Richiami sulle sottovarietà
(curve, superfici, ipersuperfici)

§1. Curve in $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^N)$

si veda
- ABATE – TOVENA "CURVE e SUPERFICI"
- DO CARMO "DIFF. GEOM. OF CURVES AND SURFACES"

§2. Ipersuperfici e II forma fondamentale

*) Tutto si estende a codimensione > 1 e ambiente varietà riemanniana (M, g).
Noi ci occupiamo di ipersuperfici in $\mathbb{R}^{N+1}$ (Superfici in $\mathbb{R}^3$)

$$S \underset{\varphi}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^{N+1} \qquad \dim S = N$$

Metrica su S = restrizione p. scalare di $\mathbb{R}^{N+1}$

$\Rightarrow \exists!$ (a meno di segno) localmente
$\nu : S \to \mathbb{R}^{N+1}$ campo NORMALE UNITARIO

cioè $\quad g(\nu_p, w_p) = 0 \quad \forall w_p \in T_pS$

base del tangente di S: $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ in carte locali
$\qquad\qquad \cap$
$\qquad\qquad \mathbb{R}^{N+1}$

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \Big| \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^i} e_\alpha \qquad \{e_\alpha\} \text{ base ortonormale canonica di } \mathbb{R}^{N+1}$$

<u>OSS</u>: $\forall p \in S \quad \nu(p) \in S^N \subset \mathbb{R}^{N+1}$

$$G(p) = \nu(p) \in S^N \qquad G : S \to S^N$$

MAPPA di GAUSS

②

$$dG_p(v) = \frac{\partial \nu}{\partial x^i} v^i$$ differenziale mappa Gauss

$$dG_p : T_pS \longrightarrow T_{\nu(p)}S^N = \{ w \in \mathbb{R}^{N+1} \mid \langle \nu(p) \mid w \rangle = 0 \} \simeq T_pS$$

Poiché si ha $\langle \nu(p), \nu(p) \rangle = 1$

$$v \in T_pM \qquad 0 = v\langle \nu(p), \nu(p) \rangle = 2\langle dG_p(v), \nu(p) \rangle = 0$$

*) dG_p si può vedere allora come una mappa lineare da $T_pS \to T_pS$

OPERATORE FORMA (SHAPE OPERATOR) :

$$S_p = -dG_p : T_pS \longrightarrow T_pS$$

Definiamo:

<u>II Forma Fondamentale di S</u>

$$\text{II}_p(v,w) = -\langle dG_p(v), w \rangle \qquad \forall v,w \in T_pS$$

(II talvolta A, talvolta B)
in coordinate h_{ij}

$$h_{ij} = \text{II}_{ij} = \text{II}(\partial_i, \partial_j) = -\langle dG(\partial_i), \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \rangle$$

Deriviamo $\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mid \nu \rangle = 0 \quad \forall i$

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mid \nu \rangle = \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \mid \nu \rangle + \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \mid dG(\partial_j) \rangle$$

$$= \langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \mid \nu \rangle - \text{II}_{ij}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{II}_{ij} = h_{ij} = \langle \nu \mid \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \rangle} \qquad (1)$$

Equazioni di Gauss – Weingarten

Si ha $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} =$

$$= \left[\nabla^{\mathbb{R}^N}_{\partial_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \right]^{T} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} - \langle v | \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \rangle v$$

Da cui segue: (componente x componente di φ)

$$\boxed{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} = \Gamma^k_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + h_{ij} v} \quad (2)_{GW1}$$

OSS (1): $\nabla^S_{\partial_i} \partial_j = \nabla^{\mathbb{R}^N}_{\partial_i} \partial_j - h_{ij} v$

cioè $\mathrm{II} = \left(\nabla^{\mathbb{R}^N}_{\partial_i} \partial_j \right)^{\perp} \leftarrow$ Componente NORMALE

OSS (2): Dalla eq. (1) segue che II è simmetrica (2-forma bilineare)

Poiché $\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} | v \rangle = 0$ derivando in $\frac{\partial}{\partial x^j}$

$$\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} | v \rangle + \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} | \frac{\partial v}{\partial x^j} \rangle = 0 \quad \forall i j$$

$\Rightarrow \langle \frac{\partial v}{\partial x^j} | \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle = - h_{ij}$, allora

$A = \frac{\partial v}{\partial x^j} + h_{jk} g^{kp} \frac{\partial \varphi}{\partial x^p}$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial x^j}$ è tangente

$$\langle A | \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \rangle = - h_{ij} + h_{jk} g^{kp} \langle \frac{\partial \varphi}{\partial x^p} | \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \rangle = - h_{ij} + h_{jk} g^{kp} g_{ip}$$

$$= 0 \qquad \Rightarrow A \equiv 0$$

$$\boxed{\frac{\partial \nu}{\partial x^i} = -h_{ij}\, g^{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k}} \qquad (3) \ \S\, 1.0.2$$

Eq. (2)-(3) si dicono equazioni di Gauss-Weingarten

(Se ambiente è varietà (M, g) ci sono altri termini in più)

$$\Pi(v, w) = g(S(v), w)$$

- operatore forma S è autoaggiunto, con forma quadratica associata Π simmetrica

oss: $|\Pi| = |S|$ (metrica sui tensori)

× Teo Spettrale si diagonalizzano in una base ortonormale $v_1, \dots, v_N$ di $T_p M$ autovettori

v_i : direzioni principali

λ_i : autovalore associato a v_i
CURVATURE PRINCIPALI

*) Si veda ABATE - TOVENA × interpretazione di Π, v_i, λ_i in termini di curve su S

$$G = \det S \quad \left(\begin{array}{c}\text{a meno di} \\ \text{segno se} \\ N \text{ dispari}\end{array}\right)$$

CURVATURA di GAUSS

$$G = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_N$$

$$H = \operatorname{tr} S = h_{ij}\, g^{ij}$$

CURVATURA MEDIA

$$H = \lambda_1 + \dots + \lambda_N$$

S superficie in $\mathbb{R}^3$, $\nu = 2$

OSS: Interpretazione geometrica curvatura di Gauss in termini di convessità locale vedendo S come grafico nel suo tangente in un punto

(5)

$$G = \lambda_1 \lambda_2 \qquad H = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$|\Pi|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$$

$$= H^2 - 2G$$

$$\boxed{|\Pi|^2 = H^2 - 2G} \qquad (N=2)$$

OSS: $S_i = S(\partial_i) = -\frac{\partial \nu}{\partial x_i}$

EX:

OSS: Dalla eq. ② si ha

$$\text{Hess}\, \varphi^\alpha = \frac{\partial^2 \varphi^\alpha}{\partial x_i \partial x_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \varphi^\alpha}{\partial x^k} = h_{ij} \nu^\alpha$$

cioè tracciando

$$\overset{S}{\Delta} \varphi^\alpha = H \nu^\alpha \quad \text{cioè} \quad \overset{S}{\Delta} \varphi = H\nu$$

($H\nu$ si dice curvatura media vettoriale)

~~EX~~

Calcoliamo ora Riemann di S :

$$R_{ijke} = g(R(\partial_i,\partial_j)\partial_k, \partial_e) = g(\nabla^S_j \nabla^S_i \partial_k - \nabla^S_i \nabla^S_j \partial_k, \partial_e)$$

$$([\partial_i, \partial_j] = 0)$$

$$\nabla^S_j \nabla^S_i \partial_k = \nabla^S_j \left[\Gamma^p_{ik} \frac{\partial}{\partial x^p} \right] =$$

$$= \left\{ \nabla^{\mathbb{R}^N}_j \left(\Gamma^p_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x^p} \right) \right\}^T = \left\{ \nabla^{\mathbb{R}^N}_j \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} - h_{ik} \nu \right) \right\}^T$$

↳ per l'equazione GW1

$$= \left\{ \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} - (\nabla^{\mathbb{R}^N}_j h_{ik}) \nu - h_{ik} \frac{\partial \nu}{\partial x_j} \right\}^T$$

$$= \frac{\partial^3 \varphi^\alpha}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} e^T_\alpha - h_{ik} \left(- h_{jp} g^{ps} \frac{\partial \varphi}{\partial x^s} \right)$$

↳ per l'equazione GW2

$$\Rightarrow g(\nabla^S_j \nabla^S_i \partial_k, \partial_e) = \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_e} + h_{ik} h_{jp} g^{ps} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} \middle| \frac{\partial \varphi}{\partial x_e} \right\rangle$$

$$= \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_e} + h_{ik} h_{jp} g^{ps} g_{se}$$

$$= \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_e} + h_{ik} h_{je}$$, da cui

~~KOBA~~ KULKARNI NOMIZU

$$(*) \quad R_{ijke} = h_{ik} h_{je} - h_{jk} h_{ie} = \left(\frac{h \owedge h}{2} \right)_{ijke}$$

$$\boxed{\mathrm{Riem} = \frac{h \owedge h}{2}} \qquad (4)_{KN}$$

EQUAZIONE di GAUSS

<u>OSS</u>: $N=2$, se e_1, e_2 è base ortonormale di T_pS

$$Riem = \frac{R}{2}\frac{g \otimes g}{2} = \frac{h \otimes h}{2} \qquad Sec_p = \frac{R_p}{2}$$ (7)

$$\frac{R}{2} = R(e_1,e_2,e_1,e_2) = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = \det S = G$$

CURVATURA GAUSSIANA di S

$$\Rightarrow R = 2G$$

(Teorema "Egregium" di Gauss
– la curvatura Gaussiana di una superficie in $\mathbb{R}^3$ dipende solo dalla metrica (<u>COME</u> R!))

N qualunque – ipersuperficie

$$Riem = \frac{h \otimes h}{2} \qquad Ric_{ik} = g^{je}(h_{ik}h_{je} - h_{ie}h_{jk})$$

$$= H h_{ik} - h^2_{ik} \qquad (h^2_{ik} = h_{ij}g^{je}h_{ek})$$

$H \to$ C.MEDIA

$$R = \mathrm{tr}\, Ric = H^2 - |h|^2$$

$\to$ COERENTE CON $|h|^2 = H^2 - 2G$ se $N=2$

h^2 associato al quadrato dell'operatore SHAPE $S^2 = S \circ S$

$$= \left(\sum \lambda_i\right)^2 - \sum \lambda_i^2$$

$$= 2\sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j$$

λ_i autovalori II – "curvature principali"

Se $P = \langle v, w\rangle$ v, w base ortonormale P

$$Sec(\langle v,w\rangle) = R(v,w,v,w) = h(v,v)h(w,w)$$

$$\mathcal{R}(e_i \wedge e_j, e_i \wedge e_j) = h(e_i,e_i)h(e_j,e_j)$$

In particolare, se $\{e_i\}$ base ortonormale diagonalizza h, con autovalori associati λ_i

e_i diagonalizzano Ricci

$$R_{ii} = Ric(e_i, e_i) = H h_{ii} - h_{ii}^2 = H\lambda_i - \lambda_i^2 = \sum_{j \neq i} \lambda_i \lambda_j$$

$$Sec(e_i, e_j) = R(e_i, e_j, e_i, e_j) = h_{ii} h_{jj} = \lambda_i \lambda_j$$

$$R = 2 \sum_{i<j}' \lambda_i \lambda_j$$

$\{e_i \wedge e_j\}$ è base di $\Lambda^2 M$

$$\mathcal{R}(e_i \wedge e_j, e_i \wedge e_j) = R(e_i, e_j, e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j = Sec(e_i, e_j)$$

$$\mathcal{R}(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l) = R(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l) = h_{ik} h_{jl} - h_{il} h_{jk} = 0$$

a meno che $(i=k$ e $j=l)$ oppure $(i=l$ e $j=k)$

$\Rightarrow \{e_i \wedge e_j\}$ DIAGONALIZZA $\mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ è PURO DEF 5.2.7)

OSS: "h" è la radice quadrata (per $\mathcal{R}$ Kulkarni-Nomizu di Riem $\mathcal{R}$)

Tornando a SWS si ha

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}\right]^{\perp} = \left(\Gamma^p_{ij}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k \partial x_p}\right)^{\perp} + \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k}$$

$\downarrow$ SWS di nuovo

$$\left[\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_k \partial x_i \partial x_j}\right]^{\perp} = \Gamma^p_{ij}\, h_{pk} + \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k}$$

$\Rightarrow$ scambiando i e k e sottraendo

$$\frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k} + \Gamma^p_{ij} h_{pk} = \frac{\partial h_{kj}}{\partial x_i} + \Gamma^p_{kj} h_{pi} \qquad (**)$$

Ma allora, volendo

$$\nabla_k h_{ij} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k} - \Gamma^p_{ik} h_{pj} - \Gamma^p_{jk} h_{pi}$$

$$\nabla_i h_{kj} = \frac{\partial h_{kj}}{\partial x_i} - \Gamma^p_{ik} h_{pj} - \Gamma^p_{ij} h_{pk}$$

$$\nabla_k h_{ij} - \nabla_i h_{kj} = \frac{\partial h_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial h_{kj}}{\partial x_i} - \Gamma^p_{jk} h_{pi} + \Gamma^p_{ij} h_{pk} = 0$$

per la $(**)$ $\Rightarrow$ ∇h è 3-forma SIMMETRICA

EQUAZIONI DI CODAZZI-MAINARDI

$$\boxed{\nabla_k h_{ij} = \nabla_i h_{kj}} \qquad (5)_{CM}$$

Cioè h è TENSORE di CODAZZI

Teoremi Importanti (Geometrici)

1) Teo Hadamard I : M^n cpt $n > 1$ $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

~~[illegible]~~

Π definito positivo $\Longrightarrow M^n$ diffeomorfo S^n

2) Teo Hadamard II : M^n cpt $n \geq 2$ $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$

sono equivalenti
- Sec $\neq 0$
- Sec > 0
- M orientabile, ν Normale globale

$\nu : M^n \to S^n$ DIFFEO

$\Rightarrow M^n$ è STRETTAMENTE CONVESSA

3) Rigidità OVALOIDI : $M_1, M_2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ compatte entrambi Sec > 0 $(G > 0)$

$M_1 \xrightarrow[\text{ISOMETRIA}]{f} M_2$ $\Longrightarrow \exists$ isoF di $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$F(M_1) = M_2$

4) Teo Fondamentale delle ipersuperfici

Se (M^n, g) ha tensore simmetrico tipo $(1,1)$ S che soddisfa equazioni di GAUSS e di CODAZZI-MAINARDI $\Longrightarrow \forall p \in M$ $\exists\, U$ intorno di p e isometria $\varphi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ di cui S è l'operatore forma.

(5) VARIAZIONE del funzionale AREA

$\varphi : M^N \hookrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ $\qquad A(\varphi) = \int_{M^N} d\mu^M$

$\varphi_S : M^N \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}^{N+1}$

$$\frac{d}{dS} A(\varphi_S) \Big|_{S=0} = - \int_{M^N} H \langle X | \nu \rangle \, d\mu^M$$

dove $X(p) = \dfrac{\partial \varphi_S(p)}{\partial S} \Big|_{S=0}$

" $H\nu$ è Eq. Eulero - Lagrange del f. Area "

- Se M^N soddisfa $H \equiv 0$ si dice SUPERFICIE MINIMA

(6) Teorema di Gauss - Bonnet

$M^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad M^2$ compatta, G c. Gauss di M

$$\int_{M^2} G \, d\mu = 2\pi \chi(M^2)$$

$\hookrightarrow$ Caratteristica Eulero.

$\chi(S^2) = 2 \quad \chi(T^2) = 0$

genere $(M^2) = \dfrac{2 - \chi(M^2)}{2}$