CAPITOLO 9

Curvatura e topologia I – L'approccio "classico"

In questo capitolo vogliamo presentare alcuni teoremi "classici" in cui assunzioni sulla curvatura implicano conclusioni sulla geometria e topologia delle varietà riemanniane. Da un altro punto di vista, questi risultati forniscono "ostruzioni" topologiche all'esistenza di metriche con definite caratteristiche di curvatura sulle varietà.

Nelle prossime sezioni presenteremo le dimostrazioni classiche di alcuni di questi teoremi, generalmente basate sull'analisi della forma indice e sulle proprietà dei campi di Jacobi lungo le geodetiche della varietà, in un approccio di tipo variazionale. Mentre nel Capitolo 12 mostreremo delle dimostrazioni alternative basate sulle proprietà delle funzioni distanza discusse nel Capitolo 8, seguendo un approccio suggerito da P. Petersen in [71].

Prima di passare a vedere tali risultati, mostriamo un paio di lemmi tecnici.

LEMMA 9.0.1. *Sia $\pi : M \to N$ un'isometria locale tra due varietà riemanniane (M, g) e (N, h). Allora, se M è completa, anche N è completa e π è un rivestimento riemanniano.*
Se π è un rivestimento riemanniano, M è completa se e solo se N è completa.

DIMOSTRAZIONE. Il secondo punto segue dal primo, una volta che mostriamo che N completa implica M completa. Se allora N è completa e π è un rivestimento riemanniano, fissato $p \in M$ e posto $q = \pi(p) \in N$, se $\widetilde{\gamma}$ è una geodetica uscente da p, la geodetica "immagine" $\gamma = \pi \circ \widetilde{\gamma}$ uscente da $q \in N$, essendo N completa, è definita su tutto $\mathbb{R}$. Ma allora, "sollevando" γ a M, abbiamo una geodetica che estende $\widetilde{\gamma}$, definita su tutto $\mathbb{R}$. Per il Corollario 6.1.4 al teorema di Hopf–Rinow, segue che M è completa.
Vediamo ora il primo punto del lemma. Sia $q \in \pi(M)$ e $p \in \pi^{-1}(q)$, allora per ogni geodetica $\gamma : I \to N$ uscente da q esiste un'unica geodetica "sollevata" $\widetilde{\gamma} : \widetilde{I} \to M$, uscente da p e tale che $\gamma = \pi \circ \widetilde{\gamma}$ su $I \cap \widetilde{I}$. Ciò segue in modo immediato tenendo conto che essendo π un'isometria locale, esistono un intorno aperto U di p in M ed un intorno aperto V di q in N tali che $\pi : U \to V$ è una isometria e che ogni geodetica viene mappata in una geodetica da una isometria locale. Essendo M geodeticamente completa, si ha che $\widetilde{\gamma}$ è definita su tutto $\mathbb{R}$, dunque la geodetica $\pi \circ \widetilde{\gamma}$ estende γ a tutto $\mathbb{R}$, da cui anche N è geodeticamente completa, per il Corollario 6.1.4.

Proviamo che la mappa π è surgettiva. Essendo N connessa, è sufficiente mostrare che $\pi(M)$ è un sottoinsieme aperto e chiuso di N. Che $\pi(M)$ sia aperto segue immediatamente dal fatto che π è un diffeomorfismo (isometria) locale. Consideriamo una successione convergente di punti $q_i = \pi(p_i) \to q \in N$, supponendo che $q_{\bar{i}} \in B_r(q)$, per un certo indice $\bar{i} \in \mathbb{N}$, con $r < \mathrm{inj}(q)$, dunque esiste un'unica geodetica minimale $\gamma : [0, \bar{t}] \to N$ da $q_{\bar{i}}$ a q data da $\gamma(t) = \exp_{q_{\bar{i}}}(tw)$. Essendo π un'isometria locale la geodetica "sollevata" $\widetilde{\gamma}(t) = \exp_{p_{\bar{i}}}(tv)$ con $d\pi_{p_{\bar{i}}}(v) = w$, che esiste per ogni $t \in \mathbb{R}$ per la completezza di M, soddisfa $\gamma = \pi \circ \widetilde{\gamma}$ da cui $q = \gamma(\bar{t}) = \pi(\widetilde{\gamma}(\bar{t}))$, quindi $q \in \pi(M)$ che allora è un sottoinsieme chiuso di N.

Infine, dimostriamo che π è un rivestimento riemanniano. Sia q un punto di N e sia $\pi^{-1}(q) = \{p_i \,:\, i \in I\}$. Se $r > 0$ è un numero reale minore del raggio di iniettività $\mathrm{inj}(q)$ di q in N, abbiamo che

$$\exp_q |_{B_r(O_q)} : B_r(O_q) \to B_r(q)$$

è un diffeomorfismo. Siano $U = B_r(q)$ e $U_i = B_r(p_i)$ per $i \in I$, essendo π un'isometria locale, le geodetiche di M vengono mandate in geodetiche di N della stessa lunghezza, di conseguenza,

$$\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq \pi^{-1}(U).$$

Fissato ora un qualsiasi indice $i \in I$, consideriamo un vettore $v \in T_{p_i}M$ e la corrispondente geodetica $\widetilde{\gamma}$ su M uscente da p_i con velocità iniziale v. Siano inoltre $w = d\pi_{p_i}(v)$ e γ la geodetica su N uscente da q con velocità iniziale w. Dal momento che π è un'isometria locale, manda $\widetilde{\gamma}$ in γ (in altre parole, $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$), quindi

$$\exp_q \big(d\pi_{p_i}(tv)\big) = \exp_q(tw) = \gamma(t) = \pi(\widetilde{\gamma}(t)) = \pi\big(\exp_{p_i}(tv)\big),$$

di conseguenza, il seguente diagramma è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
B_r(O_{p_i}) \arrow[r, "d\pi_{p_i}"] \arrow[d, "\exp_{p_i}"'] & B_r(O_q) \arrow[d, "\exp_q"] \\
U_i \arrow[r, "\pi"] & U
\end{tikzcd}$$

Poiché $d\pi_{p_i}$ è un'isometria lineare di $T_{p_i}M$ in T_qN (dunque un diffeomorfismo) e $\exp_q$ è un diffeomorfismo, ciò vale anche per la composizione $\exp_q \circ d\pi_{p_i}$. Segue dunque che $\pi \circ \exp_{p_i}$ è un diffeomorfismo, da cui la mappa (surgettiva)

$$\exp_{p_i} : B_r(O_{p_i}) \to U_i = B_r(p_i)$$

è iniettiva, quindi un diffeomorfismo anch'essa. Concludiamo allora che anche la mappa $\pi|_{U_i} : U_i \to U$ è un diffeomorfismo, inoltre è un'isometria, essendo $d\pi_p$

un'isometria lineare per ogni $p \in U_i$.
Dimostriamo ora che gli aperti U_i sono a due a due disgiunti. Fissati due indici distinti $i, j \in I$, sia γ una geodetica minimizzante da p_i a p_j. La composizione $\pi \circ \gamma$ è una geodetica (chiusa) da q a q della stessa lunghezza, che deve quindi necessariamente uscire dalla palla geodetica $B_r(q)$, altrimenti la geodetica γ non uscirebbe da U_i ($p_j \notin U_i$). Segue che

$$\mathscr{L}(\gamma) = \mathscr{L}(\pi \circ \gamma) \geq 2r,$$

dunque $d(p_i, p_j) \geq 2r$, che implica che U_i e U_j sono disgiunti.
Infine vediamo che $\pi^{-1}(U)$ è uguale all'unione degli U_i. Sia $p \in \pi^{-1}(U)$ e $\overline{q} = \pi(p) \in U$. Chiamiamo $\ell < r$ la distanza tra $\overline{q}$ e q e consideriamo la geodetica minimizzante $\gamma : [0, \ell] \to N$ da $\overline{q}$ a q parametrizzata in lunghezza d'arco. Essendo π una isometria locale, posto $\widetilde{\gamma}$ la geodetica uscente da p con velocità iniziale $d\pi_p^{-1}(\gamma'(0))$, segue che $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ ed inoltre che la lunghezza di $\widetilde{\gamma}$ è ℓ. Di conseguenza, al tempo ℓ, la curva $\widetilde{\gamma}$ deve passare per uno dei p_i ed essendo $\ell < r$, ciò implica che p appartiene a U_i. □

Osserviamo che l'ipotesi di completezza di M è essenziale. Infatti, consideriamo il rivestimento standard $\pi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$ dato dalla proiezione sul quoziente, dove $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{RP}^2$ si considerano dotati delle metriche usuali. Se $M = \mathbb{S}^2 \setminus \{p\}$ (che non è completa) e $\varphi : M \to \mathbb{RP}^2$ è la restrizione di π a M, non è vero che φ è un rivestimento (la fibra sopra $\pi(p)$ ha un solo punto, mentre tutte le altre fibre ne hanno due).

LEMMA 9.0.2. *Siano (M, g), (N, h) due varietà riemanniane e $\varphi, \psi : M \to N$ due isometrie locali. Supponiamo che vi sia un punto $p \in M$ tale che $\varphi(p) = \psi(p)$ e $d\varphi_p = d\psi_p$, allora $\varphi = \psi$.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Omega = \{q \in M \,:\, \varphi(q) = \psi(q), d\varphi_q = d\psi_q\}$. L'insieme Ω è non vuoto (p vi appartiene) e chiuso in M, facciamo vedere che è anche aperto, da cui la tesi segue.
Sia $q \in \Omega$ e sia $B_r(q)$ una palla geodetica in M, con $r < \mathrm{inj}(q)$. Allora ogni punto $q' \in B_r(q)$ è della forma $\exp_q(v)$ per qualche $v \in B_r(O_q) \subseteq T_qM$. Osserviamo che $\varphi \circ \exp_q = \exp_{\varphi(q)} \circ (d\varphi)_q$ perché un'isometria locale manda geodetiche in geodetiche; lo stesso, chiaramente, vale per ψ. Di conseguenza,

$$\varphi(q') = \varphi\big(\exp_q(v)\big) = \exp_{\varphi(q)}\big(d\varphi_q(v)\big) = \exp_{\psi(q)}\big(d\psi_q(v)\big) = \psi\big(\exp_q(v)\big) = \psi(q')\,.$$

Pertanto $B_r(q) \subseteq \Omega$. Dall'arbitrarietà di $q \in \Omega$, segue che Ω è aperto. Essendo aperto, chiuso e non vuoto, coincide con l'intera varietà M, (che ricordiamo, è connessa). □

9.1. Il teorema di Bonnet–Myers

In questa sezione vedremo come, assumendo che la curvatura di Ricci sia positivamente limitata dal basso, si possa dedurre che la varietà è compatta e che il suo gruppo fondamentale è finito. Ciò è conseguenza del seguente *teorema di Bonnet–Myers*, detto anche "stima del diametro".

Con la notazione $\mathrm{Ric} \geq \lambda g$ *si intende che per ogni* $p \in M$*, il minimo autovalore dell'operatore* Ric_p *è maggiore o uguale a* λ*, equivalentemente, per ogni* $p \in M$ *e* $v \in T_pM$ *si ha* $\mathrm{Ric}_p(v, v) \geq \lambda g_p(v, v)$*.*

TEOREMA 9.1.1 (Teorema di Bonnet–Myers). *Sia* (M, g) *una varietà riemanniana completa di dimensione* $n \geq 2$*, con* $\mathrm{Ric} \geq K(n-1)g$ *per un qualche numero reale* $K > 0$*. Allora il diametro di* M *è minore o uguale a* $\pi/\sqrt{K}$*.*

DIMOSTRAZIONE. Siano p e q due punti di M, e sia $\gamma : [0, \ell] \to M$ una geodetica minimale da p a q parametrizzata per lunghezza d'arco. Per minimalità, si deve avere $I(Y, Y) \geq 0$ per ogni campo vettoriale Y lungo γ che sia nullo agli estremi. Siano $e_1, \dots, e_{n-1} \in T_pM$ dei vettori che completano $\dot\gamma(0)$ a una base ortonormale di T_pM e siano E_i le estensioni parallele lungo γ dei vettori e_i. Definiamo nel seguente modo, per $i \in \{1, \dots, n-1\}$, dei campi vettoriali Y_i lungo γ,

$$Y_i(t) = \sin\Bigl(\frac{\pi t}{\ell}\Bigr) E_i(t)\,.$$

Poiché gli E_i sono campi paralleli lungo γ, le derivate covarianti dei campi Y_i si ottengono semplicemente derivando $\sin\bigl(\frac{\pi t}{\ell}\bigr)$,

$$\begin{aligned} Y_i'(t) &= \frac{\pi}{\ell}\cos\Bigl(\frac{\pi t}{\ell}\Bigr) E_i(t)\,,\\ Y_i''(t) &= -\frac{\pi^2}{\ell^2}\sin\Bigl(\frac{\pi t}{\ell}\Bigr) E_i(t)\,. \end{aligned}$$

Per costruzione, gli Y_i sono campi nulli agli estremi, quindi $I(Y_i, Y_i) \geq 0$, e si ha

$$\begin{aligned} I(Y_i, Y_i) &= \int_0^\ell \bigl(|Y'|^2 - R(\dot\gamma, Y, \dot\gamma, Y)\bigr)\,dt\\ &= -\int_0^\ell g\bigl(Y, Y'' + R(\dot\gamma, Y)\dot\gamma\bigr)\,dt\\ &= -\int_0^\ell \Bigl(-\frac{\pi^2}{\ell^2}\sin^2\Bigl(\frac{\pi t}{\ell}\Bigr) + R(\dot\gamma, E_i, \dot\gamma, E_i)\,\sin^2\Bigl(\frac{\pi t}{\ell}\Bigr)\Bigr)\,dt. \end{aligned}$$

Essendo $\{\dot\gamma(t), E_1(t), \dots, E_{n-1}(t)\}$ una base ortonormale di $T_{\gamma(t)}M$ per ogni $t \in [0, \ell]$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} R(\dot\gamma, E_i, \dot\gamma, E_i) = R(\dot\gamma, \dot\gamma) \geq K(n-1)\,g(\dot\gamma, \dot\gamma) = K(n-1)\,.$$

Concludiamo allora,

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{i=1}^{n-1} I(Y_i, Y_i) \\
&= \int_0^\ell \sin^2\Big(\frac{\pi t}{\ell}\Big)\Big(\frac{\pi^2(n-1)}{\ell^2} - \sum_{i=1}^{n-1} R(\dot\gamma, E_i, \dot\gamma, E_i)\Big)\, dt \\
&\leq \int_0^\ell \sin^2\Big(\frac{\pi t}{\ell}\Big)\Big(\frac{\pi^2(n-1)}{\ell^2} - K(n-1)\Big)\, dt \\
&= (n-1)\Big(\frac{\pi^2}{\ell^2} - K\Big)\int_0^\ell \sin^2\Big(\frac{\pi t}{\ell}\Big)\, dt\,.
\end{aligned}
$$

Di conseguenza, si deve avere $\pi^2/\ell^2 - K \geq 0$, da cui $\ell \leq \pi/\sqrt{K}$.
Abbiamo pertanto dimostrato che la distanza tra due qualsiasi punti di M è al più $\pi/\sqrt{K}$, dunque il diametro di M è minore o uguale a $\pi/\sqrt{K}$. □

COROLLARIO 9.1.2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa con $\mathrm{Ric} \geq \lambda g$ per un qualche numero reale $\lambda > 0$. Allora M è compatta e il suo gruppo fondamentale è finito.*

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema di Bonnet–Myers 9.1.1 la varietà (M, g) ha diametro limitato (e è chiusa), quindi per il Corollario 6.1.4 al teorema di Hopf–Rinow, M è compatta. Sia $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \to (M, g)$ il rivestimento universale riemanniano di M. Essendo M completa, per il Lemma 9.0.1, anche $\widetilde{M}$ è completa. Poiché il tensore di curvatura è invariante per isometrie locali, la curvatura di Ricci di $\widetilde{M}$ è limitata inferiormente allo stesso modo di M. Applicando nuovamente il teorema di Bonnet–Myers 9.1.1 otteniamo allora che anche $\widetilde{M}$ è compatta. Di conseguenza il numero dei fogli del rivestimento è finito e da questo segue che il gruppo fondamentale di M è finito. □

Una conseguenza di questo corollario è ad esempio che sul toro $\mathbb{T}^2$ (o su una qualunque superficie compatta diversa dalla sfera, cioè di genere maggiore di zero) non si può mettere una metrica con $\mathrm{Ric} > 0$, in quanto $\pi_1(\mathbb{T}^2) \simeq \mathbb{Z}^2$ (analogamente, nemmeno su $\mathbb{T}^n$ o una metrica con $\mathrm{Ric} \geq \lambda g > 0$ su una qualunque varietà completa del tipo $M \times \mathbb{S}^1$).

OSSERVAZIONE 9.1.3. La condizione $\mathrm{Ric} \geq K(n-1)g$, con $K > 0$, non si può "indebolire" a $\mathrm{Ric} > 0$ o nemmeno modificare in $\mathrm{Sec} > 0$, in quanto per esempio il paraboloide di rotazione $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = x^2 + y^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ha tutte le curvature sezionali in ogni suo punto positive, ma non è compatto.

Si noti che la sfera standard $\mathbb{S}^n_R$ di raggio $R = 1/\sqrt{K}$ soddisfa le ipotesi del teorema di Bonnet–Myers e il suo diametro è in effetti proprio uguale a $\pi/\sqrt{K}$, dunque la conclusione è ottimale. Vedremo nella Sezione 12.4, nelle ipotesi del teorema di Bonnet–Myers, che se siamo in tale situazione "massimale", cioè che il diametro è uguale a $\pi/\sqrt{K}$, allora la varietà riemanniana (M, g) è isometrica alla sfera standard di raggio $1/\sqrt{K}$ (teorema massimale di Cheng ???).

LEMMA 9.1.4 (Lemma di Synge). *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa con curvatura sezionale $\mathrm{Sec}(\pi) \geq K > 0$, per ogni 2–piano $\pi \subseteq T_pM$ e ogni $p \in M$. Allora M è compatta con diametro minore o uguale a $\pi/\sqrt{K}$ e il suo gruppo fondamentale è finito.*

DIMOSTRAZIONE. Mostriamo che $\mathrm{Ric} \geq K(n-1)g$, la tesi poi segue allora dal teorema di Bonnet–Myers 9.1.1 e dal Corollario 9.1.2. Sia $p \in M$, allora per ogni $v \in T_pM$ non nullo, per l'equazione (5.9) e l'ipotesi sulle curvature sezionali, si ha

$$\mathrm{Ric}_p(v, v) = \sum_{i=1}^{n-1} R_p(v, e_i, v, e_i) = |v|_p^2 \sum_{i=1}^{n-1} \mathrm{Sec}_p(\langle v, e_i\rangle) \geq K(n-1)g_p(v, v)$$

dove $e_1, \dots, e_{n-1}$ completano $v/|v|_p$ a una base ortonormale di T_pM. $\square$

NOTA STORICA. Nel 1855 Bonnet dimostra la stima sul diametro per le superfici in $\mathbb{R}^3$, nel lemma di Synge, più precisamente dimostra che ogni curva di lunghezza maggiore di $\pi/\sqrt{K}$, dove $K > 0$ è il minimo della curvatura gaussiana della superficie, non può essere minimizzante. Tale stima viene estesa da Synge a ogni dimensione nel 1926, come applicazione della formula di variazione seconda. Nel 1931 Hopf e Rinow, per le superfici e Myers nel 1932, in ogni dimensione, osservano che assumendo la completezza nel lemma di Synge si ha la compattezza della varietà e dunque la conclusione di finitezza del gruppo fondamentale. Infine, Myers nel 1941 dimostra il Teorema 9.1.1 e il Corollario 9.1.2, assumendo la positività soltanto del tensore di Ricci invece che della curvatura sezionale.

9.2. Il teorema di Synge

TEOREMA 9.2.1 (Teorema di Synge). *Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta, orientabile e di dimensione pari, con curvatura positiva, cioè $\mathrm{Sec} > 0$ in ogni punto. Allora M è semplicemente connessa.*
Se (M, g) è compatta e di dimensione dispari, con curvatura positiva, allora è orientabile.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il primo punto del teorema. Supponiamo per assurdo che il gruppo fondamentale di M sia non banale e sia $\mathcal{C} \in \pi_1(M)$ una classe di omotopia non banale di curve chiuse. Allora, per la Proposizione 6.1.13 esiste in $\mathcal{C}$ una geodetica chiusa $\gamma : \mathbb{S}^1 \to M$ di lunghezza minima positiva (dunque non banale). Sia $p = \gamma(0)$ e sia inoltre $P : T_pM \to T_pM$ l'operatore di trasporto parallelo lungo γ, definito nella Sezione 3.6. Sappiamo dall'Osservazione 3.6.8 che P è un'isometria lineare da (T_pM, g_p) in sé stesso, inoltre

P conserva l'orientazione, poiché M è orientabile (lo si mostri per esercizio). Essendo γ una geodetica P manda $\dot\gamma(0) \in T_pM$ in sé stesso, di conseguenza, poiché il trasporto parallelo conserva l'ortogonalità, il sottospazio $W = \dot\gamma(0)^\perp$ di T_pM, di dimensione dispari $n-1$, viene a sua volta mandato in sé stesso da P, quindi $P|_W : W \to W$ è un'isometria lineare che conserva l'orientazione di uno spazio vettoriale di dimensione dispari in se stesso. Ricordando che una qualsiasi isometria lineare $\varphi : \mathbb{R}^{2m+1} \to \mathbb{R}^{2m+1}$, con determinante uguale a 1, deve avere almeno un autovettore di autovalore 1, abbiamo che esiste $w \in W$ non nullo, tale che $Pw = w$.
Consideriamo allora il campo Y lungo γ con $Y(0) = w$, ottenuto trasportando parallelamente w lungo γ, che dunque è di classe C^∞, non nullo e ortogonale a $\dot\gamma$ in tutti i punti della geodetica. Abbiamo, per l'Osservazione 6.3.13,

$$I(Y,Y) = \int_{\mathbb{S}^1} \big(\underbrace{|Y'|^2}_{0} - \underbrace{R(\dot\gamma, Y, \dot\gamma, Y)}_{>0} \big)\, ds \,<\, 0\,,$$

in quanto

$$R(\dot\gamma(t), Y(t), \dot\gamma(t), Y(t)) = \mathrm{Sec}(\langle \dot\gamma(t), Y(t)\rangle)\, |Y(t)|^2\, |\dot\gamma(t)|^2 > 0\,,$$

per ogni $t \in \mathbb{S}^1$.
Tuttavia, γ è minimizzante quindi una qualsiasi variazione H associata a Y deve verificare

$$0 \le \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{E}(\gamma_s)\Big|_{s=0} = I(Y,Y)$$

che è una contraddizione.

Se M ha dimensione dispari e per assurdo non è orientabile, allora non può essere semplicemente connessa (si veda la Sezione 1.4). Segue allora che esiste una classe di omotopia libera di curve chiuse non banale, tale che il trasporto parallelo lungo ogni curva in tale classe $P : T_pM \to T_pM$ sia un'isometria con determinante uguale a -1 (lo si mostri per esercizio). Argomentando come sopra, considerando la geodetica di lunghezza minima (positiva) γ in tale classe, esiste un vettore $w \in W = \dot\gamma(0)^\perp$ sottospazio vettoriale di T_pM, che ha dimensione pari $n-1$, tale che w è mandato in sé stesso da P, quindi si trova di nuovo una contraddizione procedendo analogamente al primo punto. □

??? Se (M,g) è completa ma non compatta, con la sola ipotesi di curvatura sezionale positiva si mostra che M è diffeomorfa a $\mathbb{R}^n$ (indipendentemente dalla parità della sua dimensione), si veda il *teorema del soul* **??**. ???
Assumendo la compattezza di M, tutte le altre ipotesi nel primo punto del teorema di Synge sono essenziali. Se si assumesse solamente $\mathrm{Sec} \ge 0$ (invece di $\mathrm{Sec} > 0$), un controesempio alla conclusione sarebbe dato dal toro $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ con la metrica flat (nella dimostrazione si otterrebbe solo $I(Y,Y) = 0$, che non porta ad alcuna contraddizione). Se si rimuovesse l'ipotesi di dimensione pari, $\mathbb{RP}^3$

sarebbe un controesempio (non si potrebbe concludere che esiste un autovettore $w \in W$ di P, di autovalore 1) e senza l'ipotesi di orientabilità, lo sarebbe $\mathbb{RP}^2$ ($P|_W : W \to W$ potrebbe non mantenere l'orientazione, dunque avrebbe determinante -1 e potrebbe non avere un autovalore uguale a 1).

Rimuovendo l'ipotesi di orientabilità, si ha comunque il seguente risultato, applicando il teorema di Synge al rivestimento a due fogli (che è orientabile).

COROLLARIO 9.2.2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta, non orientabile e di dimensione pari, con $\mathrm{Sec} > 0$ in ogni punto. Allora il suo rivestimento orientabile a due fogli è il rivestimento universale di M, per cui $\pi_1(M) \simeq \mathbb{Z}_2$.*

OSSERVAZIONE 9.2.3. Nel caso di dimensione dispari, invece non si può dire molto sul gruppo fondamentale. Infatti è ben noto che le sfere $\mathbb{S}^{2m+1}$ sono il rivestimento universale riemanniano di infiniti spazi con curvatura costante uguale a 1, per esempio in dimensione tre, gli spazi *lenticolari* [**88**].

Una conseguenza del teorema di Synge è che non esistono metriche riemanniane a curvatura sezionale positiva su una varietà compatta, orientabile e di dimensione pari, se non è semplicemente connessa. In particolare, $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RP}^2$ non ammette tali metriche, avendo gruppo fondamentale $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Menzioniamo qui la famosa *congettura di Hopf*, degli anni '50, che asserisce che non esistono metriche riemanniane a curvatura sezionale positiva su $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$.

OSSERVAZIONE 9.2.4. Ricordando l'Osservazione 7.5.20, i teoremi di Bonnet–Myers e Synge (e il *teorema del soul* **??**) mostrano che le varietà riemanniane con curvatura positiva hanno forti restrizioni sulla loro possibile topologia (si veda il survey di Ziller [**112**], per approfondire).

9.3. Il teorema di Cartan–Hadamard

Vediamo ora un risultato in ipotesi di curvatura sezionale negativa, il *teorema di Cartan–Hadamard*, che consente di dedurre che il rivestimento universale della varietà è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 9.3.1 (Cartan–Hadamard). *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa di dimensione n, con $\mathrm{Sec} \leq 0$ in ogni punto. Allora il rivestimento universale di M è diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario 6.4.11, la mappa esponenziale $\exp_p : T_pM \to M$ è un diffeomorfismo locale per ogni punto $p \in M$. Fissiamo allora p e definiamo $\widetilde{g}_p$ come la metrica su T_pM data dal pull–back di g tramite $\exp_p$ che è non degenere poiché $\exp_p$ è un diffeomorfismo locale. Per definizione di $\widetilde{g}_p$, la mappa $\exp_p$ è un'isometria locale tra $(T_pM, \widetilde{g}_p)$ e (M, g). Le geodetiche su M uscenti da p sono della forma $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ per $v \in T_pM$, di conseguenza, le geodetiche uscenti da $O_p \in T_pM$ rispetto alla metrica $\widetilde{g}_p$ sono proprio le rette tv per l'origine, essendo $\exp_p$ un'isometria, dunque definite per ogni $t \in \mathbb{R}$. Quindi la mappa esponenziale di $(T_pM, \widetilde{g}_p)$ nel punto O_p è definita su tutto $T_{O_p}T_pM$, da cui la varietà $(T_pM, \widetilde{g}_p)$ è geodeticamente completa, per il Corollario 6.1.4 al teorema di Hopf–Rinow. Allora il Lemma 9.0.1 consente di dedurre che $\exp_p : T_pM \to M$ è un rivestimento riemanniano. Essendo lo spazio tangente T_pM diffeomorfo a $\mathbb{R}^n$ e semplicemente connesso, è il rivestimento universale di M. $\square$

Il seguente corollario è un'immediata conseguenza dell'argomento nella dimostrazione del teorema di Cartan–Hadamard.

COROLLARIO 9.3.2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa, semplicemente connessa di dimensione n, con $\mathrm{Sec}(\pi) \leq 0$ per ogni 2–piano $\pi \subseteq T_pM$ e per ogni $p \in M$. Allora $\exp_p : T_pM \to M$ è un diffeomorfismo per ogni $p \in M$.*

OSSERVAZIONE 9.3.3. Si faccia attenzione che in questo corollario e nella dimostrazione del teorema di Cartan–Hadamard *non* si conclude che la mappa esponenziale $\exp_p : T_pM \to M$ è un'isometria tra T_pM con la sua metrica g_p e (M, g).

NOTA STORICA. Il Teorema 9.3.1 è stato provato da Mangoldt nel 1881 per le superfici, poi Hadamard ne ha dato una nuova dimostrazione nel 1889. Cartan nel 1925 lo ha esteso alle varietà di ogni dimensione.

DEFINIZIONE 9.3.4. Le varietà riemanniane complete e semplicemente connesse con curvatura sezionale minore o uguale a zero in ogni punto, si dicono *varietà di Cartan–Hadamard*.

Una conseguenza del teorema di Cartan–Hadamard è che sulla sfera $\mathbb{S}^n$ o su $\mathbb{S}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ o $\mathbb{S}^k \times \mathbb{S}^{n-k}$ (per $n, k \geq 2$) non si può mettere una metrica completa con $\mathrm{Sec} \leq 0$, in quanto coincidono con il loro rivestimento universale e non sono diffeomorfe a $\mathbb{R}^n$.

OSSERVAZIONE 9.3.5. La condizione $\mathrm{Ric} \leq 0$ non è sufficiente per avere la conclusione del teorema di Cartan–Hadamard (né a maggior ragione $\mathrm{R} \leq 0$), ci sono infatti metriche complete con $\mathrm{Ric} = 0$ su $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2$ e metriche complete con $\mathrm{R} = 0$ su $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ (si provi a esibirle, per esercizio, come prodotti warped). La completezza è inoltre fondamentale, infatti per esempio, la metrica (warped) *non* completa $g = e^{2t}dt^2 + e^{2t}g^{\mathbb{S}^2}_{\mathrm{can}}$ su $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2$ è flat (è isometrica a $\mathbb{R}^3$ senza un punto con la metrica canonica, dunque ha $\mathrm{Riem} = 0$, lo si provi per esercizio). A differenza delle assunzioni di positività sul tensore di Ricci (come nel teorema di Bonnet–Myers), la condizione $\mathrm{Ric} \leq 0$ non è stringente, vale infatti un risultato di Lohkamp [55] che afferma che ogni varietà differenziale di dimensione almeno tre ammette una metrica completa, di volume finito, con tensore di Ricci definito negativo in ogni punto.

OSSERVAZIONE 9.3.6. Confrontando le conclusioni dei teoremi di Bonnet–Myers e Synge (e del *teorema del soul* **??**) con quella del teorema di Cartan–Hadamard e tenendo presente (si veda la prossima sezione) che, per il teorema di Gauss–Bonnet 7.4.4, tra le superfici compatte orientate solo la sfera può ammettere una metrica a curvatura nonnegativa non identicamente nulla, solo il toro a curvatura nulla e tutte le altre, di genere superiore (che sono infinite), curvatura negativa non identicamente nulla (ricordiamo che si possono trovare metriche tali che queste curvature siano anche costanti, per il teorema di uniformizzazione 7.4.8), si può affermare euristicamente che su una varietà differenziale è "più facile" trovare una metrica a curvatura negativa che positiva, oppure che le varietà a curvatura negativa sono le "più numerose" (si veda anche Thurston [**?**] ???).

9.4. Superfici

- Relazioni con Teo Gauss–Bonnet
- Teorema di classificazione
- Teorema di Uniformizzazione

???

CAPITOLO 10

Spazi a curvatura costante e spazi LCF

Le varietà riemanniane complete a curvatura sezionale costante K, chiamate anche "space–forms", si possono caratterizzare in modo molto preciso dal punto di vista topologico/differenziale. A meno di riscalare la metrica per un fattore positivo, si può assumere che K valga 0, 1 oppure -1. Fatta questa assunzione, tutte le space–forms sono quozienti di $\mathbb{R}^n$ (se $K = 0$), $\mathbb{S}^n$ (se $K = 1$) oppure $\mathbb{H}^n$ ($K = -1$), tramite l'azione libera e propriamente discontinua di un opportuno gruppo di isometrie. Questo risultato è un'immediata conseguenza del Teorema 10.1.1.

10.1. Varietà a curvatura costante

TEOREMA 10.1.1. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa con curvatura sezionale costante uguale a $K \in \{0, 1, -1\}$. Allora il rivestimento universale riemanniano di M è*

- *$\mathbb{R}^n$ con la metrica canonica, se $K = 0$,*
- *$\mathbb{S}^n$ con la metrica canonica, se $K = 1$,*
- *$\mathbb{H}^n$ con la metrica canonica, se $K = -1$.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo M semplicemente connessa, se dimostriamo che (M, g) è isometrica allo spazio corrispondente, la tesi segue.

• Caso $K = 0$.
Sia $p \in M$ e consideriamo la varietà riemanniana flat (T_pM, g_p) che è isometrica a $\mathbb{R}^n$, con la metrica canonica. Per il Corollario 9.3.2 al teorema di Cartan–Hadamard, la mappa $\exp_p : T_pM \to M$ è un diffeomorfismo, se mostriamo che è un'isometria locale abbiamo la tesi, per il Lemma 9.0.1.
Sia $v \in T_pM$ e sia $\gamma : [0, 1] \to M$ la geodetica uscente da p con velocità iniziale v e come al solito, identifichiamo nel modo canonico gli spazi tangenti $T_{tv}T_pM$ con T_pM, per ogni $t \in \mathbb{R}$. Dato $u \in T_pM$ e detto U il campo vettoriale lungo γ ottenuto trasportando parallelamente u, definiamo un campo Y lungo γ ponendo $Y(t) = tU(t)$. Allora Y è un campo di Jacobi, che in questo caso si riduce a $Y'' = 0$, essendo il tensore di Riemann identicamente nullo, inoltre $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = U(0) = u$, quindi, per il Corollario 6.4.8, abbiamo

$$(d\exp_p)_v(u) = U(1)\,.$$

Analogamente, per un altro vettore $w \in T_pM$ con estensione parallela W lungo γ, abbiamo

$$(d\exp_p)_v(w) = W(1)\,.$$

Verifichiamo dunque che $(d\exp_p)_v$ è un'isometria lineare tra $T_vT_pM \simeq T_pM$ e $T_{\exp_p(v)}M$,

$$\begin{aligned} g_{\exp_p(v)}\big((d\exp_p)_v(u), (d\exp_p)_v(w)\big) &= g_{\gamma(1)}\big(U(1), W(1)\big) \\ &= g_{\gamma(0)}\big(U(0), W(0)\big) \\ &= g_p(u, w)\,, \end{aligned}$$

dove, nella penultima uguaglianza, abbiamo usato il fatto che U e W sono ottenuti per trasporto parallelo.

• Caso $K = -1$.

Siano $p \in M$ e $q \in \mathbb{H}^n$. Sia $\overline{g}$ la metrica canonica su $\mathbb{H}^n$, e sia $L : (T_q\mathbb{H}^n, \overline{g}_q) \to (T_pM, g_p)$ una qualunque isometria lineare. Osserviamo che per il Corollario 9.3.2 al teorema di Cartan–Hadamard, la mappa $\exp_q : T_q\mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ è un diffeomorfismo. Definiamo allora $\varphi : \mathbb{H}^n \to M$ in modo che il seguente diagramma commuti,

$$\begin{tikzcd} T_q\mathbb{H}^n \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\exp_q"'] & T_pM \arrow[d, "\exp_p"] \\ \mathbb{H}^n \arrow[r, "\varphi"'] & M \end{tikzcd}$$

Vogliamo dimostrare che φ è un'isometria locale, per poi concludere con il Lemma 9.0.1.

L'equazione per i campi di Jacobi su M è $Y'' = Y$. Data una geodetica $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ su M e un vettore $u \in T_pM$, il campo di Jacobi lungo γ che verifica $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = u$ è pertanto dato da

$$Y(t) = \sinh(t)\,U(t)\,,$$

dove $U(t)$ è l'estensione parallela di u lungo γ. Quindi, per il Corollario 6.4.8, si ha

$$(d\exp_p)_v(u) = \sinh(1)\,U(1)\,.$$

Di conseguenza, dati $u, w \in T_pM$,

$$\begin{aligned} g_{\exp_p(v)}\big((d\exp_p)_v(u), (d\exp_p)_v(w)\big) &= g_{\gamma(1)}\big(\sinh(1)\,U(1),\, \sinh(1)\,W(1)\big) \\ &= g_{\gamma(0)}\big(\sinh(1)\,U(0),\, \sinh(1)\,W(0)\big) \\ &= \sinh^2(1)\; g_p(u, w)\,. \end{aligned}$$

Un calcolo analogo vale per lo spazio iperbolico $\mathbb{H}^n$, che ha a sua volta curvatura sezionale costante uguale a -1. Si ottiene quindi che, per ogni $\overline{v}, \overline{u}, \overline{w} \in T_q\mathbb{H}^n$,

$$\overline{g}_{\exp_q(\overline{v})}\big((d\exp_q)_{\overline{v}}(\overline{u}), (d\exp_q)_{\overline{v}}(\overline{w})\big) = \sinh^2(1)\ \overline{g}_q(\overline{u}, \overline{w})\,.$$

Possiamo finalmente verificare che φ è un'isometria locale, ossia che

$$d\varphi_{\exp_q(\overline{v})} = (d\exp_p)_v \circ dL_{\overline{v}} \circ (d\exp_q)_{\overline{v}}^{-1}$$

è un'isometria lineare, per ogni $\overline{v} \in\in T_q\mathbb{H}^n$,

$$\begin{aligned}
&g_{\exp_p(v)}\ \big(d\varphi_{\overline{q}}(\overline{u}), d\varphi_{\overline{q}}(\overline{w})\big)\\
&\quad= g_{\exp_p(v)}\big((d\exp_p)_v \circ dL_{\overline{v}} \circ (d\exp_q)_{\overline{v}}^{-1}(\overline{u}),\ (d\exp_p)_v \circ dL_{\overline{v}} \circ (d\exp_q)_{\overline{v}}^{-1}(\overline{w})\big)\\
&\quad= \sinh^2(1)\ g_p\big(dL_{\overline{v}} \circ (d\exp_q)_{\overline{v}}^{-1}(\overline{u}),\ dL_{\overline{v}} \circ (d\exp_q)_{\overline{v}}^{-1}(\overline{w})\big)\\
&\quad= \sinh^2(1)\ g_q\big((d\exp_q)_{\overline{v}}^{-1}(\overline{u}),\ (d\exp_q)_{\overline{v}}^{-1}(\overline{w})\big)\\
&\quad= \overline{g}_{\exp_q(\overline{v})}(\overline{u}, \overline{w})\,.
\end{aligned}$$

• Caso $K = 1$.
Procediamo in modo molto simile al caso $K = -1$. La principale differenza sta nel fatto che $\exp_q : T_q(\mathbb{S}^n) \to \mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ non è un diffeomorfismo, mentre lo è la restrizione

$$\exp_q|_{B_\pi(O_q)} : B_\pi(0, q) \to \mathbb{S}^n \setminus \{-q\}\,.$$

Definiamo allora la mappa φ come quella che rende commutativo il seguente diagramma,

$$\begin{array}{ccc}
B_\pi(O_q) & \xrightarrow{L|_{B_\pi(O_q)}} & T_pM \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \exp_q} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \exp_p} \\
\mathbb{S}^n \setminus \{-q\} & \xrightarrow[\varphi]{} & M,
\end{array}$$

dove $L : (T_q\mathbb{S}^n, \overline{g}_q) \to (T_pM, g_p)$ è una qualsiasi isometria lineare. La verifica che φ sia un'isometria locale è analoga al caso $K = -1$. Cambiano solo l'equazione per i campi di Jacobi, che in questo caso è $Y'' = -Y$ e la corrispondente soluzione, data invece da $Y(t) = \sin(t)\, U(t)$.
Vorremmo ora estendere φ a un'isometria su tutto $\mathbb{S}^n$, per fare ciò, scegliamo un qualsiasi punto $q' \in \mathbb{S}^n \setminus \{q, -q\}$, poniamo $p' = \varphi(q')$ e definiamo la mappa φ' come quella che fa commutare il seguente diagramma,

$$
\begin{tikzcd}
B_\pi(O_{q'}) \arrow[r, "d\varphi_{q'}|_{B_\pi(O_{q'})}"] \arrow[d, "\exp_{q'}"'] & T_{p'}M \arrow[d, "\exp_{p'}"] \\
\mathbb{S}^n \setminus \{-q'\} \arrow[r, "\varphi'"'] & M
\end{tikzcd}
$$

Essendo φ' costruita in modo analogo a φ, a sua volta risulta essere un'isometria locale. Facciamo infine vedere che φ e φ' coincidono dove sono entrambe definite, e quindi si incollano dando luogo a un'isometria $\psi : \mathbb{S}^n \to M$. È semplice verificare che il punto q' viene mandato in p' tramite φ'. Inoltre, dove le mappe sono definite, si ha

$$d\varphi'_{q'} = (d\exp_{p'})_{O_{p'}} \circ d\varphi_{q'} \circ (d\exp_{q'})^{-1}_{O_{q'}} = \mathrm{Id}_{T_{p'}M} \circ d\varphi_{q'} \circ \mathrm{Id}_{T_{q'}\mathbb{S}^n} = d\varphi_{q'}\,.$$

Applicando il Lemma 9.0.2, si ottiene allora che φ e φ' coincidono sull'intersezione dei loro domini. □

OSSERVAZIONE 10.1.2. La completezza di (M, g) è fondamentale in questo teorema, la metrica warped *non* completa $g = e^{2t}dt^2 + e^{2t}g^{\mathbb{S}^2}_{\mathrm{can}}$ sulla varietà semplicemente connessa $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^2 \approx \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ è flat (Osservazione 9.3.5).

Se n è pari, l'unico quoziente non banale di $\mathbb{S}^n$ (cioè oltre alla sfera stessa), è lo spazio proiettivo $\mathbb{RP}^n$. Se n è dispari, la classificazione degli spazi a curvatura costante 1 è completa, ottenuta da J. A. Wolf [**111**]. I quozienti riemanniani di $\mathbb{R}^n$ (cioè gli spazi flat) sono stati classificati nel 1911–12 da L. Bieberbach [**10**, **11**] (si veda [**111**] e [**37**, Sezioni 2.22–2.25], per il caso $n = 2$). Lo studio degli spazi a curvatura costante uguale a -1 (cioè quozienti di $\mathbb{H}^n$, detti *spazi iperbolici*) è un campo molto attivo della matematica (detto *geometria iperbolica*). Se $n = 2$, tra le superfici compatte e orientate, tutte e sole quelle di genere positivo hanno una metrica con curvatura (scalare) costante -1 (non la sfera, né il toro). Se $n = 3$, esiste una "caratterizzazione" ma non una vera e propria classificazione, malgrado la dimostrazione da parte di G. Perelman [**68**, **69**, **70**] della *congettura di geometrizzazione di Thurston* [**91**] che "descrive" la struttura delle 3–varietà.

Concludiamo questa sezione, dando delle caratterizzazioni equivalenti degli spazi flat, cioè con tensore di Riemann identicamente nullo.

PROPOSIZIONE 10.1.3. *Per una varietà riemanniana (M, g), le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(1) M è flat.
(2) Per ogni punto $p \in M$, esiste un intorno U di p isometrico a un aperto di $\mathbb{R}^n$.
(3) Per ogni punto $p \in M$, esiste una carta coordinata attorno a p nella quale la metrica si scrive come $g_{ij} = \delta_{ij}$.
(4) Per ogni punto $p \in M$, esiste una carta coordinata attorno a p nella quale i campi $\frac{\partial}{\partial x^i}$ formano una base ortonormale in ogni punto.

(5) *Per ogni punto $p \in M$, esiste una carta coordinata attorno a p nella quale i simboli di Christoffel Γ_{ij}^k sono identicamente nulli.*
(6) *Per ogni punto $p \in M$, esistono in un intorno U di p dei campi vettoriali $E_1, \dots, E_n$ ortonormali in ogni punto, tali che si abbia $\nabla_{E_i} E_j = 0$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$ (cioè sono campi paralleli in U).*
(7) *Per ogni punto $p \in M$, esiste una carta coordinata attorno a p nella quale la metrica ha coefficienti g_{ij} costanti.*
(8) *Per ogni punto $p \in M$, esiste un intorno U di p tale che il trasporto parallelo lungo tutte le curve chiuse in U uscenti da p sia l'identità di T_pM (il gruppo di olonomia locale in p è banale).*
(9) *Per ogni punto $p \in M$, esiste un intorno U di p tale che il trasporto parallelo all'interno di U non dipenda dalla scelta del cammino.*
(10) *Per ogni punto $p \in M$, esiste un intorno U di p tale che ogni vettore $v \in T_pM$ si può estendere a un campo parallelo in U.*

DIMOSTRAZIONE. L'equivalenza tra le condizioni (2), (3) e (4) è ovvia. Tutte queste implicano la condizione (1) perché $\mathbb{R}^n$ ha curvatura nulla e quest'ultima implica ciascuna di esse per il Teorema 10.1.1, quindi le prime quattro condizioni sono equivalenti.
La condizione (2) implica la (5) perché i simboli di Christoffel di $\mathbb{R}^n$ sono tutti nulli e la condizione (5) implica la (1) per come si ottiene in coordinate il tensore di Riemann dai simboli di Christoffel.
La condizione (5) implica la (6), infatti segue che i campi coordinati $\frac{\partial}{\partial x^i}$ sono paralleli in un intorno U di $p \in M$, se dunque "produciamo" una base ortonormale $e_i = \lambda_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p$ di T_pM con l'algoritmo di Gram–Schmidt, per dei numeri reali λ_i^j, si ha che i campi $E_i = \lambda_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ sono paralleli e sono una base ortonormale dello spazio tangente in ogni punto di U. La condizione (6) implica la (4), se infatti $\nabla_{E_i} E_j = 0$ allora $[E_i, E_j] = 0$ per ogni $i, j \in \{1, \dots, n\}$, dunque esiste una carta coordinata attorno a p per cui si ha $\frac{\partial}{\partial x^i} = E_i$, per la Proposizione 1.7.1.
La condizione (3) implica ovviamente la (7), mentre la condizione (7) implica la (5) grazie alla formula che lega i simboli di Christoffel della connessione di Levi–Civita ai coefficienti della metrica.
La condizione (2) implica la (8), perché su $\mathbb{R}^n$ il trasporto parallelo è l'identità.
La condizione (8) implica la (9), in quanto il trasporto parallelo da p a q lungo una curva in U, composto con il trasporto parallelo da q a p lungo un'altra curva in U, deve essere l'identità.
La condizione (9) implica la (10), infatti, non dipendendo il trasporto parallelo dal cammino, possiamo trasportare parallelamente v in tutti i punti di U lungo un cammino arbitrario ottenendo un campo V. Tale campo è allora parallelo, per le proprietà della derivata covariante lungo le curve nella Proposizione 3.5.5.
Verifichiamo infine che la condizione (10) implica la (6). Fissata una qualsiasi

base ortonormale di T_pM, estendiamo parallelamente gli elementi di tale base in U, ottenendo dei campi vettoriali paralleli $E_1, \ldots, E_n$ che soddisfano la condizione (6), in quanto sono ortonormali in ogni punto per la compatibilità della connessione di Levi–Civita con la metrica. $\square$