

Geodetiche – Teoria globale

Le proprietà delle geodetiche prese in considerazione finora sono esclusivamente di natura locale. Molti risultati rilevanti in geometria riemanniana si ottengono tuttavia studiando le “geodetiche lunghe”, esaminandole cioè anche dal punto di vista globale. Per fare ciò studieremo con i metodi del calcolo delle variazioni il funzionale energia (e il funzionale lunghezza) di una curva, la cui equazione di Eulero–Lagrange è l’equazione delle geodetiche, di conseguenza queste ultime ne sono i punti critici.

6.1. Completezza e teorema di Hopf–Rinow

DEFINIZIONE 6.1.1. Una varietà riemanniana (M, g) si dice *geodeticamente completa* se qualsiasi geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ può essere estesa a una geodetica $\tilde{\gamma} : \mathbb{R} \rightarrow M$.

Osserviamo che, per il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni per equazioni differenziali ordinarie, qualsiasi geodetica γ definita su un intervallo chiuso $[a, b]$ può essere estesa a una geodetica definita su un intorno $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Non è tuttavia garantito che sia possibile estenderla a tutto \mathbb{R} : per esempio, se $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ (con la metrica flat indotta da \mathbb{R}^n) e x appartiene a M , la geodetica $\gamma(t) = tx$ definita su $[1, 2]$ non si può estendere a $t = 0$, la geodetica infatti, per $t = 0$ dovrebbe passare dall’origine, che tuttavia non appartiene a M . Più in generale, rimuovendo un punto da una qualsiasi varietà riemanniana si ottiene (per lo stesso motivo) una varietà non geodeticamente completa. Notiamo che abbiamo visto negli esempi del capitolo precedente che \mathbb{R}^n , S^n e \mathbb{H}^n con le loro metriche canoniche sono varietà geodeticamente complete.

TEOREMA 6.1.2 (Hopf–Rinow). *Data una varietà riemanniana connessa (M, g) ,*

- *Se per $p \in M$ la mappa esponenziale \exp_p è definita su tutto $T_p M$, allora per ogni $q \in M$ esiste una geodetica minimale da p a q .*
- *Se la mappa esponenziale \exp è definita su tutto TM , per ogni coppia di punti $p, q \in M$ esiste una geodetica minimale che li congiunge.*

DIMOSTRAZIONE. Ci servirà il seguente lemma.

LEMMA 6.1.3. *Siano $p, q \in M$ e sia $S = \partial B_\delta(p)$ la sfera metrica di raggio $\delta > 0$. Se δ è abbastanza piccolo, esiste un punto $p_0 \in S$ tale che $d(p, q) = d(p, p_0) + d(p_0, q)$.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo visto nel Corollario 4.3.6 che per $\delta < \text{inj}(p)$ si ha $S = \exp_p(\delta \mathbb{S}_p^{n-1})$. Se allora $\delta < \text{inj}(p)$ e $q \notin B_\delta(p)$, sia p_0 il punto di S a minima distanza da q (esiste in quanto d_q è continua e S è compatta), chiaramente si ha $d(p, p_0) = \delta$. Se $\gamma : I \rightarrow M$ è una qualunque curva che congiunge p a q , dovrà passare per S , cioè esiste $t_0 \in I$ tale che $\gamma(t_0) \in S$, dunque

$$\mathcal{L}(\gamma) \geq d(p, \gamma(t_0)) + d(\gamma(t_0), q) \geq \delta + d(p_0, q) = d(p, p_0) + d(p_0, q),$$

per la minimalità di p_0 . Ma allora (prendendo l'estremo inferiore su tutte le curve γ) concludiamo

$$d(p, q) \geq d(p, p_0) + d(p_0, q)$$

e per la disuguaglianza triangolare abbiamo l'altra disuguaglianza e la tesi. \square

Siano ora $p, q \in M$ e $\delta > 0$, $p_0 \in \partial B_\delta(p)$ come nel lemma, esiste dunque $v \in T_p M$ con $|v|_p = 1$ tale che $\exp_p(\delta v) = p_0$, sia $\gamma(t) = \exp_p(tv)$. Definiamo

$$I = \{t \in \mathbb{R}^+ : d(\gamma(t), q) + t = d(p, q)\}$$

che chiaramente è un sottoinsieme chiuso di \mathbb{R}^+ , con $\delta \in I$ e sia $T = \sup I \leq d(p, q)$. Se $T = d(p, q)$, si ha $T \in I$ e ovviamente $\gamma(T) = q$ da cui la tesi, dunque assumiamo che $T < d(p, q)$ e poniamo $m = \gamma(T)$ e riutilizziamo il lemma per m e q , ottenendo per $\varepsilon > 0$ un punto $m_0 \in \partial B_\varepsilon(m)$ tale che $d(m, q) = d(m, m_0) + d(m_0, q)$.

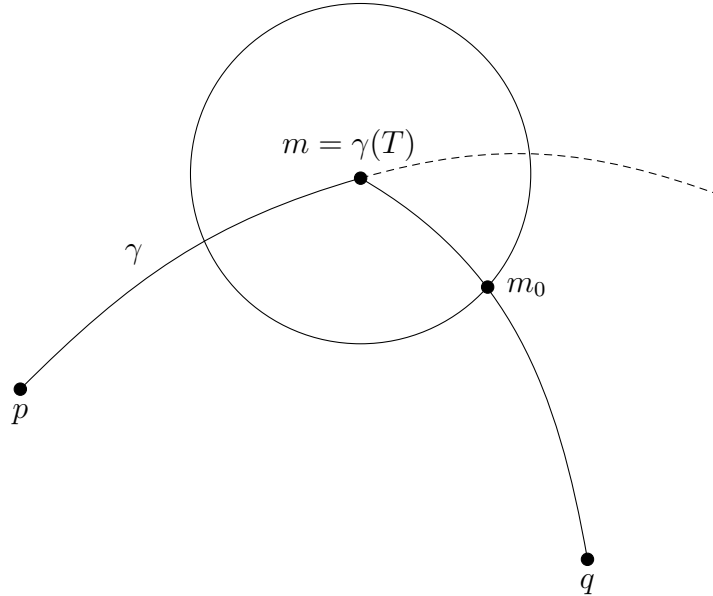


FIGURA 6.1

Abbiamo allora, poiché $d(m, q) + T = d(p, q)$,

$$d(m_0, q) = d(m, q) - d(m, m_0) = d(p, q) - T - \varepsilon, \quad (6.1)$$

dunque

$$d(p, m_0) \geq d(p, q) - d(m_0, q) = T + \varepsilon.$$

Ma allora la curva data dalla geodetica γ da p a m e poi dalla geodetica minimale da m a m_0 è minimale, avendo lunghezza $T + \varepsilon$, dunque è un'estensione di $\gamma|_{[0, T]}$ all'intervallo $[0, T + \varepsilon]$, cioè $\gamma(T + \varepsilon) = m_0$. Dall'equazione (6.1) segue allora che $T + \varepsilon \in I$, che è una contraddizione con $T = \sup I$. \square

COROLLARIO 6.1.4. *Data una varietà riemanniana (M, g) , i seguenti fatti sono equivalenti.*

- *La varietà (M, g) è geodeticamente completa.*
- *La mappa esponenziale \exp è definita su tutto TM .*
- *Esiste un punto $p \in M$ tale che \exp_p sia definita su tutto T_pM .*
- *I sottoinsiemi chiusi e limitati di M sono compatti.*
- *Lo spazio metrico (M, d) è completo, dove d è la distanza riemanniana.*

DIMOSTRAZIONE. Ovviamente il primo punto implica il secondo e il secondo il terzo.

Vediamo che se \exp_p è definita su tutto T_pM allora i chiusi e limitati di M sono compatti. Se K è chiuso e $K \subseteq B_R(p)$, l'insieme

$$\widetilde{K} = \exp_p^{-1}(K) \cap \overline{B}_R(O_p) \subseteq T_pM$$

è chiuso e limitato, dunque compatto. Inoltre $K = \exp_p(\widetilde{K})$, essendo $\exp_p : T_pM \rightarrow M$ surgettiva per il Teorema 6.1.2.

Se i chiusi e limitati di M sono compatti e p_i è una successione di Cauchy in (M, d) , allora p_i è limitata dunque ha una sottosuccessione convergente a un punto $p \in M$, ma allora tutta la successione converge a p .

Se infine M è completa e $\gamma : I \rightarrow M$ è una geodetica su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, possiamo sempre supporre che $0 \in I$ e $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ per un punto $p \in M$ e $v \in T_pM$. Sia $J = \{t \in \mathbb{R} : \exp_p(tv) \text{ è definito}\} \supseteq I$, dal Teorema 4.1.13 segue che J è un intervallo aperto, se mostriamo che è anche chiuso deve coincidere con \mathbb{R} . Sia $t_i \in J$ e $t_i \rightarrow t$, si ha $d(\gamma(t_i), \gamma(t_j)) \leq \mathcal{L}(\gamma|_{[t_i, t_j]}) = |v|_p |t_i - t_j|$ dunque $\gamma(t_i)$ è una successione di Cauchy, quindi convergente a un punto $q \in M$. Sappiamo dalla Proposizione 4.2.4 che esiste un intorno U_q di q e $\varepsilon > 0$ tali che ogni geodetica uscente da punti di U_q con velocità unitaria è definita almeno per $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Se dunque t_i è tale che $\gamma(t_i) \in U_q$ e $|v|_p |t_i - t| < \varepsilon/2$ si ha che la geodetica γ (che esce da $\gamma(t_i)$ con velocità v) è definita almeno fino a $t_i + \varepsilon/|v|_p$ che è maggiore di t , per la scelta di t_i . Quindi $t \in J$, che dunque è chiuso. \square

OSSERVAZIONE 6.1.5. Sebbene segua da questo teorema che la completezza geodetica è equivalente alla completezza in senso metrico, non è vero che una qualsiasi varietà riemanniana non completa possa essere completata nello stesso modo in cui si possono completare gli spazi metrici. Come esempio, si

consideri il “cono senza vertice”

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z > 0\}$$

con la metrica indotta dalla metrica flat di \mathbb{R}^3 . Il completamento di M come spazio metrico è dato da $\overline{M} = M \cup \{0\}$, dove 0 è il vertice del cono. Supponiamo per assurdo che \overline{M} ammetta una struttura di varietà riemanniana che estenda quella di M e compatibile con la metrica. La curvatura scalare in tutti i punti di M è nulla, quindi deve essere nulla anche in 0 , per continuità. Allora \overline{M} è una superficie semplicemente connessa, completa (per il teorema di Hopf–Rinow) e con curvatura scalare nulla in tutti i punti. Questo è sufficiente per concludere che \overline{M} è isometrica a \mathbb{R}^2 con la metrica flat (per il Teorema 10.1.1). Allora M dovrebbe essere isometrica a $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, ma ciò non è vero in quanto su M ci sono coppie di punti collegati da più di una geodetica, mentre in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ questo non succede.

Segue da questa discussione che se la varietà (M, g) soddisfa una qualunque delle condizioni del Corollario 6.1.4, in particolare se M è completa, c’è sempre una geodetica minimale tra ogni coppia di suoi punti. Anche questo fatto viene spesso chiamato *teorema di Hopf–Rinow*.

TEOREMA 6.1.6. *In una varietà riemanniana connessa e completa (M, g) , per ogni coppia di punti p, q esiste una geodetica minimale che li congiunge.*

Vediamo ora un’altra linea dimostrativa di questo risultato, basata sui metodi del calcolo delle variazioni, che si può estendere anche al contesto degli spazi metrici (si veda [52], per esempio). Dimostriamo inizialmente direttamente che se (M, d) è uno spazio metrico completo, i chiusi e limitati sono compatti.

LEMMA 6.1.7. *Lo spazio metrico (M, d) è completo se e solo se i chiusi e limitati sono compatti.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo provato una delle due implicazioni nella dimostrazione che il quarto punto del Corollario 6.1.4 implica il quinto. Supponiamo ora (M, d) completo e vediamo che le palle di qualunque raggio sono compatte, questo ovviamente implica la tesi. Fissato $p \in M$, sia $I = \{r > 0 : \text{la palla } \overline{B}_r(p) \text{ è compatta}\}$, allora per la locale compattezza I è un intervallo non vuoto da zero a $R = \sup I$. Inoltre, I è aperto in quanto se $r \in I$ possiamo ricoprire $\overline{B}_r(p)$ (in quanto compatta) con un numero finito di palle aperte con chiusura compatta ottenendo un suo intorno aperto a chiusura compatta, che dunque deve contenere una palla chiusa (dunque compatta) $\overline{B}_{r+\delta}(p)$, per un qualche $\delta > 0$. Dimostriamo che I è anche chiuso, quindi per connessione, deve coincidere con $(0, +\infty)$, da cui la tesi. Supponiamo che $x_n \in \overline{B}_R(p)$, per ogni $n, i \in \mathbb{N}$ possiamo sempre trovare $y_n^i \in B_{R-1/2^i}(p)$ tale che $d(x_n, y_n^i) < 1/i$ in quanto per la definizione della loro distanza, c’è sempre una curva tra p e x_n che si avvicina a $d(p, x_n) \leq R$ a piacere, se infatti le due palle $B_{R-1/2^i}(p)$ e $B_{1/i}(x_n)$

non avessero intersezione, ogni curva che congiunge p a x_n avrebbe lunghezza maggiore o uguale di

$$d(p, \partial B_{R-1/2i}(p)) + d(x_n, \partial B_{1/i}(x_n)) = R - 1/2i + 1/i = R + 1/2i > R,$$

che sarebbe assurdo. Per la compattezza delle palle $\overline{B_{R-1/2i}(p)}$, passando a una sottosuccessione con l'usuale procedimento diagonale, possiamo supporre che $y_n^i \rightarrow y^i$ e $d(y_n^i, y^i) < 1/n$ per ogni $n, i \in \mathbb{N}$, dunque abbiamo

$$d(x_j, x_k) \leq d(x_j, y_j^i) + d(y_j^i, y^i) + d(y^i, y_k^i) + d(y_k^i, x_k) \leq 1/i + 1/j + 1/k + 1/i.$$

Questa disuguaglianza mostra chiaramente che la successione x_n è una successione di Cauchy quindi convergente, essendo (M, d) completo. Segue da questo argomento, che essendo la palla $\overline{B_R}(p)$ chiusa, è compatta, dunque $R \in I$, cioè I è chiuso. \square

OSSERVAZIONE 6.1.8. Si noti che la proprietà fondamentale in questa dimostrazione è il fatto che la distanza di due punti dello spazio metrico coincida con l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve che li congiungono, con la Definizione 4.3.14. Come ivi detto, gli spazi metrici con questa proprietà si dicono *spazi di lunghezza* (*length spaces*) e gli spazi metrici tali che i chiusi e limitati sono compatti, si dicono *propri*. Con la stessa dimostrazione, segue allora che uno spazio di lunghezza, completo e localmente compatto è proprio. La locale compattezza (esistenza per ogni punto di un intorno relativamente compatto) e la completezza non sono sufficienti per avere che i chiusi e limitati sono compatti, infatti se su \mathbb{R} consideriamo la metrica $d(x, y) = \arctan|x - y|$ abbiamo un controesempio (lo si provi per esercizio), tale spazio metrico è completo e localmente compatto ma non è uno spazio di lunghezza.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 6.1.6. Sia γ_i una successione di curve di classe C^1 a tratti che congiungono p e q , definite su $[0, 1]$ e parametrizzate per un multiplo della lunghezza d'arco, tali che le lunghezze $\ell_i = \mathcal{L}(\gamma_i)$ convergano a $\ell = d(p, q)$, per $i \rightarrow \infty$. Si noti che la velocità di γ_i è in modulo uguale a ℓ_i (nei punti regolari).

La famiglia di curve γ_i è equilipschitziana, perché le velocità sono limitate in modulo da $C = \sup\{\ell_i\}$ ed è anche puntualmente relativamente compatta, in quanto $\gamma_i(t)$ appartiene alla palla di centro p e raggio C (rispetto alla distanza riemanniana) e le palle sono relativamente compatte, per il lemma precedente (oppure per il teorema di Hopf-Rinow). Sono pertanto soddisfatte le ipotesi del teorema di Ascoli-Arzelà (esteso a funzioni verso spazi metrici), per cui la famiglia di curve è relativamente compatta rispetto alla topologia data dalla convergenza uniforme. Di conseguenza, a meno di sottosuccessioni, γ_i converge uniformemente a una curva continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$.

La curva γ è lipschitziana, infatti per ogni $s, t \in [0, 1]$ con $s < t$ si ha

$$d(\gamma_i(s), \gamma_i(t)) \leq \mathcal{L}(\gamma_i|_{[s,t]}) = (t - s)\ell_i$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$, dunque passando al limite per $i \rightarrow \infty$ si ottiene

$$d(\gamma(s), \gamma(t)) \leq (t - s)\ell. \quad (6.2)$$

Dunque γ è una curva rettificabile di lunghezza minore o uguale a $\ell = d(p, q)$, per la Definizione 4.3.14, quindi necessariamente minimale (in quanto segue $\mathcal{L}(\gamma) = d(p, q)$). Per la Proposizione 4.3.18, la curva γ è allora una geodetica minimale, eventualmente riparametrizzata (con un cambio di variabile continuo). Inoltre, la disuguaglianza (6.2) è un'uguaglianza, per ogni $s, t \in [0, 1]$, altrimenti

$$\ell = d(p, q) \leq d(p, \gamma(s)) + d(\gamma(s), \gamma(t)) + d(\gamma(t), q) < s\ell + (t - s)\ell + (1 - t)\ell = \ell$$

che è impossibile. Si ha allora

$$\frac{d(\gamma(s), \gamma(t))}{t - s} = \ell$$

per ogni $s, t \in [0, 1]$, ciò implica che γ è di classe C^1 e $|\dot{\gamma}| = 1$, argomentando in coordinate normali, poiché il supporto di γ coincide con quello di una geodetica. Segue allora che la stessa curva γ è una geodetica, senza necessità di riparametrizzazione. \square

Con la stessa linea della dimostrazione di questo teorema, mostriamo il seguente lemma che ci sarà utile in varie occasioni.

LEMMA 6.1.9. *Sia $\gamma_i : I \rightarrow M$ una successione di geodetiche di lunghezza localmente equilimitata in una varietà riemanniana completa (M, g) , che convergono puntualmente a una curva $\gamma : I \rightarrow M$. Allora γ è una geodetica e se tutte le geodetiche γ_i sono minimali, anche γ lo è.*

DIMOSTRAZIONE. Scelto un intervallo $J \subseteq I$ tale che le lunghezze $\ell_i = \mathcal{L}(\gamma_i|_J)$ siano equilimitate, la famiglia di curve $\gamma_i|_J$ è equilipschitziana, perché le velocità sono tutte limitate in modulo da $\sup\{\ell_i\}/|J|$ ($|J|$ denota la lunghezza di J) e puntualmente relativamente compatta, per le ipotesi. Per il teorema di Ascoli–Arzelà, a meno di sottosuccessioni, $\gamma_i|_J$ converge uniformemente a una curva che dunque deve essere $\gamma|_J$, argomentando poi come sopra concludiamo che γ è una geodetica.

Vediamo comunque un'altra linea, più analitica, per ottenere tale conclusione in questo caso di limite di curve geodetiche. In coordinate locali, le funzioni $\gamma_i|_J$ e le derivate $\dot{\gamma}_i|_J$ sono equilimitate e valendo l'equazione delle geodetiche $\ddot{\gamma}_i^k = -\Gamma_{jm}^k(\gamma_i)\dot{\gamma}_i^j\dot{\gamma}_i^m$ per ogni curva γ_i , segue che anche le derivate seconde sono equilimitate, quindi la curva limite $\gamma|_J$ è di classe C^1 (per il teorema di Ascoli–Arzelà applicato alla successione $\dot{\gamma}_i|_J$). Derivando tale equazione e ragionando iterativamente, si ottiene che $\gamma|_J$ (dunque γ) è di classe C^∞ ed è una geodetica, inoltre la convergenza di $\gamma_i|_J$ a $\gamma|_J$ è C^∞ , in particolare $\mathcal{L}(\gamma_i|_J) \rightarrow \mathcal{L}(\gamma|_J)$.

Infine, se tutte le geodetiche $\gamma_i : [a, b] \rightarrow M$ sono minimali, si ha

$$d(\gamma_i(a), \gamma_i(b)) = \mathcal{L}(\gamma_i) = \int_a^b |\dot{\gamma}_i| dt$$

dunque, passando al limite tenendo presente la convergenza delle lunghezze vista sopra,

$$d(\gamma(a), \gamma(b)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_a^b |\dot{\gamma}_i| dt = \int_a^b |\dot{\gamma}| dt = \mathcal{L}(\gamma),$$

cioè γ è minimale. \square

OSSERVAZIONE 6.1.10. Si noti che segue dagli argomenti nella dimostrazione del Teorema 6.1.6 e di questo lemma, che se (M, d) è completo, la famiglia delle geodetiche $\gamma : I \rightarrow M$ con lunghezze localmente equilimitate è compatta per la convergenza uniforme sui compatti.

ESERCIZIO 6.1.11. Si mostri con gli argomenti di queste dimostrazioni che il funzionale lunghezza \mathcal{L} è semicontinuo inferiormente per la convergenza uniforme.

PROPOSIZIONE 6.1.12. *Se (M, g) è una varietà riemanniana completa ma non compatta, allora da ogni punto $p \in M$ c'è una semiretta (si veda la Definizione 4.3.25).*

DIMOSTRAZIONE. Sia $q_i \in M$ una successione di punti tali che $d(p, q_i) \rightarrow +\infty$, tale successione esiste in quanto M non è compatta (se M fosse limitata sarebbe compatta per il Corollario 6.1.4) e siano $\gamma_i = \gamma_{v_i} : [0, d(p, q_i)] \rightarrow M$ le geodetiche minimali da p con velocità unitarie iniziali $v_i \in T_p M$, tali che $\gamma_i(d(p, q_i)v_i) = q_i$, date dal Teorema 6.1.2. Essendo $|v_i|_p = 1$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ e la sfera \mathbb{S}_p^{n-1} compatta, possiamo supporre che $v_i \rightarrow v \in \mathbb{S}_p^{n-1}$, segue che per ogni $T > 0$ e $t \in [0, T]$ si ha che $\gamma_i|_{[0, T]}$ è una geodetica minimale (per $i \in \mathbb{N}$ abbastanza grande tale che sia definita) e $\gamma_i(t) \rightarrow \gamma(t)$, dove $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ per ogni $t \in [0, +\infty)$. Dal Lemma 6.1.9 segue dunque che γ è una semiretta da p , in quanto minimale tra ognuno suoi due punti. \square

PROPOSIZIONE 6.1.13. *Se (M, g) è una varietà riemanniana compatta, allora ogni classe non banale del gruppo fondamentale contiene una geodetica chiusa di lunghezza minima positiva tra tutte le curve chiuse in tale classe.*

DIMOSTRAZIONE. Data una classe non banale $[\sigma] \in \pi_1(M)$, dobbiamo minimizzare $\mathcal{L}(\gamma)$ tra tutte le curve chiuse, cioè $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$, omotope a σ . Sia ℓ l'estremo inferiore delle lunghezze delle curve chiuse continue in tale classe (si veda la Definizione 4.3.14 e γ_i una successione minimizzante, cioè $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\gamma_i) = \ell$ (dunque le curve γ_i rettificabili e quindi riparametrizzabili in modo che siano lipschitziane, per l'Esercizio 4.3.16). Argomentando in coordinate locali, possiamo approssimare tali curve con curve C^1 a tratti $\tilde{\gamma}_i$, appartenenti alla stessa

classe di omotopia e che anch'esse soddisfano $\lim_{i \rightarrow \infty} \mathcal{L}(\tilde{\gamma}_i) = \ell$. Seguendo allora la dimostrazione del Teorema 6.1.6, otteniamo una curva $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$ limite uniforme (a meno di sottosuccessione) delle curve $\tilde{\gamma}_i$, che è una geodetica chiusa tale che $\mathcal{L}(\gamma) \leq \ell$. Dobbiamo solo dimostrare che $[\gamma] = [\sigma]$ e questo segue dalla stabilità della classe di omotopia libera delle curve chiuse per convergenza uniforme (si veda [45, Capitolo 7] o [54, Pagina 6], per esempio), di conseguenza $\mathcal{L}(\gamma) = \ell$ e si ha $\ell > 0$ altrimenti l'immagine di γ sarebbe un singolo punto, dunque $[\gamma] = [\sigma]$ sarebbe la classe banale di $\pi_1(M)$. \square

OSSERVAZIONE 6.1.14. Un modo esplicito di mostrare che $[\gamma] = [\gamma_i] = [\sigma]$ nella conclusione della dimostrazione precedente, è il seguente: per compattezza, esiste una suddivisione di \mathbb{S}^1 in archi $[\theta_j, \theta_{j+1}]$, per $j \in \{0, \dots, m\}$ e una famiglia finita di palle geodetiche aperte B_1, \dots, B_s con $B_k = \exp_{p_k}(B_{r_k}(O_{p_k}))$, rispettivamente immagine per diffeomorfismo della mappa esponenziale di palle nei tangenti $T_{p_k}M$, quindi semplicemente connesse, la cui unione copre la curva γ , tali che ogni curva $\gamma|_{[\theta_j, \theta_{j+1}]}$ sia contenuta in una singola palla $B_{k(j)}$. Per $i \in \mathbb{N}$ abbastanza grande, la curva γ_i sarà contenuta in $\bigcup_{k=1}^s B_k$, inoltre ogni curva $\gamma_i|_{[\theta_j, \theta_{j+1}]}$ sarà contenuta nella palla B_k che contiene anche $\gamma|_{[\theta_j, \theta_{j+1}]}$, per ogni $j \in \{0, \dots, m\}$. Se $\varepsilon > 0$ è abbastanza piccolo, ogni palla geodetica $B_\varepsilon(\gamma(\theta_j))$ è contenuta in $B_{k(j)} \cup B_{k(j-1)}$, per ogni $j \in \{0, \dots, m\}$, se dunque $i \in \mathbb{N}$ è abbastanza grande, tale che $\gamma_i(\theta_j) \in B_\varepsilon(\gamma(\theta_j))$, abbiamo anche che la geodetica minimale σ_j da $\gamma(\theta_j)$ a $\gamma_i(\theta_j)$ è una curva contenuta in $B_\varepsilon(\gamma(\theta_j)) \subseteq B_{k(j)} \cup B_{k(j-1)}$, per ogni $j \in \{0, \dots, m\}$. Allora, essendo tutte le palle $B_{k(j)}$ semplicemente connesse, le curve $\gamma|_{[\theta_j, \theta_{j+1}]}$ e $\sigma_j \cup \gamma_i|_{[\theta_j, \theta_{j+1}]} \cup -\sigma_{j+1}$ sono omotope, quindi l'unione di tutte queste ultime, che è omotopa a γ_i , è omotopa a γ .

OSSERVAZIONE 6.1.15. Secondo la stessa linea si può mostrare che in ogni classe di omotopia delle curve che congiungono due punti p e q di M , c'è una geodetica minimale.

OSSERVAZIONE 6.1.16. La ricerca di geodetiche chiuse su una varietà riemanniana è un problema che ha dato un grande impulso al calcolo delle variazioni. La Proposizione 6.1.13 mostra l'esistenza di geodetiche chiuse in ogni classe di omotopia non banale di una varietà riemanniana (M, g) , ma lascia aperto il problema dell'esistenza di almeno una geodetica chiusa nel caso in cui M sia compatta e semplicemente connessa. Tale risultato si può ottenere con tecniche di teoria dei punti critici o analisi nonlineare (in particolare con la teoria di Morse), ma non si sa se esista sempre almeno una geodetica chiusa *embedded*. Rimane inoltre una congettura l'esistenza di *infinite* geodetiche chiuse geometricamente distinte (*embedded* o meno), per approfondire si veda [62]. Menzioniamo infine un famoso problema/risultato "classico", detto *teorema delle tre geodetiche* che asserisce l'esistenza di almeno tre distinte geodetiche chiuse *embedded* in ogni superficie riemanniana topologicamente omeomorfa alla sfera \mathbb{S}^2 (si veda [99], per approfondire).

6.2. Il funzionale energia

I risultati visti consentono di caratterizzare le geodetiche come quelle curve che localmente minimizzano la distanza tra i punti della varietà. Si pone allora in modo naturale il problema di stabilire quando una geodetica smette di essere minimale. Ad esempio, su \mathbb{R}^n questo non succede mai, su \mathbb{S}^n invece, tutte le geodetiche uscenti dal polo nord smettono di essere minimali non appena superano il polo sud. Nell'ottica di trovare condizioni di minimalità per le geodetiche "lunghe", studiamo ora dal punto di vista variazionale il funzionale *energia* che come vedremo ha come punti critici, proprio le curve geodetiche.

D'ora in avanti lavoreremo solo con varietà riemanniane complete, in modo che le geodetiche siano definite su tutto \mathbb{R} .

Il funzionale lunghezza ha la proprietà di essere invariante per riparametrizzazione delle curve, ciò risulta scomodo quando se ne studiano i minimi, a causa della perdita di compattezza. Per questo motivo conviene introdurre un secondo funzionale, l'*energia* di una curva. Data $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, di classe C^1 a tratti (o soltanto Lipschitz), definiamo

$$\mathcal{E}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|^2 dt.$$

Come si può facilmente verificare, l'energia non è invariante per riparametrizzazione e non ha senso studiare i minimi di \mathcal{E} al variare di tutte le curve a estremi fissati, in quanto il minimo sarebbe sempre zero (lo si provi per esercizio), mentre possiamo farlo fissando anche l'intervallo che viene utilizzato per parametrizzare le curve.

ESERCIZIO 6.2.1. Analogamente al funzionale lunghezza (si veda l'Esercizio 4.3.2), si mostri che

$$\inf_{\gamma \in C_s^1([a,b])} \mathcal{E}(\gamma) = \inf_{\gamma \in C^1([a,b])} \mathcal{E}(\gamma) = \inf_{\gamma \in Lip([a,b])} \mathcal{E}(\gamma),$$

dove gli estremi inferiori sono presi sulle curve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ che congiungono i punti p e q .

Energia e lunghezza di una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ sono tra loro legate. Infatti, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si ottiene:

$$2\mathcal{E}(\gamma) = \left(\int_a^b |\dot{\gamma}(t)|^2 dt \right) \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b dt \right) \geq \frac{1}{b-a} \left(\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt \right)^2 = \frac{[\mathcal{L}(\gamma)]^2}{b-a}.$$

L'uguaglianza, inoltre, si ha se e solo se $|\dot{\gamma}|^2$ è proporzionale a 1, cioè se e solo se γ è parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco. Ciò implica che, a supporto fissato, l'energia è minima quando una curva è parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco. Il legame tra minimi del funzionale lunghezza e minimi del funzionale energia è precisato nella seguente proposizione.

PROPOSIZIONE 6.2.2. *La curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ minimizza \mathcal{E} tra tutte le curve C^1 a tratti da $[a, b]$ in M , se e solo se γ minimizza \mathcal{L} ed è parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco.*

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo già visto che, se γ minimizza \mathcal{E} , allora è parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco. Le curve γ parametrizzate per un multiplo della lunghezza d'arco sono caratterizzate dalla relazione

$$2\mathcal{E}(\gamma) = \frac{[\mathcal{L}(\gamma)]^2}{b-a},$$

di conseguenza, i minimi dell'energia coincidono con i minimi della lunghezza, parametrizzati per un multiplo della lunghezza d'arco. \square

Per il Corollario 4.3.12, abbiamo allora la seguente conclusione.

PROPOSIZIONE 6.2.3. *Fissato un intervallo $[a, b]$, i minimi a estremi fissati del funzionale energia \mathcal{E} sulle curve $C_s^1([a, b])$ sono curve geodetiche, dunque di classe C^∞ .*

Segue allora da questa proposizione e dal teorema di Hopf–Rinow 6.1.6 che se (M, g) è una varietà riemanniana connessa e completa, per ogni coppia di punti p, q esiste una geodetica minimale (dunque C^∞) che li congiunge e minimizza il funzionale \mathcal{E} tra tutte le curve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ con $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$.

OSSERVAZIONE 6.2.4. Dati due punti $p, q \in M$ e un intervallo $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, sia

$$\Omega_{a,b}^{p,q} = \{\gamma : [a, b] \rightarrow M : \gamma \in C^1, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}.$$

Sullo spazio $\Omega_{a,b}^{p,q}$ si può mettere una struttura di varietà differenziale di dimensione infinita (*varietà di Hilbert*). Inoltre possiamo scegliere che metrica/topologia considerare su tale spazio, per esempio $C^0, C_s^1, Lip, W^{1,1}, W^{1,2}$ e dimostrare che i funzionali lunghezza ed energia sono continui o semicontinui inferiormente in tali topologie, quindi cercarne i minimi con i metodi diretti del calcolo delle variazioni (si veda [3], per esempio).

6.3. Variazione prima e seconda dei funzionali energia e lunghezza

Dai risultati del Capitolo 4 e delle sezioni precedenti seguono l'esistenza e la regolarità dei minimi dei funzionali lunghezza e energia a estremi fissati o liberi (curve chiuse), in una varietà riemanniana connessa e completa. Ora continuiamo l'analisi nello spirito del calcolo delle variazioni, calcolando le equazioni di Eulero–Lagrange di tali funzionali e studiandone la variazione prima e seconda.

Ci servirà la seguente generalizzazione a mappe di varietà differenziabili in (M, g) della definizione di derivata covariante lungo una curva, seguendo quanto fatto nella Sezione 3.5.

Se $H : N \rightarrow M$ è una funzione liscia tra due varietà differenziabili, indichiamo con $\mathcal{T}(H)$ l'insieme dei *campi vettoriali lungo H* (ovvero sezioni del fibrato pull-back H^*TM), cioè $X : N \rightarrow TM$ tali che $X_p \in T_{H(p)}M$, per ogni $p \in N$. Si

osservi che l'insieme dei campi vettoriali lungo γ ha una naturale struttura di $C^\infty(N)$ -modulo (e quindi di spazio vettoriale reale) e che non richiediamo che H sia un'immersione o che vi sia una struttura di varietà riemanniana su N (si veda l'Osservazione 3.5.4).

Se $X \in \Gamma(TN)$, possiamo definire un campo $\bar{X} \in \mathcal{T}(H)$ nel seguente modo,

$$\bar{X}_p = dH_p(X_p).$$

Definiamo ora, analogamente alla derivata covariante lungo una curva, un operatore $\bar{\nabla}$ di derivazione dei campi lungo H , rispetto a campi su N . Tale operatore è formalmente la connessione pull-back $H^*\nabla$ della connessione di Levi-Civita ∇ su TM , sul fibrato vettoriale H^*TM di N , pull-back di TM (Osservazione 3.5.6).

PROPOSIZIONE 6.3.1. *Sia $H : N \rightarrow M$ una funzione di classe C^∞ da una varietà differenziabile N in una varietà riemanniana (M, g) . Esiste ed è unico un operatore $\bar{\nabla} : \Gamma(TN) \times \mathcal{T}(H) \rightarrow \mathcal{T}(H)$, per il quale utilizziamo la notazione $(X, Y) \mapsto \bar{\nabla}_X Y$, tale che si abbia*

- $\bar{\nabla}$ è \mathbb{R} -lineare e $C^\infty(N)$ -lineare nella prima componente,
- per ogni $f \in C^\infty(N)$ vale la formula

$$\bar{\nabla}_X(fY) = (Xf)Y + f\bar{\nabla}_X Y,$$

- se Y è localmente estendibile in un intorno di $H(p)$ in M , ovvero esistono un intorno U di $p \in N$ e $\tilde{Y} \in \Gamma(TM)$ tale che $Y_q = \tilde{Y}_{H(q)}$ per ogni $q \in U$, allora

$$(\bar{\nabla}_X Y)_p = (\nabla_{dH_p(X_p)} \tilde{Y})_{H(p)}.$$

Inoltre, l'operatore $\bar{\nabla}$ soddisfa le seguenti proprietà:

- $\bar{\nabla}_X \bar{Y} - \bar{\nabla}_Y \bar{X} = [\bar{X}, \bar{Y}]$ per ogni $X, Y \in \Gamma(TN)$,
- $Xg(Y, Z) = g(\bar{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \bar{\nabla}_X Z)$ per ogni $X \in \Gamma(TN)$ e $Y, Z \in \mathcal{T}(H)$,
- $\bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_{[Y, X]} Z = R(\bar{X}, \bar{Y})Z$ per ogni $X, Y \in \Gamma(TN)$ e $Z \in \mathcal{T}(H)$.

Dunque l'operatore $\bar{\nabla}$ è una connessione sul fibrato H^*TM di N "simmetrica" e "compatibile con la metrica".

OSSERVAZIONE 6.3.2. Si vede facilmente, per la formula (3.9), che se H è un'immersione isometrica di (N, h) (per esempio, se coincide con la mappa di inclusione $\iota : S \hookrightarrow M$ di una sottovarietà riemanniana S di (M, g)), oppure se su N consideriamo la metrica indotta $h = H^*g$ e Y è un campo tangente a N , si ha che $(\bar{\nabla}_X Y)^\top$ è la derivata covariante $\nabla_X^N Y$ relativa alla connessione di Levi-Civita di N (lo si mostri per esercizio).

DEFINIZIONE 6.3.3. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva C^∞ . Una *variazione* di γ è un'applicazione di classe C^∞

$$H : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

tale che $H(t, 0) = \gamma(t)$ per ogni $t \in [a, b]$.

Data una variazione H , indichiamo per comodità con $\gamma_s : [a, b] \rightarrow M$ la curva definita da $\gamma_s(t) = H(t, s)$. L'idea è che la variabile $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ parametrizzi una famiglia di curve "vicine" a γ , mentre $t \in [a, b]$ parametrizza ciascuna delle curve.

Su $[a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ sono definiti i due campi vettoriali $\frac{\partial}{\partial t}$ e $\frac{\partial}{\partial s}$, che in ogni punto (t, s) sono una base dello spazio tangente. Le loro immagini tramite dH sono due campi vettoriali definiti lungo H , che chiamiamo $\bar{\frac{\partial}{\partial t}}$ e $\bar{\frac{\partial}{\partial s}}$, conformemente alle notazioni di prima,

$$\bar{\frac{\partial}{\partial t}}(t, s) = dH_{(t,s)}\left(\frac{\partial}{\partial t}(t, s)\right), \quad \bar{\frac{\partial}{\partial s}}(t, s) = dH_{(t,s)}\left(\frac{\partial}{\partial s}(t, s)\right).$$

Il campo $\bar{\frac{\partial}{\partial t}}$ è dato dalla velocità della curva γ_s al tempo t , cioè $\dot{\gamma}_s$. Il campo $\bar{\frac{\partial}{\partial s}}$ indica invece la velocità con cui sta variando la curva γ_s al tempo fissato t .

OSSERVAZIONE 6.3.4. Data una variazione H di γ e un campo X lungo H , fissando $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, il campo $t \mapsto X(t, s)$ è un campo lungo la curva γ_s e $\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} X(t, s)$ coincide con la derivata covariante $\frac{D}{dt} X(t, s)$ lungo γ_s di tale campo in quanto soddisfa tutte le proprietà della Proposizione 3.5.5. Analogamente, se fissiamo $t \in [a, b]$ e facciamo variare solo s .

DEFINIZIONE 6.3.5. A ogni variazione H di γ è associato il campo vettoriale lungo γ dato da $Y(t) = \bar{\frac{\partial}{\partial s}}(t, 0) = dH_{(t,0)}\left(\frac{\partial}{\partial s}(t, 0)\right)$ detto *generatore infinitesimale* della variazione (tale campo indica la "velocità" con cui sta variando ogni punto della curva γ).

Viceversa, dato un campo vettoriale Y lungo γ , la variazione

$$H(t, s) = \exp_{\gamma(t)}(sY(t))$$

lo ha come generatore infinitesimale.

Inoltre, una variazione *a estremi fissati* (cioè con $H(a, s) = \gamma(a)$ e $H(b, s) = \gamma(b)$ per ogni $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$) ha un generatore infinitesimale nullo agli estremi a, b e se Y lungo γ soddisfa $Y(a) = 0$ e $Y(b) = 0$, la formula sopra definisce una variazione a estremi fissati.

Nei calcoli tenderemo a omettere la valutazione in s e t , per esempio scrivendo $\bar{\frac{\partial}{\partial t}}$ al posto di $\bar{\frac{\partial}{\partial t}}(t, s)$, per non appesantire la notazione. Indicheremo inoltre con $\frac{D}{dt}$ la derivata covariante lungo le curve γ_s (per le quali il parametro che varia è t) e con $\frac{D}{ds}$ la derivata covariante lungo le curve $s \mapsto \gamma(t, s)$, per ogni

$t \in [a, b]$ fissato. Abbiamo dunque visto nell'Osservazione 6.3.4 che se X è un campo vettoriale lungo H , allora

$$\bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} X = \frac{D}{dt} X \quad \text{e} \quad \bar{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} X = \frac{D}{ds} X.$$

PROPOSIZIONE 6.3.6 (Variazione prima del funzionale energia). *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva in una varietà riemanniana (M, g) e sia H una variazione di γ , con generatore infinitesimale Y lungo γ . Allora,*

$$\frac{d}{ds} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = g(Y, \dot{\gamma}) \Big|_a^b - \int_a^b g\left(Y, \frac{D}{dt} \dot{\gamma}\right) dt. \quad (6.3)$$

In particolare, se H è una variazione a estremi fissati,

$$\frac{d}{ds} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = - \int_a^b g\left(Y, \frac{D}{dt} \dot{\gamma}\right) dt.$$

DIMOSTRAZIONE. Tenendo presente nel calcolo l'Osservazione 6.3.4, per la compatibilità tra la metrica e $\bar{\nabla}$, abbiamo

$$\frac{d}{ds} \mathcal{E}(\gamma_s) = \frac{d}{ds} \frac{1}{2} \int_a^b g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s) dt = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{d}{dt} = \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) dt.$$

Poiché $\left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}\right] = 0$, per la prima proprietà di $\bar{\nabla}$ nella Proposizione 6.3.1, si ha $\frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s}$. Quindi segue

$$\begin{aligned} \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) dt &= \int_a^b g\left(\frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right) dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right) - g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial t}\right) \right] dt \\ &= g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \Big|_a^b - \int_a^b g\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial t}\right) dt. \end{aligned}$$

Valutando dunque in $s = 0$ si ottiene la tesi. \square

Una conseguenza di questa Proposizione è che, se γ è una curva C^∞ minimale per \mathcal{E} , o più in generale è un punto critico di \mathcal{E} , cioè in γ la variazione prima di \mathcal{E} è zero, allora

$$\int_a^b g\left(Y, \frac{D}{dt} \dot{\gamma}\right) dt = 0,$$

per ogni campo Y lungo γ che sia nullo agli estremi. Da ciò si deduce facilmente che $\frac{D}{dt} \dot{\gamma} = 0$, ovvero che γ è una geodetica. Infatti, scegliendo $Y = \varphi \frac{D}{dt} \dot{\gamma}$ con $\varphi \in C_c^\infty(a, b)$ si ha

$$\int_a^b \varphi \left| \frac{D}{dt} \dot{\gamma} \right|^2 dt = 0$$

e la conclusione segue dal *lemma fondamentale del calcolo delle variazioni* ([3, Lemma 2.2.1], per esempio).

Possiamo dunque dire che l'equazione delle geodetiche $\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0$ è l'equazione di *Eulero–Lagrange* del funzionale energia \mathcal{E} .

OSSERVAZIONE 6.3.7. Se studiamo il funzionale energia sullo spazio

$$\Omega_{a,b}^{p,q} = \{\gamma : [a, b] \rightarrow M : \gamma \in C^1, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}.$$

delle curve soltanto C^1 e vogliamo la conclusione analoga che i punti critici di \mathcal{E} su $\Omega_{a,b}^{p,q}$ siano geodetiche, dobbiamo estendere l'analisi precedente considerando generatori infinitesimali Y di classe soltanto C^1 nulli ai bordi di $[a, b]$, associati a variazioni $H(t, s) = \exp_{\gamma(t)}(sY(t))$ anch'esse di classe C^1 . Nel calcolo della variazione prima di \mathcal{E} nella dimostrazione della *Proposizione 6.3.6* notiamo che per queste speciali variazioni (sebbene siano soltanto di classe C^1), esistono e coincidono

$$\frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s}.$$

Ciò segue in coordinate locali dal teorema di differenziabilità delle soluzioni dei sistemi di ODE [74] (lo si mostri per esercizio). Il calcolo è dunque giustificato e si ottiene

$$0 = \frac{d}{ds} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \int_a^b g \left(\frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t} \right) dt \Big|_{s=0} = \int_a^b g \left(\frac{D}{dt} Y(t), \dot{\gamma}(t) \right) dt.$$

Se consideriamo $t_0 \in [a, b]$ e $\delta > 0$ tale che il tratto di curva $\gamma|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$ è contenuto in una singola carta coordinata, per ogni campo Y con supporto compatto contenuto in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ si ha in coordinate

$$0 = \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t) \left(\frac{\partial Y^i(t)}{\partial t} + \Gamma_{km}^i(\gamma(t)) Y^k(t) \dot{\gamma}^m(t) \right) dt.$$

Segue dunque dal *lemma di Du Bois–Reymond* (si veda [3, Lemma 2.3.2], per esempio) che le funzioni $t \mapsto g_{ij}(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t)$ sono di classe C^1 in $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, ed essendo $g_{ij} \circ \gamma \in C^1([a, b])$ e la matrice g_{ij} invertibile, che la velocità $\dot{\gamma}$ è di classe C^1 , quindi $\gamma \in C^2(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Per l'arbitrarietà di $t_0 \in [a, b]$, allora $\gamma \in C^2([a, b])$ e l'integrazione per parti nel finale della dimostrazione della *Proposizione 6.3.6* è giustificata, possiamo quindi scrivere

$$0 = \frac{d}{ds} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \int_a^b g \left(Y, \frac{D}{dt} \dot{\gamma} \right) dt = 0$$

e la conclusione che $\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0$, cioè che γ sia una geodetica (dunque C^∞ per l'equazione delle geodetiche, *Osservazione 4.1.3*), segue allora come sopra dal *lemma fondamentale del calcolo delle variazioni*.

Un'analoga analisi può essere fatta se il funzionale energia viene studiato sullo spazio delle curve C^1 a tratti

$$\overline{\Omega}_{a,b}^{p,q} = \{\gamma : [a, b] \rightarrow M : \gamma \in C_s^1, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\},$$

concludendo che un punto critico γ è una geodetica in tutti i tratti dove $\dot{\gamma}$ è continua. Inoltre, devono valere le *condizioni di Erdmann–Weierstrass* per i punti critici C^1 a tratti (si veda [3, Sezione 3.1], per esempio), che in questo contesto sono date, in ogni punto $t \in (a, b)$ di discontinuità di $\dot{\gamma}$, da

$$g(Y(t), \dot{\gamma}_-(t)) = g(Y(t), \dot{\gamma}_+(t))$$

per ogni campo Y lungo γ di classe C^1 . Segue facilmente (dalla positività della metrica g) che deve essere $\gamma_+(t) = \dot{\gamma}_-(t)$ in tutti tali punti t , quindi γ è di classe C^1 e dunque una geodetica, per l'analisi precedente.

Si noti che per la Proposizione 6.2.2, questa conclusione fornisce una dimostrazione di una delle due implicazioni della Proposizione 4.3.11 (le curve C^1 a tratti, localmente minimali e parametrizzate proporzionalmente alla lunghezza d'arco sono localmente minimi per l'energia, dunque geodetiche).

OSSERVAZIONE 6.3.8. La formula (6.3) di variazione prima dell'energia vale anche per una variazione $H : \mathbb{S}^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ di una curva chiusa $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$, con generatore infinitesimale Y lungo γ , ma in tal caso il “termine di bordo” non è presente,

$$\frac{d}{ds} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = - \int_{\mathbb{S}^1} g\left(Y, \frac{D}{dt} \dot{\gamma}\right) dt.$$

Con la stessa analisi di cui sopra, si conclude che le curve minimali sono geodetiche chiuse.

ESERCIZIO 6.3.9. Se $N \subseteq M$ è una sottovarietà (embedded) e p un punto di (M, g) , possiamo considerare i minimi dell'energia tra le curve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ da p a N , cioè con l'altro estremo $q \in N$ (la lunghezza di tali minimi è dunque la distanza tra p e N). Si mostri che tali minimi γ esistono, che devono essere geodetiche e che soddisfano

$$g(v, \dot{\gamma}(b)) = 0$$

per ogni vettore $v \in T_{\gamma(q)}N$, cioè i minimi “arrivano su N perpendicolarmente (questo è un “problema a estremi liberi”, si veda [3, Sezione 3.3]).

Analogamente, si provi che i minimi dell'energia tra tutte le curve con estremi su due sottovarietà (embedded) disgiunte di (M, g) arrivano perpendicolarmente sulle due sottovarietà.

Analogamente all'energia, vediamo la variazione prima del funzionale lunghezza. Supponiamo che γ sia parametrizzata in lunghezza d'arco, in quanto ciò non è chiaramente restrittivo.

PROPOSIZIONE 6.3.10 (Variazione prima del funzionale lunghezza). *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una curva in una varietà riemanniana (M, g) , parametrizzata in lunghezza d'arco (dunque $|\dot{\gamma}|$ è costante uguale a uno) e sia H una variazione di γ , con generatore infinitesimale Y lungo γ . Allora,*

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = g(Y, \dot{\gamma}) \Big|_a^b - \int_a^b g\left(Y, \frac{D}{dt} \dot{\gamma}\right) dt.$$

In particolare, se H è una variazione a estremi fissati,

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = - \int_a^b g\left(Y, \frac{D}{dt} \dot{\gamma}\right) dt.$$

DIMOSTRAZIONE. Calcolando come nella Proposizione 6.3.6, abbiamo

$$\frac{d}{ds} \mathcal{L}(\gamma_s) = \frac{d}{ds} \int_a^b \sqrt{g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s)} dt = \int_a^b \frac{g\left(\frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right)}{\sqrt{g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s)}} dt = \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}\right) dt,$$

da cui si ha la tesi procedendo col calcolo come in tale proposizione. \square

La discussione dell'Osservazione 6.3.7 vale dunque anche per il funzionale lunghezza e l'equazione delle geodetiche $\frac{D}{dt} \dot{\gamma} = 0$ è l'equazione di Eulero-Lagrange anche di \mathcal{L} (una volta riparametrizzate le curve proporzionalmente alla lunghezza d'arco). Inoltre, le Proposizioni 6.3.6 e 6.3.10 mostrano chiaramente che la connessione tra i minimi dei due funzionali lunghezza e energia, stabilita nella Proposizione 6.2.2 si estende anche ai punti critici.

OSSERVAZIONE 6.3.11. Il calcolo per una generica curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ ha il problema che la lagrangiana del funzionale lunghezza $|\dot{\gamma}| = \sqrt{g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})}$ non è C^1 quando $\dot{\gamma} = 0$. Si provi comunque, per esercizio, a calcolare la variazione prima di \mathcal{L} per una curva γ con $\dot{\gamma}$ diverso da zero in ogni punto di $[a, b]$.

Una curva minimale per l'energia a estremi fissati chiaramente deve soddisfare la seguente condizione,

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} \geq 0$$

per qualsiasi variazione H di γ a estremi fissati. Pertanto calcoliamo ora la seconda dell'energia, nel caso in cui γ sia una geodetica.

Per comodità di notazione, indichiamo $\frac{D}{dt} Y$ con Y' .

PROPOSIZIONE 6.3.12 (Variazione seconda del funzionale energia). *Siano (M, g) una varietà riemanniana e sia H una variazione di una geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$. Denotando con Y il generatore infinitesimale di H , si ha*

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = g\left(\frac{D}{ds} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{\gamma}\right) \Big|_a^b + \int_a^b (|Y'|^2 - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)) dt. \quad (6.4)$$

In particolare, se H è una variazione a estremi fissati,

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \int_a^b (|Y'|^2 - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)) dt.$$

DIMOSTRAZIONE. Analogamente al calcolo della variazione prima dell'energia, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{E}(\gamma_s) &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial s^2} g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial s^2} g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt \\ &= \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt + \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt. \end{aligned}$$

Ricordando la relazione $\frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s} = \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}$, il primo dei due integrali diventa, valutato per $s = 0$,

$$\begin{aligned} \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt \Big|_{s=0} &= \int_a^b g\left(\frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}\right) dt \Big|_{s=0} \\ &= \int_a^b g\left(\frac{D}{dt} Y, \frac{D}{dt} Y\right) dt \\ &= \int_a^b |Y'|^2 dt. \end{aligned}$$

Riscriviamo ora il secondo integrale, scambiando le derivate covarianti (il che comporta la comparsa di un termine di curvatura, per la terza proprietà di $\bar{\nabla}$ nella Proposizione 6.3.1),

$$\begin{aligned} \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt &= \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt \\ &= \int_a^b g\left(\frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt - \int_a^b g\left(R\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} g\left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt - \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt \\ &\quad - \int_a^b R\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt \\ &= g\left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) \Big|_a^b - \int_a^b g\left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt \\ &\quad - \int_a^b R\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial s}\right) dt. \end{aligned}$$

Valutando in $s = 0$, l'addendo intermedio si annulla in quanto γ è una geodetica e si ottiene,

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = g \left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{\gamma} \right) \Big|_a^b - \int_a^b R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y) dt$$

e si ha la tesi.

Se H è una variazione a estremi fissati, il termine di bordo si annulla perché $Y(a, s) = dH_{(a,s)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) = 0$ e $Y(b, s) = dH_{(b,s)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right) = 0$. \square

OSSERVAZIONE 6.3.13. Come per la formula di variazione prima, la formula (6.4) di variazione seconda dell'energia vale per una variazione $H : \mathbb{S}^1 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ di una curva chiusa $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$, con generatore infinitesimale Y lungo γ , senza "termine di bordo",

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \int_{\mathbb{S}^1} (|Y'|^2 - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)) dt.$$

Come per la variazione prima, vediamo anche la variazione seconda del funzionale lunghezza per una geodetica γ parametrizzata in lunghezza d'arco (come per la variazione prima, ciò non è restrittivo).

PROPOSIZIONE 6.3.14 (Variazione seconda del funzionale lunghezza). *Siano (M, g) una varietà riemanniana e sia H una variazione di una geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, parametrizzata in lunghezza d'arco (dunque $|\dot{\gamma}|$ è costante uguale a uno). Denotando con Y il generatore infinitesimale di H , si ha*

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = g \left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial s} \Big|_{s=0}, \dot{\gamma} \right) \Big|_a^b + \int_a^b (|\tilde{Y}'|^2 - R(\dot{\gamma}, \tilde{Y}, \dot{\gamma}, \tilde{Y})) dt, \quad (6.5)$$

dove $\tilde{Y} = Y - g(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma}$ è la componente normale di Y rispetto a γ .
In particolare, se H è una variazione a estremi fissati,

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \int_a^b (|\tilde{Y}'|^2 - R(\dot{\gamma}, \tilde{Y}, \dot{\gamma}, \tilde{Y})) dt.$$

DIMOSTRAZIONE. Analogamente al calcolo della variazione prima dell'energia, si ha

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(\gamma_s) &= \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial s^2} \sqrt{g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s)} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \frac{\frac{\partial}{\partial s} g \left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \right)}{\sqrt{g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s)}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\frac{\partial^2}{\partial s^2} g \left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \right)}{\sqrt{g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s)}} dt - \frac{1}{4} \int_a^b \frac{\left[\frac{\partial}{\partial s} g \left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \right) \right]^2}{(\sqrt{g(\dot{\gamma}_s, \dot{\gamma}_s)})^3} dt, \end{aligned}$$

dunque, valutando per $s = 0$, abbiamo

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial^2}{\partial s^2} g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) dt \Big|_{s=0} - \frac{1}{4} \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) \right]^2 dt \Big|_{s=0}.$$

Dal primo integrale si ottiene lo stesso risultato della variazione seconda dell'energia, mentre dal secondo,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4} \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) \right]^2 dt \Big|_{s=0} &= - \int_a^b \left[g\left(\frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) \right]^2 dt \Big|_{s=0} \\ &= - \int_a^b \left[g\left(\frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) \right]^2 dt \Big|_{s=0} \\ &= - \int_a^b [g(Y', \dot{\gamma})]^2 dt. \end{aligned}$$

Ponendo $\tilde{Y} = Y - g(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma}$, abbiamo

$$\tilde{Y}' = Y' - \frac{D}{dt} g(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = Y' - g(Y', \dot{\gamma})\dot{\gamma},$$

essendo γ una geodetica. Inoltre, per le proprietà del tensore di Riemann, $R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y) = R(\dot{\gamma}, \tilde{Y}, \dot{\gamma}, \tilde{Y})$, da cui la tesi segue in quanto

$$|\tilde{Y}'|^2 = |Y'|^2 - [g(Y', \dot{\gamma})]^2.$$

□

OSSERVAZIONE 6.3.15. Volendo connettere l'analisi di questa sezione con la trattazione "classica" (si veda [3], per esempio), per ogni curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ abbiamo

$$\mathcal{E}(\gamma) = \int_a^b f(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt,$$

con una lagrangiana $f : TM \rightarrow \mathbb{R}$ (indipendente dal "tempo") data in una banalizzazione locale di TM da

$$f(\gamma, \xi) = g_{jk}(\gamma) \xi^j \xi^k / 2.$$

Si ha allora

$$f_{\gamma^i}(\gamma, \xi) = \frac{\partial g_{jk}(\gamma)}{\partial x^i} \xi^j \xi^k / 2, \quad f_{\xi^i}(\gamma, \xi) = g_{ij}(\gamma) \xi^j$$

e

$$f_{\gamma^i \gamma^j}(\gamma, \xi) = \frac{\partial^2 g_{km}(\gamma)}{\partial x^i \partial x^j} \xi^k \xi^m / 2, \quad f_{\gamma^i \xi^j}(\gamma, \xi) = \frac{\partial g_{jk}(\gamma)}{\partial x^i} \xi^k, \quad f_{\xi^i \xi^j}(\gamma, \xi) = g_{ij}(\gamma).$$

L'equazione di Eulero–Lagrange che “classicamente” si ottiene è dunque

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt} f_{\xi^i}(\gamma, \dot{\gamma}) - f_{\gamma^i}(\gamma, \dot{\gamma}) \\
&= \frac{d}{dt} (g_{ij}(\gamma) \dot{\gamma}^j) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k \\
&= g_{ij}(\gamma) \ddot{\gamma}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k \\
&= g_{ij}(\gamma) \ddot{\gamma}^j + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} \right) \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k \\
&= g_{ij}(\gamma) \ddot{\gamma}^j + g_{im} \Gamma_{jk}^m \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k
\end{aligned}$$

che implica $\ddot{\gamma}^m + \Gamma_{jk}^m \dot{\gamma}^j \dot{\gamma}^k = 0$, che è l'equazione delle geodetiche, coerentemente con quanto ottenuto sopra.

OSSERVAZIONE 6.3.16. Si confronti il calcolo delle variazioni prima e seconda in questa sezione con l'analogo calcolo per le ipersuperfici immerse in \mathbb{R}^n , sviluppato in modo “classico” in [3, Sezioni 6.4 e 8.5.3] per apprezzare la forza del formalismo riemanniano, meno “naturale” a prima vista, ma molto potente una volta acquisito.

6.4. Campi di Jacobi

Analizziamo la variazione seconda del funzionale energia come nel caso classico del calcolo delle variazioni, notando che nel nostro caso la *condizione di Legendre forte* è soddisfatta, in quanto, con le notazioni dell'Osservazione 6.3.15 si ha $f_{\xi^i \xi^j}(\gamma, \xi) = g_{ij}(\gamma)$, che è una matrice sempre definita positiva (si veda [3, Capitolo 8]). In particolare, vogliamo sviluppare la teoria di Jacobi per il funzionale energia (si veda [3, Sezioni 8.3 e 8.4] e si provi a studiare la variazione seconda in modo “classico” con le notazioni dell'Osservazione 6.3.15 – si tenga presente [3, Sezione 8.5.3]).

DEFINIZIONE 6.4.1. Data una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, sullo spazio vettoriale dei campi vettoriali lungo γ nulli agli estremi, definiamo la *forma indice* di γ come

$$I(X, Y) = - \int_a^b g(X, Y'' + R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma}) dt = \int_a^b (g(X', Y') - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, X)) dt \quad (6.6)$$

(dove abbiamo integrato per parti per avere la seconda uguaglianza).

La forma indice $I(X, Y)$ è dunque una forma bilineare simmetrica (per le simmetrie del tensore di Riemann), che può essere pensata come l'hessiano del funzionale energia e la cui forma quadratica associata è data da

$$I(Y, Y) = - \int_a^b g(Y, Y'' + R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma}) dt = \int_a^b (|Y'|^2 - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)) dt, \quad (6.7)$$

dove, coerentemente con la notazione precedente, abbiamo utilizzato Y'' per indicare $\frac{D^2}{dt^2}Y = \frac{D}{dt}Y'$, per ogni campo vettoriale Y lungo γ .

OSSERVAZIONE 6.4.2. Viceversa, la forma bilineare I si ottiene per “polarizzazione” dalla forma quadratica $Y \mapsto I(Y, Y)$,

$$I(X, Y) = \frac{I(X + Y, X + Y) - I(X - Y, X - Y)}{4}.$$

La formula fornita dalla Proposizione 6.3.12, nel caso in cui si abbia una variazione di una geodetica a estremi fissati, si può quindi riscrivere come

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = I(Y, Y).$$

Vedremo (Proposizione 6.4.7) che in un certo senso la forma indice, dunque l'integrale (6.7), “misura” quanto le curve γ_s falliscono nell'essere geodetiche.

OSSERVAZIONE 6.4.3. Analogamente, possiamo definire una forma quadratica che rappresenta la variazione seconda del funzionale lunghezza a estremi fissati di una geodetica γ in lunghezza d'arco,

$$\frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = I'(Y, Y) = \int_a^b (|\tilde{Y}'|^2 - R(\dot{\gamma}, \tilde{Y}, \dot{\gamma}, \tilde{Y})) dt,$$

dove \tilde{Y} è la componente normale di Y rispetto a γ . La forma bilineare simmetrica I' si può ottenere poi per polarizzazione (e integrando per parti),

$$I'(X, Y) = - \int_a^b g(\tilde{X}, \tilde{Y}'' + R(\dot{\gamma}, \tilde{Y})\dot{\gamma}) dt = \int_a^b (g(\tilde{X}', \tilde{Y}') - R(\dot{\gamma}, \tilde{Y}, \dot{\gamma}, \tilde{X})) dt,$$

con \tilde{X}, \tilde{Y} le componenti normali di X, Y rispetto a γ .

Osserviamo che, se γ è una geodetica e $Y = \lambda\dot{\gamma}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ costante, allora $Y' = 0$ (per l'equazione delle geodetiche) e $R(Y, \dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}) = \lambda^2 R(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$, per le proprietà di antisimmetria del tensore di Riemann.

Comprendere in quali situazioni la forma indice I associata a una geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ è *degenere* è importante per lo studio delle geodetiche “lunghe”, così come l'analoga forma data dalla variazione seconda, nello studio della (perdita di) minimalità delle soluzioni delle equazioni di Eulero–Lagrange di funzionali “classici” del calcolo delle variazioni (si veda [3, Capitolo 8], per esempio). Questo chiaramente succede, per la formula (6.6), se e solo se esiste un campo vettoriale Y lungo γ , non identicamente nullo ma nullo agli estremi, tale che $I(X, Y) = 0$, per ogni campo X lungo γ , nullo agli estremi, cioè

$$Y'' + R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} = 0.$$

DEFINIZIONE 6.4.4. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodetica, un campo vettoriale Y lungo γ si dice *campo di Jacobi* se soddisfa il sistema lineare di ODE del second'ordine,

$$Y'' + R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} = 0. \quad (6.8)$$

Fissati i dati iniziali $Y(a)$ e $Y'(a)$, questa equazione differenziale ammette una soluzione unica e C^∞ su tutto $[a, b]$ (il sistema è lineare e a coefficienti C^∞). Segue che l'insieme dei campi di Jacobi lungo γ è uno spazio vettoriale di dimensione $2n$, con n la dimensione di (M, g) .

È più difficile stabilire se esistano soluzioni con $Y(a)$ e $Y(b)$ entrambi nulli (condizione affinché I sia degenere) e in effetti non ne è in generale garantita né l'esistenza né l'unicità.

DEFINIZIONE 6.4.5. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodetica da p a q in (M, g) , diciamo che q è *coniugato a p lungo γ* se la forma indice associata a γ è degenere, cioè se esiste un campo di Jacobi non nullo lungo γ tale che $Y(a) = Y(b) = 0$.

Si noti che la relazione di essere coniugato lungo una geodetica è simmetrica, cioè se q è coniugato a p lungo γ , allora p è coniugato a q lungo γ percorsa nel verso opposto.

La seguente proposizione implica che se esiste un campo di Jacobi come nella Definizione 6.4.5, deve essere ortogonale alla geodetica in ogni punto (lo si provi per esercizio).

PROPOSIZIONE 6.4.6. Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodetica in una varietà riemanniana (M, g) , di dimensione n e Y un campo di Jacobi lungo γ ,

- se $Y(a) = \alpha\dot{\gamma}(a)$ e $Y'(a) = \beta\dot{\gamma}(a)$, per $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora $Y(t) = (\alpha + \beta(t - a))\dot{\gamma}(t)$, per ogni $t \in [a, b]$. In particolare, se $Y(a) = 0$ e $Y'(a) = \beta\dot{\gamma}(a)$, per $\beta \in \mathbb{R}$, allora $Y(t) = \beta(t - a)\dot{\gamma}(t)$, per ogni $t \in [a, b]$,
- se $Y(a)$ e $Y'(a)$ sono entrambi ortogonali a $\dot{\gamma}(a)$, allora $Y(t)$ e $Y'(t)$ sono ortogonali a $\dot{\gamma}(t)$, per ogni $t \in [a, b]$, dunque l'insieme dei campi di Jacobi ortogonali a γ è uno spazio vettoriale di dimensione $2n - 2$,
- se $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(c + \lambda t)$ è una riparametrizzazione di γ sull'intervallo $[\frac{a-c}{\lambda}, \frac{b-c}{\lambda}]$, il campo vettoriale

$$\tilde{Y}(t) = Y(c + \lambda t)$$

è di Jacobi lungo $\tilde{\gamma}$. In particolare, la definizione di punto coniugato non dipende dalla parametrizzazione della geodetica γ , ma è un concetto geometrico.

DIMOSTRAZIONE.

- Il campo $\bar{Y}(t) = (\alpha + \beta(t - a))\dot{\gamma}(t)$ soddisfa l'equazione per i campi di Jacobi e le condizioni iniziali, quindi deve essere uguale a Y per unicità della soluzione. Infatti, $\bar{Y}'' = 0$ (la derivata di $\dot{\gamma}$ è nulla per l'equazione delle geodetiche) e $R(\dot{\gamma}, \bar{Y})\dot{\gamma} = 0$ (per l'antisimmetria del tensore di Riemann).

- Sia $f(t) = g(Y(t), \dot{\gamma}(t))$. Calcoliamo le derivate prima e seconda di f , tenendo conto del fatto che γ soddisfa l'equazione delle geodetiche e che Y'' si ricava dall'equazione per i campi di Jacobi,

$$f' = g(Y', \dot{\gamma}) + g\left(Y, \frac{D}{dt}\dot{\gamma}\right) = g(Y', \dot{\gamma}),$$

$$f'' = g(Y'', \dot{\gamma}) + g\left(Y', \frac{D}{dt}\dot{\gamma}\right) = g(Y'', \dot{\gamma}) = -R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0.$$

Per ipotesi, $f(a) = 0$ e $f'(a) = 0$. Pertanto, essendo f'' identicamente nulla, f stessa deve essere identicamente nulla. Ciò significa che $Y(t)$ è ortogonale a $\dot{\gamma}(t)$ per ogni t . Lo stesso vale per $Y'(t)$, perché anche f' è identicamente nulla.

- Basta verificare che \tilde{Y} soddisfa l'equazione dei campi di Jacobi. Osserviamo che $\tilde{Y}''(t) = \lambda^2 Y''(c + \lambda t)$ e

$$\begin{aligned} R(\dot{\gamma}(t), \tilde{Y}(t))\dot{\gamma}(t) &= R(\lambda\dot{\gamma}(c + \lambda t), Y(c + \lambda t))\lambda\dot{\gamma}(c + \lambda t) \\ &= \lambda^2 R(\dot{\gamma}(c + \lambda t), Y(c + \lambda t))\dot{\gamma}(c + \lambda t). \end{aligned}$$

Quindi l'equazione dei campi di Jacobi per \tilde{Y} non è altro che quella per Y moltiplicata per λ^2 e valutata in $c + \lambda t$.

□

La proposizione seguente mostra come i campi di Jacobi siano i generatori infinitesimali di variazioni composte da curve geodetiche.

PROPOSIZIONE 6.4.7. *Sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodetica in una varietà riemanniana (M, g) . Se $H : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ è una variazione geodetica di γ (cioè γ_s è una geodetica per ogni t), allora il campo vettoriale Y lungo γ associato a H è un campo di Jacobi.*

Viceversa, se Y è un campo di Jacobi lungo γ , allora esiste una variazione geodetica H di γ associata a Y .

DIMOSTRAZIONE. Sia $H : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ una variazione geodetica di γ e Y il suo generatore infinitesimale, allora

$$Y'' = \frac{D}{dt} \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s} \Big|_{s=0} = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \Big|_{s=0} = \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \Big|_{s=0} + R\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \Big|_{s=0}.$$

Poiché la variazione è geodetica, $\frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial t} = 0$ in ogni punto $(t, s) \in [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, di conseguenza, rimane solamente il termine di curvatura,

$$Y'' = R\left(\frac{\bar{\partial}}{\partial s}, \frac{\bar{\partial}}{\partial t}\right) \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \Big|_{s=0} = R(Y, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = -R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma},$$

dunque Y è un campo di Jacobi.

Viceversa, consideriamo un campo di Jacobi Y e costruiamo una variazione geodetica H ad esso associata. Sia $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ la geodetica con $\sigma(0) = \gamma(a)$,

$\dot{\sigma}(0) = Y(a)$ e siano inoltre X_0, X_1 i due campi paralleli lungo σ con $X_0(0) = \dot{\gamma}(a)$ e $X_1(0) = Y'(a)$. Poniamo $X(s) = X_0(s) + sX_1(s) \in T_{\sigma(s)}M$ e consideriamo la variazione

$$H(t, s) = \exp_{\sigma(s)}((t - a)X(s)).$$

Chiaramente si tratta di una variazione geodetica con γ_s la geodetica uscente da $\sigma(s)$ con velocità iniziale $X(s)$, dunque il campo \tilde{Y} associato a H è necessariamente un campo di Jacobi. Per dimostrare che \tilde{Y} coincide con Y , è pertanto sufficiente verificare che si abbia $\tilde{Y}(a) = Y(a)$ e $\tilde{Y}'(a) = Y'(a)$,

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(a) &= \frac{\bar{\partial}}{\partial s}(a, 0) = \frac{\partial H}{\partial s}(a, s) \Big|_{s=0} = \dot{\sigma}(0) = Y(a), \\ \tilde{Y}'(a) &= \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}(a, 0) = \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}(a, 0) = \frac{D}{ds} X(s) \Big|_{s=0} \\ &= \left(\underbrace{\frac{D}{ds} X_0(s)}_0 + X_1(s) + s \underbrace{\frac{D}{ds} X_1(s)}_0 \right) \Big|_{t=0} = X_1(0) = Y'(a).\end{aligned}$$

□

Si noti che, nel caso in cui $Y(a) = 0$, la curva σ è la geodetica costante in p e $X(s)$ è il segmento $X(s) = \dot{\gamma}(a) + sY'(a)$ in T_pM , dunque $H(a, s) = p$, per ogni $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (il primo estremo delle variazioni è fissato). Vediamo come questo ci permetta di calcolare il differenziale della mappa esponenziale \exp_p nei vettori diversi dall'origine O_p di T_pM , in termini dei campi di Jacobi.

COROLLARIO 6.4.8. *Sia p un punto di una varietà riemanniana completa (M, g) e siano $v, w \in T_pM$. Sia $t \mapsto \gamma(t) = \exp_p(tv)$, per $t \in \mathbb{R}$, la geodetica uscente da p con velocità iniziale v e Y un campo di Jacobi lungo γ con $Y(0) = 0$ e $Y'(0) = w$. Allora, identificando gli spazi tangenti $T_{tv}T_pM \simeq T_pM$, si ha*

$$Y(t) = (d\exp_p)_{tv}(tw).$$

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la variazione geodetica $H(t, s) = \exp_p(t(v + sw))$ di γ , infatti γ_s è la geodetica uscente da p con velocità iniziale $v + sw$. Per la Proposizione 6.4.7, il campo lungo γ

$$\tilde{Y}(t) = \frac{\partial H(t, s)}{\partial t} \Big|_{s=0} = (d\exp_p)_{tv}(tw)$$

è un campo di Jacobi \tilde{Y} . Per avere la tesi è pertanto sufficiente mostrare che \tilde{Y} coincide con Y , cioè che si abbia $\tilde{Y}(0) = 0$ e $\tilde{Y}'(0) = w$.

$$\tilde{Y}(0) = \frac{\bar{\partial}}{\partial s}(0, 0) = \frac{\partial H(0, s)}{\partial s} \Big|_{s=0} = 0.$$

in quanto $H(0, s) = p$, per ogni $s \in \mathbb{R}$.

$$\tilde{Y}'(0) = \frac{D}{dt} \frac{\bar{\partial}}{\partial s}(0, 0) = \frac{D}{ds} \frac{\bar{\partial}}{\partial t}(0, 0) = \frac{D}{ds}(v + tw) \Big|_{t=0} = w,$$

□

Il comportamento dei campi di Jacobi determina dunque l'invertibilità o meno del differenziale della mappa esponenziale.

PROPOSIZIONE 6.4.9. *Sia p un punto di una varietà riemanniana completa (M, g) e sia $v \in T_p M$. Allora $(d \exp_p)_v$ è singolare se e solo se $q = \exp_p(v)$ è un punto coniugato a p lungo la geodetica $t \mapsto \gamma_v(t) = \exp_p(tv)$. In particolare, se non esistono punti coniugati a p lungo γ_v , per ogni $v \in T_p M$, allora $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ è un diffeomorfismo locale.*

DIMOSTRAZIONE. Si tratta di un'immediata conseguenza del Corollario 6.4.8, infatti $q = \exp_p(v)$ è coniugato a p se e solo se esiste un campo di Jacobi (non costantemente nullo) Y lungo $\gamma_v : [0, 1] \rightarrow M$ che si annulla agli estremi di $[0, 1]$, dunque

$$0 = Y(1) = (d \exp_p)_v(w)$$

con $Y(0) = 0$ e $w = Y'(0)$.

□

OSSERVAZIONE 6.4.10. Le tre seguenti condizioni sono dunque equivalenti per una geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ da $p = \gamma(a)$ a $q = \gamma(b)$:

- il punto q è coniugato a p lungo γ ,
- la forma indice associata a γ è degenere,
- se $q = \exp_p(v)$ allora il differenziale della mappa esponenziale $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ è singolare in $v \in T_p M$.

COROLLARIO 6.4.11. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa con curvatura sezionale minore o uguale a zero. Allora non vi sono punti coniugati e per ogni $p \in M$, la mappa esponenziale $\exp_p : T_p M \rightarrow M$ è un diffeomorfismo locale.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che vi siano due punti p e q coniugati lungo una geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ da p a q , allora esiste un campo di Jacobi non banale Y lungo γ che si annulla agli estremi (ricordiamo che segue che Y deve essere ortogonale a γ). Si ha dunque

$$0 = I(Y, Y) = \int_a^b (|Y'|^2 - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)) dt \geq \int_a^b |Y'|^2 dt,$$

poiché (essendo Y e $\dot{\gamma}$ ortogonali)

$$R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y) = \text{Sec}(\langle \dot{\gamma}, Y \rangle) |\dot{\gamma}|^2 |Y|^2 \leq 0.$$

Segue che $Y'(t) = 0$ per ogni $t \in [a, b]$, da cui la contraddizione $Y(t) = 0$ per ogni $t \in [a, b]$. □

OSSERVAZIONE 6.4.12. Vediamo una dimostrazione alternativa.

Sia Y un campo di Jacobi lungo $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ e definiamo $f(t) = g(Y(t), Y(t))$, allora si ha $f'(t) = 2g(Y(t), Y'(t))$ e

$$\begin{aligned} f''(t) &= 2g(Y'(t), Y'(t)) + 2g(Y(t), Y''(t)) \\ &= 2|Y'(t)|^2 - 2g(Y(t), R(\dot{\gamma}(t), Y(t))\dot{\gamma}(t)) \\ &= 2|Y'(t)|^2 - 2R(\dot{\gamma}(t), Y(t), \dot{\gamma}(t), Y(t)) \\ &= 2|Y'(t)|^2 - 2\text{Sec}(\langle \dot{\gamma}(t), Y(t) \rangle)|Y(t)|^2 \\ &\geq 2|Y'(t)|^2. \end{aligned}$$

Quindi la funzione $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è convessa e soddisfa con $f(a) = f'(a) = 0$, segue che se $f(b) = 0$, allora f è sempre nulla, quindi anche Y . Non ci sono dunque campi di Jacobi non banali lungo γ che si annullano agli estremi.

Poiché sappiamo esprimere il differenziale della mappa esponenziale in ogni punto di $T_p M$ per mezzo dei campi di Jacobi, possiamo estendere a tutto $T_p M$ il Lemma di Gauss 4.2.12.

LEMMA 6.4.13 (Lemma di Gauss "esteso"). Sia $p \in M$, per ogni $v, w \in T_p M$, si ha

$$g_{\exp_p(v)}((d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w)) = g_p(v, w).$$

In particolare, per ogni $r \in \mathbb{R}^+$ e $v \in \mathbb{S}_p^{n-1}$, la geodetica $r \mapsto \gamma_v(r) = \exp_p(rv)$ è normale in $\gamma_v(r)$ alla sfera geodetica $S_r(p) = \partial B_r(p) = \exp_p(r\mathbb{S}_p^{n-1})$, di raggio r e centro p .

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo che

$$(d \exp)_v(v) = Y(1) \quad \text{e} \quad (d \exp)_v(w) = W(1)$$

dove Y e W sono due campi di Jacobi lungo la geodetica $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ (non necessariamente minimale), con $Y(0) = 0$, $Y'(0) = v$, $w(0) = 0$, $W'(0) = w$. Per la Proposizione 6.4.6, abbiamo $Y(t) = t\dot{\gamma}(t)$ e se $w = \tilde{w} + \beta v$, si ha $W(t) = \tilde{W}(t) + t\beta\dot{\gamma}(t)$, dove \tilde{W} è un campo di Jacobi ortogonale a γ . Abbiamo allora

$$g_{\gamma(1)}(Y(1), W(1)) = g_{\gamma(1)}(\dot{\gamma}(1), \tilde{W}(1) + \beta\dot{\gamma}(1)) = \beta|\dot{\gamma}(1)|_{\gamma(1)}^2 = \beta|v|_p^2 = g_p(v, w),$$

da cui la tesi. \square

OSSERVAZIONE 6.4.14. Si noti che se $r > \text{inj}(p)$ la palla geodetica $B_r(p)$ non è in genere omeomorfa a una palla di \mathbb{R}^n e analogamente, se $r \geq \text{inj}(p)$ la sfera geodetica $S_r(p)$ non è una sottovarietà omeomorfa a \mathbb{S}^{n-1} , come invece succede se $r < \text{inj}(p)$ ($S_r(p)$ potrebbe avere autointersezioni o non essere regolare).

I campi di Jacobi possono essere utilizzati per calcolare la curvatura di una varietà, se ne conosciamo le geodetiche, come nel seguente esempio.

??? INSERIRE CAMPI DI JACOBI E CURVATURA – VEDI GHL–IIIed 3.C.4 – Vedi Esercizio 6.4.19 sotto???

ESEMPIO 6.4.15 (Spazi proiettivi complessi). Calcoliamo la curvatura dello spazio proiettivo complesso n -dimensionale $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ con la metrica di Fubini–Study, visto nell’Esempio 2.3.17. Con le stesse notazioni, usiamo la descrizione di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ come il quoziente $\mathbb{S}^{2n+1}/\mathbb{S}^1$, con sommersione (fibrato) associata $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Sia γ una geodetica di velocità unitaria in $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ con $\gamma(0) = x = \pi(z)$ e $\dot{\gamma}(0) = v \in T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, sia $w \in v^\perp$, anch’esso di norma unitaria e siano $\tilde{v}, \tilde{w} \in H_z$ (lo spazio orizzontale in $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$) tali che $d\pi_z(\tilde{v}) = v$, $d\pi_z(\tilde{w}) = w$. Essendo

$$H_z = \{y \in \mathbb{R}^{2n+2} : \langle y, z \rangle = \langle y, iz \rangle = 0\}, \quad (6.9)$$

la variazione della geodetica $t \mapsto \tilde{\gamma}(t) = z \cos t + \tilde{v} \sin t$ data da

$$\tilde{H}(t, s) = z \cos t + (\tilde{v} \cos s + \tilde{w} \sin s) \sin t$$

consiste di geodetiche “orizzontali” di \mathbb{S}^{2n+1} , dunque la sua proiezione $H = \pi \circ \tilde{H}$ è una variazione geodetica di γ . Il campo di Jacobi associato a \tilde{H} è $t \mapsto \tilde{w} \sin t$, quindi quello associato a H è dato da $Y(t) = d\pi_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{w}) \sin t = W(t) \sin t$, dove abbiamo posto $W(t) = d\pi_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{w})$. Consideriamo la moltiplicazione per i in H_z (che è un isomorfismo di H_z in sé, per la formula (6.9)), allora l’isometria $d\pi$ tra H_z e $T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ induce un isomorfismo J_x in $T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, per ogni $x \in \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ (si mostri per esercizio che J_x non dipende da z nella fibra su x e che la 2-forma definita da $\omega_x(v, w) = g_x(J_x v, w)$ è parallela, usando la Proposizione 3.4.4). Vediamo preliminarmente due casi:

- \tilde{w} è ortogonale a $i\tilde{v}$. Dunque w è ortogonale a $J_x v$ e \tilde{w} è ortogonale a $i\dot{\tilde{\gamma}}(t)$ e $i\dot{\tilde{\gamma}}(t)$, per ogni t , il che implica che $\tilde{w} \in H_{\tilde{\gamma}(t)}$ e poiché è parallelo, si ha che anche W è parallelo lungo γ . Segue allora che $Y''(t) = -W(t) \sin t$ e, usando l’equazione dei campi di Jacobi (6.8), abbiamo $R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} = Y$, dunque

$$R(v, w)v = w,$$

- \tilde{w} è uguale a $i\tilde{v}$. Che è come dire $w = J_x v$. Il campo \tilde{w} non è orizzontale, la sua componente orizzontale in $\tilde{\gamma}(t)$ è data da

$$i\tilde{v} - \langle i\tilde{v}, i\tilde{\gamma}(t) \rangle i\tilde{\gamma}(t) = (i\tilde{v} \cos t - iz \sin t) \cos t = i\dot{\tilde{\gamma}}(t) \cos t$$

dunque $Y(t) = J_{\tilde{\gamma}(t)}\dot{\tilde{\gamma}}(t) \cos t \sin t$.

Essendo J parallelo (segue da quanto detto sopra), si ha $\nabla_{\dot{\gamma}}(J\dot{\gamma}) = 0$. Un altro modo di vedere questo è notare che, per la Proposizione 3.4.4, si ha

$$(\nabla_{\dot{\gamma}}(J\dot{\gamma}))_{\tilde{\gamma}(t)} = d\pi_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{\nabla}_{\dot{\tilde{\gamma}}(t)} i\dot{\tilde{\gamma}}(t))$$

e

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\tilde{\gamma}}(t)} i\dot{\tilde{\gamma}}(t) = -iz \cos t - i\tilde{v} \sin t = -i\tilde{\gamma}(t),$$

che è un campo verticale. Dunque $Y''(t) = J_{\gamma(t)}\dot{\gamma}(t)(\cos t \sin t)'' = -4Y(t)$, da cui segue $R(\dot{\gamma}, J\dot{\gamma})\dot{\gamma} = 4J\dot{\gamma}$, dunque

$$R(v, Jv)v = 4Jv.$$

Nel caso generale, ogni vettore $w \in T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ di norma unitaria può esser scritto come

$$w = w_0 \cos \alpha + Jv \sin \alpha$$

con w_0 ortogonale a Jv , si ha allora

$$\begin{aligned} R(v, w)v &= R(v, w_0 \cos \alpha + Jv \sin \alpha)v \\ &= R(v, w_0)v \cos \alpha + R(v, Jv)v \sin \alpha \\ &= w_0 \cos \alpha + 4Jv \sin \alpha \end{aligned}$$

e la curvatura sezionale del piano generato da v e w è data da

$$\text{Sec}_x(\langle v, w \rangle) = g(w_0 \cos \alpha + 4Jv \sin \alpha, w_0 \cos \alpha + Jv \sin \alpha) = 1 + 3 \sin^2 \alpha. \quad (6.10)$$

Concludiamo allora che la curvatura sezionale dei piani in $T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è positiva e varia tra 1 (per $\text{Sec}_x(\langle v, w_0 \rangle)$) e 4 (per $\text{Sec}_x(\langle v, Jv \rangle)$). Per l'azione transitiva di $U(n+1) \subseteq SO(2n+2)$, il gruppo delle isometrie di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ agisce transitivamente sul fibrato tangente unitario, quindi il tensore di curvatura è completamente determinato. Considerando la forma ω menzionata sopra, definita da $\omega(v, w) = g(Jv, w)$, si ha (lo si provi per esercizio)

$$\begin{aligned} R(v, w, u, z) &= g(v, u)g(w, z) - g(v, z)g(w, u) + \omega(v, u)\omega(w, z) - \omega(v, z)\omega(w, u) \\ &\quad + 2\omega(v, w)\omega(u, z) \\ &= g(v, u)g(w, z) - g(v, z)g(w, u) + g(Jv, u)g(Jw, z) - g(Jv, z)g(Jw, u) \\ &\quad + 2g(Jv, w)g(Ju, z) \end{aligned} \quad (6.11)$$

per ogni quaterna di vettori $v, w, u, z \in T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$. Segue che se $n \geq 2$, scegliendo due vettori unitari $u, v \in T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, tali che u, v, Ju, Jv siano mutualmente ortogonali (si mostri che si può trovare una base ortonormale di $T_x\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ del tipo $\{e_1, Je_1, \dots, e_n, Je_n\}$), si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(v \wedge w - Jv \wedge Jw, v \wedge w - Jv \wedge Jw) &= R(v, w, v, w) + R(Jv, Jw, Jv, Jw) \\ &\quad - 2R(v, w, Jv, Jw) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dunque, malgrado tutte le curvatures sezionali positive, l'operatore di curvatura \mathcal{R} di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, per $n \geq 2$, ha un autovalore nullo, cioè la forma \mathcal{R} è soltanto semidefinita positiva (segue dalla formula (6.11), si veda [16, Sezioni 5.1–5.2] per maggiori dettagli), come anticipato nell'Esempio 5.8.18.

ESERCIZIO 6.4.16. Si mostri che l'operatore di curvatura di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ non è semplice (si veda dopo la Definizione 5.3.11).

OSSERVAZIONE 6.4.17. La formula (6.10) che ci dà la curvatura di $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ è un caso particolare della seguente *formula di O'Neill* (lo si mostri per esercizio).

PROPOSIZIONE 6.4.18. *Data una sommersione riemanniana $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \rightarrow (M, g)$, siano $\widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \Gamma(T\widetilde{M})$ i sollevamenti orizzontali di due campi vettoriali ortonormali $X, Y \in \Gamma(TM)$, allora*

$$\text{Sec}(\langle X, Y \rangle) = \text{Sec}(\langle \widetilde{X}, \widetilde{Y} \rangle) + \frac{3}{4} |[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V|^2,$$

dove abbiamo indicato con $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V$ la componente verticale di $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$.

DIMOSTRAZIONE. Per il Lemma 3.4.3, se \widetilde{W} è un campo verticale, si ha

$$\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{W}} \widetilde{X}, \widetilde{Y}) = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{W}, \widetilde{Y}) + \widetilde{g}([\widetilde{W}, \widetilde{X}], \widetilde{Y}) = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{W}, \widetilde{Y}).$$

e per la Proposizione 3.4.4,

$$\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{W}, \widetilde{Y}) = -\widetilde{g}(\widetilde{W}, \widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}} \widetilde{Y}) = -\frac{1}{2} \widetilde{g}([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V, \widetilde{W}),$$

dunque

$$\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_{\widetilde{W}} \widetilde{X}, \widetilde{Y}) = -\frac{1}{2} \widetilde{g}([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]^V, \widetilde{W}).$$

La tesi segue allora per calcolo diretto, usando la Proposizione 3.4.4 e questa uguaglianza. \square

Questo formula dice “euristicamente” che la base della sommersione ha “più curvatura” dello spazio totale.

ESERCIZIO 6.4.19. Si calcoli la curvatura di \mathbb{R}^n , \mathbb{S}^n e \mathbb{H}^n usando i campi di Jacobi, come nell’esempio precedente.

Per mezzo dei campi di Jacobi possiamo infine dare una dimostrazione della formula per l’espansione al second’ordine della metrica in serie di Taylor, in coordinate normali centrate in $p \in M$, menzionata nell’Osservazione 5.1.9. Il fatto rilevante è che in coordinate normali i campi $t \frac{\partial}{\partial x^i}$ sono campi di Jacobi lungo ogni geodetica $t \mapsto \gamma(t) = \exp_p(tv)$ uscente da p , infatti sono generatori infinitesimali della variazione geodetica $H(t, s) = \exp_p(t(v + se_i))$ di γ ,

$$\left. \frac{\partial H(t, s)}{\partial s} \right|_{s=0} = \left. \frac{\partial \exp_p(t(v + se_i))}{\partial s} \right|_{s=0} = (d \exp_p)_{tv}(te_i) = t \frac{\partial}{\partial x^i},$$

dove $\{e_i\}$ è la base ortonormale di $T_p M$ a cui sono associate le coordinate normali.

PROPOSIZIONE 6.4.20. *In coordinate normali centrate in $p \in M$, si ha*

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}(p) = -\frac{1}{3} (R_{ikjl}(p) + R_{iljk}(p)),$$

nel punto p , dunque

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{6}(R_{ikjl}(p) + R_{iljk}(p))x^k x^l + o(|x|^2) = \delta_{ij} + \frac{1}{3}R_{kijl}(p)x^k x^l + o(|x|^2).$$

DIMOSTRAZIONE. Per quanto detto sopra, in coordinate normali centrate in $p \in M$, considerato $w \in \mathbb{R}^n$, i campi $Y(t) = tw^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ lungo la geodetica di velocità unitaria $\exp_p(tv)$ con $v \in \mathbb{S}_p^{n-1} \subseteq T_p M$, sono campi di Jacobi con $Y'(0) = w$. Sia $f(t) = g(Y(t), Y(t))$, allora

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2g(Y', Y), \\ f''(t) &= 2g(Y', Y') + 2g(Y'', Y) = 2g(Y', Y') - 2R(Y, \dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}), \\ f'''(t) &= 4g(Y'', Y') - 4R(Y', \dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}) - 2\nabla_{\dot{\gamma}} R(Y, \dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}) \\ &= -8R(Y', \dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}) - 2\nabla_{\dot{\gamma}} R(Y, \dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}), \\ f''''(t) &= -8R(Y'', \dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}) - 8R(Y', \dot{\gamma}, Y', \dot{\gamma}) \\ &\quad - 2\nabla_{\dot{\gamma}, \dot{\gamma}}^2 R(Y, \dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}) - 4\nabla_{\dot{\gamma}} R(Y', \dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}) \\ &= 8R(R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma}, \dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}) - 8R(Y', \dot{\gamma}, Y', \dot{\gamma}) \\ &\quad - 2\nabla_{\dot{\gamma}, \dot{\gamma}}^2 R(Y, \dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}) - 4\nabla_{\dot{\gamma}} R(Y', \dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}), \end{aligned}$$

da cui (essendo $Y(0) = 0$)

$$\begin{aligned} f(0) &= f'(0) = f''(0) = 0, \\ f''(0) &= 2g_p(Y'(0), Y'(0)) = 2|w|_p^2 = 2g_{ij}(p)w^i w^j \end{aligned}$$

e

$$f''''(0) = -8R_p(Y'(0), \dot{\gamma}(0), Y'(0), \dot{\gamma}(0)) = -8R_p(w, v, w, v) = -8R_{ikjl}(p)v^k v^l w^i w^j.$$

Dunque, per la formula di Taylor, si ha

$$\begin{aligned} f(t) &= g_{ij}(\gamma(t))w^i w^j t^2 \\ &= g_{ij}(p)w^i w^j t^2 - \frac{8}{4!}R_{ikjl}(p)v^k v^l w^i w^j t^4 + o(t^4) \\ &= g_{ij}(p)w^i w^j t^2 - \frac{1}{3}R_{ikjl}(p)v^k v^l w^i w^j t^4 + o(t^4), \end{aligned}$$

per ogni $w \in \mathbb{R}^n$, cioè

$$g_{ij}(\gamma(t)) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{ikjl}(p)v^k v^l t^2 + o(t^2),$$

che in coordinate normali $x = tv$, si scrive allora

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{ikjl}(p)x^k x^l + o(|x|^2),$$

in quanto $x = g_p(tv, e_i) = tv^i$ e $|x|^2 = |tv|_p^2 = t^2$, essendo $|v|_p = 1$. Le formule dell'enunciato dunque seguono per l'unicità dei coefficienti dello sviluppo di Taylor della metrica g_{ij} . \square

OSSERVAZIONE 6.4.21. Si noti che allora in coordinate normali

$$\Delta g_{ij}(p) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^k}(p) = -\frac{1}{3}(R_{ikjk}(p) + R_{ikjk}(p)) = -\frac{2}{3}R_{ij}(p).$$

6.5. Minimalità delle geodetiche

Una geodetica su una varietà riemanniana completa non rimane necessariamente minimale per tutti i tempi. Dati $p \in M$ e $v \in T_p M$, definiamo

$$I_v = \{t \in [0, +\infty) : \gamma_v \text{ è minimale su } [0, t]\},$$

dove che γ_v è la geodetica uscente da p con velocità iniziale v . Per le proprietà locali delle geodetiche, I_v è un intorno destro di 0. Inoltre, se $t \notin I_v$, la distanza tra p e $\gamma_v(t)$ è strettamente minore di $\mathcal{L}(\gamma_v|_{[0,t]})$, per continuità della distanza, ciò accade anche per tempi in un intorno di t , di conseguenza l'intervallo I_v è chiuso. Dunque, se una geodetica non rimane minimale per tutti i tempi, allora esiste un ultimo punto fino al quale è minimale.

Come vedremo, ci sono esclusivamente solo due ragioni per cui una geodetica smetta di essere minimale: una legata alla geometria globale della varietà, l'altra di carattere analitico data dalla teoria di Jacobi. Cominciamo a esaminare la prima delle due.

PROPOSIZIONE 6.5.1. Sia (M, g) una varietà riemanniana e sia $\gamma : [a, b + \varepsilon] \rightarrow M$ una geodetica, con $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$. Supponiamo che esista una geodetica minimale $\bar{\gamma}$ da p a q diversa da γ (anche a meno di riparametrizzazione). Allora γ non può essere minimale su $[a, b + \varepsilon]$, cioè superato il punto q .

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per assurdo che γ sia minimale. Senza perdita di generalità, assumiamo che $\bar{\gamma}$ sia definita su $[a, b]$, con $\bar{\gamma}(a) = p$ e $\bar{\gamma}(b) = q$. Essendo sia γ che $\bar{\gamma}$ minimali da p a q , devono essere parametrizzate per lo stesso multiplo della lunghezza d'arco. Consideriamo la curva $\sigma : [a, b + \varepsilon] \rightarrow M$ così definita:

$$\sigma(t) = \begin{cases} \bar{\gamma}(t) & \text{per } t \in [a, b], \\ \gamma(t) & \text{per } t \in [b, b + \varepsilon]. \end{cases}$$

Per costruzione, anche σ è minimale su $[a, b + \varepsilon]$, ed è inoltre parametrizzata per un multiplo della lunghezza d'arco, quindi è una geodetica. In particolare, deve essere di classe C^∞ . Tuttavia $\dot{\gamma}(b)$ è diverso da $\dot{\bar{\gamma}}(b)$, perché altrimenti le due geodetiche γ e $\bar{\gamma}$ coinciderebbero, pertanto la derivata destra e la derivata sinistra di σ in b sono diverse, che è un assurdo. \square

Il secondo motivo per cui una geodetica possa smettere di essere minimale è strettamente legato alla teoria dei campi di Jacobi, che abbiamo sviluppato nella sezione precedente. Se una geodetica da p a q in M è minimale, per quanto visto nelle sezioni precedenti, la variazione seconda dell'energia, dunque la forma indice associata alla geodetica deve essere semidefinita positiva. Vediamo che

questa condizione necessaria implica, come nel caso “classico” dei funzionali standard del calcolo delle variazioni, che deve valere la *condizione di Jacobi* (si veda [3, Sezione 8.3]), cioè che non ci siano punti coniugati a p “interni” alla geodetica, cioè prima di q (il punto q può essere coniugato). Si confronti la seguente proposizione con il Teorema 8.3.3 in [3].

PROPOSIZIONE 6.5.2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodetica parametrizzata per lunghezza d'arco, con $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$. Se esiste $t_0 \in (a, b)$ tale che il punto $\gamma(t_0)$ è coniugato a p lungo γ , allora esiste una variazione H di γ a estremi fissati tale che $\mathcal{L}(\gamma_s) < \mathcal{L}(\gamma)$ e $\mathcal{E}(\gamma_s) < \mathcal{E}(\gamma)$ per ogni $s \neq 0$ sufficientemente piccolo. In particolare, γ non è minimale.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo per semplicità $a = 0$ e $b = 1$. Essendo $\gamma(t_0)$ coniugato a p , esiste un campo di Jacobi non nullo lungo γ tale che $Y(0) = 0$ e $Y(t_0) = 0$. Vogliamo costruire, a partire da Y , dei campi Y_α (non necessariamente di Jacobi) con $Y_\alpha(0) = 0$ e $Y_\alpha(1) = 0$ per i quali si abbia $I(Y_\alpha, Y_\alpha) < 0$. Un qualsiasi campo Y_α con queste proprietà ha associata una variazione H^α a estremi fissati tale che

$$\left. \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{E}(\gamma_s) \right|_{s=0} < 0,$$

da cui segue che l'energia di γ_s è strettamente minore di quella di $\gamma_0 = \gamma$, per $s \neq 0$ sufficientemente piccolo, di conseguenza, anche le lunghezze risultano strettamente minori,

$$[\mathcal{L}(\gamma_s)]^2 \leq 2\mathcal{E}(\gamma_s) < 2\mathcal{E}(\gamma) = [\mathcal{L}(\gamma)]^2.$$

Osserviamo che $Y'(t_0)$ è non nullo perché $Y(t_0) = 0$ (altrimenti Y sarebbe nullo lungo tutta la curva). Sia $Z_1(t_0) = -Y'(t_0)$ e estendiamo poi Z_1 parallelamente lungo γ . Sia $\theta \in C_c^\infty(0, 1)$ tale che $\theta(t_0) = 1$ e definiamo il campo Z lungo γ come $Z(t) = \theta(t)Z_1(t)$ e per $\alpha > 0$,

$$Y_\alpha = \begin{cases} Y(t) + \alpha Z(t) & \text{se } t \in [0, t_0] \\ \alpha Z(t) & \text{se } t \in [t_0, 1] \end{cases}$$

Il campo Y_α , definito lungo γ , è chiaramente continuo in t_0 perché $Y(t_0) = 0$ e di classe C^1 a tratti. Se dimostriamo che $I(Y_\alpha, Y_\alpha) < 0$ per $\alpha > 0$ sufficientemente piccolo, allora si potrà concludere approssimando gli Y_α con dei campi \tilde{Y}_α di classe C^∞ in modo che valga ancora $I(\tilde{Y}_\alpha, \tilde{Y}_\alpha) < 0$. Verifichiamo allora che si

abbia $I(Y_\alpha, Y_\alpha) < 0$, per α sufficientemente piccolo,

$$\begin{aligned} I(Y_\alpha, Y_\alpha) &= \int_0^1 (|Y'_\alpha|^2 - R(Y_\alpha, \dot{\gamma}, Y_\alpha, \dot{\gamma})) dt \\ &= \int_0^1 (|\alpha Z'|^2 - R(\alpha Z, \dot{\gamma}, \alpha Z, \dot{\gamma})) dt \\ &\quad + \int_0^{t_0} (|Y'|^2 - R(Y, \dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma})) dt \\ &\quad + 2 \int_0^{t_0} (g(Y', \alpha Z') - R(Y, \dot{\gamma}, \alpha Z, \dot{\gamma})) dt \end{aligned}$$

Esaminiamo separatamente ciascuno dei tre integrali, il primo di essi è uguale a

$$\alpha^2 \int_0^1 (|Z'|^2 - R(Z, \dot{\gamma}, Z, \dot{\gamma})) dt = \alpha^2 I(Z, Z),$$

il secondo, integrando per parti e utilizzando l'equazione dei campi di Jacobi per Y , si riscrive come

$$\int_0^{t_0} \left(\frac{d}{dt} g(Y, Y') - \underbrace{g(Y, Y'')}_0 - R(Y, \dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}) \right) dt = g(Y, Y') \Big|_0^{t_0} = 0.$$

Il maniera del tutto analoga, il terzo integrale diventa

$$\begin{aligned} 2\alpha \int_0^{t_0} \left(\frac{d}{dt} g(Z, Y') - \underbrace{g(Z, Y'')}_0 - R(Y, \dot{\gamma}, Z, \dot{\gamma}) \right) dt &= 2\alpha g(Z, Y') \Big|_0^{t_0} \\ &= 2\alpha g(Z_1(t_0), Y'(t_0)) = -2\alpha |Y'(t_0)|^2. \end{aligned}$$

Otteniamo dunque

$$I(Y_\alpha, Y_\alpha) = \alpha^2 I(Z, Z) - 2\alpha |Y'(t_0)|^2 = -2\alpha |Y'(t_0)|^2 + o(\alpha)$$

e essendo $|Y'(t_0)|^2 > 0$, questa espressione è strettamente negativa per $\alpha > 0$ sufficientemente piccolo. \square

OSSERVAZIONE 6.5.3. Una dimostrazione più diretta della non minimalità della geodetica γ in presenza di un punto $\gamma(t_0)$ coniugato a p lungo di essa, si può ottenere analogamente alla dimostrazione "classica" del Teorema 8.3.3 in [3]. Se γ fosse minimale, si avrebbe che la forma indice è semidefinita positiva, dunque

$$I(X, X) = \int_a^b (|X'|^2 - R(\dot{\gamma}, X, \dot{\gamma}, X)) dt \geq 0$$

per ogni campo X lungo γ . Se allora consideriamo il campo Y di Jacobi non nullo su $[0, t_0]$ lungo γ tale che $Y(0) = 0$ e $Y(t_0) = 0$, come nella proposizione, e lo estendiamo a zero in $[t_0, 1]$, otteniamo un campo Z di classe C^1 a tratti ma *non*

C^1 (poiché $Y'(t_0) = Z'_-(t_0) \neq 0$), che si vede facilmente soddisfare $I(Z, Z) = 0$, dunque Z è un minimo del funzionale (“di Jacobi” naturalmente associato, si veda [3, Sezione 8.3]) $X \mapsto I(X, X)$ sui campi di classe C^1 a tratti lungo γ e zero agli estremi. Le condizioni di Erdmann–Weierstrass (si veda [3, Sezione 3.1]) per tale funzionale, che devono dunque valere, sono $g(Z'_-(t_0), \cdot) = g(Z'_+(t_0), \cdot)$, cioè $Z'_-(t_0) = 0$, che è una contraddizione.

Per concludere lo studio della minimalità delle geodetiche “lunghe”, mostriamo infine che non vi sono altre ragioni (oltre a quelle descritte nelle Proposizioni 6.5.1 e 6.5.2) per cui una geodetica smetta di essere minimale. Notiamo che sulla sfera \mathbb{S}^2 con la metrica canonica, le geodetiche uscenti dal polo nord sono minimali fino al polo sud e al polo sud smettono di essere minimali, sia perché incontrano altre geodetiche minimali, sia perché il polo sud e il polo nord sono coniugati (lo si mostri per esercizio), dunque tali due situazioni possono anche effettivamente verificarsi contemporaneamente.

TEOREMA 6.5.4. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa e γ una geodetica uscente da $p \in M$, minimale fino a un punto q e che non sia più minimale oltre q . Allora si verifica almeno una delle seguenti due possibilità, non mutuamente esclusive,*

- *esiste un'altra geodetica minimale $\bar{\gamma}$ da p a q , diversa da γ (anche a meno di riparametrizzazione),*
- *q è coniugato a p lungo γ .*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo di non essere nel primo caso, dunque γ è l'unica geodetica minimale da p a q e assumiamo senza perdita di generalità che $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ con $v \in T_pM$, $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e di conseguenza, $|v|_p = d(p, q)$. Se $q_\varepsilon = \gamma(1 + \varepsilon)$, per $\varepsilon > 0$, non essendo per ipotesi γ minimale tra p e q_ε , esiste una geodetica minimale $t \mapsto \gamma_\varepsilon(t) = \exp_p(tv_\varepsilon)$ tra p e q_ε , con $\gamma_\varepsilon(0) = p$ e $\gamma_\varepsilon(1) = q_\varepsilon$.

Per continuità della distanza, $|v_\varepsilon|_p = \mathcal{L}(\gamma_\varepsilon) = d(p, q_\varepsilon)$ deve tendere a $|v|_p = \mathcal{L}(\gamma) = d(p, q)$, per $\varepsilon \rightarrow 0$, allora per compattezza, esiste una successione $\varepsilon_k \rightarrow 0$ tale che v_{ε_k} converga a un qualche $w \in T_pM$, con $|w|_p = |v|_p = d(p, q)$. Per la dipendenza continua dai dati iniziali delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie, si ha allora che γ_{ε_k} tende a una geodetica da p a q con velocità iniziale w e lunghezza $\mathcal{L}(\gamma) = d(p, q)$, dunque minimale. Poiché abbiamo assunto che vi sia un'unica geodetica minimale da p a q , necessariamente w deve essere uguale a v .

Supponiamo per assurdo che q non sia coniugato a p lungo γ , allora $(d \exp_p)_v$ è invertibile, dunque \exp_p è un diffeomorfismo locale tra un intorno di v in T_pM e un intorno di q in M , ma abbiamo visto che $v_{\varepsilon_k} \rightarrow v$ in T_pM e per ogni k ,

$$\exp_p(v(1 + \varepsilon_k)) = \exp_p(v_{\varepsilon_k}) = q_{\varepsilon_k}.$$

con $v(1 + \varepsilon_k)$ diverso da v_{ε_k} , in quanto per costruzione v_{ε_k} non è essere multiplo di v , dunque \exp_p non sarebbe iniettiva in alcun intorno di v , il che è una contraddizione e la tesi segue. \square

Nel caso “classico” dei funzionali standard del calcolo delle variazioni, una condizione sufficiente di minimalità (locale) era data dalla *condizione forte di Jacobi* (si veda [3, Sezione 8.3]), cioè nel nostro caso che non ci siano punti coniugati a p su tutta la geodetica, (il punto q compreso). La seguente proposizione è allora analoga al Teorema 8.3.12 e al Corollario 8.3.14 in [3].

PROPOSIZIONE 6.5.5. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa e sia $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ una geodetica da $\gamma(a) = p$ a $\gamma(b) = q$. Se non ci sono punti coniugati a p lungo γ , allora esiste un intorno \mathcal{U} di γ in $\Omega_{a,b}^{p,q} = \{\gamma : [a, b] \rightarrow M : \gamma \in C^1, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\}$ in topologia uniforme tale che per ogni $\sigma \in \mathcal{U}$, si ha*

$$\mathcal{L}(\sigma) \geq \mathcal{L}(\gamma) \quad e \quad \mathcal{E}(\sigma) \geq \mathcal{E}(\gamma),$$

con uguaglianza nel primo caso se e solo se σ è una riparametrizzazione di γ , nel secondo se $\sigma = \gamma$. Cioè γ è minimo locale “stretto” in $\Omega_{a,b}^{p,q}$.

DIMOSTRAZIONE. Per semplicità assumiamo $a = 0$ e $b = 1$, dunque $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ per $v \in T_pM$. Dall’ipotesi segue che il differenziale $(d\exp)_{tv}$ è invertibile per ogni $t \in [0, 1]$, dunque \exp_p è un diffeomorfismo locale nell’intorno di ogni punto $tv \in T_pM$. Per compattezza, esiste allora una famiglia finita di aperti U_1, \dots, U_k , la cui unione copre il segmento $\{tv : t \in [0, 1]\}$ tale che $\exp_p|_{U_i}$ sia un diffeomorfismo con la sua immagine, per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$. Siano $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1$ tali che $\{tv : t \in [t_{i-1}, t_i]\} \subseteq U_i$, per ogni $i \in \{1, \dots, k\}$, se allora $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$ è abbastanza vicina a γ in norma uniforme, $\sigma([0, 1])$ è contenuta nell’unione $\bigcup_{i=1}^k U_i$ e possiamo “sollevare” (un pezzo alla volta, iterativamente) σ a una curva $\varphi : [0, 1] \rightarrow T_pM$ con $\varphi(0) = O_p$ e $\varphi(1) = v$, tale che $\sigma = \exp_p \circ \varphi$. Dimostriamo che $\mathcal{L}(\sigma) \geq \mathcal{L}(\gamma)$, scrivendo in coordinate polari $\varphi(t) = r(t)w(t)$, con $|w(t)|_p = 1$, si ha

$$\dot{\varphi}(t) = \dot{r}(t)w(t) + r(t)\dot{w}(t)$$

e per il Lemma di Gauss “esteso” 6.4.13,

$$\begin{aligned} |\dot{\sigma}(t)|_{\sigma(t)}^2 &= |(d\exp_p)_{\varphi(t)}(\dot{\varphi}(t))|_{\sigma(t)}^2 \\ &= |\dot{r}(t)|^2 + |(d\exp_p)_{\varphi(t)}(\dot{w}(t))|_{\sigma(t)}^2 r^2(t) \\ &\geq |\dot{r}(t)|^2. \end{aligned}$$

Dunque,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sigma) &= \int_0^1 |\dot{\sigma}(t)|_{\sigma(t)} dt \geq \int_0^1 |\dot{r}(t)| dt \geq \left| \int_0^1 \dot{r}(t) dt \right| \\ &= |r(1) - r(0)| = |r(1)w(1)|_p = |\varphi(1)|_p = |v|_p = \mathcal{L}(\gamma). \end{aligned}$$

L'uguaglianza vale se $\dot{w}(t) = 0$, dunque $w(t)$ costante uguale a v e in quanto $w(1) = \varphi(1) = v$, e se $\dot{r}(t) \geq 0$, quindi σ è una riparametrizzazione di γ .

Analogamente, per l'energia si ha

$$\mathcal{E}(\sigma) = \frac{[\mathcal{L}(\sigma)]^2}{2} \geq \frac{[\mathcal{L}(\gamma)]^2}{2} = \mathcal{E}(\gamma),$$

con uguaglianza se σ è parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco e è una riparametrizzazione di γ , ma questo implica che σ coincide con γ . \square

OSSERVAZIONE 6.5.6. Un'ovvia conseguenza è che la variazione seconda (a estremi fissati) del funzionale energia in γ è semidefinita positiva. In realtà, analogamente al Teorema 8.3.12 in [3], possiamo mostrare che è *strettamente definita positiva*, cioè esiste $\lambda > 0$ tale che se H è una variazione a estremi fissati di una geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ e X il suo generatore infinitesimale, si ha

$$\frac{d^2}{ds^2} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} = I(X, X) = \int_a^b (|X'|^2 - R(\dot{\gamma}, X, \dot{\gamma}, X)) dt \geq \lambda \int_a^b (|X'|^2 + |X|^2) dt.$$

Infatti, minimizziamo la forma quadratica $X \mapsto I(X, X)$ sui campi lungo γ nulli ai bordi nello spazio di Sobolev $W^{1,2}$, col vincolo $\|X\|_{W^{1,2}}^2 = \int_a^b (|X'|^2 + |X|^2) dt = 1$ (si può fare con i metodi in [3, Capitolo 13], per esempio). Il campo Y che realizza tale minimo è non nullo, in quanto $\|Y\|_{W^{1,2}}^2 = 1$ e soddisfa allora l'equazione di Eulero–Lagrange del problema vincolato,

$$Y' + R(\dot{\gamma}, Y)\dot{\gamma} = \lambda(Y'' - Y), \quad (6.12)$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ è il *moltiplicatore di Lagrange* associato a Y . Segue che Y è un campo lungo γ di classe C^∞ e moltiplicando per Y e integrando (per parti), otteniamo

$$I(Y, Y) = \int_a^b (|Y'|^2 - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)) dt = \lambda \int_a^b (|Y'|^2 + |Y|^2) dt = \lambda.$$

Da cui λ è il minimo del problema ed è nonnegativo, essendo I semidefinita positiva. Se λ fosse zero, Y sarebbe un campo di Jacobi lungo γ , nullo agli estremi, per l'equazione (6.12), dunque la forma indice sarebbe degenera e q sarebbe un punto coniugato a p lungo γ . Ma quindi

$$I(X, X) \geq I(Y, Y) = \int_a^b (|Y'|^2 - R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y)) dt = \lambda = \lambda \int_a^b (|X'|^2 + |X|^2) dt,$$

per ogni campo X lungo γ , nullo agli estremi e tale che $\|X\|_{W^{1,2}}^2 = 1$. La tesi chiaramente segue da questa conclusione.

OSSERVAZIONE 6.5.7. Si noti che γ potrebbe non essere minimale, ma solo un minimo locale. Per esempio, sul toro \mathbb{T}^2 con la metrica flat, non vi sono punti coniugati, dunque tutte le geodetiche sono minimi locali, ma chiaramente una geodetica troppo lunga non può essere minimale (essendo il toro compatto).

OSSERVAZIONE 6.5.8. Si può dimostrare che se p e q non sono coniugati lungo una geodetica γ , allora γ è un punto critico *non degenero* (la forma indice associata a γ non è degenera) del funzionale energia. L'indice di tale punto critico (cioè la dimensione del massimo sottospazio dello spazio vettoriale dei campi lungo γ nulli agli estremi, tale che la forma indice sia definita negativa) coincide col numero dei punti coniugati lungo γ (teorema dell'indice di Morse, si veda [63, Parte III]).

OSSERVAZIONE 6.5.9. Se q è coniugato a p lungo una geodetica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ e non vi sono altri punti coniugati a p "prima" di q , la forma indice I associata a γ è degenera, cioè esiste un campo di Jacobi Y lungo γ e nullo ai bordi, ma

$$I(X, X) = \int_a^b (|X'|^2 - R(\dot{\gamma}, X, \dot{\gamma}, X)) dt = \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{E}(\gamma_s) \Big|_{s=0} \geq 0$$

per ogni campo X lungo γ , zero agli estremi, generatore infinitesimale di una variazione a estremi fissati H di γ , cioè la forma indice associata a γ è semidefinita positiva.

Infatti, supponiamo per semplicità $a = 0$ e $b = 1$, considerato $\delta > 0$ e un campo X lungo γ nullo agli estremi, definiamo il campo \widetilde{X} lungo γ dato da

$$\widetilde{X}(t) = P_t^\delta [X(t/(1-\delta))]$$

se $t \in [0, 1-\delta]$, dove P_t^δ è l'operatore di trasporto parallelo lungo γ da $T_{\gamma(t/(1-\delta))}M$ a $T_{\gamma(t)}M$ e $\widetilde{X}(t) = 0$ se $t \in [1-\delta, 1]$. Essendo $\widetilde{X}|_{[0, 1-\delta]}$ un campo nullo agli estremi lungo la geodetica $\gamma|_{[0, 1-\delta]}$ che non contiene punti coniugati, per la Proposizione 6.5.5 si ha

$$\int_0^1 (|\widetilde{X}'|^2 - R(\dot{\gamma}, \widetilde{X}, \dot{\gamma}, \widetilde{X})) dt = \int_0^{1-\delta} (|\widetilde{X}'|^2 - R(\dot{\gamma}, \widetilde{X}, \dot{\gamma}, \widetilde{X})) dt \geq 0.$$

È facile ora vedere che (per il teorema di convergenza dominata) se $\delta \rightarrow 0$ l'integrale a sinistra converge e $I(X, X)$, in quanto $\widetilde{X}(t) \rightarrow X$ puntualmente su $[0, 1]$, poiché P_t^δ converge all'identità (in carte locali di una banalizzazione di TM).

Si confronti questo risultato con la Proposizione 8.3.8 in [3] nel caso "classico" dei funzionali standard del calcolo delle variazioni (sotto la *condizione di Jacobi*, cioè l'analogo del fatto che non ci sono punti coniugati a p "interni" alla geodetica).

Ciò non implica alcuna proprietà di minimo locale su γ , si consideri per esempio la superficie (M, g) dove $M = (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{S}^1$ e $g = dr^2 + h^2(r)d\theta^2$ con $d\theta^2$ la metrica canonica su \mathbb{S}^1 e $h^2(r) = \cos^2 r - r^4$ (scegliendo $\varepsilon > 0$ in modo tale che $h > 0$ su $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (si tratta di una "striscia" della sfera unitaria "schiacciata" lungo l'asse di simmetria di rotazione).

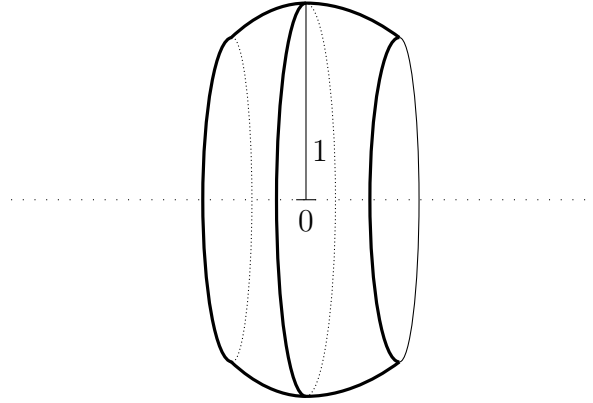


FIGURA 6.2

La geodetica $\gamma : [0, \pi] \rightarrow M$ data da $\gamma(\theta) = (0, \theta)$ non è minimo locale dell'energia in quanto se consideriamo, per $|\delta|$ piccolo, la famiglia di curve $\gamma_\delta(\theta) = (\delta \sin \theta, \theta)$, con velocità $\dot{\gamma}_\delta(\theta) = (\delta \cos \theta, 1)$, sull'intervallo $[0, \pi]$, che congiungono gli stessi punti estremi di γ , cioè $(0, 0)$ e $(0, \pi)$ e ne calcoliamo l'energia, abbiamo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}(\gamma_\delta) &= \int_0^\pi [\delta^2 \cos^2 \theta + h^2(\delta \sin \theta)] d\theta \\
 &= \int_0^\pi [\delta^2 \cos^2 \theta + \cos^2(\delta \sin \theta) - \delta^4 \sin^4 \theta] d\theta \\
 &= \int_0^\pi [\delta^2 \cos^2 \theta + 1 - \delta^2 \sin^2 \theta + \delta^4 \sin^4 \theta/3 + o(\delta^4) - \delta^4 \sin^4 \theta] d\theta \\
 &= \int_0^\pi [1 - 2\delta^4 \sin^4 \theta/3 + o(\delta^4)] d\theta \\
 &< \mathcal{E}(\gamma) - \frac{\delta^4}{3} \int_0^\pi \sin^4 \theta d\theta,
 \end{aligned}$$

se $|\delta| > 0$ è abbastanza piccolo (abbiamo usato l'espansione di Taylor di $\cos^2 t$ nel calcolo).

Vediamo che i due punti estremi di γ sono coniugati e non vi sono altri punti coniugati a $(0, 0)$ lungo γ . Essendo M una superficie gli eventuali campi di Jacobi lungo γ che si annullano agli estremi di un sottointervallo $[0, \alpha]$ di $[0, \pi]$ hanno la forma $Y(\theta) = y(\theta) \frac{\partial}{\partial r}$, con $y : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ nulla in 0 e α (ricordando che devono essere normali alla geodetica, per la Proposizione 6.4.6). Allora, dai calcoli (alla fine) dell'Esempio 5.8.9, si ha che

$$R(\dot{\gamma}, Y, \dot{\gamma}, Y) = y^2 R\left(\dot{\gamma}, \frac{\partial}{\partial r}, \dot{\gamma}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = y^2 R_{1r1r} = -y^2 h(0)h''(0) = y^2,$$

come si calcola facilmente. Dunque segue che

$$I(Y, Y) = \int_0^\alpha [(y')^2 - y^2] d\theta$$

e per la disuguaglianza di Poincaré (si veda [3, Corollario 7.3.2], per esempio) questo integrale è sempre positivo per ogni funzione $y \neq 0$, nulla ai bordi dell'intervallo $[0, \alpha]$, se $\alpha < \pi$, da cui non possono esistere campi di Jacobi nulli ai bordi, dunque nemmeno punti coniugati lungo γ prima di $(0, \pi) \in M$. Se $\alpha = \pi$, il campo $Y(\theta) = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r}$ è invece di Jacobi lungo γ e nullo ai suoi estremi, da cui il punto $(0, \pi)$ è coniugato lungo γ a $(0, 0)$.

6.6. Cutlocus

Ricordiamo, dall'inizio della sezione precedente, che abbiamo definito I_v come l'intervallo (chiuso) dei tempi positivi entro i quali la geodetica γ_v uscente da $p \in M$ rimane minimale. Sia $\rho_p(v) = \sup I_v$ l'ultimo tempo per cui γ_v è minimale (eventualmente $+\infty$, se γ_v non smette mai di essere minimale). Osserviamo che $\rho_p(\lambda v) = \rho_p(v)/\lambda$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}^+$, quindi ρ_p è completamente determinata dal suo valore sulla sfera unitaria \mathbb{S}_p^{n-1} di $T_p M$. Definiamo allora $\bar{\rho}_p$ come la restrizione di ρ_p alla sfera unitaria $\mathbb{S}_p^{n-1} \subseteq T_p M$.

PROPOSIZIONE 6.6.1. *Data una varietà riemanniana completa (M, g) e un punto $p \in M$, la funzione $\bar{\rho}_p : \mathbb{S}_p^{n-1} \rightarrow (0, +\infty]$ definita sopra è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $v \in \mathbb{S}_p^{n-1}$, verifichiamo la continuità di $\bar{\rho}_p$ in v . Per semplicità assumiamo che $\bar{\rho}_p(v) < +\infty$; il caso $\bar{\rho}_p(v) = +\infty$ è analogo. Sia $\bar{t} = \bar{\rho}_p(v)$, e sia $q = \gamma_v(\bar{t})$.

Supponiamo per assurdo che esista una successione $v_k \rightarrow v$ di elementi di \mathbb{S}_p^{n-1} tale che $\bar{\rho}_p(v_k) > \bar{t} + \varepsilon$, per qualche $\varepsilon > 0$. Sia $t = \bar{t} + \varepsilon$. Essendo le geodetiche γ_{v_k} minimali fino al tempo t , si ha che $d(p, \gamma_{v_k}(t)) = \mathcal{L}(\gamma_{v_k}|_{[0,t]}) = t$. Per $k \rightarrow \infty$, si ha che $\gamma_{v_k}(t)$ tende a $\gamma_v(t)$, quindi per la continuità della distanza, $d(p, \gamma_{v_k}(t))$ tende a $d(p, \gamma_v(t))$. Dunque si ha anche che $d(p, \gamma_v(t)) = t$, per cui γ_v è minimale fino al tempo t e ciò è impossibile, perché abbiamo assunto che $\bar{\rho}_p(v)$ fosse uguale a \bar{t} .

Supponiamo ora invece che esista una successione $v_k \rightarrow v$ di vettori in \mathbb{S}_p^{n-1} con $\bar{\rho}_p(v_k) < \bar{t} - \varepsilon$, per qualche $\varepsilon > 0$, dunque, le geodetiche γ_{v_k} non sono minimali fino al tempo $\tau = \bar{t} - \varepsilon$. Poniamo $q_k = \gamma_{v_k}(\tau)$ e siano $w_k \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ tali che γ_{w_k} sia una geodetica minimale da p a $q_k = \gamma_{w_k}(\tau_k)$, con $\tau_k = d(p, q_k)$. Per $k \rightarrow \infty$, la successione di punti q_k converge a $q = \gamma_v(\tau)$ e la geodetica γ_v è minimale fino a q , quindi per la continuità della distanza, $\tau_k \rightarrow \tau = d(p, q)$. A meno di sottosuccessioni, possiamo assumere che w_k converga a un vettore $w \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ e osserviamo che passando al limite nella relazione $\gamma_{w_k}(\tau_k) = q_k$, si ottiene $\gamma_w(\tau) = q$. Essendo allora la geodetica γ_w minimale anche oltre q , per la Proposizione 6.5.1 le due

geodetiche minimali γ_w e γ_v devono coincidere, dunque $w = v$. Segue che

$$q_k = \exp_p(\tau v_k) = \exp_p(\tau_k w_k)$$

e le due successioni di vettori τv_k e $\tau_k w_k$ convergono entrambe a τv in $T_p M$, inoltre per costruzione $\tau v_k \neq \tau_k w_k$, per ogni $k \in \mathbb{N}$. Quindi \exp_p non può essere iniettiva in un intorno di τv , di conseguenza, $(d \exp_p)_{\tau v}$ è singolare e per la Proposizione 6.4.9 ciò significa che $q = \exp_p(\tau v)$ è coniugato a p lungo γ_v . Per la Proposizione 6.5.2, la geodetica γ_v non può allora essere minimale oltre q , il che è una contraddizione. \square

Come conseguenza del risultato appena ottenuto, essendo \mathbb{S}_p^{n-1} compatto, $\bar{\rho}_p$ è costantemente $+\infty$ (per esempio su \mathbb{R}^n con la sua metrica standard) oppure ha un minimo $\bar{\rho}_{\min}(p) \in \mathbb{R}^+$ che è allora il raggio della più grande palla geodetica centrata in $p \in M$ entro la quale le geodetiche uscenti da p sono minimali. In tutta la discussione che segue assumeremo di essere in questo caso, per semplicità, ma tutti i risultati valgono anche se $\bar{\rho}_p$ è costantemente uguale a $+\infty$ su \mathbb{S}_p^{n-1} , ponendo $\bar{\rho}_{\min}(p) = +\infty$, con un piccolo abuso di notazione (lo si mostri per esercizio).

PROPOSIZIONE 6.6.2. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa, allora per ogni $p \in M$ si ha che $\bar{\rho}_{\min}(p)$ è uguale al raggio di iniettività $\text{inj}(p)$.*

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario 4.3.6, le geodetiche uscenti da p con velocità unitaria rimangono minimali per un qualsiasi tempo inferiore al raggio di iniettività di p , segue che $\bar{\rho}_{\min}(p) \geq \text{inj}(p)$.

Viceversa, supponiamo che v e w siano due vettori di modulo strettamente inferiore a $\bar{\rho}_{\min}(p)$, allora le geodetiche γ_v e γ_w sono minimali almeno fino a un tempo $1 + \varepsilon$, per qualche $\varepsilon > 0$, quindi, per la Proposizione 6.5.1 abbiamo che $\exp_p(v)$ deve essere diverso da $\exp_p(w)$. Per arbitrarietà di v e w , la mappa \exp_p è allora iniettiva sulla palla $B_{\bar{\rho}_{\min}(p)}(O_p) \subseteq T_p M$. Per la Proposizione 6.5.2, non esistono punti coniugati a p a distanza minore di $\bar{\rho}_{\min}$, quindi dalla Proposizione 6.4.9, la mappa \exp_p è un diffeomorfismo locale in tutti i punti di $B_{\bar{\rho}_{\min}(p)}(O_p)$. Su tale palla la mappa \exp_p è dunque un diffeomorfismo con l'immagine e di conseguenza, $\text{inj}(p) \geq \bar{\rho}_{\min}(p)$, da cui la tesi \square

PROPOSIZIONE 6.6.3. *Sia (M, g) una varietà riemanniana completa, la funzione $p \mapsto \text{inj}(p)$ è continua.*

DIMOSTRAZIONE. Sappiamo già dall'Osservazione 4.2.5 che $p \mapsto \text{inj}(p)$ è semicontinua inferiormente, vediamo che è anche semicontinua superiormente, usando il fatto che $\text{inj}(p) = \bar{\rho}_{\min}(p)$. Consideriamo una banalizzazione locale $V \times \mathbb{R}^n$ di TM attorno a $p \in M$, allora essendo ogni funzione $q \mapsto \bar{\rho}_q(v)$ semicontinua superiormente, per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ fissato (nelle coordinate della banalizzazione

locale), per il Lemma 6.1.9, si ha che la funzione

$$q \mapsto \text{inj}(q) = \bar{\rho}_{\min}(q) = \inf_{v \in \mathbb{S}_q^{n-1}} \bar{\rho}_q(v)$$

è semicontinua superiormente nell'intorno di $p \in M$, essendo inf di una famiglia di funzioni semicontinue superiormente. \square

Introduciamo ora il *cutlocus* di un punto $p \in M$.

DEFINIZIONE 6.6.4. Sia p un punto di una varietà riemanniana completa (M, g) e sia $\mathcal{U}_p = \{v \in T_p M : \rho_p(v) > 1\}$. Definiamo allora il *cutlocus differenziale* di p come $\text{DiffCut}_p = \partial \mathcal{U}_p \subseteq T_p M$ e il *cutlocus* di p come $\text{Cut}_p = \exp_p(\partial \mathcal{U}_p) \subseteq M$.

Ricordando la definizione

$$\rho_p(v) = \sup I_v = \sup\{t \in [0, +\infty) : \gamma_v \text{ è minimale su } [0, t]\}$$

e poiché $\rho_p(v) = \rho_p(v/|v|_p)/|v|_p = \bar{\rho}_p(v/|v|_p)/|v|_p$, abbiamo che ρ_p è continua, come $\bar{\rho}_p$, per la Proposizione 6.6.1. Di conseguenza, l'insieme \mathcal{U}_p dei vettori v tali che la geodetica $t \mapsto \gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ è minimale almeno sull'intervallo $[0, 1]$, è un intorno aperto stellato dell'origine O_p in $T_p M$ (dunque omeomorfo a una palla n -dimensionale) e DiffCut_p un chiuso. Si noti inoltre che

$$\text{DiffCut}_p = \bigcup_{\substack{v \in T_p M \\ \rho_p(v)=1}} v = \bigcup_{\substack{v \in T_p M \\ \rho_p(v) \neq +\infty}} \rho_p(v)v = \bigcup_{\substack{v \in \mathbb{S}_p^{n-1} \\ \bar{\rho}_p(v) \neq +\infty}} \bar{\rho}_p(v)v.$$

Se dunque $q \in \text{Cut}_p$, per la Proposizione 6.5.4 o esistono due geodetiche minimali distinte (geometricamente) da p a q , oppure q è coniugato a p lungo una geodetica che li unisce. Si noti che segue che se $q \in \text{Cut}_p$, allora $p \in \text{Cut}_q$. Mentre se $q \notin \text{Cut}_p$, non è coniugato a p e c'è un'unica geodetica minimale che li unisce. Analogamente a sopra, se $q \notin \text{Cut}_p$, allora $p \notin \text{Cut}_q$.

ESEMPIO 6.6.5. In \mathbb{R}^n , per ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n \simeq T_x \mathbb{R}^n$ si ha ovviamente che $\bar{\rho}_p(v) = +\infty$, essendo tutte le geodetiche sempre minimali, dunque $\text{inj}(\mathbb{R}^n) = +\infty$, $\mathcal{U}_x = T_x \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ e $\text{DiffCut}_x = \text{Cut}_x = \emptyset$ (lo stesso vale in \mathbb{H}^n , lo si mostri per esercizio).

In $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, per ogni punto $p \in \mathbb{S}^n$ e $v \in \mathbb{S}_p^{n-1} \subseteq T_p \mathbb{S}^n$ si ha $\bar{\rho}_p(v) = \pi$, essendo ogni geodetica minimale fino a che non raggiunge il punto antipodale $-p$ rispetto a quello di partenza. Dunque $\text{inj}(\mathbb{S}^n) = \pi$, $\mathcal{U}_p = B_\pi(O_p)$, $\text{DiffCut}_x = \pi \mathbb{S}_p^{n-1}$ e $\text{Cut}_p = \{-p\}$.

PROPOSIZIONE 6.6.6. Sia (M, g) una varietà riemanniana completa e sia $p \in M$. Allora $\text{Cut}_p \cup \exp_p(\mathcal{U}_p) = M$ e $\text{Cut}_p \cap \exp_p(\mathcal{U}_p) = \emptyset$, inoltre la mappa esponenziale è un diffeomorfismo tra \mathcal{U}_p e l'aperto $M \setminus \text{Cut}_p$ (di conseguenza Cut_p è chiuso).

DIMOSTRAZIONE. Dato un qualsiasi punto q di M , per il teorema di Hopf-Rinow esiste una geodetica minimale γ_v da p a q . Se γ_v rimane minimale anche oltre q , allora q appartiene a $\exp_p(\mathcal{U}_p)$, altrimenti q appartiene a Cut_p . Quindi

$\text{Cut}_p \cup \exp_p(\mathcal{U}_p) = M$.

D'altra parte, supponiamo che esista $q \in \text{Cut}_p \cap \exp_p(\mathcal{U}_p)$. Allora $q = \exp_p(v) = \exp_p(w)$, con $v \in \text{Cut}_p$ e $w \in \mathcal{U}_p$, cioè in q arrivano al tempo $t = 1$, le due geodetiche distinte γ_v e γ_w , dunque, per la Proposizione 6.5.1, nessuna delle due può essere minimale oltre q . Ma γ_w è minimale fino al tempo $\rho_p(w) > 1$, il che è una contraddizione.

Essendo tutte le geodetiche $t \mapsto \gamma_v(t) = \exp_p(tv)$, per ogni $v \in \mathcal{U}_p$ minimali su un intervallo più largo di $[0, 1]$, il punto $\exp_p(v)$ non è coniugato a p , dunque \exp_p è un diffeomorfismo locale attorno a $v \in T_p M$ per la Proposizione 6.4.9, inoltre la mappa $\exp_p|_{\mathcal{U}_p}$ è iniettiva, per la Proposizione 6.5.1, dunque un diffeomorfismo con la sua immagine $M \setminus \text{Cut}_p$. \square

OSSERVAZIONE 6.6.7. Per ogni punto $p \in M$ si ha $d(p, \text{Cut}_p) \geq \text{inj}(p)$. Se dunque M è compatta, quindi $\text{inj}(M) > 0$ essendo la funzione $p \mapsto \text{inj}(p)$ continua, si ha che per ogni punto p in M la sua distanza dal suo cutlocus è maggiore o uguale di una costante uniforme, $d(p, \text{Cut}_p) \geq \text{inj}(M) > 0$.

OSSERVAZIONE 6.6.8. Se M è compatta, ogni geodetica non può essere più lunga del diametro $\text{diam}(M) = \max_{p,q \in M} d(p, q)$. Dunque $\bar{\rho}_p(v) < +\infty$, per ogni $v \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ e DiffCut_p è omeomorfo a una sfera $(n-1)$ -dimensionale in $T_p M$. Segue allora che Cut_p è un'immagine (continua) di \mathbb{S}^{n-1} , dunque compatto e connesso.

ESERCIZIO 6.6.9. Se M è compatta e $d(p, q) = \text{diam}(M)$, si mostri che ci sono almeno due geodetiche minimali tra p e q , dunque $p \in \text{Cut}_q$ e $q \in \text{Cut}_p$.

La mappa $(\exp_p|_{\mathcal{U}_p})^{-1} : M \setminus \text{Cut}_p \rightarrow \mathcal{U}_p$ è quindi una carta da un aperto di M che contiene p , a un aperto di $T_p M$ omeomorfo a una palla di \mathbb{R}^n . Essendo $\bar{\rho}_p$ continua, per il teorema di Fubini DiffCut_p ha misura di Lebesgue nulla in $T_p M$, dunque $\text{Cut}_p = \exp_p(\text{DiffCut}_p)$ ha misura (canonica μ_g di (M, g)) nulla, poiché \exp_p è C^∞ . Ciò rende possibile il calcolo degli integrali su M mediante la singola carta $(M \setminus \text{Cut}_p, (\exp_p|_{\mathcal{U}_p})^{-1})$.

Osserviamo inoltre che, come conseguenza della Proposizione 6.6.6, che se M è compatta l'insieme Cut_p è un retratto per deformazione di $M \setminus \{p\}$ e M è omeomorfa a una palla chiusa n -dimensionale *quozientata* sul bordo.

Consideriamo in $\exp_p(\mathcal{U}) = M \setminus \text{Cut}_p$ le coordinate polari associate a una base ortonormale $\{e_i\}$ di $T_p M$, possiamo allora estendere a $M \setminus \text{Cut}_p$ il Corollario 4.2.13 e la Proposizione 4.3.7.

COROLLARIO 6.6.10. In coordinate polari $(r, \theta^1, \dots, \theta^{n-1})$ rispetto a un punto $p \in M$ su $M \setminus \text{Cut}_p$, si ha

- $g_{rr} = g^{rr} = 1$,
- $g_{ri} = g^{ri} = 0$, per $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

PROPOSIZIONE 6.6.11. Se definiamo $U_p = M \setminus \text{Cut}_p$, per ogni $p \in M$, la funzione distanza $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ è C^∞ nell'aperto (simmetrico – si veda l'osservazione dopo

la definizione di cutlocus)

$$\{(p, q) : q \notin \text{Cut}_p\} \setminus D = \{(p, q) : q \in U_p\} \setminus D,$$

dove $D = \{(q, q) : q \in M\}$, mentre la funzione d^2 è C^∞ in tutto

$$\{(p, q) : q \notin \text{Cut}_p\} = \{(p, q) : q \in U_p\}.$$

Per ogni $p \in M$, la funzione distanza $d_p : M \rightarrow \mathbb{R}$ data da $d_p(q) = d(p, q)$ è 1-lipschitziana e C^∞ in $U_p \setminus \{p\}$. La funzione distanza da p al quadrato d_p^2 è C^∞ in U_p . Inoltre $|\nabla d_p| = 1$ in ogni punto di $U_p \setminus \{p\}$, in quanto d_p coincide con la funzione r data dalle coordinate polari e per ogni $q \in U_p \setminus \{p\}$ si ha che $\nabla d_p(q)$ coincide con $\frac{\partial}{\partial r}|_q$, cioè $\nabla d_p(q)$ coincide con la velocità in q della geodetica minimale che parte da p con velocità unitaria e arriva in q . Segue che le geodetiche uscenti da p e parametrizzate in lunghezza d'arco, quindi di velocità unitaria, sono le curve integrali del campo ∇d_p su $U_p \setminus \{p\}$ e viceversa.

Infine, in coordinate normali (x^1, \dots, x^n) rispetto a p in U_p si ha $d_p^2(x) = |x|_{\mathbb{R}^n}^2$.

OSSERVAZIONE 6.6.12. Fissato un punto $p \in M$, per ogni geodetica γ uscente da p possiamo considerare l'insieme dei punti coniugati a p lungo tale geodetica. L'unione di tali punti si dice *luogo dei punti coniugati* a p e il "primo" punto coniugato lungo γ è detto *punto focale*. Un punto coniugato (focale) q che appartiene al cutlocus di p , con una singola geodetica minimale che lo congiunge a p si dice *puro*. Si può mostrare che $\nabla d_p(q)$ esiste e che il campo ∇d_p è continuo in q , inoltre che i punti di Cut_p con più di una geodetica minimale da p sono densi in Cut_p (si veda [59]).

6.7. Esempi

??? Si veda [37, Sezioni 2.114 e 3.E.3] e [59].
??? Figure (Puppo/Mancinelli)

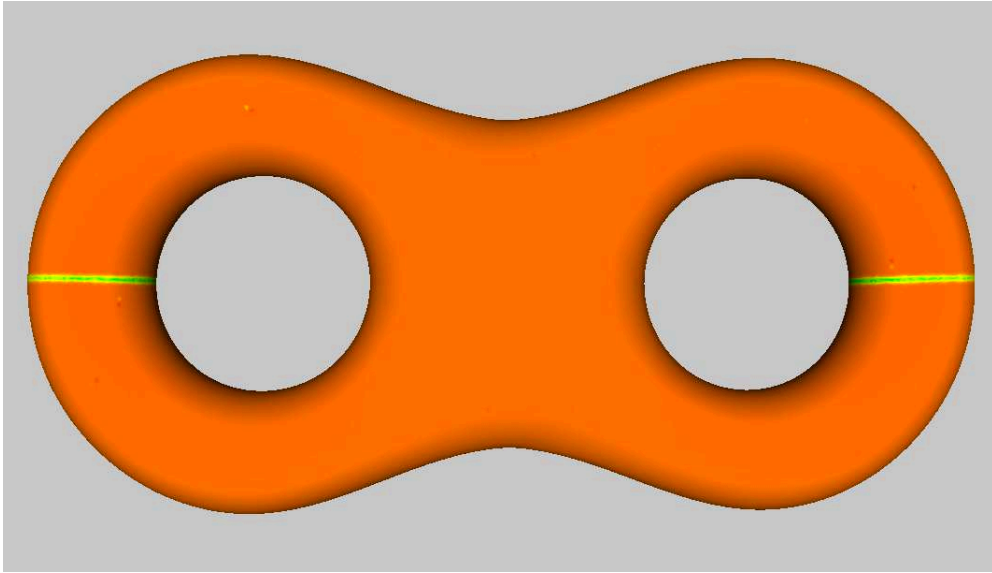


FIGURA 6.3 CutLocus-1.1

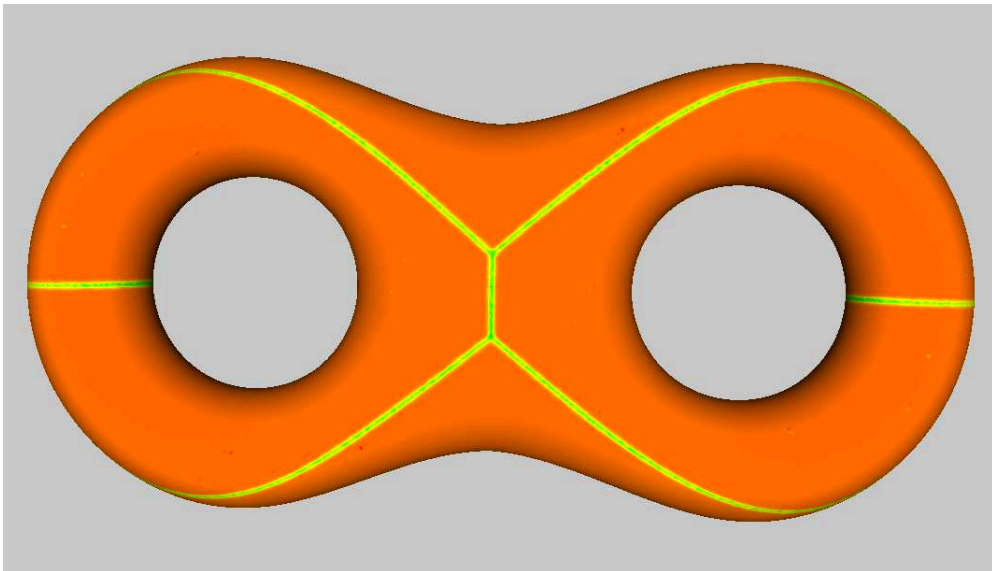


FIGURA 6.4 CutLocus-1.2

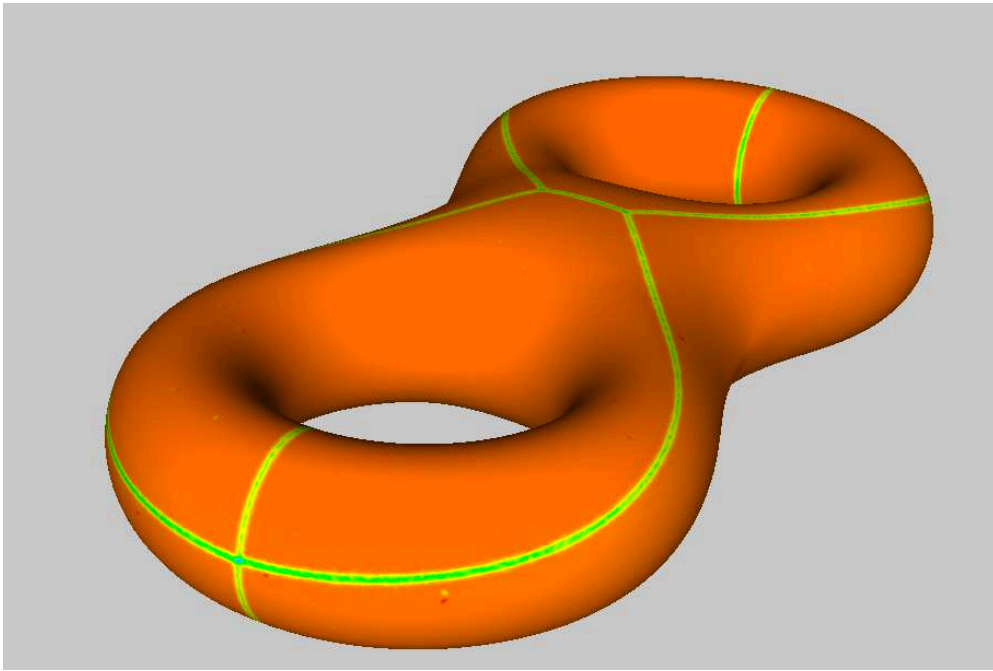


FIGURA 6.5 CutLocus-1.3

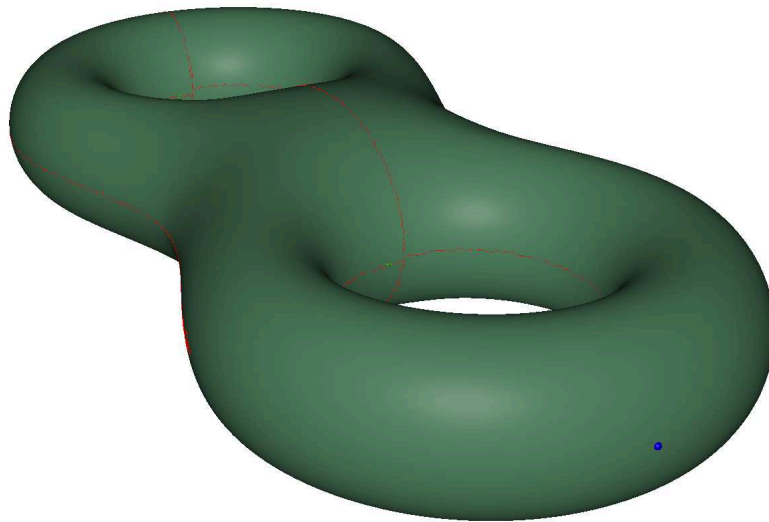


FIGURA 6.6 CutLocus-2.1

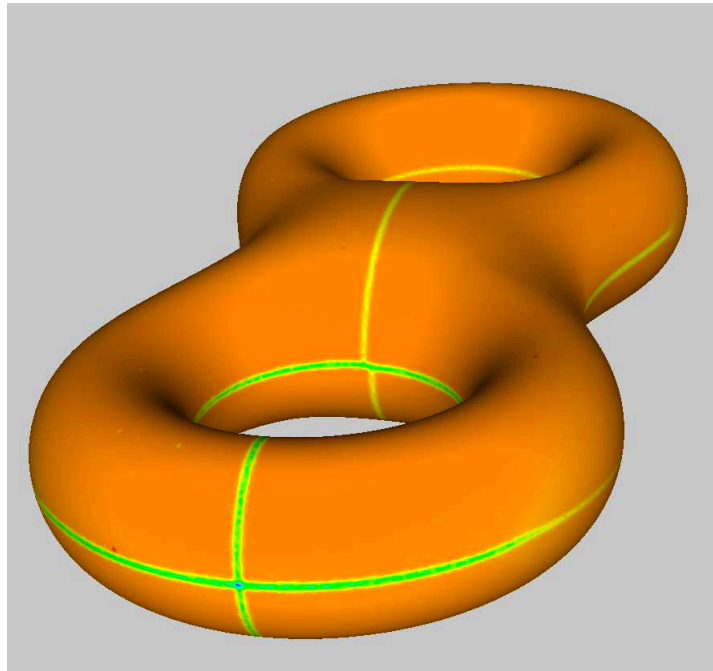


FIGURA 6.7 CutLocus-2.2

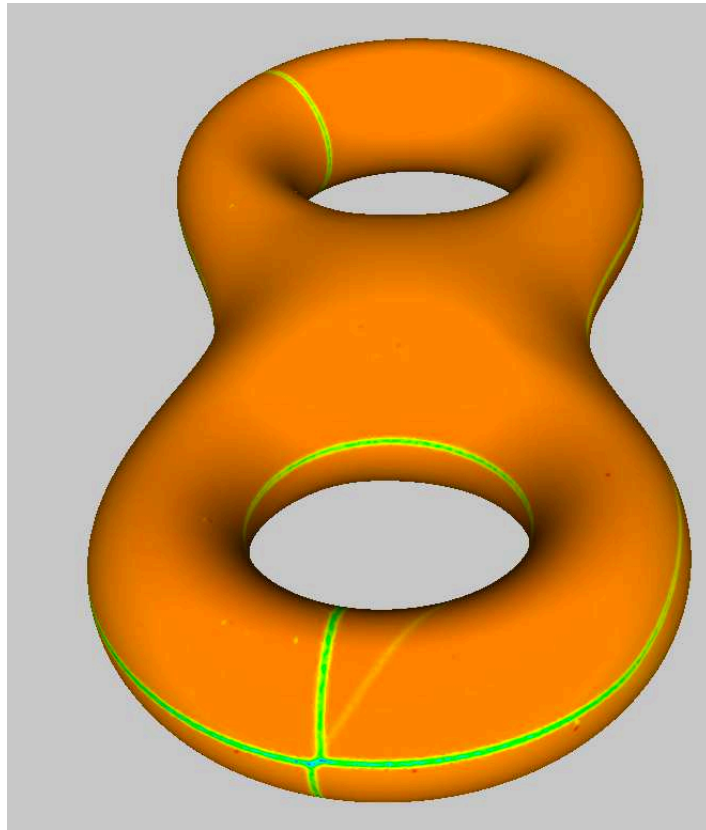


FIGURA 6.8 CutLocus-3.1