-1} = \{z \in T_p M ; g_p(v, z) = 0\}$.

Considerando dunque dei campi di Jacobi normali Y_i lungo la geodetica di velocità unitaria $t \mapsto \gamma(t) = \exp_p(tv)$, tali che $Y_i(0) = 0$ e $Y_i'(0) = e_i$, con v, e_1, \dots, e_{n-1} una base ortonormale di $T_p M$, abbiamo

$$Y_i(r) = (d \exp_p)_{rv}(r e_i),$$

da cui segue

$$\frac{\sqrt{\det g\left((d \exp_p)_{rv}(e_i), (d \exp_p)_{rv}(e_j)\right)}}{\sqrt{\det g_p(e_i, e_j)}} r^{n-1} = \sqrt{\det g(Y_i, Y_j)},$$

concludiamo quindi che si ha

$$\text{Vol}(A) = \int_{\mathbb{S}_p^{n-1}} \int_0^{\text{inj}(p)} \chi_A(\exp_p(rv)) \sqrt{\det g(Y_i, Y_j)} dr d\mu^{\mathbb{S}_p^{n-1}}(v) \quad (6.20)$$

per ogni $p \in M$ e $A \subseteq B_{\text{inj}(p)}(p)$ misurabile.

In particolare, se $A = B_R(p)$ è una palla di centro p e raggio $R \leq \text{inj}(p)$,

$$\text{Vol}(B_R(p)) = \int_{\mathbb{S}_p^{n-1}} \int_0^R \sqrt{\det g(Y_i, Y_j)} dr d\mu^{\mathbb{S}_p^{n-1}}(v). \quad (6.21)$$

ESEMPIO 6.4.26. Calcoliamo il volume delle palle di \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n con la loro metrica canonica.

Fissati $p, v \in \mathbb{S}_p^{n-1}$, se $E_i(t)$ sono le estensioni parallele dei vettori $e_i \in T_p M$ tali che v, e_1, \dots, e_{n-1} sia una base ortonormale di $T_p M$, lungo la geodetica di velocità unitaria $t \mapsto \gamma(t) = \exp_p(tv)$, abbiamo che i campi di Jacobi normali Y_i con $Y_i(0) = 0$ e $Y_i'(0) = e_i$, sono dati da

- $Y_i(t) = tE_i(t)$ per \mathbb{R}^n ,
- $Y_i(t) = \sin tE_i(t)$ per \mathbb{S}^n ,
- $Y_i(t) = \sinh tE_i(t)$ per \mathbb{H}^n

(Esempio 6.4.16), dunque $\sqrt{\det g(Y_i, Y_j)}$ è rispettivamente uguale, nei tre casi, a r^{n-1} , $\sin^{n-1}r$ e $\sinh^{n-1}r$. Segue allora dalla formula sopra

$$\begin{aligned} \text{Vol}^{\mathbb{R}^n}(B_R) &= \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^R r^{n-1} dr = \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) R^n / n \\ \text{Vol}^{\mathbb{S}^n}(B_R) &= \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^{\min\{R, \pi\}} \sin^{n-1}r dr, \\ \text{Vol}^{\mathbb{H}^n}(B_R) &= \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^R \sinh^{n-1}r dr. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Osserviamo che avendo \mathbb{S}^n diametro uguale a π , si ha

$$\text{Vol}(\mathbb{S}^n) = \text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1}) \int_0^\pi \sin^{n-1}r dr,$$

da cui seguono le formule

$$\text{Vol}(\mathbb{S}^{2n}) = \frac{4^n \pi^n (n-1)!}{(2n-1)!} \quad \text{e} \quad \text{Vol}(\mathbb{S}^{2n+1}) = \frac{2\pi^{n+1}}{n!}.$$

Notiamo inoltre che si ottiene facilmente l'esistenza di una costante $c_n > 0$ tale che

$$\text{Vol}^{\mathbb{H}^n}(B_R) \sim c_n e^{(n-1)R}$$

per $R \rightarrow +\infty$ (si mostrino queste ultime formule per esercizio).

ESERCIZIO 6.4.27. Si calcoli il volume dello spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ con la metrica di Fubini–Study definita nell’Esempio 2.3.17, usando la descrizione delle sue geodetiche e degli associati campi di Jacobi negli Esempi 4.4.1 e 6.4.19.

Ritornando all’espressione (6.21) e espandendo con la formula di Taylor i campi di Jacobi Y_i , che soddisfano $Y_i(0) = 0$, $Y_i'(0) = e_i$ e $Y_i'' = -R(\dot{\gamma}, Y_i)\dot{\gamma}$, si ha

$$Y_i(t) = tY_i'(0) + t^3Y_i'''(0)/6 + o(t^3) = tE_i - \frac{t^3R(\dot{\gamma}, E_i)\dot{\gamma}}{6} + o(t^3),$$

da cui otteniamo

$$\begin{aligned} g_{\gamma(t)}(Y_i(t), Y_j(t)) &= g_{\gamma(t)}(tE_i - t^3R(\dot{\gamma}, E_i)\dot{\gamma}/6 + o(t^3), tE_j - t^3R(\dot{\gamma}, E_j)\dot{\gamma}/6 + o(t^3)) \\ &= t^2\delta_{ij} - t^4R(\dot{\gamma}, E_i, \dot{\gamma}, E_j)/3 + o(t^4). \end{aligned}$$

Dunque,

$$\begin{aligned} \sqrt{\det g(Y_i, Y_j)} &= t^{n-1}\sqrt{\det(\delta_{ij} - t^2R(\dot{\gamma}, E_i, \dot{\gamma}, E_i)/3 + o(t^2))} \\ &= t^{n-1}\sqrt{\det \delta_{ij}(1 - t^2R(\dot{\gamma}, \bar{E}_i, \dot{\gamma}, \bar{E}_i)/3 + o(t^2))} \\ &= t^{n-1}\sqrt{1 - t^2R(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})/3 + o(t^2)} \\ &= t^{n-1}(1 - t^2R(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})/6) + o(t^{n+1}) \\ &= t^{n-1}(1 - t^2R_p(v, v)/6) + o(t^{n+1}) \end{aligned} \quad (6.23)$$

dove \bar{E}_i è una base ortonormale di $\langle \dot{\gamma}(t) \rangle^\perp \subseteq T_{\gamma(t)}M$ che diagonalizza la forma bilineare $(X, Z) \mapsto R(\dot{\gamma}, X, \dot{\gamma}, Z)$. Abbiamo allora,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B_R(p)) &= \int_{\mathbb{S}_p^{n-1}} \int_0^R [r^{n-1} - r^{n+1}R_p(v, v)/6 + o(r^{n+1})] dr d\mu^{\mathbb{S}_p^{n-1}}(v) \\ &= \text{Vol}^{\mathbb{R}^n}(B_R) - \frac{R^{n+2}}{6(n+2)} \int_{\mathbb{S}_p^{n-1}} R_p(v, v) d\mu^{\mathbb{S}_p^{n-1}}(v) + o(R^{n+2}) \\ &= \text{Vol}^{\mathbb{R}^n}(B_R) - \frac{R^{n+2}\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{6(n+2)n} R(p) + o(R^{n+2}) \\ &= \text{Vol}^{\mathbb{R}^n}(B_R) \left(1 - \frac{R(p)}{6(n+2)} R^2 + o(R^2) \right), \end{aligned} \quad (6.24)$$

dove abbiamo usato il fatto che per una forma bilineare simmetrica A su \mathbb{R}^n si ha

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} A(v, v) d\mu^{\mathbb{S}^{n-1}}(v) = \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{n-1})}{n} \text{tr } A$$

(lo si mostri per esercizio). Si noti che allora il segno della curvatura scalare in un punto $p \in M$ si può quindi stabilire dal confronto dei volumi di palle piccole

centrate in p con palle di stesso raggio in \mathbb{R}^n . Più precisamente, la formula (6.24) implica

$$R(p) = \lim_{R \rightarrow 0} \left[1 - \frac{\text{Vol}(B_R(p))}{\text{Vol}^{\mathbb{R}^n}(B_R)} \right] \frac{6(n+2)}{R^2}$$

che mostra la dipendenza di R direttamente “puramente” dalla metrica di (M, g) . Viceversa, se $R(p)$ è positiva (rispettivamente, negativa) il volume di $B_R(p)$ è minore (rispettivamente, maggiore) del volume di una palla euclidea dello stesso raggio, per $R > 0$ sufficientemente piccolo.

Gray e Vanhecke [95] hanno congetturato (*congettura del volume*) che se

$$\text{Vol}(B_R(p)) = \text{Vol}^{\mathbb{R}^n}(B_R)$$

per $R > 0$ sufficientemente piccolo e ogni $p \in M$, allora (M, g) è flat (si noti che ciò implica $R = 0$). Si ha al momento solo una dimostrazione in dimensione $n = 2, 3$, oppure sotto varie assunzioni, come Einstein, LCF, $\text{Ric} \geq 0$ o $\text{Ric} \leq 0$ (queste due ultime condizioni implicano ovviamente $\text{Ric} = 0$, essendo $R = 0$) oppure M uno spazio simmetrico (si vedano [95], la Sezione 9.2 di [94] e le referenze ivi citate, per approfondire).

OSSERVAZIONE 6.4.28. L’espansione (6.24) può essere “raffinata” come segue [94, Teorema 9.12],

$$\frac{\text{Vol}(B_R(p))}{\text{Vol}^{\mathbb{R}^n}(B_R)} = 1 - \frac{R(p)}{6(n+2)} R^2 - \frac{3|\text{Riem}_p|^2 - 8|\text{Ric}_p|^2 - 5R^2(p) + \Delta R(p)}{360(n+2)(n+4)} R^4 + o(R^6)$$

(e ulteriormente, con un altro termine ancora, in [95]). Questa formula è lo strumento principale nella dimostrazione della congettura sopracitata in dimensione $n = 3$ [94, Corollario 9.16].

OSSERVAZIONE 6.4.29. La precedente analisi può essere estesa (con gli strumenti che introdurremo nella Sezione 10.2) al calcolo del volume dell’insieme dei punti a distanza minore di $\varepsilon > 0$ da una sottovarietà compatta N di M (in particolare, dei “tubi” di raggio ε attorno a curve chiuse). In tale contesto, è da menzionare la famosa *formula dei tubi di Weyl* [187] che esplicita tale volume quando l’ambiente M è \mathbb{R}^n (o $\mathbb{S}^n, \mathbb{H}^n$), mostrando che è uguale ad un polinomio in ε con coefficienti *intrinseci* (cioè indipendenti dall’immersione) dati da integrali di funzioni polinomiali del tensore di curvatura di N e delle sue derivate covarianti (dunque esprimibili anche in termini della *seconda forma fondamentale* di N e delle sue derivate, come vedremo nel prossimo capitolo). Per esempio, se S è una superficie compatta e orientata, embedded in \mathbb{R}^3 , per $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo si ha

$$\text{Vol}^{\mathbb{R}^3}(S_\varepsilon) = 2\text{Area}(S)\varepsilon + \frac{1}{3} \int_S R d\mu^S \varepsilon^3 = 2\text{Area}(S)\varepsilon + \frac{4\pi}{3} \chi(S) \varepsilon^3$$

dove S_ε sono i punti di \mathbb{R}^3 a distanza minore di $\varepsilon > 0$ da S , $\chi(S)$ è la caratteristica di Eulero–Poincaré di S (si veda l’Osservazione 1.4.24) e abbiamo applicato il

teorema di Gauss–Bonnet 7.5.4 (e l'Osservazione 7.5.5), che vedremo nel prossimo capitolo, nella seconda uguaglianza. Per questi risultati si veda il bellissimo libro di Alfred Gray [94], in particolare, la Sezione 9.3, per il caso di una varietà riemanniana ambiente (M, g) generale. In tale caso l'espansione di Taylor di $\sqrt{\det g(Y_i, Y_j)}$ di cui abbiamo calcolato i primi termini nella formula (6.23), è una serie con coefficienti dati da polinomi nel tensore di curvatura e nelle sue derivate covarianti, per un risultato di Cartan (si veda [28]).

6.5. Minimalità delle geodetiche

Una geodetica su una varietà riemanniana completa non rimane necessariamente minimale per tutti i tempi. Dati $p \in M$ e $v \in T_p M$, definiamo

$$I_v = \{t \in [0, +\infty) : \gamma_v \text{ è minimale su } [0, t]\},$$

dove che γ_v è la geodetica uscente da p con velocità iniziale v . Per le proprietà locali delle geodetiche, I_v è un intorno destro di 0. Inoltre, se $t \notin I_v$, la distanza tra p e $\gamma_v(t)$ è strettamente minore di $\mathcal{L}(\gamma_v|_{[0,t]})$, per continuità della distanza, ciò accade anche per tempi in un intorno di t , di conseguenza l'intervallo I_v è chiuso. Dunque, se una geodetica non rimane minimale per tutti i tempi, allora esiste un ultimo punto fino al quale è minimale.

Come vedremo, ci sono esclusivamente solo due ragioni per cui una geodetica smetta di essere minimale: una legata alla geometria globale della varietà, l'altra di carattere analitico data dalla teoria di Jacobi. Cominciamo a esaminare la prima delle due.

PROPOSIZIONE 6.5.1. *Sia (M, g) una varietà riemanniana e sia $\gamma : [a, b + \varepsilon] \rightarrow M$ una geodetica, con $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$. Supponiamo che esista una geodetica minimale $\bar{\gamma}$ da p a q diversa da γ (anche a meno di riparametrizzazione). Allora γ non può essere minimale su $[a, b + \varepsilon]$, cioè superato il punto q .*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che γ sia minimale. Senza perdita di generalità, assumiamo che $\bar{\gamma}$ sia definita su $[a, b]$, con $\bar{\gamma}(a) = p$ e $\bar{\gamma}(b) = q$. Essendo sia γ che $\bar{\gamma}$ minimali da p a q , devono essere parametrizzate per lo stesso multiplo della lunghezza d'arco. Consideriamo la curva $\sigma : [a, b + \varepsilon] \rightarrow M$ così definita:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \bar{\gamma}(t) & \text{per } t \in [a, b], \\ \gamma(t) & \text{per } t \in [b, b + \varepsilon]. \end{cases}$$

Per costruzione, anche σ è minimale su $[a, b + \varepsilon]$, ed è inoltre parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco, quindi è una geodetica. In particolare, deve essere di classe C^∞ . Tuttavia $\dot{\gamma}(b)$ è diverso da $\dot{\bar{\gamma}}(b)$, perché altrimenti le due geodetiche γ e $\bar{\gamma}$ coinciderebbero, pertanto la derivata destra e la derivata sinistra di σ in b sono diverse, che è un assurdo. \square

Il secondo motivo per cui una geodetica possa smettere di essere minimale è strettamente legato alla teoria dei campi di Jacobi, che abbiamo sviluppato nella sezione precedente. Se una geodetica da p a q in M è minimale, per quanto visto nelle sezioni precedenti, la variazione seconda dell'energia, dunque la forma indice associata alla geodetica deve essere semidefinita positiva. Vediamo che questa condizione necessaria implica, come nel caso "classico" dei funzionali standard del calcolo delle variazioni, che deve valere la *condizione di Jacobi* (si veda [16, Sezione 8.3]), cioè che non ci siano punti coniugati a p "interni" alla geodetica, cioè prima di q (il punto q può essere coniugato). Si confronti la seguente proposizione con il Teorema 8.3.3 in [16].

PROPOSIZIONE 6.5.2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodetica parametrizzata per lunghezza d'arco, con $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$. Se esiste $t_0 \in (a, b)$ tale che il punto $\gamma(t_0)$ è coniugato a p lungo γ , allora esiste una variazione H di γ a estremi fissati tale che $\mathcal{L}(\gamma_s) < \mathcal{L}(\gamma)$ e $\mathcal{E}(\gamma_s) < \mathcal{E}(\gamma)$ per ogni $s \neq 0$ sufficientemente piccolo. In particolare, γ non è minimale.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per semplicità $a = 0$ e $b = 1$. Essendo $\gamma(t_0)$ coniugato a p , esiste un campo di Jacobi non nullo lungo γ tale che $Y(0) = 0$ e $Y(t_0) = 0$. Vogliamo costruire, a partire da Y , dei campi Y_α (non necessariamente di Jacobi) con $Y_\alpha(0) = 0$ e $Y_\alpha(1) = 0$ per i quali si abbia $I(Y_\alpha, Y_\alpha) < 0$. Un qualsiasi campo Y_α con queste proprietà ha associata una variazione H^α a estremi fissati tale che

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{E}(\gamma_s) \right|_{s=0} < 0,$$

da cui segue che l'energia di γ_s è strettamente minore di quella di $\gamma_0 = \gamma$, per $s \neq 0$ sufficientemente piccolo, di conseguenza, anche le lunghezze risultano strettamente minori,

$$[\mathcal{L}(\gamma_s)]^2 \leq 2\mathcal{E}(\gamma_s) < 2\mathcal{E}(\gamma) = [\mathcal{L}(\gamma)]^2.$$

Osserviamo che $Y'(t_0)$ è non nullo perché $Y(t_0) = 0$ (altrimenti Y sarebbe nullo lungo tutta la curva). Sia $Z_1(t_0) = -Y'(t_0)$ e estendiamo poi Z_1 parallelamente lungo γ . Sia $\theta \in C_c^\infty(0, 1)$ tale che $\theta(t_0) = 1$ e definiamo il campo Z lungo γ come $Z(t) = \theta(t)Z_1(t)$ e per $\alpha > 0$,

$$Y_\alpha = \begin{cases} Y(t) + \alpha Z(t) & \text{se } t \in [0, t_0] \\ \alpha Z(t) & \text{se } t \in [t_0, 1] \end{cases}$$

Il campo Y_α , definito lungo γ , è chiaramente continuo in t_0 perché $Y(t_0) = 0$ e di classe C^1 a tratti. Se dimostriamo che $I(Y_\alpha, Y_\alpha) < 0$ per $\alpha > 0$ sufficientemente piccolo, allora si potrà concludere approssimando gli Y_α con dei campi \tilde{Y}_α di classe C^∞ in modo che valga ancora $I(\tilde{Y}_\alpha, \tilde{Y}_\alpha) < 0$. Verifichiamo allora che si

abbia $I(Y_\alpha, Y_\alpha) < 0$, per α sufficientemente piccolo,

$$\begin{aligned} I(Y_\alpha, Y_\alpha) &= \int_0^1 (|Y'_\alpha|^2 - R(\dot{\gamma}, Y_\alpha, \dot{\gamma}, Y_\alpha)) dt \\ &= \int_0^1 (|\alpha Z'|^2 - R(\dot{\gamma}, \alpha Z, \dot{\gamma}, \alpha Z)) dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} (|Y'|^2 - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)) dt \\ &\quad + 2 \int_0^{t_0} (g(Y', \alpha Z') - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, \alpha Z)) dt. \end{aligned}$$

Esaminiamo separatamente ciascuno dei tre integrali, il primo di essi è uguale a

$$\alpha^2 \int_0^1 (|Z'|^2 - R(\dot{\gamma}, Z, \dot{\gamma}, Z)) dt = \alpha^2 I(Z, Z),$$

il secondo, integrando per parti e utilizzando l'equazione dei campi di Jacobi per Y , si riscrive come

$$\int_0^{t_0} \left(\frac{d}{dt} g(Y, Y') - \underbrace{g(Y, Y'') - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)}_0 \right) dt = g(Y, Y') \Big|_0^{t_0} = 0.$$

Il maniera del tutto analoga, il terzo integrale diventa

$$\begin{aligned} 2\alpha \int_0^{t_0} \left(\frac{d}{dt} g(Z, Y') - \underbrace{g(Z, Y'') - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Z)}_0 \right) dt &= 2\alpha g(Z, Y') \Big|_0^{t_0} \\ &= 2\alpha g(Z_1(t_0), Y'(t_0)) = -2\alpha |Y'(t_0)|^2. \end{aligned}$$

Otteniamo dunque

$$I(Y_\alpha, Y_\alpha) = \alpha^2 I(Z, Z) - 2\alpha |Y'(t_0)|^2 = -2\alpha |Y'(t_0)|^2 + o(\alpha)$$

e essendo $|Y'(t_0)|^2 > 0$, questa espressione è strettamente negativa per $\alpha > 0$ sufficientemente piccolo. \square

OSSERVAZIONE 6.5.3. Una dimostrazione più diretta della non minimalità della geodetica γ in presenza di un punto $\gamma(t_0)$ coniugato a p lungo di essa, si può ottenere analogamente alla dimostrazione "classica" del Teorema 8.3.3 in [16]. Se γ fosse minimale, si avrebbe che la forma indice è semidefinita positiva, dunque

$$I(X, X) = \int_a^b (|X'|^2 - R(\dot{\gamma}, X, \dot{\gamma}, X)) dt \geq 0$$

per ogni campo X lungo γ nullo agli estremi. Se allora consideriamo il campo Y di Jacobi non nullo su $[0, t_0]$ lungo γ tale che $Y(0) = 0$ e $Y(t_0) = 0$, come nella proposizione, e lo estendiamo a zero in $[t_0, 1]$, otteniamo un campo Z di

classe C^1 a tratti ma *non* C^1 (poiché $Y'(t_0) = Z'_-(t_0) \neq 0$), che si vede facilmente soddisfare $I(Z, Z) = 0$, dunque Z è un minimo del funzionale (“di Jacobi” naturalmente associato, si veda [16, Sezione 8.3]) $X \mapsto I(X, X)$ sui campi di classe C^1 a tratti lungo γ e zero agli estremi. Le condizioni di Erdmann–Weierstrass (si veda [16, Sezione 3.1]) per tale funzionale, che devono dunque valere, sono $g(Z'_-(t_0), \cdot) = g(Z'_+(t_0), \cdot)$, cioè $Z'_-(t_0) = 0$, che è una contraddizione.

Per concludere lo studio della minimalità delle geodetiche “lunghe”, mostriamo infine che non vi sono altre ragioni (oltre a quelle descritte nelle Proposizioni 6.5.1 e 6.5.2) per cui una geodetica smetta di essere minimale. Notiamo che sulla sfera \mathbb{S}^2 con la metrica canonica, le geodetiche uscenti dal polo nord sono minimali fino al polo sud e al polo sud smettono di essere minimali, sia perché incontrano altre geodetiche minimali, sia perché il polo sud e il polo nord sono coniugati (lo si mostri per esercizio), dunque tali due situazioni possono anche effettivamente verificarsi contemporaneamente.

TEOREMA 6.5.4. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa e γ una geodetica uscente da $p \in M$, minimale fino a un punto q e che non sia più minimale oltre q . Allora si verifica almeno una delle seguenti due possibilità, non mutualmente esclusive,*

- *esiste un'altra geodetica minimale $\bar{\gamma}$ da p a q , diversa da γ (anche a meno di riparametrizzazione),*
- *q è coniugato a p lungo γ .*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo di non essere nel primo caso, dunque γ è l'unica geodetica minimale da p a q e assumiamo senza perdita di generalità che $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ con $v \in T_pM$, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e di conseguenza, $|v|_p = d(p, q)$. Se $q_\varepsilon = \gamma(1 + \varepsilon)$, per $\varepsilon > 0$, non essendo per ipotesi γ minimale tra p e q_ε , esiste una geodetica minimale $t \mapsto \gamma_\varepsilon(t) = \exp_p(tv_\varepsilon)$ tra p e q_ε , con $\gamma_\varepsilon(0) = p$ e $\gamma_\varepsilon(1) = q_\varepsilon$.

Per continuità della distanza, $|v_\varepsilon|_p = \mathcal{L}(\gamma_\varepsilon) = d(p, q_\varepsilon)$ deve tendere a $|v|_p = \mathcal{L}(\gamma) = d(p, q)$, per $\varepsilon \rightarrow 0$, allora per compattezza, esiste una successione $\varepsilon_k \rightarrow 0$ tale che v_{ε_k} converga a un qualche $w \in T_pM$, con $|w|_p = |v|_p = d(p, q)$. Per la dipendenza continua dai dati iniziali delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie, si ha allora che γ_{ε_k} tende a una geodetica da p a q con velocità iniziale w e lunghezza $\mathcal{L}(\gamma) = d(p, q)$, dunque minimale. Poiché abbiamo assunto che vi sia un'unica geodetica minimale da p a q , necessariamente w deve essere uguale a v .

Supponiamo per assurdo che q non sia coniugato a p lungo γ , allora $(d \exp_p)_v$ è invertibile, dunque \exp_p è un diffeomorfismo locale tra un intorno di v in T_pM e un intorno di q in M , ma abbiamo visto che $v_{\varepsilon_k} \rightarrow v$ in T_pM e per ogni k ,

$$\exp_p(v(1 + \varepsilon_k)) = \exp_p(v_{\varepsilon_k}) = q_{\varepsilon_k},$$

con $v(1 + \varepsilon_k)$ diverso da v_{ε_k} , in quanto per costruzione v_{ε_k} non è essere multiplo di v , dunque \exp_p non sarebbe iniettiva in alcun intorno di v , il che è una contraddizione e la tesi segue. \square

Dal Corollario 6.4.14 segue il seguente raffinamento, in curvatura nonpositiva.

COROLLARIO 6.5.5. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa con curvatura sezionale minore o uguale a zero. Se γ è una geodetica uscente da $p \in M$, minimale fino a un punto q e che non sia più minimale oltre q , allora esiste un'altra geodetica minimale $\bar{\gamma}$ da p a q , diversa da γ (anche a meno di riparametrizzazione).*

OSSERVAZIONE 6.5.6. Si noti che allora, per il teorema di Hopf–Rinow 6.1.4 e quanto detto nell'Osservazione 5.5.6, in \mathbb{H}^n ogni geodetica è minimale tra ogni sua coppia di punti (si calcoli la distanza riemanniana di \mathbb{H}^n , per esercizio). Generalizzeremo questa conclusione a ogni varietà completa e semplicemente connessa, con curvatura sezionale minore o uguale a zero, nel Corollario 8.3.2 del teorema di Cartan–Hadamard 8.3.1.

Nel caso “classico” dei funzionali standard del calcolo delle variazioni, una condizione sufficiente di minimalità locale è data dalla *condizione forte di Jacobi* (si veda [16, Sezione 8.3]), cioè nel nostro caso che non ci siano punti coniugati a p su tutta la geodetica (il punto finale compreso). La seguente proposizione è allora analoga al Teorema 8.3.12 e al Corollario 8.3.14 in [16].

PROPOSIZIONE 6.5.7. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodetica da $\gamma(a) = p$ a $\gamma(b) = q$. Se non ci sono punti coniugati a p lungo γ , allora esiste un intorno \mathcal{U} di γ in*

$$\Omega_{a,b}^{p,q} = \{\gamma : [a, b] \rightarrow M : \gamma \in C^1, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$$

con la topologia uniforme, tale che per ogni $\sigma \in \mathcal{U}$, si ha

$$\mathcal{L}(\sigma) \geq \mathcal{L}(\gamma) \quad e \quad \mathcal{E}(\sigma) \geq \mathcal{E}(\gamma),$$

con uguaglianza nel primo caso se e solo se σ è una riparametrizzazione di γ , nel secondo se $\sigma = \gamma$. Cioè γ è minimo locale “stretto” in $\Omega_{a,b}^{p,q}$.

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità assumiamo $a = 0$ e $b = 1$, dunque $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ per $v \in T_p M$. Dall'ipotesi segue che il differenziale $(d \exp_p)_{tv}$ è invertibile per ogni $t \in [0, 1]$, dunque \exp_p è un diffeomorfismo locale nell'intorno di ogni punto $tv \in T_p M$. Per compattezza, esiste allora una famiglia finita di aperti U_1, \dots, U_k , la cui unione copre il segmento $\{tv : t \in [0, 1]\}$ tale che $\exp_p|_{U_i}$ sia un diffeomorfismo con la sua immagine, per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$. Siano $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1$ tali che $\{tv : t \in [t_{i-1}, t_i]\} \subseteq U_i$, per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$, se allora $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ è abbastanza vicina a γ in norma uniforme, $\sigma([0, 1])$ è contenuta nell'unione $\bigcup_{i=1}^k \exp_p(U_i)$ e possiamo “sollevare” (un pezzo alla volta, iterativamente) σ a una curva $\varphi : [0, 1] \rightarrow T_p M$ con $\varphi(0) = O_p$

e $\varphi(1) = v$, tale che $\sigma = \exp_p \circ \varphi$. Dimostriamo che $\mathcal{L}(\sigma) \geq \mathcal{L}(\gamma)$, scrivendo in coordinate polari $\varphi(t) = r(t)w(t)$, con $|w(t)|_p = 1$, si ha

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{r}(t)w(t) + r(t)\dot{w}(t)$$

e per il lemma di Gauss “esteso” 6.4.17,

$$\begin{aligned} |\dot{\sigma}(t)|_{\sigma(t)}^2 &= |(d \exp_p)_{\varphi(t)}(\dot{\varphi}(t))|_{\sigma(t)}^2 \\ &= |\dot{r}(t)|^2 + |(d \exp_p)_{\varphi(t)}(\dot{w}(t))|_{\sigma(t)}^2 r^2(t) \\ &\geq |\dot{r}(t)|^2. \end{aligned}$$

Dunque,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sigma) &= \int_0^1 |\dot{\sigma}(t)|_{\sigma(t)} dt \geq \int_0^1 |\dot{r}(t)| dt \geq \left| \int_0^1 \dot{r}(t) dt \right| \\ &= |r(1) - r(0)| = |r(1)w(1)|_p = |\varphi(1)|_p = |v|_p = \mathcal{L}(\gamma). \end{aligned}$$

L’uguaglianza vale se $\dot{w}(t) = 0$, dunque $w(t)$ costante uguale a v e in quanto $w(1) = \varphi(1) = v$, e se $\dot{r}(t) \geq 0$, quindi σ è una riparametrizzazione di γ .

Analogamente, per l’energia si ha

$$\mathcal{E}(\sigma) = \frac{[\mathcal{L}(\sigma)]^2}{2} \geq \frac{[\mathcal{L}(\gamma)]^2}{2} = \mathcal{E}(\gamma),$$

con uguaglianza se σ è parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d’arco ed è una riparametrizzazione di γ , ma questo implica che σ coincide con γ . \square

OSSERVAZIONE 6.5.8. Si noti che γ potrebbe non essere minimale, ma solo un minimo locale. Per esempio, sul toro \mathbb{T}^n con la metrica flat, non vi sono punti coniugati, dunque tutte le geodetiche sono minimi locali, ma chiaramente una geodetica troppo lunga non può essere minimale (essendo il toro compatto).

Per il Corollario 6.4.14 si ha dunque il seguente risultato, in curvatura nonpositiva.

COROLLARIO 6.5.9. Sia (M, g) una varietà riemanniana completa con curvatura sezionale minore o uguale a zero, allora ogni geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ da $\gamma(a) = p$ a $\gamma(b) = q$, è minimo locale “stretto” in

$$\Omega_{a,b}^{p,q} = \{\gamma : [a, b] \rightarrow M : \gamma \in C^1, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$$

con la topologia uniforme, del funzionale energia (e del funzionale lunghezza, a meno di riparametrizzazione).

OSSERVAZIONE 6.5.10. Nelle ipotesi della Proposizione 6.5.7, un’ovvia conseguenza è che la variazione seconda (a estremi fissati) del funzionale energia in γ è semidefinita positiva. In realtà, analogamente al Teorema 8.3.12 in [16], possiamo mostrare che è strettamente definita positiva, cioè esiste $\lambda > 0$ tale che

se H è una variazione a estremi fissati di una geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ e X il suo generatore infinitesimale, si ha

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = I(X, X) = \int_a^b (|X'|^2 - R(\dot{\gamma}, X, \dot{\gamma}, X)) dt \geq \lambda \int_a^b (|X'|^2 + |X|^2) dt.$$

Infatti, minimizziamo la forma quadratica $X \mapsto I(X, X)$ sui campi lungo γ nulli ai bordi nello spazio di Sobolev $W^{1,2}$, col vincolo $\|X\|_{W^{1,2}}^2 = \int_a^b (|X'|^2 + |X|^2) dt = 1$ (si può fare con i metodi in [16, Capitolo 13], per esempio). Il campo Y che realizza tale minimo è non nullo, in quanto $\|Y\|_{W^{1,2}}^2 = 1$ e soddisfa allora l'equazione di Eulero–Lagrange del problema vincolato,

$$Y'' + R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} = \lambda(Y'' - Y), \quad (6.25)$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ è il *moltiplicatore di Lagrange* associato a Y . Segue che Y è un campo lungo γ di classe C^∞ e moltiplicando per Y e integrando (per parti), otteniamo

$$I(Y, Y) = \int_a^b (|Y'|^2 - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)) dt = \lambda \int_a^b (|Y'|^2 + |Y|^2) dt = \lambda.$$

Da cui λ è il minimo del problema ed è nonnegativo, essendo I semidefinita positiva. Se λ fosse zero, Y sarebbe un campo di Jacobi lungo γ , nullo agli estremi, per l'equazione (6.25), dunque la forma indice sarebbe degenera e q sarebbe un punto coniugato a p lungo γ . Ma quindi

$$I(X, X) \geq I(Y, Y) = \int_a^b (|Y'|^2 - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)) dt = \lambda = \lambda \int_a^b (|X'|^2 + |X|^2) dt,$$

per ogni campo X lungo γ , nullo agli estremi e tale che $\|X\|_{W^{1,2}}^2 = 1$. La tesi chiaramente segue da questa conclusione.

OSSERVAZIONE 6.5.11. Se p e q non sono coniugati lungo una geodetica γ , allora γ è un punto critico *non degenera* (la forma indice associata a γ non è degenera) del funzionale energia, anche se vi sono punti coniugati a p lungo la geodetica prima di q . L'*indice* di tale punto critico (cioè la dimensione del massimo sottospazio dello spazio vettoriale dei campi lungo γ nulli agli estremi, tale che la forma indice sia definita negativa) coincide col numero dei punti coniugati lungo γ (*teorema dell'indice di Morse*, si veda [141, Parte III]).

OSSERVAZIONE 6.5.12. Dalla dimostrazione della Proposizione 6.5.2, si ha che se lungo una geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ da p a q , vi sono punti coniugati a p "prima" di q , la forma indice I associata a γ *non* è semidefinita positiva, mentre la Proposizione 6.5.7 mostra che I è definita positiva se non ve ne sono lungo tutta la geodetica. Se infine q è coniugato a p lungo γ e non vi sono altri punti coniugati a p "prima" di q , la forma indice I associata a γ è degenera, cioè esiste un campo di Jacobi non nullo Y lungo γ e nullo ai bordi, ma si ha comunque

$$I(X, X) = \int_a^b (|X'|^2 - R(\dot{\gamma}, X, \dot{\gamma}, X)) dt = \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} \geq 0$$

per ogni campo X lungo γ zero agli estremi, cioè la forma indice associata a γ è semidefinita positiva. Infatti, supponiamo per semplicità $a = 0$ e $b = 1$, considerato $\delta > 0$ e un campo X lungo γ nullo agli estremi, definiamo il campo \tilde{X} lungo γ dato da

$$\tilde{X}(t) = P_t^\delta [X(t/(1-\delta))]$$

se $t \in [0, 1-\delta]$, dove P_t^δ è l'operatore di trasporto parallelo lungo γ da $T_{\gamma(t/(1-\delta))}M$ a $T_{\gamma(t)}M$ e $\tilde{X}(t) = 0$ se $t \in [1-\delta, 1]$. Essendo $\tilde{X}|_{[0,1-\delta]}$ un campo nullo agli estremi lungo la geodetica $\gamma|_{[a,1-\delta]}$ che non contiene punti coniugati, per la Proposizione 6.5.7 si ha

$$\int_0^1 (|\tilde{X}'|^2 - R(\dot{\gamma}, \tilde{X}, \dot{\gamma}, \tilde{X})) dt = \int_0^{1-\delta} (|\tilde{X}'|^2 - R(\dot{\gamma}, \tilde{X}, \dot{\gamma}, \tilde{X})) dt \geq 0.$$

È facile ora vedere che (per il teorema di convergenza dominata) se $\delta \rightarrow 0$ l'integrale a sinistra converge e $I(X, X)$, in quanto $\tilde{X}(t) \rightarrow X$ puntualmente su $[0, 1]$, poiché P_t^δ converge all'identità (in carte locali di una banalizzazione di TM).

Si confronti questo risultato con la Proposizione 8.3.8 in [16] nel caso "classico" dei funzionali standard del calcolo delle variazioni (sotto la *condizione di Jacobi*, cioè l'analogo del fatto che non ci sono punti coniugati a p "interni" alla geodetica).

Ciò non implica alcuna proprietà di minimo locale su γ , si consideri per esempio la superficie (M, g) dove $M = (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{S}^1$ e $g = dr^2 + h^2(r)d\theta^2$ con $d\theta^2$ la metrica canonica su \mathbb{S}^1 e $h^2(r) = \cos^2 r - r^4$ (scegliendo $\varepsilon > 0$ in modo tale che $h > 0$ su $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (si tratta di una "striscia" della sfera unitaria "schiacciata" lungo l'asse di simmetria di rotazione).

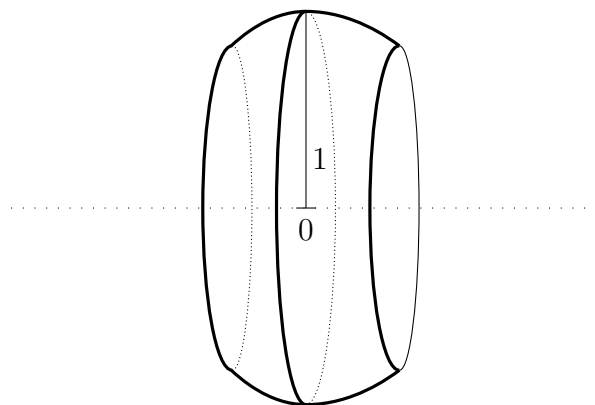


FIGURA 6.3

La geodetica $\gamma : [0, \pi] \rightarrow M$ data da $\gamma(\theta) = (0, \theta)$ non è minimo locale dell'energia in quanto se consideriamo, per $|\delta|$ piccolo, la famiglia di curve $\gamma_\delta(\theta) =$

$(\delta \sin \theta, \theta)$, con velocità $\dot{\gamma}_\delta(\theta) = (\delta \cos \theta, 1)$, sull'intervallo $[0, \pi]$, che congiungono gli stessi punti estremi di γ , cioè $(0, 0)$ e $(0, \pi)$ e ne calcoliamo l'energia, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\gamma_\delta) &= \int_0^\pi [\delta^2 \cos^2 \theta + h^2(\delta \sin \theta)] d\theta \\ &= \int_0^\pi [\delta^2 \cos^2 \theta + \cos^2(\delta \sin \theta) - \delta^4 \sin^4 \theta] d\theta \\ &= \int_0^\pi [\delta^2 \cos^2 \theta + 1 - \delta^2 \sin^2 \theta + \delta^4 \sin^4 \theta/3 + o(\delta^4) - \delta^4 \sin^4 \theta] d\theta \\ &= \int_0^\pi [1 - 2\delta^4 \sin^4 \theta/3 + o(\delta^4)] d\theta \\ &< \mathcal{E}(\gamma) - \frac{\delta^4}{3} \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta, \end{aligned}$$

se $|\delta| > 0$ è abbastanza piccolo (abbiamo usato l'espansione di Taylor di $\cos^2 t$ nel calcolo).

Vediamo che i due punti estremi di γ sono coniugati e non vi sono altri punti coniugati a $(0, 0)$ lungo γ . Essendo M una superficie gli eventuali campi di Jacobi lungo γ che si annullano agli estremi di un sottointervallo $[0, \alpha]$ di $[0, \pi]$ hanno la forma $Y(\theta) = y(\theta) \frac{\partial}{\partial r}$, con $y : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ nulla in 0 e α (ricordando che devono essere normali alla geodetica, per la Proposizione 6.4.8). Allora, dai calcoli (alla fine) dell'Esempio 5.8.4, si ha che

$$R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y) = y^2 R\left(\dot{\gamma}, \frac{\partial}{\partial r}, \dot{\gamma}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = y^2 R_{1r1r} = -y^2 h(0)h''(0) = y^2,$$

come si calcola facilmente. Dunque segue che

$$I(Y, Y) = \int_0^\alpha [(y')^2 - y^2] d\theta$$

e per la disuguaglianza di Poincaré (si veda [16, Corollario 7.3.2], per esempio) questo integrale è sempre positivo per ogni funzione $y \neq 0$, nulla ai bordi dell'intervallo $[0, \alpha]$, se $\alpha < \pi$, da cui non possono esistere campi di Jacobi nulli ai bordi, dunque nemmeno punti coniugati lungo γ prima di $(0, \pi) \in M$. Se $\alpha = \pi$, il campo $Y(\theta) = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r}$ è invece di Jacobi lungo γ e nullo ai suoi estremi, da cui il punto $(0, \pi)$ è coniugato lungo γ a $(0, 0)$.

Vale la seguente importante proprietà dei campi di Jacobi, che può essere vista come la "versione differenziale" del fatto che una geodetica è un minimo locale del funzionale lunghezza (ed energia) fino al suo primo punto coniugato (Proposizione 6.5.7).

PROPOSIZIONE 6.5.13 (Proprietà di minimalità dei campi di Jacobi). *Se la forma indice I associata a una geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ da p a q , è semidefinita positiva (cioè se e solo se non vi sono punti coniugati a p "prima" di q , per quanto visto sopra – per esempio, se γ è minimale) e Y è un campo di Jacobi lungo γ , allora $I(Y, Y) \leq I(X, X)$ tra tutti campi X lungo γ con lo stesso valore di Y negli estremi a e b .*

Se inoltre I è definita positiva (dunque se nemmeno q è coniugato a p), si ha $I(X, X) = I(Y, Y)$ per un campo X tra tali campi, se e solo se $X = Y$.

DIMOSTRAZIONE. Il campo $Y - X$ è nullo agli estremi ed essendo la forma indice I semidefinita positiva, deve essere $I(Y - X, Y - X) \geq 0$, dunque

$$0 \leq I(Y - X, Y - X) = I(X, X) - I(Y, Y) + 2I(Y, Y - X) = I(X, X) - I(Y, Y)$$

per la prima formula (6.15), da cui la conclusione.

Se q non è coniugato a p e $I(X, X) = I(Y, Y)$, con X con gli stessi valori di Y agli estremi, si ha che $I(X - Y, X - Y) = 0$, dunque $X - Y$ deve essere nullo, da cui la tesi. \square

Si noti che se gli estremi di γ sono coniugati, esiste un campo di Jacobi Y non banale e nullo agli estremi, dunque $I(Y, Y) = 0$ e quindi Y minimizza la forma indice di γ (viceversa, se Y è minimizzante, deve essere un campo di Jacobi, per l'Osservazione 6.4.10).

6.6. Il cut locus

Ricordiamo, dall'inizio della sezione precedente, che abbiamo definito I_v come l'intervallo (chiuso) dei tempi positivi entro i quali la geodetica γ_v uscente da $p \in M$ rimane minimale. Sia $\rho_p(v) = \sup I_v$ l'ultimo tempo per cui γ_v è minimale (eventualmente $+\infty$, se γ_v non smette mai di essere minimale). Osserviamo che $\rho_p(\lambda v) = \rho_p(v)/\lambda$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^+$, quindi ρ_p è completamente determinata dal suo valore sulla sfera unitaria \mathbb{S}_p^{n-1} di $T_p M$. Definiamo allora $\bar{\rho}_p$ come la restrizione di ρ_p alla sfera unitaria $\mathbb{S}_p^{n-1} \subseteq T_p M$.

PROPOSIZIONE 6.6.1. *Data una varietà riemanniana completa (M, g) e un punto $p \in M$, la funzione $\bar{\rho}_p : \mathbb{S}_p^{n-1} \rightarrow (0, +\infty]$ definita sopra è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $v \in \mathbb{S}_p^{n-1}$, verifichiamo la continuità di $\bar{\rho}_p$ in v . Per semplicità assumiamo che $\bar{\rho}_p(v) < +\infty$; il caso $\bar{\rho}_p(v) = +\infty$ è analogo. Sia $\bar{t} = \bar{\rho}_p(v)$, e sia $q = \gamma_v(\bar{t})$.

Supponiamo per assurdo che esista una successione $v_k \rightarrow v$ di elementi di \mathbb{S}_p^{n-1} tale che $\bar{\rho}_p(v_k) > \bar{t} + \varepsilon$, per qualche $\varepsilon > 0$. Sia $t = \bar{t} + \varepsilon$. Essendo le geodetiche γ_{v_k} minimali fino al tempo t , si ha che $d(p, \gamma_{v_k}(t)) = \mathcal{L}(\gamma_{v_k}|_{[0,t]}) = t$. Per $k \rightarrow \infty$, si ha che $\gamma_{v_k}(t)$ tende a $\gamma_v(t)$, quindi per la continuità della distanza, $d(p, \gamma_{v_k}(t))$ tende a $d(p, \gamma_v(t))$. Dunque si ha anche che $d(p, \gamma_v(t)) = t$, per cui γ_v è minimale fino al tempo t e ciò è impossibile, perché abbiamo assunto che $\bar{\rho}_p(v)$ fosse

uguale a \bar{t} .

Supponiamo ora invece che esista una successione $v_k \rightarrow v$ di vettori in \mathbb{S}_p^{n-1} con $\bar{\rho}_p(v_k) < \bar{t} - \varepsilon$, per qualche $\varepsilon > 0$, dunque, le geodetiche γ_{v_k} non sono minimali fino al tempo $\tau = \bar{t} - \varepsilon$. Poniamo $q_k = \gamma_{v_k}(\tau)$ e siano $w_k \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ tali che γ_{w_k} sia una geodetica minimale da p a $q_k = \gamma_{w_k}(\tau_k)$, con $\tau_k = d(p, q_k)$. Per $k \rightarrow \infty$, la successione di punti q_k converge a $q = \gamma_v(\tau)$ e la geodetica γ_v è minimale fino a q , quindi per la continuità della distanza, $\tau_k \rightarrow \tau = d(p, q)$. A meno di sottosuccessioni, possiamo assumere che w_k converga a un vettore $w \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ e osserviamo che passando al limite nella relazione $\gamma_{w_k}(\tau_k) = q_k$, si ottiene $\gamma_w(\tau) = q$. Essendo allora la geodetica γ_w minimale anche oltre q , per la Proposizione 6.5.1 le due geodetiche minimali γ_w e γ_v devono coincidere, dunque $w = v$. Segue che

$$q_k = \exp_p(\tau v_k) = \exp_p(\tau_k w_k)$$

e le due successioni di vettori τv_k e $\tau_k w_k$ convergono entrambe a τv in $T_p M$, inoltre per costruzione $\tau v_k \neq \tau_k w_k$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Quindi \exp_p non può essere iniettiva in un intorno di τv , di conseguenza, $(d \exp_p)_{\tau v}$ è singolare e per la Proposizione 6.4.12 ciò significa che $q = \exp_p(\tau v)$ è coniugato a p lungo γ_v . Per la Proposizione 6.5.2, la geodetica γ_v non può allora essere minimale oltre q , il che è una contraddizione. \square

Come conseguenza del risultato appena ottenuto, essendo \mathbb{S}_p^{n-1} compatto, $\bar{\rho}_p$ è costantemente $+\infty$ (per esempio su \mathbb{R}^n con la sua metrica standard) oppure ha un minimo $\bar{\rho}_{\min}(p) \in \mathbb{R}^+$ che è allora il raggio della più grande palla geodetica centrata in $p \in M$ entro la quale le geodetiche uscenti da p sono minimali. In tutta la discussione che segue assumeremo di essere in questo caso, per semplicità, ma tutti i risultati valgono anche se $\bar{\rho}_p$ è costantemente uguale a $+\infty$ su \mathbb{S}_p^{n-1} , ponendo $\bar{\rho}_{\min}(p) = +\infty$, con un piccolo abuso di notazione (lo si mostri per esercizio).

PROPOSIZIONE 6.6.2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa, allora per ogni $p \in M$ si ha che $\bar{\rho}_{\min}(p)$ è uguale al raggio di iniettività $\text{inj}(p)$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario 4.3.6, le geodetiche uscenti da p con velocità unitaria rimangono minimali per un qualsiasi tempo inferiore al raggio di iniettività di p , segue che $\bar{\rho}_{\min}(p) \geq \text{inj}(p)$.

Viceversa, supponiamo che v e w siano due vettori di modulo strettamente inferiore a $\bar{\rho}_{\min}(p)$, allora le geodetiche γ_v e γ_w sono minimali almeno fino a un tempo $1 + \varepsilon$, per qualche $\varepsilon > 0$, quindi, per la Proposizione 6.5.1 abbiamo che $\exp_p(v)$ deve essere diverso da $\exp_p(w)$. Per arbitrarietà di v e w , la mappa \exp_p è allora iniettiva sulla palla $B_{\bar{\rho}_{\min}(p)}(O_p) \subseteq T_p M$. Per la Proposizione 6.5.2, non esistono punti coniugati a p a distanza minore di $\bar{\rho}_{\min}$, quindi dalla Proposizione 6.4.12, la mappa \exp_p è un diffeomorfismo locale in tutti i punti di $B_{\bar{\rho}_{\min}(p)}(O_p)$. Su tale palla la mappa \exp_p è dunque un diffeomorfismo con l'immagine e di conseguenza, $\text{inj}(p) \geq \bar{\rho}_{\min}(p)$, da cui la tesi \square

PROPOSIZIONE 6.6.3. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa, la funzione $p \mapsto \text{inj}(p)$ è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo già dall'Osservazione 4.2.6 che $p \mapsto \text{inj}(p)$ è semicontinua inferiormente, vediamo che è anche semicontinua superiormente, usando il fatto che $\text{inj}(p) = \bar{\rho}_{\min}(p)$. Consideriamo una banalizzazione locale $V \times \mathbb{R}^n$ di TM attorno a $p \in M$, allora essendo ogni funzione $q \mapsto \bar{\rho}_q(v)$ semicontinua superiormente, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ fissato (nelle coordinate della banalizzazione locale), per il Lemma 6.1.13, si ha che la funzione

$$q \mapsto \text{inj}(q) = \bar{\rho}_{\min}(q) = \inf_{v \in \mathbb{S}_q^{n-1}} \bar{\rho}_q(v)$$

è semicontinua superiormente nell'intorno di $p \in M$, essendo inf di una famiglia di funzioni semicontinue superiormente. \square

OSSERVAZIONE 6.6.4. Se la varietà non è necessariamente completa, sostituendo nella definizione di $\bar{\rho}_{\min}$ il minimo con l'estremo inferiore, le precedenti due proposizioni continuano a valere, notando che se $p_i \rightarrow p$ e $\limsup_{i \rightarrow \infty} \text{inj}(p_i) = R$, allora per ogni $\varepsilon > 0$, le geodetiche uscenti da p sono ben definite almeno fino alla loro lunghezza $R - \varepsilon$, per $i \in \mathbb{N}$ abbastanza grande (si mostrino i dettagli per esercizio).

Si ha come conseguenza il seguente lemma.

LEMMA 6.6.5. *Se per $p \in M$, si ha che $d(p, q) = \text{inj}(p)$ con q non coniugato a p , allora da p a q ci sono esattamente due geodetiche minimali unitarie che vi arrivano con velocità opposte (dunque, "proseguendo" lungo una di tali geodetiche si percorre l'altra nel verso opposto e si "ritorna" al punto p).*

DIMOSTRAZIONE. Se q non è un punto coniugato, vi arrivano almeno due geodetiche minimali di velocità unitaria $\gamma_1, \gamma_2 : [0, L] \rightarrow M$ da p e se $\dot{\gamma}_1(L) \neq -\dot{\gamma}_2(L)$, esiste un vettore unitario $v \in T_q M$ tale che

$$g(v, \dot{\gamma}_1(L)) < 0 \quad \text{e} \quad g(v, \dot{\gamma}_2(L)) < 0.$$

Consideriamo la geodetica $\sigma : (0, \varepsilon) \rightarrow M$ uscente da q con velocità v , che non contiene punti coniugati a p se $\varepsilon > 0$ è sufficientemente piccolo, esistono allora due famiglie di geodetiche γ_1^t e γ_2^t da p a $\sigma(t)$, con $\gamma_1^0 = \gamma_1$ e $\gamma_2^0 = \gamma_2$ e per la formula di variazione prima della lunghezza si ha $\mathcal{L}(\gamma_1^t), \mathcal{L}(\gamma_2^t) < d(p, q) = \text{inj}(p)$, per t piccolo, inoltre tali due geodetiche non possono essere minimali oltre il punto $\sigma(t)$, da cui abbiamo la contraddizione col fatto che $d(p, q) = \text{inj}(p)$. \square

Introduciamo ora il *cut locus* di un punto $p \in M$.

DEFINIZIONE 6.6.6. Sia p un punto di una varietà riemanniana completa (M, g) e sia $\mathcal{U}_p = \{v \in T_p M : \rho_p(v) > 1\}$. Definiamo allora il *cut locus differenziale* di p come $\text{DiffCut}_p = \partial \mathcal{U}_p \subseteq T_p M$ e il *cut locus* di p come $\text{Cut}_p = \exp_p(\partial \mathcal{U}_p) \subseteq M$.

Ricordando la definizione

$$\rho_p(v) = \sup I_v = \sup \{t \in [0, +\infty) : \gamma_v \text{ è minimale su } [0, t] \}$$

e poiché $\rho_p(v) = \rho_p(v/|v|_p)/|v|_p = \bar{\rho}_p(v/|v|_p)/|v|_p$, abbiamo che ρ_p è continua, come $\bar{\rho}_p$, per la Proposizione 6.6.1. Di conseguenza, l'insieme \mathcal{U}_p dei vettori v tali che la geodetica $t \mapsto \gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ è minimale almeno sull'intervallo $[0, 1]$, è un intorno aperto stellato dell'origine O_p in T_pM (dunque omeomorfo a una palla n -dimensionale) e DiffCut_p un chiuso. Si noti inoltre che

$$\begin{aligned} \text{DiffCut}_p &= \{v : v \in T_pM, \rho_p(v) = 1\} \\ &= \{\rho_p(v)v : v \in T_pM, \rho_p(v) \neq +\infty\} \\ &= \{\bar{\rho}_p(v)v : v \in \mathbb{S}_p^{n-1}, \bar{\rho}_p(v) \neq +\infty\}. \end{aligned}$$

Se dunque $q \in \text{Cut}_p$, per la Proposizione 6.5.4 o esistono due geodetiche minimali distinte (geometricamente) da p a q , oppure q è coniugato a p lungo una geodetica che li unisce. Si noti che segue che se $q \in \text{Cut}_p$, allora $p \in \text{Cut}_q$. Mentre se $q \notin \text{Cut}_p$, non è coniugato a p e c'è un'unica geodetica minimale che li unisce. Analogamente a sopra, se $q \notin \text{Cut}_p$, allora $p \notin \text{Cut}_q$.

ESEMPIO 6.6.7. In \mathbb{R}^n , per ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \simeq T_x\mathbb{R}^n$ si ha ovviamente che $\bar{\rho}_p(v) = +\infty$, essendo tutte le geodetiche sempre minimali, dunque $\text{inj}(\mathbb{R}^n) = +\infty$, $\mathcal{U}_x = T_x\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ e $\text{DiffCut}_x = \text{Cut}_x = \emptyset$ (lo stesso vale in \mathbb{H}^n , lo si mostri per esercizio).

In $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, per ogni punto $p \in \mathbb{S}^n$ e $v \in \mathbb{S}_p^{n-1} \subseteq T_p\mathbb{S}^n$ si ha $\bar{\rho}_p(v) = \pi$, essendo ogni geodetica minimale fino a che non raggiunge il punto antipodale $-p$ rispetto a quello di partenza. Dunque $\text{inj}(\mathbb{S}^n) = \pi$, $\mathcal{U}_p = B_\pi(O_p)$, $\text{DiffCut}_x = \pi\mathbb{S}_p^{n-1}$ e $\text{Cut}_p = \{-p\}$.

PROPOSIZIONE 6.6.8. Sia (M, g) una varietà riemanniana completa e sia $p \in M$. Allora $\text{Cut}_p \cup \exp_p(\mathcal{U}_p) = M$ e $\text{Cut}_p \cap \exp_p(\mathcal{U}_p) = \emptyset$, inoltre la mappa esponenziale è un diffeomorfismo tra \mathcal{U}_p e l'aperto $M \setminus \text{Cut}_p$. Di conseguenza, Cut_p è chiuso e $M \setminus (\text{Cut}_p \cup \{p\})$ è omeomorfo a una palla aperta di \mathbb{R}^n .

DIMOSTRAZIONE. Dato un qualsiasi punto q di M , per il teorema di Hopf-Rinow esiste una geodetica minimale γ_v da p a q . Se γ_v rimane minimale anche oltre q , allora q appartiene a $\exp_p(\mathcal{U}_p)$, altrimenti q appartiene a Cut_p . Quindi $\text{Cut}_p \cup \exp_p(\mathcal{U}_p) = M$.

D'altra parte, supponiamo che esista $q \in \text{Cut}_p \cap \exp_p(\mathcal{U}_p)$. Allora $q = \exp_p(v) = \exp_p(w)$, con $v \in \text{DiffCut}_p$ e $w \in \mathcal{U}_p$, cioè in q arrivano al tempo $t = 1$, le due geodetiche distinte γ_v e γ_w , dunque, per la Proposizione 6.5.1, nessuna delle due può essere minimale oltre q . Ma γ_w è minimale fino al tempo $\rho_p(w) > 1$, il che è una contraddizione.

Essendo tutte le geodetiche $t \mapsto \gamma_v(t) = \exp_p(tv)$, per ogni $v \in \mathcal{U}_p$ minimali su un intervallo più largo di $[0, 1]$, il punto $\exp_p(v)$ non è coniugato a p , dunque \exp_p è

un diffeomorfismo locale attorno a $v \in T_p M$ per la Proposizione 6.4.12, inoltre la mappa $\exp_p|_{\mathcal{U}_p}$ è iniettiva, per la Proposizione 6.5.1, dunque un diffeomorfismo con la sua immagine $M \setminus \text{Cut}_p$. \square

Notiamo, come conseguenza di questa Proposizione 6.6.8, che se M è compatta l'insieme Cut_p è un retratto per deformazione di $M \setminus \{p\}$ e M è omeomorfa a una palla chiusa n -dimensionale *quozientata* sul bordo.

OSSERVAZIONE 6.6.9. Per ogni punto $p \in M$ si ha $d(p, \text{Cut}_p) = \bar{\rho}_{\min}(p) = \text{inj}(p)$. Se dunque M è compatta, quindi $\text{inj}(M) > 0$ essendo la funzione $p \mapsto \text{inj}(p)$ continua, si ha che per ogni punto p in M la sua distanza dal suo cut locus è maggiore o uguale di una costante uniforme, $d(p, \text{Cut}_p) \geq \text{inj}(M) > 0$.

OSSERVAZIONE 6.6.10. Se M è compatta, ogni geodetica non può esser più lunga del diametro $\text{diam}(M) = \max_{p,q \in M} d(p, q)$. Dunque $\bar{\rho}_p(v) < +\infty$, per ogni $v \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ e DiffCut_p è omeomorfo a una sfera $(n-1)$ -dimensionale in $T_p M$. Segue allora che Cut_p è un'immagine (continua) di \mathbb{S}_p^{n-1} , dunque compatto e connesso.

ESERCIZIO 6.6.11. Se M è compatta e $d(p, q) = \text{diam}(M)$, si mostri che ci sono almeno due geodetiche minimali tra p e q , dunque $p \in \text{Cut}_q$ e $q \in \text{Cut}_p$.

ESERCIZIO 6.6.12. Si mostri che l'insieme "simmetrico"

$$\{(p, q) : q \in \text{Cut}_p\}$$

è chiuso in $M \times M$.

Consideriamo in $\exp_p(\mathcal{U}_p \setminus \{O_p\}) = M \setminus (\text{Cut}_p \cup \{p\})$ le coordinate polari associate a una base ortonormale $\{e_i\}$ di $T_p M$, possiamo allora estendere a $M \setminus (\text{Cut}_p \cup \{p\})$ il Corollario 4.2.14 e la Proposizione 4.3.7.

COROLLARIO 6.6.13. In coordinate polari $(r, \theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ rispetto a un punto $p \in M$ su $M \setminus (\text{Cut}_p \cup \{p\})$, si ha

- $g_{rr} = g^{rr} = 1$,
- $g_{ri} = g^{ri} = 0$, per $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

PROPOSIZIONE 6.6.14. La funzione distanza $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ è C^∞ nell'aperto "simmetrico"

$$\{(p, q) : q \notin \text{Cut}_p\} \setminus D = \{(p, q) : q \in M \setminus \text{Cut}_p\} \setminus D,$$

dove $D = \{(q, q) : q \in M\}$, mentre la funzione d^2 è C^∞ in tutto

$$\{(p, q) : q \notin \text{Cut}_p\} = \{(p, q) : q \in M \setminus \text{Cut}_p\}.$$

Per ogni $p \in M$, la funzione distanza $d_p : M \rightarrow \mathbb{R}$ data da $d_p(q) = d(p, q)$ è 1-lipschitziana e C^∞ in $M \setminus (\text{Cut}_p \cup \{p\})$. La funzione distanza p al quadrato d_p^2 è C^∞ in $M \setminus \text{Cut}_p$. Inoltre, $|\nabla d_p| = 1$, cioè d_p soddisfa l'equazione eikonale (Osservazione 4.3.8) in $M \setminus \text{Cut}_p$, in quanto d_p coincide con la funzione r data dalle coordinate polari e per ogni $q \in M \setminus \text{Cut}_p$ si ha che $\nabla d_p(q)$ coincide con $\frac{\partial}{\partial r}|_q$, cioè $\nabla d_p(q)$ coincide con la

velocità in q della geodetica minimale che parte da p con velocità unitaria e arriva in q . Segue che le geodetiche uscenti da p e parametrizzate in lunghezza d'arco, quindi di velocità unitaria, sono le curve integrali del campo ∇d_p su $M \setminus (\text{Cut}_p \cup \{p\})$ e viceversa. Infine, in coordinate normali (x^1, \dots, x^n) rispetto a p in $M \setminus \text{Cut}_p$ si ha $d_p^2(x) = |x|_{\mathbb{R}^n}^2$.

OSSERVAZIONE 6.6.15. Si noti che l'ultima asserzione implica che $\text{Hess } d_p^2/2$ è l'identità in p , dunque è definito positivo in un intorno di tale punto. Si ricordi che abbiamo sfruttato questo fatto nella dimostrazione del teorema degli intorni convessi 4.3.25, di Whitehead.

Abbiamo inoltre il seguente lemma che lega l'hessiano della funzione distanza da un punto con la forma indice valutata su un campo di Jacobi.

LEMMA 6.6.16. Se Y è un campo di Jacobi normale, nullo in $t = 0$, lungo la geodetica minimale con velocità unitaria $t \mapsto \exp_p(tv) = \gamma(t)$, per $t \in [0, r]$ con $r \in (0, \bar{\rho}_p(v))$, si ha

$$\text{Hess } d_p(Y_q, Y_q) = g(\nabla_{Y(r)} \nabla d_p, Y(r)) = g(\nabla_{\dot{\gamma}(r)} Y, Y(r)) = g(Y'(r), Y(r)) = I(Y, Y)$$

dove $q = \exp_p(rv)$, $Y_q = Y(r) \in T_q S_r(p)$ e I è la forma indice associata a γ .

DIMOSTRAZIONE. In coordinate polari $(r, \theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ per p , i campi coordinati $\partial_{\theta^i} = (d \exp_p)_{rv} (r \frac{\partial}{\partial \theta^i} |_{rv})$ (dalla formula (4.5)) sono campi di Jacobi normali lungo γ che si annullano per $r = 0$, per il Corollario 6.4.11 e il lemma di Gauss "esteso" 6.4.17. Dunque, ogni campo di Jacobi normale Y lungo γ , nullo in zero, si scrive come $Y = Y^i \partial_{\theta^i}$, per delle costanti $Y^i \in \mathbb{R}$ (non essendo $\gamma(r)$ coniugato a $\gamma(0)$). Segue allora (essendo $\nabla d_p = \partial_r$),

$$\begin{aligned} \text{Hess } d_p(Y_q, Y_q) &= g(\nabla_Y \nabla d_p, Y(r)) \\ &= g(Y^i \nabla_{\partial_{\theta^i}} \partial_r, Y(r)) \\ &= g(Y^i \nabla_{\partial_r} \partial_{\theta^i}, Y(r)) \\ &= g(\nabla_{\partial_r} (Y^i \partial_{\theta^i}), Y(r)) \\ &= g(Y'(r), Y(r)) \\ &= I(Y, Y) \end{aligned}$$

con l'ultima uguaglianza data dall'Osservazione 6.4.6. □

La mappa $(\exp_p |_{\mathcal{U}_p})^{-1} : M \setminus \text{Cut}_p \rightarrow \mathcal{U}_p$ è quindi una carta da un aperto di M che contiene p , a un aperto di $T_p M$ omeomorfo a una palla di \mathbb{R}^n . Essendo $\bar{\rho}_p$ continua, per il teorema di Fubini DiffCut_p ha misura di Lebesgue nulla in $T_p M$, dunque $\text{Cut}_p = \exp_p(\text{DiffCut}_p)$ ha misura (canonica μ_g di (M, g)) nulla, poiché \exp_p è di classe C^∞ . Ciò rende chiaramente questa singola carta $(M \setminus \text{Cut}_p, (\exp_p |_{\mathcal{U}_p})^{-1})$ estremamente utile nel calcolo degli integrali su M , oppure dei volumi di suoi sottoinsiemi misurabili. Infatti, in coordinate polari $\varphi = (r, \theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ rispetto a un punto $p \in M$ su $M \setminus (\text{Cut}_p \cup \{p\})$, scelte

in modo tale che le coordinate $(\theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ “coprano” $\mathbb{S}_p^{n-1} \setminus \{w\}$, cioè $\theta(q) = \sigma(\pi^{\mathbb{S}_p^{n-1}}(\Psi^{-1}(q)))$, con $\Psi(r, v) = \exp_p(r, v)$ e $\sigma : \mathbb{S}_p^{n-1} \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ un diffeomorfismo, abbiamo la seguente estensione delle formule (6.19) e (6.20) per il volume di ogni insieme $A \subseteq M$ misurabile,

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(A) &= \int_{\varphi(A \setminus (\text{Cut}_p \cup \{\exp_p(tw) : t \in [0, \bar{\rho}_p(w)]\}))} \sqrt{\det g_{ij}} d\mathcal{L}^n \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\bar{\rho}_p(\sigma^{-1}(\theta))} \chi_{\varphi(A)}(r, \theta) \sqrt{\det g_{ij}(r, \theta)} dr d\theta \\
&= \int_0^{+\infty} \int_{\{\theta \in \mathbb{R}^{n-1} : \bar{\rho}_p(\sigma^{-1}(\theta)) \geq r\}} \chi_{\varphi(A)}(r, \theta) \sqrt{\det g_{ij}(r, \theta)} d\theta dr \\
&= \int_{\mathbb{S}_p^{n-1}} \int_0^{\bar{\rho}_p(v)} \chi_A(\exp_p(rv)) \sqrt{\det g(Y_i, Y_j)} dr d\mu^{\mathbb{S}_p^{n-1}}(v) \quad (6.26)
\end{aligned}$$

dove Y_i sono campi di Jacobi normali lungo la geodetica di velocità unitaria $t \mapsto \gamma(t) = \exp_p(tv)$, tali che $Y_i(0) = 0$ e $Y_i'(0) = e_i$, con v, e_1, \dots, e_{n-1} una base ortonormale di $T_p M$. In particolare,

$$\begin{aligned}
\text{Vol}(M) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\bar{\rho}_p(\sigma^{-1}(\theta))} \sqrt{\det g_{ij}(r, \theta)} dr d\theta \\
&= \int_0^{+\infty} \int_{\{\theta \in \mathbb{R}^{n-1} : \bar{\rho}_p(\sigma^{-1}(\theta)) \geq r\}} \sqrt{\det g_{ij}(r, \theta)} d\theta dr \\
&= \int_{\mathbb{S}_p^{n-1}} \int_0^{\bar{\rho}_p(v)} \sqrt{\det g(Y_i, Y_j)} dr d\mu^{\mathbb{S}_p^{n-1}}(v),
\end{aligned}$$

eventualmente uguale a $+\infty$.

Inoltre, per *qualsunque* palla geodetica di centro p e raggio $R > 0$, si ha

$$\text{Vol}(B_R(p)) = \int_{\mathbb{S}_p^{n-1}} \int_0^{\min\{R, \bar{\rho}_p(v)\}} \sqrt{\det g(Y_i, Y_j)} dr d\mu^{\mathbb{S}_p^{n-1}}(v).$$

OSSERVAZIONE 6.6.17. Fissato un punto $p \in M$, per ogni geodetica uscente da p possiamo considerare il primo punto coniugato a p lungo tale geodetica, l'unione di tali punti viene chiamato *luogo dei primi punti coniugati a p* . Se un punto coniugato appartiene al cut locus di p si dice *ottimale* e se c'è una singola geodetica minimale che lo congiunge a p è detto *puro*. Mostreremo, nel Capitolo 10, che in quest'ultimo caso $\nabla d_p(q)$ esiste e che il campo ∇d_p è continuo in q , inoltre che i punti di Cut_p con più di una geodetica minimale da p sono densi in Cut_p e che sono esattamente i punti di M dove la funzione d_p non è differenziabile, cioè l'*insieme singolare* di d_p , si veda in particolare l'Osservazione 10.1.15. Ulteriori risultati si possono inoltre trovare in [85, Sezione 3.E.3] e nelle referenze ivi citate.

6.7. Esempi

In generale, la determinazione del cut locus di un punto di una varietà riemanniana può essere molto difficile, anche nel caso delle superfici. Vediamo alcuni casi semplici in cui ciò può essere fatto, essendo gli spazi omogenei (dunque il cut locus è lo stesso per ogni punto) e alcune immagini relative al cut locus di superfici, dovute a Claudio Mancinelli, Marco Livesu e Enrico Poppo [131] (si veda anche https://ggg.dibris.unige.it/papers/SGP21_cut-locus/MLP21.html), ottenute con un metodo numerico.

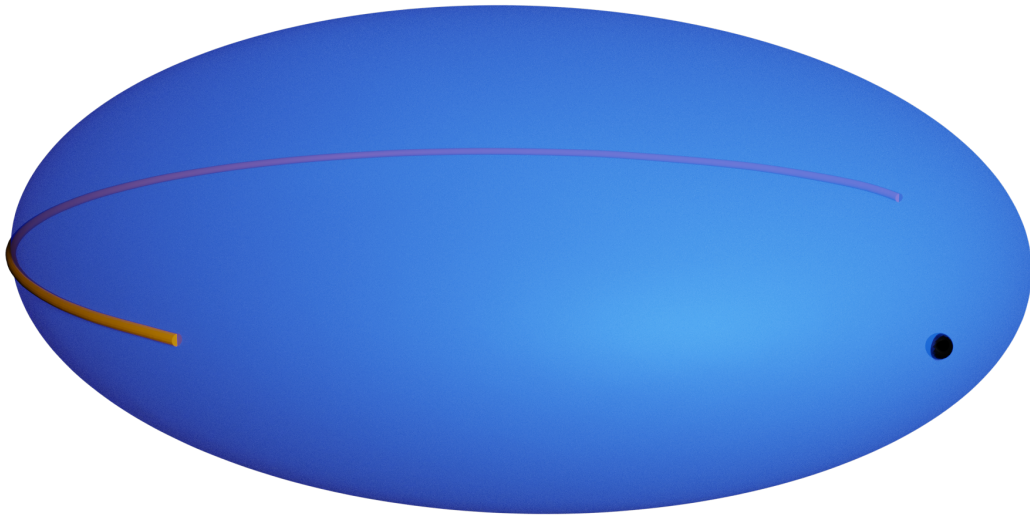
- Il cut locus di un qualunque punto di $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$ o dello spazio iperbolico $(\mathbb{H}^n, g_{\text{can}})$ è vuoto, in quanto ogni geodetica è sempre minimale tra ogni suoi due punti. Per \mathbb{R}^n è ovvio, mentre per \mathbb{H}^n segue dalla descrizione delle sue geodetiche nell'Esempio 5.5.5. Il raggio di iniettività in entrambi i casi è dunque $+\infty$.
- Il cut locus di un qualunque punto p della sfera $(\mathbb{S}^n, g_{\text{can}})$ consiste soltanto nel suo punto antipodale (si veda l'Esempio 5.5.3), che è raggiunto da ogni geodetica (dunque infinite) uscente da p di lunghezza π , inoltre è anche coniugato a p lungo ognuna di esse. Il raggio di iniettività di \mathbb{S}^n è quindi π .
- Considerando il rivestimento riemanniano $(\mathbb{S}^n, g_{\text{can}})$ dello spazio proiettivo $(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, g_{\text{can}})$, essendo la mappa di rivestimento un'isometria locale, le geodetiche sono date dalle proiezioni delle geodetiche di \mathbb{S}^n , dunque si vede facilmente che ogni geodetica da un punto $p \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ è chiusa e il primo punto coniugato a p lungo di essa è il punto p stesso, mentre smette di essere minimale quando raggiunge la lunghezza $\pi/2$, in quanto tale punto è raggiunto anche dalla geodetica uscente sempre da p , con velocità opposta e di stessa lunghezza $\pi/2$ (Esercizio 4.1.9). Segue che il raggio di iniettività è $\pi/2$ e il cut locus di un qualunque punto $p \in \mathbb{R}\mathbb{P}^n$ consiste nell'immagine per la mappa esponenziale \exp_p della sfera di raggio $\pi/2$ di $T_p M$ centrata in O_p , cioè un'ipersuperficie isometrica a $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$ con la sua metrica canonica. Si noti che nel caso di $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$, si ha che Cut_p è la "retta all'infinito".
- Le geodetiche uscenti da un qualunque punto dello spazio proiettivo complesso $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, con la metrica di Fubini–Study, dato dal quoziente $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$, con sommersione riemanniana associata $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ (Esempio 2.3.17), sono minimali esattamente fino alla lunghezza $\pi/2$ (si veda l'Esempio 4.4.1), dunque il raggio di iniettività è $\pi/2$ e il cut locus di un punto $p = \pi(z)$ è la proiezione della sottovarietà di \mathbb{S}^{2n+1} ottenuta considerando i punti a distanza $\pi/2$ lungo le geodetiche orizzontali da z , cioè quelle che hanno velocità iniziale ortogonale (rispetto alla metrica euclidea di \mathbb{R}^{2n+2}) a z e iz . Tale ipersuperficie si ottiene intersecando $\mathbb{S}^{2n+1} \subseteq \mathbb{R}^{2n+2}$ con l'iperspazio complesso di dimensione n (e reale $2n$) ortogonale a $\mathbb{C}z$ in \mathbb{R}^{2n+2} , dunque una sfera "massima" $\mathbb{S}^{2n-1} \subseteq \mathbb{S}^{2n+1}$, che una volta proiettata, è una sottovarietà

riemanniana di codimensione 2 di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, isometrica a $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$.

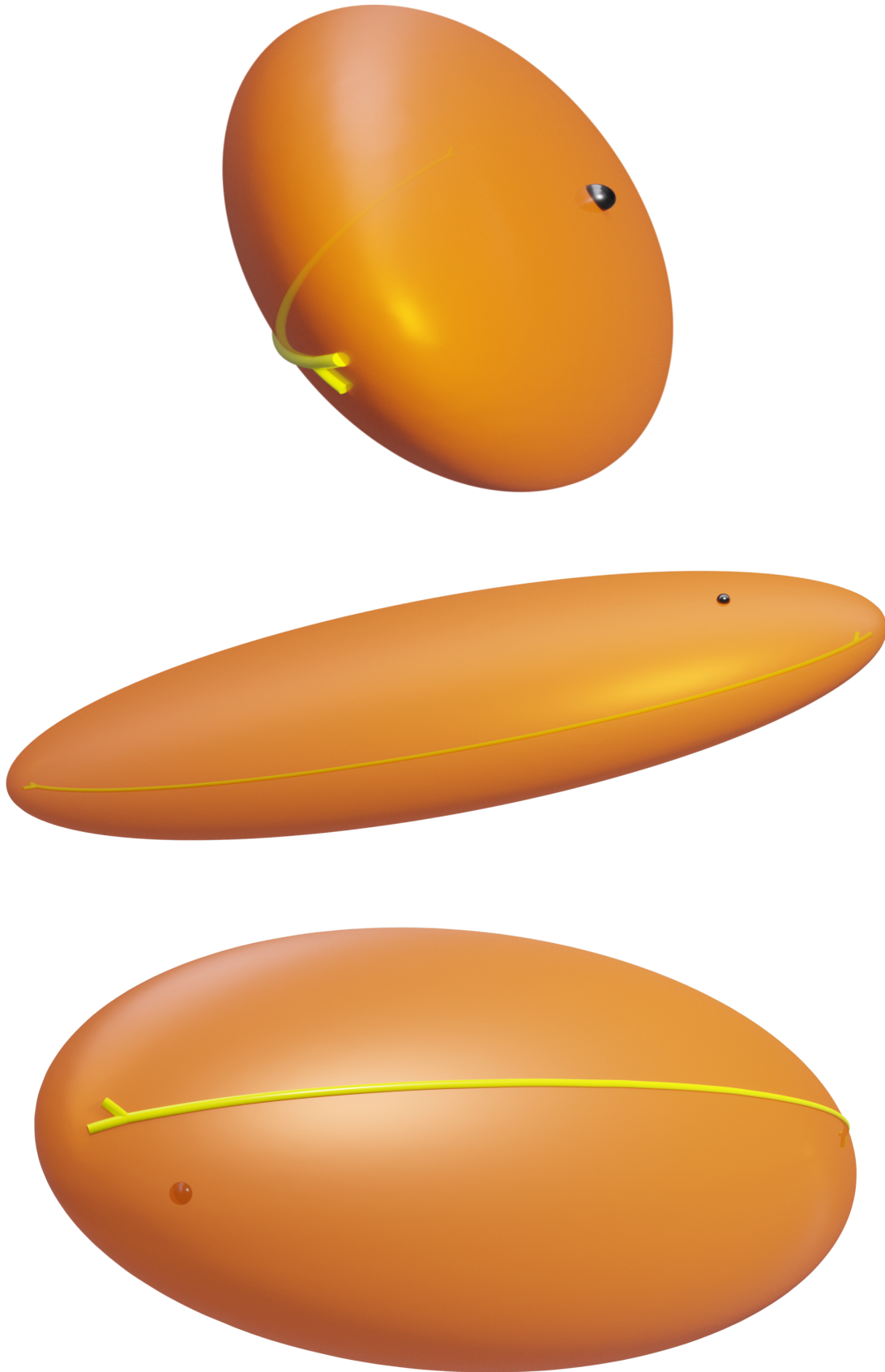
- Il cut locus di un punto di un toro piatto \mathbb{T}^2 non è difficile da determinare se il toro è “rettangolare”, cioè se il gruppo degli automorfismi del suo rivestimento universale \mathbb{R}^2 di cui è quoziente, è generato da due traslazioni associate a due vettori ortogonali tra loro, dunque abbiamo un rettangolo come *dominio fondamentale*. In tal caso, il cut locus di ogni punto $p \in \mathbb{T}^2$ è dato da due curve \mathbb{S}^1 che si intersecano ortogonalmente nel punto del toro più lontano da p (se p è il punto al centro del rettangolo–dominio fondamentale, il suo cut locus è dato proprio dal bordo di tale rettangolo). Se il toro non è “rettangolare”, la situazione è più complessa, si veda [85, Sezione 2.114–(e)] per un’analisi e una descrizione dettagliata.

Vediamo infine alcune immagini del cut locus di un punto di superfici in \mathbb{R}^3 (si tenga presente che il primo toro che segue *non è piatto*), ottenute con algoritmi numerici [131].

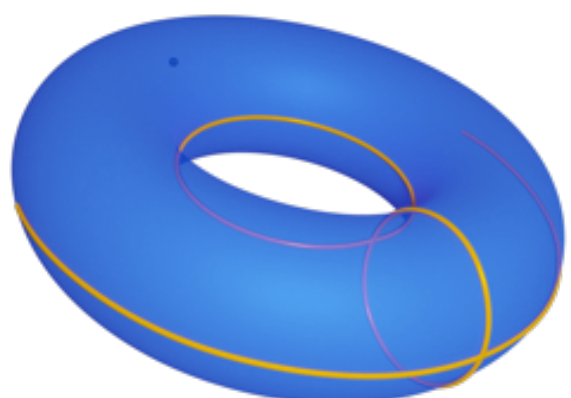
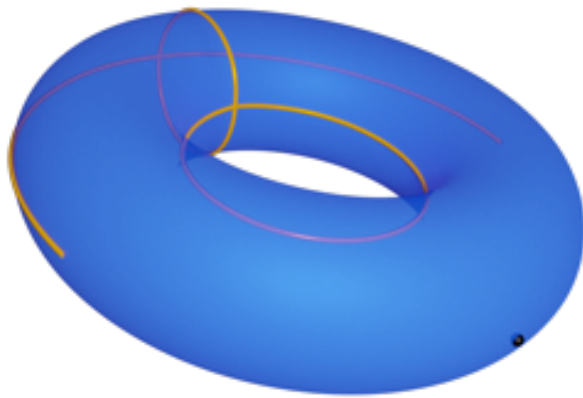
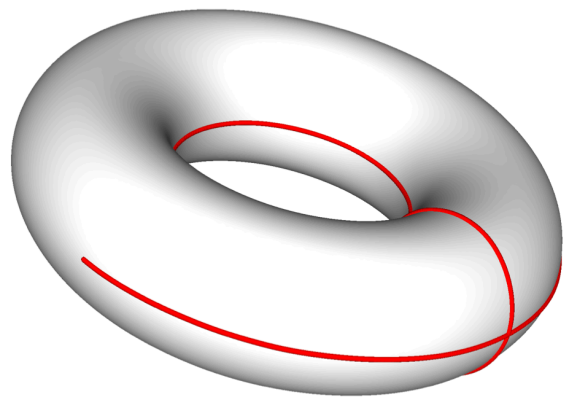
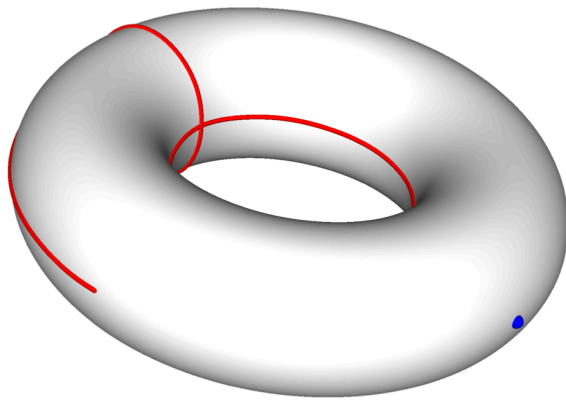
Ellissoide con due assi uguali.



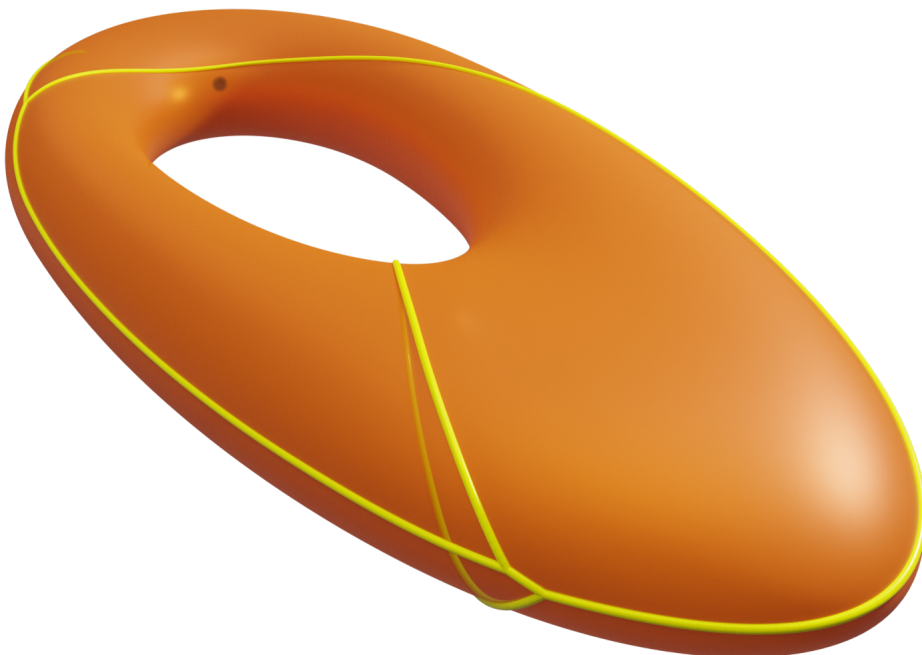
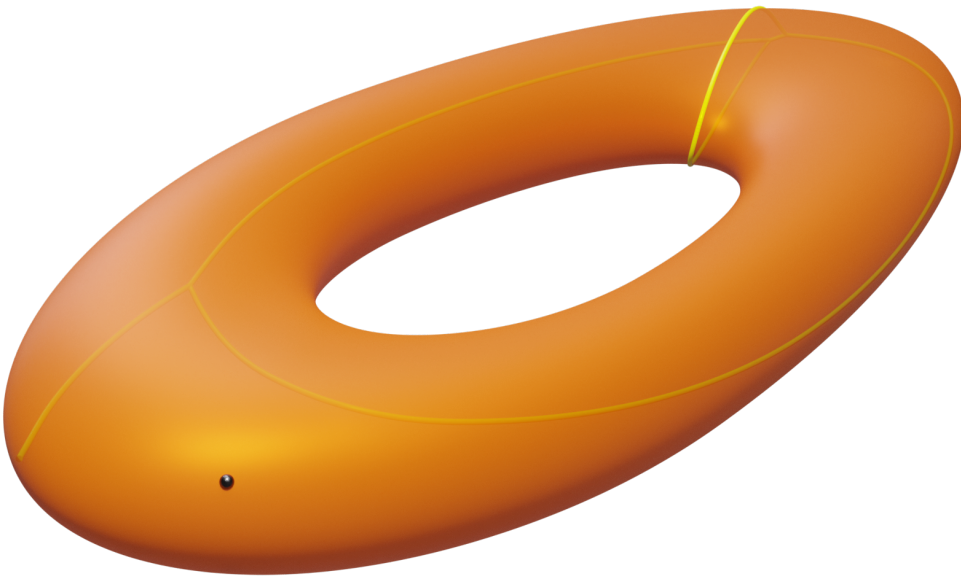
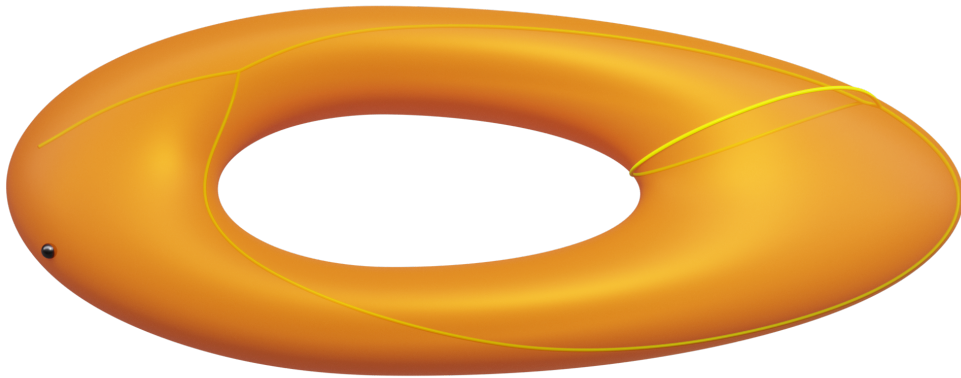
Ellissoide con tre assi diversi.



Toro.



Toro deformato.



Superficie di genere due.

