

CAPITOLO 5

Curvatura

Seguendo Riemann (si veda [79, Volume 2, Capitolo 4]), possiamo definire una nozione di curvatura per una varietà riemanniana (M, g) in qualche modo generalizzando la *curvatura di Gauss* di una superficie in \mathbb{R}^3 (che vedremo nella Sezione 7.2, Definizione 7.2.3), che è un concetto di curvatura geometricamente intuitivo. Per ogni piano $\pi \subseteq T_p M$ consideriamo la superficie S generata dalle geodetiche uscenti da p con velocità iniziale appartenente a π e calcoliamo la curvatura di Gauss in p , una volta immerso un suo intorno in S isometricamente in \mathbb{R}^3 (ciò è sempre possibile se la varietà è analitica, ma se è solo C^∞ tale possibilità in generale è un famoso problema aperto, si veda la parte finale della Sezione 7.5 – molti autori trascurano questo punto). Grazie al “Teorema Egregium” di Gauss 7.4.1 ([1, Sezione 4.6]), tale curvatura è indipendente dall’immersione, dunque abbiamo una ben definita nozione di curvatura associata a ognuno dei piani di $T_p M$ (la curvatura così ottenuta coinciderà con la *curvatura sezionale* che definiremo nella Sezione 5.4, nella cui parte finale renderemo più precisa questa discussione). Per esempio, con questa definizione la curvatura di \mathbb{R}^n è zero, quella di \mathbb{S}^n è uno e quella di \mathbb{H}^n è meno uno, per ogni piano in un loro spazio tangente.

Riemann definisce anche quello che sarà poi il *tensore di curvatura di Riemann* esaminando i termini del second’ordine nell’espansione di Taylor della metrica in coordinate normali (si veda sempre [79, Volume 2, Capitolo 4, Parte B]). Ritorniamo su questo punto in seguito (si veda l’Osservazione 5.1.9), mentre nella nostra esposizione seguiremo la linea moderna dovuta a Jean–Louis Koszul [94] che lega la curvatura all’errore nell’interscambio di due derivate covarianti successive di un campo.

5.1. Il tensore di Riemann

Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n e ∇ la sua connessione di Levi–Civita.

L’hessiano $\nabla^2 f$ di una funzione $f \in C^\infty$ è una 2–forma simmetrica (per la simmetria di ∇), mentre nell’Osservazione 3.8.13 abbiamo visto che l’applicazione $C^\infty(M)$ –bilineare $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ data dall’hessiano di un campo vettoriale Z non lo è, infatti abbiamo calcolato

$$\nabla_{X,Y}^2 Z - \nabla_{Y,X}^2 Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

che non è necessariamente nullo (cosa che vale in \mathbb{R}^n) e analogamente l'hessiano di una 1-forma o di un generico tensore.

DEFINIZIONE 5.1.1 (Operatore di Riemann). Dati due campi vettoriali X, Y su M , l'operatore $R(X, Y) : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ che "misura l'errore" nello scambio delle derivate covarianti rispetto a X, Y di un campo,

$$R(X, Y) = \nabla_{Y,X}^2 - \nabla_{X,Y}^2 = [\nabla_Y, \nabla_X] - \nabla_{[Y,X]} = \nabla_Y \circ \nabla_X - \nabla_X \circ \nabla_Y - \nabla_{[Y,X]}$$

è detto *operatore di Riemann* (o anche *operatore di curvatura di Riemann*) rispetto a X, Y . Ovviamente chiamiamo *operatore di Riemann* l'applicazione $R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$, che a ogni terna X, Y, Z di campi vettoriali su M associa $R(X, Y)Z$. Esplicitamente,

$$R(X, Y)Z = \nabla_{Y,X}^2 Z - \nabla_{X,Y}^2 Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]} Z.$$

OSSERVAZIONE 5.1.2. Si noti la "posizione" dei campi Y, X nella formula per $R(X, Y)Z$. Talvolta in letteratura si trova la definizione di $R(X, Y)Z$ con X e Y invertiti, dunque l'operatore di Riemann ha il segno opposto al nostro con tale definizione. Noi seguiamo [37], i motivi di questa scelta saranno chiari in seguito.

PROPOSIZIONE 5.1.3. *L'operatore di Riemann R è un tensore di tipo $(1, 3)$, ossia l'applicazione*

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

è $C^\infty(M)$ -lineare in tutte le sue variabili.

DIMOSTRAZIONE. Sebbene la $C^\infty(M)$ -linearità di R in X e Y segua dalla definizione di derivata covariante di un tensore, mostriamola comunque direttamente. Si ha

$$\begin{aligned} R(fX, Y)Z &= \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{fX} \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, fX]} Z \\ &= \nabla_Y (f \nabla_X Z) - f \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{f[Y, X] + (Yf)X} Z \\ &= (Yf) \nabla_X Z + f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_{[Y, X]} Z - (Yf) \nabla_X Z \\ &= f(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]} Z) \\ &= fR(X, Y)Z \end{aligned}$$

e analogamente $R(X, fY)Z = fR(X, Y)Z$.

Ora verifichiamo che $R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z$, abbiamo

$$\begin{aligned} \nabla_{X,Y}^2(fZ) &= \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_{\nabla_X Y} (fZ) \\ &= \nabla_X ((Yf)Z + f \nabla_Y Z) - ((\nabla_X Y)f)Z - f \nabla_{\nabla_X Y} Z \\ &= X(Yf)Z + (Yf) \nabla_X Z + (Xf) \nabla_Y Z + f \nabla_X \nabla_Y Z - ((\nabla_X Y)f)Z - f \nabla_{\nabla_X Y} Z \\ &= f(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_X Y} Z) + (X(Yf) - (\nabla_X Y)f)Z + (Yf) \nabla_X Z + (Xf) \nabla_Y Z, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
R(X, Y)(fZ) &= \nabla_{Y, X}^2(fZ) - \nabla_{X, Y}^2(fZ) \\
&= f(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]} Z) \\
&\quad + Y(Xf)Z - X(Yf)Z - ((\nabla_Y X)f)Z + ((\nabla_X Y)f)Z \\
&= fR(X, Y)Z - ([X, Y]f)Z + ((\nabla_X Y - \nabla_Y X)f)Z \\
&= fR(X, Y)Z,
\end{aligned}$$

avendo ∇ torsione nulla. □

In coordinate locali, si ha

$$\begin{aligned}
R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)X^k &= \nabla_{j^i}^2 X^k - \nabla_{ij}^2 X^k \\
&= [\nabla_j \nabla_i X - \nabla_i \nabla_j X]^k \\
&= \left\{ \nabla_j \left[\left(\frac{\partial X^s}{\partial x^i} + \Gamma_{im}^s X^m \right) \frac{\partial}{\partial x^s} \right] - \nabla_i \left[\left(\frac{\partial X^s}{\partial x^j} + \Gamma_{jm}^s X^m \right) \frac{\partial}{\partial x^s} \right] \right\}^k \\
&= \frac{\partial^2 X^k}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial}{\partial x^j} (\Gamma_{im}^k X^m) + \left(\frac{\partial X^s}{\partial x^i} + \Gamma_{im}^s X^m \right) \Gamma_{js}^k \\
&\quad - \frac{\partial^2 X^k}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^i} (\Gamma_{jm}^k X^m) - \left(\frac{\partial X^s}{\partial x^j} + \Gamma_{jm}^s X^m \right) \Gamma_{is}^k \\
&= \left(\frac{\partial \Gamma_{im}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jm}^k}{\partial x^i} \right) X^m + \frac{\partial X^m}{\partial x^j} \Gamma_{im}^k - \frac{\partial X^m}{\partial x^i} \Gamma_{jm}^k \\
&\quad + \Gamma_{im}^s \Gamma_{js}^k X^m - \Gamma_{jm}^s \Gamma_{is}^k X^m + \frac{\partial X^s}{\partial x^i} \Gamma_{js}^k - \frac{\partial X^s}{\partial x^j} \Gamma_{is}^k \\
&= \left(\frac{\partial \Gamma_{im}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jm}^k}{\partial x^i} + \Gamma_{im}^s \Gamma_{js}^k - \Gamma_{jm}^s \Gamma_{is}^k \right) X^m.
\end{aligned}$$

Quindi,

$$R = R_{ijk}^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \frac{\partial}{\partial x^l},$$

con

$$R_{ijk}^l = \left[R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^k} \right]^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^l - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^l \quad (5.1)$$

e

$$\nabla_{ij}^2 X^l - \nabla_{ji}^2 X^l = -R_{ijk}^l X^k.$$

Se inoltre siamo in coordinate normali centrate in $p \in M$, nel punto p abbiamo

$$R_{ijk}^l = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i},$$

in quanto i simboli di Christoffel sono tutti nulli in p . Esplicitando i simboli di Christoffel per mezzo della formula (3.5), abbiamo, sempre in $p \in M$

$$\begin{aligned}
R^l_{ijk} &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\frac{1}{2} g^{lm} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\frac{1}{2} g^{lm} \left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} g^{lm} \frac{\partial}{\partial x^j} \left[\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right) \right] - \frac{1}{2} g^{lm} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[\left(\frac{\partial g_{km}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{kl}}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} \right], \tag{5.2}
\end{aligned}$$

in coordinate normali (si ricordi che in p la matrice dei coefficienti della metrica e la sua inversa sono l'identità e le derivate $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ sono tutte nulle).

ESEMPIO 5.1.4. L'operatore di Riemann di $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$ è identicamente nullo. Avendo infatti $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$, nell'usuale carta globale, tutti i simboli di Christoffel nulli, dalla formula (5.1) segue $R^l_{ijk} = 0$ in ogni punto di \mathbb{R}^n . Ciò vale, per lo stesso motivo, anche per ogni varietà riemanniana 1-dimensionale, cioè tutte le curve (astratte) hanno curvatura (riemanniana) nulla, malgrado osserviamo chiaramente la "curvatura" di una curva (immersa) nel piano o nello spazio. Quest'altra nozione di curvatura, molto più "intuitiva", sarà definita nel Capitolo 7 (Esempio 7.1.15).

ESERCIZIO 5.1.5. Si mostri che l'operatore di Riemann è invariante per isometrie. Se $f : M \rightarrow N$ è un'isometria tra due varietà riemanniane con associati operatori di Riemann R^M e R^N , si ha $R^M = f^* R^N$, cioè

$$R^M(X, Y)Z = f^*(R^N(f_*X, f_*Y)f_*Z),$$

per ogni $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ (si veda l'Esercizio 3.2.7).

Di conseguenza, una varietà riemanniana con operatore di Riemann identicamente nullo come \mathbb{R}^n non può essere isometrica a una varietà con operatore di Riemann non nullo.

Un'altra conseguenza è che se $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ è un rivestimento riemanniano, localmente \widetilde{M} e M hanno lo stesso operatore di Riemann.

ESERCIZIO 5.1.6. Si mostri che se (M, g) e (N, h) sono due varietà riemanniane con associati operatori di Riemann R^M e R^N , l'operatore di Riemann della varietà prodotto $(M \times N, g \times h)$ è dato da (R^M, R^N) , cioè

$$\begin{aligned}
R^M \times R^N (X_{(p,q)}, Y_{(p,q)})Z_{(p,q)} &= R^M \times R^N ((X_p^M, X_q^N), (Y_p^M, Y_q^N))(Z_p^M, Z_q^N) \\
&= (R_p^M(X_p^M, Y_p^M)Z_p^M, R_q^N(X_q^N, Y_q^N)Z_q^N),
\end{aligned}$$

con $X_{(p,q)} = (X_p^M, X_q^N)$, $Y_{(p,q)} = (Y_p^M, Y_q^N)$, $Z_{(p,q)} = (Z_p^M, Z_q^N)$, identificando $T_{(p,q)}M \times N$ con $T_pM \times T_qN$, per ogni $(p, q) \in M \times N$ (si tenga in considerazione l'Esercizio 3.2.11).

ESERCIZIO 5.1.7. Si mostri che se ω è una 1-forma e X, Y due campi vettoriali su (M, g) si ha

$$R(X, Y)\omega = \nabla_{Y, X}^2 \omega - \nabla_{X, Y}^2 \omega = [R(X, Y)\omega^\#]^\flat$$

e in coordinate

$$\nabla_{ij}^2 \omega_k - \nabla_{ji}^2 \omega_k = -R_{ijk}^l \omega_l.$$

Si estenda in modo naturale l'operatore di Riemann a tutti gli spazi tensoriali $\Gamma(T_s^r M)$ e si scriva $R(X, Y)T$ in coordinate locali, per $T \in \Gamma(T_s^r M)$.

Vedremo che in generale risulta più utile considerare la versione $(0, 4)$ dell'operatore di Riemann detto *tensore di Riemann* (o *tensore di curvatura*).

DEFINIZIONE 5.1.8. Definiamo il *tensore di Riemann* come il tensore di tipo $(0, 4)$ dato da

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W),$$

per ogni $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$. Per distinguerlo dall'operatore di Riemann, talvolta lo indicheremo come *Riem*.

In coordinate si ha

$$R = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \quad \text{con} \quad R_{ijkl} = R_{ijk}^m g_{ml},$$

$$R_{ijkl} = \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^m}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^m}{\partial x^i} + \Gamma_{ik}^s \Gamma_{js}^m - \Gamma_{jk}^s \Gamma_{is}^m \right) g_{ml} \quad (5.3)$$

Segue inoltre

$$R_{ijk}^m = R_{ijkl} g^{lm}.$$

Per il calcolo (5.2), essendo $g_{ij} = \delta_{ij}$ in $p \in M$, in coordinate normali centrate in tale punto, abbiamo

$$R_{ijkl} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{li}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{lj}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} \right]. \quad (5.4)$$

OSSERVAZIONE 5.1.9. Con gli strumenti del prossimo capitolo, dimostreremo (Proposizione 6.4.20) che in coordinate normali centrate in $p \in M$, si ha

$$\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} = -\frac{1}{3}(R_{ikjl} + R_{iljk}).$$

Sottolineiamo che questo non segue da una semplice manipolazione algebrica delle relazioni (5.4) (si veda [79, Volume 2, Capitolo 4, Parte B], per una dimostrazione "computazionale"). Espandendo in serie di Taylor la metrica attorno a p in tali coordinate, si ha allora

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}(R_{ikjl} + R_{iljk})x^k x^l + o(|x|^2) = \delta_{ij} + \frac{1}{3}R_{kijl}x^k x^l + o(|x|^2),$$

formula che Riemann utilizza per introdurre quello che per noi oggi è il tensore di curvatura Riem.

OSSERVAZIONE 5.1.10. Se accettiamo il fatto che la presenza di “curvatura” per una varietà sia equivalente a un operatore di Riemann R non nullo, o più precisamente che tale operatore contenga tutte le informazioni su quanto una varietà sia “curva”, abbiamo allora definito la “curvatura” di una varietà come un difetto di simmetria negli hessiani dei campi vettoriali (assente in \mathbb{R}^n , che come intuitivamente e giustamente ci aspettiamo è piatto, non ha “curvatura”). Per quanto sia molto utile dal punto di vista dell’estensione delle tecniche dell’analisi matematica (data la rilevanza del teorema di Schwarz in \mathbb{R}^n) alle varietà, questo non è chiaramente un modo geometricamente intuitivo per introdurre il concetto di curvatura. Anche il modo (analitico) originale di Riemann di definire il tensore di curvatura considerando i termini del second’ordine nell’espansione in serie di Taylor della metrica in coordinate normali, come nell’osservazione precedente, ne nasconde la natura geometrica.

Sicuramente più naturale è invece legare la “curvatura” della varietà alla *curvatura di Gauss* (post immersione isometrica locale in \mathbb{R}^3) delle superfici “geodetiche”, come descritto nell’introduzione a questo capitolo, ma meno efficiente per i calcoli, come sarà evidente nella Sezione 5.4. Qualitativamente, abbiamo inoltre visto nell’Esercizio 5.1.5 che se vi è “curvatura”, non è possibile che la varietà sia localmente isometrica a \mathbb{R}^n , cioè la “curvatura” è un’ostruzione alla “piattezza”, come ci si aspetta (discuteremo quantitativamente questo fatto nella Sezione 10.1 e in particolare nell’Osservazione 10.2.10). Come vedremo, tale “piattezza” sarà equivalente all’esistenza di una base locale di campi paralleli, la presenza di “curvatura” esclude dunque tale possibilità.

Vediamo ora che l’operatore R_p è in relazione con “l’errore” nel trasporto parallelo lungo un cammino chiuso di punto base $p \in M$ (che è nullo in \mathbb{R}^n), che è un modo più geometrico (ma di nuovo poco utile in pratica per fare i calcoli) di definirlo e lo connette più intuitivamente al concetto di curvatura (si tengano presenti le Osservazioni 3.6.6, 3.6.8 e gli Esercizi 3.6.7, 3.6.9). Consideriamo tre vettori $v, w, z \in T_p M$ e per $s, t > 0$ abbastanza piccoli, costruiamo il cammino chiuso σ in $T_p M$ che parte dall’origine O_p ed è individuato dai quattro vettori $tv, sw, -tv, -sw$, in quest’ordine, che quindi termina di nuovo nell’origine. Sia $\gamma(\tau) = \exp_p(\sigma(\tau))$ che dunque è un cammino chiuso di classe C^∞ a tratti, che parte e arriva in p . Se $Z_{t,s} \in T_p M$ è il trasportato parallelo del vettore z lungo il cammino γ , si ha

$$\frac{d}{ds} \frac{d}{dt} Z_{t,s} \Big|_{s=t=0} = -R_p(v, w)z$$

(si veda [52, Theorem 7.11], per esempio, per la dimostrazione).

Cioè l’operatore di Riemann misura il “fallimento infinitesimale” del trasporto

parallelo nel riportare un vettore alla sua posizione originaria lungo un cammino chiuso. In altre parole, R misura l'olonomia "infinitesimale" della varietà (si veda l'Osservazione 3.6.8), segue che se (M, g) ha gruppo di olonomia banale, allora l'operatore di Riemann è nullo (vale anche il viceversa se M è semplicemente connessa).

5.2. Proprietà algebriche del tensore di Riemann

Vediamo ora alcune "simmetrie" di cui gode il tensore di Riemann.

PROPOSIZIONE 5.2.1. *Valgono le seguenti proprietà:*

(1) *Antisimmetria nelle prime due variabili*

$$R(X, Y, Z, W) = -R(Y, X, Z, W)$$

$$R_{ijkl} = -R_{jikl}$$

(2) *Antisimmetria nelle ultime due variabili*

$$R(X, Y, Z, W) = -R(X, Y, W, Z)$$

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk}$$

(3) *Simmetria per scambio della prima e seconda coppia*

$$R(X, Y, Z, W) = R(Z, W, X, Y)$$

$$R_{ijkl} = R_{klij}$$

per ogni $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ e ogni $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$.

DIMOSTRAZIONE. Usando la formula (5.4), in coordinate normali centrate in $p \in M$, si vede facilmente che in p valgono le tre identità in coordinate, per la simmetria della metrica e il teorema di Schwarz. Dunque valgono le tre identità per il tensore di Riemann in p , che è un generico punto di M , da cui la tesi. \square

OSSERVAZIONE 5.2.2. Si noti che la prima identità è immediata, dalla definizione dell'operatore di Riemann $R(X, Y) = -R(Y, X)$ e che la terza e una delle prime due implicano l'altra. Segue inoltre che

$$R(X, X, Z, W) = R(X, Y, Z, Z) = 0$$

e

$$R_{iikl} = R_{ijkk} = 0,$$

per ogni $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ e ogni $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$.

PROPOSIZIONE 5.2.3 (Prima identità di Bianchi [95]). *Vale la seguente identità:*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$$

o equivalentemente,

$$R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) = 0, \quad (5.5)$$

per ogni $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$.

In coordinate locali si ha

$$R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Usando la definizione abbiamo

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y \\ &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]} Z \\ &\quad + \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{[Z, Y]} X \\ &\quad + \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_{[X, Z]} Y \\ &= \nabla_Y (\nabla_X Z - \nabla_Z X) + \nabla_Z (\nabla_Y X - \nabla_X Y) + \nabla_X (\nabla_Z Y - \nabla_Y Z) \\ &\quad - \nabla_{[Y, X]} Z - \nabla_{[Z, Y]} X - \nabla_{[X, Z]} Y \\ &= \nabla_Y [X, Z] + \nabla_Z [Y, X] + \nabla_X [Z, Y] \\ &\quad - \nabla_{[Y, X]} Z - \nabla_{[Z, Y]} X - \nabla_{[X, Z]} Y \\ &= [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]] + [X, [Z, Y]] \\ &= 0 \end{aligned}$$

per l'identità di Jacobi (1.1).

Si noti la rilevanza della simmetria (torsione nulla) della connessione di Levi-Civita in questa dimostrazione. \square

OSSERVAZIONE 5.2.4. Per le simmetrie del tensore di Riemann, qualunque dei primi tre indici di R_{ijkl} può essere "mandato" al quarto posto, eventualmente moltiplicando per -1 ,

$$\begin{array}{lll} R_{ijkl} = -R_{ijlk}, & R_{ijkl} = R_{klij}, & R_{ijkl} = -R_{klji}. \\ \text{3° indice al 4° posto} & \text{2° indice al 4° posto} & \text{1° indice al 4° posto} \end{array}$$

Segue che la prima identità di Bianchi vale per qualunque terna di indici di R_{ijkl} ,

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = -R_{klji} - R_{ljki} - R_{jkli} = 0 \quad (\text{con primo indice fissato})$$

$$R_{ijkl} + R_{kjli} + R_{ljik} = R_{klij} + R_{likj} + R_{iklj} = 0 \quad (\text{con secondo indice fissato})$$

$$R_{ijkl} + R_{jllk} + R_{likj} = -R_{ijlk} - R_{lijk} - R_{jlik} = 0 \quad (\text{con terzo indice fissato})$$

e analogamente per $R(X, Y, Z, W)$, permutando ciclicamente su una qualunque terna di campi vettoriali e sommando si ottiene zero, per ogni $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ e ogni $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$.

ESERCIZIO 5.2.5. Si mostri che in dimensione $n = 2, 3$ la prima identità di Bianchi è conseguenza delle simmetrie del tensore di Riemann, dunque non fornisce nuove informazioni.

Concludiamo questa sezione con un modo alternativo, senza usare coordinate, di mostrare le simmetrie del tensore di Riemann. Per dimostrare l'antisimmetria nella seconda coppia di variabili è sufficiente dimostrare che $R(X, Y, Z, Z) =$

0. Infatti, se $R(X, Y, Z, Z) = 0$ si ha

$$\begin{aligned}
 R(X, Y, Z, W) &= R(X, Y, Z - W + W, W) \\
 &= R(X, Y, Z - W, W) + R(X, Y, W, W) \\
 &= R(X, Y, Z - W, W - Z + Z) \\
 &= -R(X, Y, Z - W, Z - W) + R(X, Y, Z - W, Z) \\
 &= R(X, Y, Z, Z) - R(X, Y, W, Z) \\
 &= -R(X, Y, W, Z)
 \end{aligned}$$

e per definizione, abbiamo

$$\begin{aligned}
 R(X, Y, Z, Z) &= g(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]} Z, Z) \\
 &= g(\nabla_Y \nabla_X Z, Z) - g(\nabla_X \nabla_Y Z, Z) - g(\nabla_{[Y, X]} Z, Z) \\
 &= YXg(Z, Z)/2 - g(\nabla_X Z, \nabla_Y Z) - XYg(Z, Z)/2 + g(\nabla_Y Z, \nabla_X Z) \\
 &\quad - [Y, X]g(Z, Z)/2 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Per dimostrare la terza formula della Proposizione 5.2.1, scriviamo quattro volte l'identità di Bianchi e sommiamo, ottenendo

$$\begin{aligned}
 0 &= R(X, Y, Z, W) + R(Y, Z, X, W) + R(Z, X, Y, W) \\
 &\quad + R(Y, Z, W, X) + R(Z, W, Y, X) + R(W, Y, Z, X) \\
 &\quad + R(Z, W, X, Y) + R(W, X, Z, Y) + R(X, Z, W, Y) \\
 &\quad + R(W, X, Y, Z) + R(X, Y, W, Z) + R(Y, W, X, Z) \\
 &= 2R(Z, X, Y, W) - 2R(Y, W, Z, X),
 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato ripetutamente l'antisimmetria del tensore di Riemann nella prima e seconda coppia di variabili. La tesi dunque segue.

OSSERVAZIONE 5.2.6. Quest'ultima dimostrazione può essere in un certo senso "visualizzata" nella seguente figura.

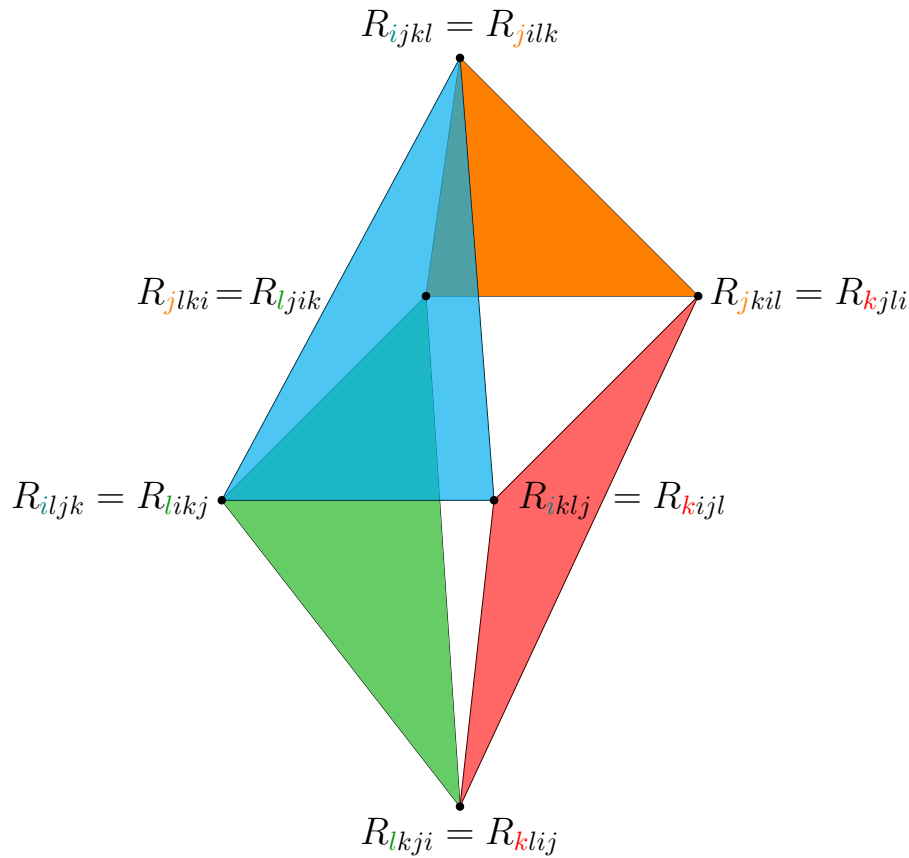


FIGURA 5.1

Le uguaglianze sui vertici dell'ottaedro sono tutte dovute allo scambio degli indici nella prima e seconda coppia (prima e seconda formula della Proposizione 5.2.1), mentre la somma dei valori sui vertici dei triangoli colorati sono nulle per la prima identità di Bianchi. Segue che la somma dei quattro valori sui vertici "centrali" è uguale a due volte il valore sia sul vertice in alto, che su quello in basso, da cui la tesi $R_{ijkl} = R_{klij}$.

5.3. Tensori di curvatura algebrici

DEFINIZIONE 5.3.1. Diciamo che una forma quadrilineare $P : T_p M \times T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ su $T_p M$ è un *tensore di curvatura algebrico* in $p \in M$ se verifica

- $P(x, y, z, w) = -P(y, x, z, w)$,
- $P(x, y, z, w) = -P(x, y, w, z)$,
- $P(x, y, z, w) = P(z, w, x, y)$,
- l'identità di Bianchi $P(x, y, z, w) + P(y, z, x, w) + P(z, x, y, w) = 0$,

per ogni $x, y, z, w \in T_p M$.

Chiamiamo $C_p(M)$ lo spazio dei tensori di curvatura algebrici in p .

OSSERVAZIONE 5.3.2. Ovviamente il tensore di Riemann $Riem$ in ogni punto $p \in M$ è un tensore di curvatura algebrico, così come la forma quadrilineare $R_p^0 : T_p M \times T_p M \times T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$R_p^0(x, y, z, w) = g_p(x, z)g_p(y, w) - g_p(x, w)g_p(y, z),$$

nel punto $p \in M$. Si ha allora un tensore R^0 di tipo $(0, 4)$ con coefficienti, in coordinate locali, dati da

$$R_{ijkl}^0 = g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}.$$

Si noti che

$$R_p^0(x, y, x, y) = g_p(x, x)g_p(y, y) - g_p(x, y)g_p(x, y) = |x|_p^2 |y|_p^2 - (g_p(x, y))^2$$

è il quadrato dell'area del parallelogramma di lati x e y in $T_p M$.

Vediamo ora un modo di costruire questi tensori.

DEFINIZIONE 5.3.3. Il prodotto di Kulkarni–Nomizu di due forme bilineari simmetriche h e k su $T_p M$ è la forma quadrilineare $h \otimes k$ definita come

$$(h \otimes k)(x, y, z, w) = h(x, z)k(y, w) + h(y, w)k(x, z) \\ - h(x, w)k(y, z) - h(y, z)k(x, w),$$

per ogni $x, y, z, w \in T_p M$. In coordinate locali, si ha

$$(h \otimes k)_{ijml} = h_{im}k_{jl} + h_{jl}k_{im} - h_{il}k_{jm} - h_{jm}k_{il},$$

per ogni $i, j, m, l \in \{1, \dots, n\}$.

ESEMPIO 5.3.4. Calcoliamo il prodotto di Kulkarni–Nomizu del prodotto scalare g_p su $T_p M$ con se stesso:

$$(g \otimes g)_{ijkl} = g_{ik}g_{jl} + g_{jl}g_{ik} - g_{il}g_{jk} - g_{jk}g_{il} = 2(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) = 2R_{ijkl}^0,$$

cioè $R^0 = \frac{g \otimes g}{2}$ (abbiamo ommesso il pedice p , per semplicità di notazione – lo faremo spesso nel seguito).

Si ha la seguente proposizione, la cui dimostrazione è lasciata per esercizio.

PROPOSIZIONE 5.3.5. Il prodotto di Kulkarni–Nomizu di due forme bilineari simmetriche h e k su $T_p M$ è simmetrico e produce un tensore di curvatura algebrico su $T_p M$.

ESERCIZIO 5.3.6. Se M è una varietà di dimensione $n \in \mathbb{N}$, si mostri che per ogni forma bilineare simmetrica h su $T_p M$, con il prodotto scalare g_p esteso agli spazi vettoriali $T_s^r M_p = \otimes^s T_p M^* \otimes^r T_p M$ come nella Sezione 2.4, si ha, omettendo il pedice p ,

$$g(g \otimes g, g \otimes h) = 8(n-1)\text{tr } h \quad \text{da cui} \quad |g \otimes g|^2 = 8n(n-1)$$

$$\begin{aligned}
|g \otimes h|^2 &= 4(n-2)|h|^2 + 4(\operatorname{tr} h)^2 \\
(\operatorname{tr}^{1,3} g \otimes h)_{im} &= g^{jl}(g \otimes h)_{jilm} = (n-2)h_{im} + g_{im} \operatorname{tr} h \\
\operatorname{tr}(\operatorname{tr}^{1,3} g \otimes h) &= g^{im} g^{jl}(g \otimes h)_{jilm} = 2(n-1) \operatorname{tr} h,
\end{aligned}$$

in particolare,

$$\operatorname{tr}^{1,3} g \otimes g = 2(n-1)g \quad e \quad \operatorname{tr}(\operatorname{tr}^{1,3} g \otimes g) = 2n(n-1).$$

Si dimostri infine la seguente formula, per ogni coppia h, k di forme bilineari simmetriche su $T_p M$,

$$|h \otimes k|^2 = 4|h|^2 |k|^2 + 4(g(h, k))^2 - 8g(h^2, k^2)$$

dove i tensori h^2, k^2 sono dati da $h_{ij}^2 = h_{il} g^{lm} h_{mj}$ e $k_{ij}^2 = k_{il} g^{lm} k_{mj}$.

Consideriamo il sottospazio vettoriale $\mathcal{F}_p M$ di $\otimes^4 T_p M^*$ delle forme quadrilineari A su $T_p M$ che soddisfano le identità

- $A(x, y, z, w) = -A(y, x, z, w)$,
- $A(x, y, z, w) = -A(x, y, w, z)$,
- $A(x, y, z, w) = A(z, w, x, y)$,

ma non necessariamente l'identità di Bianchi

$$A(x, y, z, w) + A(y, z, x, w) + A(z, x, y, w) = 0,$$

per ogni $x, y, z, w \in T_p M$.

DEFINIZIONE 5.3.7. La *mappa di Bianchi* è l'endomorfismo $b : \mathcal{F}_p M \rightarrow \mathcal{F}_p M$ che agisce come segue,

$$b(A)(x, y, z, w) = \frac{1}{3} [A(x, y, z, w) + A(y, z, x, w) + A(z, x, y, w)],$$

per ogni $A \in \mathcal{F}_p M$ e $x, y, z, w \in T_p M$. Si ha dunque

$$C_p(M) = \ker b.$$

ESERCIZIO 5.3.8. Si mostri che, per le proprietà di A , si ha

$$\begin{aligned}
b(A)(x, y, z, w) &= -b(A)(y, x, z, w), \\
b(A)(x, y, z, w) &= -b(A)(x, y, w, z), \\
b(A)(x, y, z, w) &= b(A)(z, w, x, y),
\end{aligned}$$

per ogni $A \in \mathcal{F}_p M$ e $x, y, z, w \in T_p M$. Dunque $b(A) \in \mathcal{F}_p M$.

Si noti inoltre che

$$b(A)(x, y, z, w) = b(A)(y, z, x, w) = b(A)(z, x, y, w), \quad (5.6)$$

per ogni $A \in \mathcal{F}_p M$ e $x, y, z, w \in T_p M$, per la definizione di b .

LEMMA 5.3.9. La *mappa di Bianchi* b è un operatore idempotente (cioè $b^2 = b \circ b = b$), g -autoaggiunto e si ha la seguente decomposizione ortogonale

$$\mathcal{F}_p M = \ker b \oplus^\perp \operatorname{Im} b.$$

DIMOSTRAZIONE. Data $A \in \mathcal{F}_p M$, possiamo considerare $B = A - b(A)$. Si ha che $B \in \ker b$, dunque $B = A - b(A)$ e $b(A)$ decompongono A . Il fatto che $B \in \ker b$ segue da $b(B) = b(A) - b^2(A) = 0$, poiché la mappa di Bianchi è idempotente, cosa che segue dalla formula (5.6).

Siano $A, C \in \mathcal{F}_p M$, allora in una base ortonormale di $T_p M$ si ha

$$\begin{aligned} g(A, b(C)) &= A_{ijkl} b(C)_{ijkl} \\ &= \frac{1}{3} A_{ijkl} [C_{ijkl} + C_{jkil} + C_{kijl}] \\ &= \frac{1}{3} [A_{ijkl} C_{ijkl} + A_{kijl} C_{ijkl} + A_{jkil} C_{ijkl}] \\ &= \frac{1}{3} [A_{ijkl} + A_{kijl} + A_{jkil}] C_{ijkl} \\ &= g(b(A), C), \end{aligned}$$

cioè b è un operatore g -autoaggiunto. Se dunque $C \in \text{Im } b$ e $B \in \ker b$, si ha $C = b(A)$ per qualche A e

$$g(B, C) = g(B, b(A)) = g(A, b(B)) = 0,$$

che implica $\text{Im } b = \ker b^\perp$. Segue che b è la proiezione ortogonale di $\mathcal{F}_p M$ su $\text{Im } b$ e la decomposizione

$$\mathcal{F}_p M = \ker b \oplus^\perp \text{Im } b$$

è ortogonale. □

Abbiamo che $\text{Im } b = \Lambda_p^4 M \subseteq \otimes^4 T_p M^*$ (si ricordi l'Osservazione 1.4.1), in quanto su $\Lambda_p^4 M$ la mappa b è l'identità (lo si provi per esercizio) e poiché per la formula (5.6) e l'antisimmetria di $b(A)$ nelle prime due variabili si ha

$$b(A)(x, y, x, w) = b(A)(y, x, x, w) = -b(A)(x, y, x, w),$$

segue $b(A)(x, y, x, w) = 0$, che per le proprietà di simmetria e antisimmetria di $b(A) \in \mathcal{F}_p M$, implica che $b(A)$ si annulla in ogni quaterna in cui almeno due vettori di $T_p M$ coincidono e di conseguenza è una forma quadrilineare alternante su $T_p M$.

Si noti che se $n = 2, 3$ si ha $\dim(\text{Im } b) = 0$, infatti ogni forma quadrilineare alternante è nulla, dunque $\mathcal{F}_p M = C_p(M)$ (coerentemente con l'Esercizio 5.2.5). Se $n = 4$, $\dim(\text{Im } b) = 1$.

Vediamo che è possibile identificare $\mathcal{F}_p M$ con lo spazio vettoriale delle forme bilineari simmetriche sullo spazio $\Lambda^2 T_p M$ dei 2-vettori alternanti di $T_p M$, che denotiamo con $\mathcal{S}^2(\Lambda^2 T_p M)$, mediante l'applicazione che associa ad $A \in \mathcal{F}_p M$ la forma $\mathcal{A} \in \mathcal{S}^2(\Lambda^2 T_p M)$ univocamente ben definita dal seguente comportamento su una base $\{e_i \wedge e_j\}$ di $\Lambda^2 T_p M$,

$$\mathcal{A}(e_i \wedge e_j, e_k \wedge e_l) = A(e_i, e_j, e_k, e_l),$$

con $\{e_1, \dots, e_n\}$ base di $T_p M$. Ovviamente, l'applicazione inversa che manda (riporta) $\mathcal{A} \in \mathcal{S}^2(\Lambda^2 T_p M)$ in $A \in \mathcal{F}_p M$ è data da

$$A(x, y, z, w) = \mathcal{A}(x \wedge y, z \wedge w)$$

per ogni $x \wedge y, z \wedge w \in \Lambda^2 T_p M$, con $x, y, z, w \in T_p M$ (si verifichi che A è un elemento di $\mathcal{F}_p M$). Allora, poiché se V è uno spazio vettoriale di dimensione m si ha che $\mathcal{S}^2(V)$ ha dimensione $\frac{m(m+1)}{2}$, avendo $\Lambda^2 T_p M$ dimensione $\frac{n(n-1)}{2}$, abbiamo

$$\dim(\mathcal{F}_p M) = \dim(\mathcal{S}^2(\Lambda^2 T_p M)) = \frac{n(n-1)(n^2-n+2)}{8}. \quad (5.7)$$

Calcoliamo ora la dimensione dello spazio dei tensori di curvatura algebrici $C_p(M)$.

PROPOSIZIONE 5.3.10. *Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione n , allora*

$$\dim(C_p(M)) = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

DIMOSTRAZIONE. Abbiamo dimostrato che $\mathcal{F}_p M = \ker b \oplus \text{Im } b$, dove b è la mappa di Bianchi e che $\text{Im } b = \Lambda_p^4 M$. Dunque,

$$\dim(\mathcal{F}_p M) = \dim(\ker b) + \dim(\text{Im } b) = \dim(C_p(M)) + \dim(\Lambda_p^4 M)$$

e avendo $\Lambda_p^4 M$ dimensione $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$, concludiamo facilmente che

$$\dim(C_p(M)) = \frac{n(n-1)}{24}(3n^2 - 3n + 6 - n^2 + 5n - 6) = \frac{n^2(n^2-1)}{12},$$

per la formula (5.7). \square

Ovviamente ogni tensore di curvatura algebrico P in p può essere visto come un elemento \mathcal{P} di $\mathcal{S}^2(\Lambda^2 T_p M)$. Considerando il prodotto scalare indotto da g_p su $\Lambda^2 T_p M$, definito da (si veda l'Esempio 2.4.3)

$$\begin{aligned} g_p(x \wedge y, z \wedge w) &= g_p(x \otimes y - y \otimes x, z \otimes w - w \otimes z) \\ &= 2(g_p(x, z)g_p(y, w) - g_p(x, w)g_p(y, z)) \\ &= 2R_p^0(x, y, z, w) \\ &= 2\mathcal{R}_p^0(x \wedge y, z \wedge w) \end{aligned}$$

(quindi la forma bilineare simmetrica \mathcal{R}_p^0 su $\Lambda^2 T_p M$ associata al tensore R_p^0 coincide con la metà del prodotto scalare indotto dalla metrica g_p su $\Lambda^2 T_p M$, per ogni $p \in M$), esiste dunque un endomorfismo lineare autoaggiunto (rispetto a $g_p/2$) $\mathcal{P} : \Lambda^2 T_p M \rightarrow \Lambda^2 T_p M$ tale che

$$\mathcal{P}(\omega, \sigma) = g_p(\mathcal{P}(\omega), \sigma)/2 = g_p(\omega, \mathcal{P}(\sigma))/2$$

per ogni $\omega, \sigma \in \Lambda^2 T_p M$.

Notiamo allora che per R^0 si ha

$$g_p(x \wedge y, z \wedge w) = 2R_p^0(x, y, z, w) = 2\mathcal{R}_p^0(x \wedge y, z \wedge w) = g_p(\mathcal{R}_p^0(x \wedge y), z \wedge w),$$

da cui segue, per l'arbitrarietà di $z \wedge w \in \Lambda^2 T_p M$, che $\mathcal{R}_p^0 = \text{Id}$, per ogni $p \in M$.

DEFINIZIONE 5.3.11. Vedendo Riem_p come la forma $\mathcal{R}_p \in \mathcal{S}^2(\Lambda^2 T_p M)$, per ogni $p \in M$, l'operatore $\mathcal{R}_p : \Lambda^2 T_p M \rightarrow \Lambda^2 T_p M$ associato come sopra a tale forma \mathcal{R}_p viene detto *operatore di curvatura* di (M, g) in p .

Si ha dunque

$$\mathcal{R}_p(\omega, \sigma) = g_p(\mathcal{R}_p(\omega), \sigma)/2 = g_p(\omega, \mathcal{R}_p(\sigma))/2,$$

in particolare,

$$R_p(x, y, z, w) = \mathcal{R}_p(x \wedge y, z \wedge w) = g_p(\mathcal{R}_p(x \wedge y), z \wedge w)/2,$$

per ogni $p \in M$.

Essendo la forma bilineare \mathcal{R}_p su $\Lambda^2 T_p M$ (che ha dimensione $n(n-1)/2$) simmetrica, \mathcal{R}_p si diagonalizza in una base ortonormale $\{\omega_i\}$ di $\Lambda^2 T_p M$ di autovettori dell'operatore autoaggiunto $\mathcal{R}_p : \Lambda^2 T_p M \rightarrow \Lambda^2 T_p M$, per $i \in \{1, \dots, n(n-1)/2\}$. Nel caso tale base sia esprimibile in *2-vettori semplici*, cioè $\omega_i = x_i \wedge y_i$ per dei vettori $x_i, y_i \in T_p M$, diciamo che l'operatore \mathcal{R}_p è *semplice*, mentre se esiste una base ortonormale $\{e_i\}$ di $T_p M$ tale che $\{e_i \wedge e_j\}$ sia una base di autovettori dell'operatore \mathcal{R}_p , si dice che \mathcal{R}_p è *puro*. Diciamo che (M, g) ha *operatore di curvatura puro (semplice)* se \mathcal{R}_p è puro (semplice), per ogni $p \in M$.

OSSERVAZIONE 5.3.12. Se \mathcal{R}_p è puro, allora è chiaramente semplice, ma il viceversa non vale (si veda [28]). Ovviamente, in dimensione $n = 2$ l'operatore di curvatura è sempre puro.

OSSERVAZIONE 5.3.13. In dimensione $n = 3$ ogni elemento $\omega \in \Lambda^2 T_p M$ è semplice, cioè della forma $v \wedge w$. Infatti, assumendo $\omega \neq 0$, sia $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ una base di $\Lambda^2 T_p M$ (che ha dimensione tre) con $\omega = \alpha_1$ e fissiamo $\{w_1, w_2, w_3\}$ una base di $T_p M$. Consideriamo $\sigma = w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \in \Lambda^3 T_p M$ e determiniamo $v_1, v_2, v_3 \in T_p M$ tali che $v_i \wedge \alpha_j = \delta_{ij} \sigma$. Ponendo

$$\alpha_i = a_i w_1 \wedge w_2 + b_i w_2 \wedge w_3 + c_i w_3 \wedge w_1$$

e

$$v_i = d_i w_1 + e_i w_2 + f_i w_3,$$

per $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i \in \mathbb{R}$, si ha

$$v_i \wedge \alpha_j = (d_i b_j + e_i c_j + f_i a_j) \sigma.$$

Imponendo dunque le condizioni $v_i \wedge \alpha_j = \delta_{ij}\sigma$, si deve avere

$$\begin{pmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} = \text{Id},$$

da cui è possibile determinare univocamente le componenti dei vettori v_1, v_2, v_3 , essendo la seconda matrice invertibile in quanto il suo determinante coincide con quello della matrice di cambio di base in $\Lambda^2 T_p M$, da $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ a $\{w_1 \wedge w_2, w_2 \wedge w_3, w_3 \wedge w_1\}$. Una volta determinati v_1, v_2, v_3 e osservato che anch'essi formano una base di $T_p M$ (la matrice dei loro coefficienti è invertibile), si ha che $\sigma = \lambda v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$ per un qualche $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($\Lambda^3 T_p M$ ha dimensione uno) e di conseguenza $\omega = \alpha_1 = \lambda v_2 \wedge v_3$ (sfruttando sempre le condizioni $v_i \wedge \alpha_j = \delta_{ij}\sigma$).

Da questa osservazione segue che se $n = 3$ l'operatore di curvatura è sempre semplice. In realtà è anche puro, infatti sia $\{\alpha_i\}$ una base ortonormale di $\Lambda^2 T_p M$ che diagonalizza \mathcal{R}_p e fissata $\sigma \in \Lambda^3 T_p M$ otteniamo v_1, v_2, v_3 come nell'osservazione sopra. A meno di moltiplicare ogni v_i per una (stessa) costante otteniamo allora che $\alpha_1 = v_2 \wedge v_3$, $\alpha_2 = v_3 \wedge v_1$ e $\alpha_3 = v_1 \wedge v_2$ e ponendo $e_i = v_i \sqrt[4]{2}$, si ha allora che $e_i \wedge e_j = \sqrt{2} v_i \wedge v_j$ è una base ortogonale di $\Lambda^2 T_p M$ che diagonalizza \mathcal{R}_p . Dunque si ha

$$\begin{aligned} 0 &= g(e_1 \wedge e_2, e_2 \wedge e_3) = 2g_{12}g_{23} - 2g_{22}g_{13} & g_{12}g_{23} &= g_{22}g_{13}, \\ 0 &= g(e_2 \wedge e_3, e_3 \wedge e_1) = 2g_{23}g_{31} - 2g_{33}g_{12} & \text{cioè} & \quad g_{23}g_{31} = g_{33}g_{12}, \\ 0 &= g(e_3 \wedge e_1, e_1 \wedge e_2) = 2g_{31}g_{12} - 2g_{11}g_{32} & & \quad g_{31}g_{12} = g_{11}g_{32}, \end{aligned}$$

e

$$2 = 2g(v_2 \wedge v_3, v_2 \wedge v_3) = g_p(e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3) = 2g_{22}g_{33} - 2g_{23}^2 \quad (5.8)$$

cioè $g_{22}g_{33} = g_{23}^2 + 1$, dove $g_{ij} = g(e_i, e_j)$. Moltiplicando insieme le prime due uguaglianze, otteniamo

$$g_{12}g_{23}g_{23}g_{31} = g_{22}g_{13}g_{33}g_{12} \quad \text{cioè} \quad g_{23}^2 = g_{22}g_{33}$$

se $g_{12}g_{13} \neq 0$, che è in contraddizione con l'uguaglianza (5.8). Segue che deve essere $g_{12}g_{13} = 0$ e lo stesso per $g_{23}g_{21}$, $g_{31}g_{32}$ da cui, per le prime tre uguaglianze (essendo $g_{11}, g_{22}, g_{33} \neq 0$) concludiamo che g_{12}, g_{23}, g_{31} sono nulli. Allora

$$g_{11}g_{22} = g_{22}g_{33} = g_{33}g_{11} = 1$$

da cui si ottiene immediatamente $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$, cioè $e_i = v_i \sqrt[4]{2}$ è una base ortonormale di $T_p M$, quindi \mathcal{R}_p è puro.

ESERCIZIO 5.3.14. Si scriva l'operatore di curvatura della varietà prodotto $(M \times N, g \times h)$ di due varietà riemanniane (M, g) e (N, h) e si mostri che se entrambe hanno operatori di curvatura puri rispettivamente in $p \in M$ e $q \in N$, allora $(M \times N, g \times h)$ ha operatore di curvatura puro in $(p, q) \in M \times N$.

5.4. Altre nozioni di curvatura

Vediamo che per le proprietà di simmetria del tensore di Riemann (o di un qualunque tensore di curvatura algebrico), per determinare l'intero tensore è sufficiente conoscere il suo comportamento su particolari quaterne di vettori.

DEFINIZIONE 5.4.1. Sia (M, g) una varietà riemanniana, $p \in M$ e $v, w \in T_p M$ siano due vettori linearmente indipendenti che generano il 2-piano $\pi = \langle v, w \rangle \subseteq T_p M$. Definiamo la *curvatura sezionale* del 2-piano π come

$$\text{Sec}_p(\pi) = \frac{R_p(v, w, v, w)}{|v|_p^2 |w|_p^2 - (g_p(v, w))^2} = \frac{R_p(v, w, v, w)}{R_p^0(v, w, v, w)} = \frac{g_p(\mathcal{R}_p(v \wedge w), v \wedge w)}{g_p(v \wedge w, v \wedge w)}.$$

PROPOSIZIONE 5.4.2. La curvatura sezionale $\text{Sec}_p(\pi)$ dipende solo dal 2-piano $\pi \subseteq T_p M$ e non dalla scelta dei due generatori v e w .

DIMOSTRAZIONE. Se in una base ortonormale $\{e_1, e_2\}$ di $\pi = \langle v, w \rangle$ si ha $v = ae_1 + be_2$ e $w = ce_1 + de_2$,

$$\begin{aligned} \text{Sec}_p(\pi) &= \frac{R_p(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2, ae_1 + be_2, ce_1 + de_2)}{|ae_1 + be_2|_p^2 |ce_1 + de_2|_p^2 - (g_p(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2))^2} \\ &= \frac{R_p(e_1, e_2, e_1, e_2)(a^2 d^2 + b^2 c^2 - 2abcd)}{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2} \\ &= R_p(e_1, e_2, e_1, e_2), \end{aligned}$$

per le simmetrie del tensore di Riemann, da cui la tesi. \square

ESERCIZIO 5.4.3. Si mostri che se (M, g) e (N, h) sono due varietà riemanniane, ogni 2-piano "misto" della varietà prodotto $(M \times N, g \times h)$,

$$\langle v_p, w_q \rangle \subseteq T_{(p,q)}(M \times N) = T_p M \oplus T_q N,$$

con $v_p \in T_p M$ e $w_q \in T_q N$, ha curvatura sezionale nulla. Quali sono le altre curvature sezionali?

Ovviamente, conoscere il tensore di Riemann Riem nel punto p ci permette di calcolare la curvatura sezionale di ogni 2-piano di $T_p M$, viceversa vediamo ora che l'insieme delle curvature sezionali di ogni 2-piano di $T_p M$ determina completamente il tensore di Riemann in p .

TEOREMA 5.4.4. Siano P, P' due operatori di curvatura algebrici in $p \in M$, poniamo

$$\text{Sec}_p(\langle v, w \rangle) = \frac{P(v, w, v, w)}{|v|_p^2 |w|_p^2 - (g_p(v, w))^2} \quad e \quad \text{Sec}'_p(\langle v, w \rangle) = \frac{P'(v, w, v, w)}{|v|_p^2 |w|_p^2 - (g_p(v, w))^2},$$

dove $\langle v, w \rangle$ è il 2-piano in $T_p M$ generato da due vettori linearmente indipendenti v e w . Allora $\text{Sec}_p(\langle v, w \rangle) = \text{Sec}'_p(\langle v, w \rangle)$ per ogni 2-piano $\langle v, w \rangle$ se e solo se $P = P'$.

DIMOSTRAZIONE. Se $P = P'$ si ottiene ovviamente che le due curvatures sezionali coincidono. Supponiamo che P e P' abbiano le stesse curvatures sezionali, per ogni 2–piano in T_pM , dunque $P(v, w, v, w) = P'(v, w, v, w)$ per ogni coppia di vettori $v, w \in T_pM$. Consideriamo la funzione

$$f(\alpha, \beta) = P(x + \alpha z, y + \beta t, x + \alpha z, y + \beta t) - P(x + \alpha t, y + \beta z, x + \alpha t, y + \beta z),$$

si vede con un calcolo diretto e sfruttando le proprietà algebriche di P che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \Big|_{\alpha=\beta=0} = 6P(x, y, z, t).$$

Poiché l'analogia funzione per P' coincide con f , in quanto la sua definizione coinvolge solo i valori del tipo $P(v, w, v, w)$, si ha che $P = P'$. \square

ESERCIZIO 5.4.5. Si cerchi una formula esplicita che esprima $P(x, y, z, t)$ in termini delle curvatures sezionali di P .

OSSERVAZIONE 5.4.6. Ovviamente, dalla definizione, la curvatura sezionale associata al tensore R_p^0 è 1, per ogni punto $p \in M$ e ogni 2–piano in T_pM .

COROLLARIO 5.4.7. Una varietà riemanniana ha curvatura sezionale $\text{Sec}_p(\pi) = K_p$, per ogni 2–piano $\pi \subseteq T_pM$, se e solo se $R_p = K_p R_p^0$.

DIMOSTRAZIONE. Se vale $R_p = K_p R_p^0$, dalla definizione segue $\text{Sec}_p(\pi) = K_p$ per ogni 2–piano $\pi \subseteq T_pM$. Supponiamo invece che $\text{Sec}_p(\pi) = K_p$ per ogni 2–piano $\pi \subseteq T_pM$, allora i tensori di curvatura algebrici R_p e $K_p R_p^0$ su T_pM hanno le stesse curvatures sezionali e la tesi segue dal Teorema 5.4.4. \square

DEFINIZIONE 5.4.8. Una varietà riemanniana (M, g) ha curvatura sezionale costante K_p in $p \in M$ se $\text{Sec}_p(\pi) = K_p$ per ogni 2–piano $\pi \subseteq T_p$. Diremo che (M, g) è a curvatura costante se inoltre $K_p = K$, per ogni $p \in M$ (le varietà a curvatura costante sono spesso anche chiamate *space forms*). In una carta locale si ha dunque $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, per ogni $p \in M$. Se la curvatura costante è nulla (come ad esempio \mathbb{R}^n con la metrica euclidea) la varietà riemanniana si dice *flat* (o *piatta*), ciò è equivalente a $\text{Riem} = 0$, per il corollario precedente.

OSSERVAZIONE 5.4.9. Si noti che se $x \wedge y$ è un autovettore dell'operatore di curvatura \mathcal{R}_p , allora l'autovalore λ associato è dato da $\text{Sec}_p(\langle x, y \rangle)$, in quanto

$$R_p(x, y, x, y) = g_p(\mathcal{R}_p(x \wedge y), x \wedge y)/2 = \lambda g_p(x \wedge y, x \wedge y)/2 = \lambda R_p^0(x, y, x, y).$$

In particolare, se l'operatore \mathcal{R}_p è semplice, tutti i suoi autovalori sono dati da curvatures sezionali in $p \in M$. Se \mathcal{R}_p è puro i suoi autovalori sono dati da $R_p(e_i, e_j, e_i, e_j) = \text{Sec}_p(\langle e_i, e_j \rangle)$, dove $\{e_i \wedge e_j\}$ è la base che diagonalizza \mathcal{R}_p , con $\{e_i\}$ base ortonormale di T_pM (per esempio in dimensione 3, si veda l'Osservazione 5.3.13 e la successiva discussione).

DEFINIZIONE 5.4.10. Definiamo il *tensore di Ricci* Ric di tipo $(0, 2)$ (da Gregorio Ricci–Curbastro [92]), cioè una forma bilineare su $\Gamma(TM)$, come segue: $R(X, Y)$ è la traccia dell'endomorfismo lineare $Z \mapsto R(X, Z)Y$ di $\Gamma(TM)$, per ogni coppia $X, Y \in \Gamma(TM)$. Dunque, in coordinate locali,

$$R(X, Y) = \sum_{i=1}^n \left[R\left(X, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)Y \right]^i = g^{ij} R\left(X, \frac{\partial}{\partial x^i}, Y, \frac{\partial}{\partial x^j}\right),$$

da cui

$$R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl} = g^{jl} R_{jilk} = -g^{jl} R_{ijlk} = -g^{jl} R_{jikl} = R_{ijk}^j.$$

Per le simmetrie di Riem, segue immediatamente che Ric è una forma bilineare simmetrica, cioè $R(X, Y) = R(Y, X)$ per ogni $X, Y \in \Gamma(TM)$, dunque Ric_p si diagonalizza in una base ortonormale di T_pM , per ogni $p \in M$ ed esiste un unico $(1, 1)$ -tensore, chiamato *operatore di Ricci*, tale che

$$R(X, Y) = g(R(X), Y),$$

per ogni $X, Y \in \Gamma(TM)$. In coordinate locali, se $R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = R_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, si ha

$$R_{ij} = R_i^k g_{kj} \quad \text{e} \quad R_i^j = R_{ik} g^{kj}.$$

Inoltre, se $\{e_i\}$ è una base ortonormale di T_pM , si ha

$$R_p(v, w) = \sum_{i=1}^n R_p(v, e_i, w, e_i),$$

per ogni $v, w \in T_pM$. Segue che

$$R_p(v, v) = \sum_{i=1}^n R_p(v, e_i, v, e_i) = \sum_{i \in \{1, \dots, n\} : v, e_i \text{ indipendenti}} \text{Sec}_p(\langle v, e_i \rangle) (|v|_p^2 - (g_p(v, e_i))^2)$$

per ogni $v \in T_pM$, in particolare se $|v|_p = 1$ e i vettori $\{e_2, \dots, e_n\}$ “completano” v a una base ortonormale di T_pM , abbiamo

$$R_p(v, v) = \sum_{i=2}^n \text{Sec}_p(\langle v, e_i \rangle), \quad (5.9)$$

cioè $R_p(v, v)$ è la somma delle curvatures sezionali dei piani generati dalla coppia v e un elemento di $\{e_2, \dots, e_n\}$.

DEFINIZIONE 5.4.11. Definiamo la *curvatura scalare* $R \in C^\infty(M)$ come la traccia del tensore di Ricci

$$R = \text{tr Ric} = R_i^i = g^{ij} R_{ij}.$$

Segue allora che

$$R = g^{ij} R_{ij} = g^{ij} g^{kl} R_{ikjl} = g^{ij} R_{ikj}^k.$$

Inoltre, se $\{e_i\}$ è una base ortonormale di $T_p M$, si ha

$$R(p) = \sum_{i=1}^n R_p(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n R_p(e_i, e_j, e_i, e_j) = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Sec}_p(\langle e_i, e_j \rangle) \quad (5.10)$$

cioè la curvatura scalare in $p \in M$ è il doppio della somma delle curvatures sezionali dei 2-piani distinti generati dalle coppie di elementi di una qualunque base ortonormale di $T_p M$.

OSSERVAZIONE 5.4.12. Abbiamo visto nell'Esercizio 5.1.5 che l'operatore di Riemann è invariante per isometrie, di conseguenza lo stesso vale per tutti i tensori di curvatura e le curvatures sezionali, queste ultime nel senso che se $f : M \rightarrow N$ è un'isometria $\text{Sec}_{f(p)}^N(df(\pi)) = \text{Sec}_p^M(\pi)$, per ogni 2-piano $\pi \subseteq T_p M$. Se dunque $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ è un rivestimento riemanniano, localmente \widetilde{M} e M hanno la stessa curvatura.

OSSERVAZIONE 5.4.13. Essendo l'operatore di Riemann di $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$ identicamente nullo, anche tutti questi tensori sono nulli e $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$ ha curvatura costante uguale a zero, cioè è una varietà flat.

ESERCIZIO 5.4.14. Si scrivano il tensore di Ricci e la curvatura scalare della varietà prodotto $(M \times N, g \times h)$ di due varietà riemanniane (M, g) e (N, h) .

Vediamo come sono i vari tensori di curvatura di una varietà riemanniana n -dimensionale (M, g) , con curvatura costante K . Abbiamo già visto nel Corollario 5.4.7 che $\text{Riem} = KR^0$, da cui segue immediatamente che $\mathcal{R} = K\text{Id}$ e in una carta locale si ha

$$\begin{aligned} R_{ijk}^l &= R_{ijkm} g^{ml} = K(g_{ik}g_{jm} - g_{im}g_{jk})g^{ml} = K(\delta_j^l g_{ik} - \delta_i^l g_{jk}) \\ R_{ik} &= g^{jl} R_{ijkl} = K(n g_{ik} - g_{ik}) = (n-1)K g_{ik} \\ R &= g^{ik} R_{ik} = n(n-1)K \end{aligned}$$

per ogni $p \in M$.

OSSERVAZIONE 5.4.15. Poiché abbiamo visto nell'Esempio 3.2.9 che la connessione di Levi-Civita della varietà riemanniana "riscalata" $(M, \lambda g)$ di (M, g) è inalterata, segue che le corrispondenti curvatures soddisfano

$$\begin{aligned} R_p^\lambda(v, w)z &= R_p(v, w)z \\ \text{Riem}_p^\lambda &= \lambda \text{Riem}_p \\ \mathcal{R}_p^\lambda &= \mathcal{R}_p / \lambda \\ \text{Sec}_p^\lambda(\pi) &= \text{Sec}_p(\pi) / \lambda \\ \text{Ric}_p^\lambda &= \text{Ric}_p \\ R^\lambda(p) &= R(p) / \lambda, \end{aligned} \quad (5.11)$$

per ogni $p \in M$, terna di vettori $v, w, z \in T_p M$ e ogni 2-piano $\pi \subseteq T_p M$.

Si noti che il tensore di Ricci è inalterato dal riscaldamento, mentre l'operatore di curvatura, la curvatura sezionale e la curvatura scalare si comportano "come ci aspettiamo dalla curvatura" (pensando alle superfici in \mathbb{R}^3), cioè che quando si dilata lo spazio la curvatura diminuisce. Invece, il tensore di Riemann, riscalda nel verso opposto, come la metrica.

Concludiamo questa sezione discutendo più precisamente l'interpretazione geometrica della curvatura sezionale menzionata nell'introduzione a questo capitolo. Per ogni $p \in M$, sappiamo dal capitolo precedente che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\exp_p : B_\varepsilon(O_p) \rightarrow M$ sia un diffeomorfismo sulla sua immagine, proiettiamo dunque con \exp_p la porzione di un 2-piano $\pi \subseteq T_p M$ data da $\pi \cap B_\varepsilon(O_p)$ e chiamiamo $S \subseteq M$ la superficie $\exp_p(\pi \cap B_\varepsilon(O_p))$, con la metrica indotta $g_S = g|_S$. Vediamo che $\text{Sec}_p(\pi)$ coincide con $\text{Sec}_p^S(\pi)$, che è la curvatura "intrinseca" di S , uguale alla metà della sua curvatura scalare R^S in p , dunque dipendente solo dalla metrica (indotta) di S . Scegliamo una base ortonormale $\mathcal{B} = \{e_i\}$ di $T_p M$ tale che $\pi = \langle e_1, e_2 \rangle$ e consideriamo le coordinate normali centrate in p associate a \mathcal{B} . Allora, per costruzione, essendo $\pi = T_p S$, la coppia (x^1, x^2) di tali coordinate sono delle coordinate normali centrate in p per S , dunque per la formula (5.4), si ha in p ,

$$\begin{aligned} R_{1212}^S &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{21}^S}{\partial x^2 \partial x^1} - \frac{\partial^2 g_{11}^S}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{22}^S}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 g_{21}^S}{\partial x^1 \partial x^2} \right] \\ &= \frac{\partial^2 g_{21}^S}{\partial x^2 \partial x^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}^S}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}^S}{\partial x^1 \partial x^1} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{21}^S}{\partial x^2 \partial x^1} - \frac{\partial^2 g_{11}^S}{\partial x^2 \partial x^2} - \frac{\partial^2 g_{22}^S}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2 g_{21}^S}{\partial x^1 \partial x^2} \right] \\ &= R_{1212}, \end{aligned} \tag{5.12}$$

in quanto $g_{11}^S, g_{12}^S, g_{22}^S$ coincidono con g_{11}, g_{12}, g_{22} , rispettivamente. Essendo quindi anche $g_{11}^S g_{22}^S - (g_{12}^S)^2 = g_{11} g_{22} - (g_{12})^2 = 1$ nel punto p , concludiamo che $\text{Sec}_p^S(\pi) = \text{Sec}_p(\pi)$.

Se allora abbiamo una qualunque immersione isometrica in \mathbb{R}^3 di un intorno di p in S (come abbiamo sottolineato nell'introduzione non sempre vi è tale immersione), vedremo nell'Osservazione 7.3.4 che vale

$$R^S(p) = 2G_p,$$

dove G_p è la *curvatura di Gauss* della superficie immagine dell'immersione locale, che introdurremo nella Sezione 7.2. Dunque $\text{Sec}_p(\pi) = G_p$ (come definito da Riemann).

5.5. Relazioni tra le curvature

Abbiamo visto che l'operatore di Riemann, il tensore di Riemann, l'operatore di curvatura e le curvature sezionali in un punto $p \in M$ di una varietà riemanniana n -dimensionale (M, g) sono in corrispondenza biunivoca tra di loro. Vediamo che ciò non vale in generale per il tensore di Riemann con il tensore di Ricci e la curvatura scalare. Un motivo euristico, come abbiamo visto nella Proposizione 5.3.10, è che il tensore di Riemann Riem in un punto di una varietà riemanniana n -dimensionale (M, g) è determinato da $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ coefficienti, mentre Ric (che è una forma bilineare simmetrica) è determinato da $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficienti e R da uno solo.

In dimensione $n = 1$ non vi è curvatura e tutti questi tensori sono nulli.

In dimensione $n = 2$, la curvatura scalare R determina completamente il tensore di curvatura. Infatti per ogni $p \in M$ si ha $\text{Sec}_p = R_p/2$ (c'è un unico piano in T_pM , che è T_pM stesso) dalla formula (5.10), di conseguenza

$$R_{ijkl} = \frac{R}{2}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) \quad \text{cioè} \quad \text{Riem} = \frac{R}{4}(g \otimes g)$$

poiché tale uguaglianza è soddisfatta dalle uniche componenti non nulle del tensore di Riemann,

$$R_{1212} = R_{2121} = -R_{2112} = -R_{1221}.$$

Segue che $\mathcal{R} = R \text{Id}/2$ e $\text{Ric} = Rg/2$.

In dimensione $n = 3$, sia il tensore di Riemann che il tensore di Ricci hanno 6 componenti indipendenti, dunque si può ipotizzare che Ric determini Riem . Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormale di T_pM , allora per l'equazione (5.9), abbiamo

$$\begin{aligned} R_p(e_1, e_1) &= \text{Sec}_p(\langle e_1, e_2 \rangle) + \text{Sec}_p(\langle e_1, e_3 \rangle) \\ R_p(e_2, e_2) &= \text{Sec}_p(\langle e_2, e_3 \rangle) + \text{Sec}_p(\langle e_2, e_1 \rangle) \\ R_p(e_3, e_3) &= \text{Sec}_p(\langle e_3, e_1 \rangle) + \text{Sec}_p(\langle e_3, e_2 \rangle), \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} 2 \text{Sec}_p(\langle e_1, e_2 \rangle) &= R_p(e_1, e_1) + R_p(e_2, e_2) - R_p(e_3, e_3) \\ 2 \text{Sec}_p(\langle e_2, e_3 \rangle) &= R_p(e_2, e_2) + R_p(e_3, e_3) - R_p(e_1, e_1) \\ 2 \text{Sec}_p(\langle e_3, e_1 \rangle) &= R_p(e_3, e_3) + R_p(e_1, e_1) - R_p(e_2, e_2). \end{aligned}$$

Segue allora che se $n = 3$, conoscendo il tensore di Ricci in $p \in M$, possiamo calcolare le curvature sezionali di ogni piano in T_pM , quindi Riem_p è univocamente determinato. Invece, la curvatura scalare $R(p)$ non determina il tensore di Ricci (dunque nemmeno Riem_p), si veda l'Esempio 5.8.16.

Se $n = 4$ il tensore di Ricci ha 10 componenti indipendenti mentre il tensore di Riemann 20 e la differenza aumenta all'aumentare della dimensione (Esempio 5.8.17). Pertanto, in generale, si ha che il tensore di Ricci non determina il tensore di Riemann, se $n \geq 4$.

Il tensore di Riemann in termini del tensore di Ricci (e della curvatura scalare che ne è la traccia) in dimensione $n = 3$ è descritto esplicitamente dalla seguente formula

$$\text{Riem} = \frac{R}{12}g \otimes g + \left(\text{Ric} - \frac{R}{3}g\right) \otimes g, \quad (5.13)$$

inoltre questa “decomposizione” è ortogonale, cioè i tensori di curvatura algebrici $\frac{R}{12}g \otimes g$ e $(\text{Ric} - Rg/3) \otimes g$ sono ortogonali rispetto all'estensione della metrica a T_4^0M , di cui lo spazio dei tensori di curvatura algebrici su TM è un sottospazio vettoriale delle sue sezioni. Una conseguenza è che

$$|\text{Riem}|^2 = \frac{R^2}{144}|g \otimes g|^2 + \left| \left(\text{Ric} - \frac{R}{3}g\right) \otimes g \right|^2 = \frac{R^2}{3} + 4 \left| \left(\text{Ric} - \frac{R}{3}g\right) \right|^2 = 4|\text{Ric}|^2 - R^2,$$

per le formule dell'Esercizio 5.3.6 e il fatto che il tensore $\text{Ric} - Rg/3$ ha traccia nulla.

Un modo di dimostrare la formula (5.13) è quello di considerare il tensore di curvatura algebrico

$$P = \frac{R}{12}g \otimes g + \left(\text{Ric} - \frac{R}{3}g\right) \otimes g$$

e di vedere che $\text{Pic} = \text{Ric}$, dove Pic è l'analogo per P del tensore di Ricci, cioè in coordinate $P_{ik} = g^{jl}P_{ijkl}$ e $P = g^{ik}P_{ik} = g^{ik}g^{jl}P_{ijkl}$ è l'analogo della curvatura scalare per P . Poiché Pic determina unicamente P in dimensione 3 (analogamente a Ric con Riem), possiamo concludere che $P = \text{Riem}$.

ESERCIZIO 5.5.1. Si mostri per ogni forma bilineare simmetrica h e tensore di curvatura algebrico P su T_pM , si ha

$$g(g \otimes h, P) = 4g(h, \text{Pic}) = 4\text{Pic}_{ik}h_{jl}g^{ij}g^{kl}$$

da cui

$$g(g \otimes g, P) = 4P.$$

In dimensione $n \geq 4$, la naturale analoga n -dimensionale della formula (5.13)

$$\text{Riem} = \frac{R}{2n(n-1)}g \otimes g + \frac{1}{n-2} \left(\text{Ric} - \frac{R}{n}g\right) \otimes g$$

non vale in generale (altrimenti, il tensore di Ricci determinerebbe univocamente il tensore di Riemann). Vi è infatti un termine (tensore) ulteriore, detto *tensore di Weyl* (da Hermann Weyl [93]), denotato con Weyl

$$\text{Riem} = \frac{R}{2n(n-1)}g \otimes g + \frac{1}{n-2} \left(\text{Ric} - \frac{R}{n}g\right) \otimes g + \text{Weyl}. \quad (5.14)$$

Definendo il tensore $\overset{\circ}{\text{Ric}} = \text{Ric} - Rg/n$, a traccia nulla, chiamato *tensore di Ricci trace-free* (si noti che in dimensione $n = 2$ si ha $\overset{\circ}{\text{Ric}} = 0$), questa formula si può scrivere come

$$\text{Riem} = \frac{R}{2n(n-1)} g \otimes g + \frac{1}{n-2} \overset{\circ}{\text{Ric}} \otimes g + \text{Weyl}. \quad (5.15)$$

Si vede facilmente che il tensore di Weyl è un tensore di curvatura algebrico (dunque ha le stesse simmetrie del tensore di Riemann) ed ha la proprietà che ogni sua traccia è nulla, cioè è *completamente trace-free*. Si noti dunque (si faccia riferimento alle formule dell'Esercizio 5.3.6) che allora la traccia "totale" del primo addendo, cioè $\text{tr} \left(\text{tr}^{1,3} \left(\frac{R}{2n(n-1)} g \otimes g \right) \right)$, è nulla in un punto $p \in M$ se e solo se $R_p = 0$, la traccia sul primo e terzo indice del secondo addendo è nulla in $p \in M$ se e solo se $\overset{\circ}{\text{Ric}}_p$ è nullo, mentre la sua traccia "totale" è sempre zero, infine, ogni traccia del terzo è nulla.

Per mostrare che tutte le tracce del tensore di Weyl sono nulle, basta ovviamente controllare che $g^{jl} W_{ijkl} = 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned} g^{jl} W_{ijkl} &= g^{jl} \left(R_{ijkl} - \frac{R}{2n(n-1)} (g \otimes g)_{ijkl} - \frac{1}{n-2} (\overset{\circ}{\text{Ric}} \otimes g)_{ijkl} \right) \\ &= R_{ik} - Rg_{ik}/n - \overset{\circ}{R}_{ik} \\ &= 0, \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la formula

$$g^{jl} (g \otimes h)_{ijkl} = (n-2)h_{ik} + g_{ik} \text{tr} h$$

dell'Esercizio 5.3.6.

La decomposizione del tensore di Riemann espressa nella formula (5.15) è inoltre ortogonale (come in dimensione $n = 3$), infatti

$$\begin{aligned} g(g \otimes g, \overset{\circ}{\text{Ric}} \otimes g) &= 8(n-1) \text{tr} \overset{\circ}{\text{Ric}} = 0 \\ g(g \otimes g, \text{Weyl}) &= 4g^{jl} g^{ki} W_{ijkl} = 0 \\ g(\overset{\circ}{\text{Ric}} \otimes g, \text{Weyl}) &= 4g^{jl} W_{ijkl} \overset{\circ}{R}_{ms} g^{im} g^{ks} = 0 \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le formule degli Esercizi 5.3.6 e 5.5.1 e la proprietà di Weyl di essere completamente trace-free. Una conseguenza è la formula

$$\begin{aligned} |\text{Riem}|^2 &= \frac{R^2}{4n^2(n-1)^2} |g \otimes g|^2 + \frac{1}{(n-2)^2} |\overset{\circ}{\text{Ric}} \otimes g|^2 + |\text{Weyl}|^2 \\ &= \frac{2}{n(n-1)} R^2 + \frac{4}{n-2} |\overset{\circ}{\text{Ric}}|^2 + |\text{Weyl}|^2. \end{aligned}$$

Se nella formula (5.14) “raccolgiamo” il termine $Rg \otimes g$, otteniamo un'altra decomposizione ortogonale del tensore di Riemann,

$$\text{Riem} = \frac{1}{n-2} \left(\text{Ric} - \frac{R}{2(n-1)}g \right) \otimes g + \text{Weyl}. \quad (5.16)$$

Il tensore $S = \text{Ric} - \frac{R}{2(n-1)}g$ è detto *tensore di Schouten* (notiamo che in dimensione $n = 2$ si ha $S = \overset{\circ}{\text{Ric}} = 0$), dunque

$$\text{Riem} = \frac{1}{n-2} S \otimes g + \text{Weyl}.$$

OSSERVAZIONE 5.5.2. Dalla formula (5.14) segue anche la seguente decomposizione (non ortogonale) di Riem

$$\text{Riem} = -\frac{R}{2(n-1)(n-2)} g \otimes g + \frac{1}{n-2} \text{Ric} \otimes g + \text{Weyl}. \quad (5.17)$$

OSSERVAZIONE 5.5.3. La formula (5.14) vale anche se $n = 3$, poiché non vi sono tensori di curvatura algebrici completamente trace-free, se $n = 3$. Infatti, ogni ipotetica componente non nulla P_{ijkl} di un tale tensore in una base ortonormale deve avere due (e non tre) indici uguali, poiché gli indici possono variare solo in $\{1, 2, 3\}$, che dunque non possono stare entrambi nella prima o seconda coppia. Consideriamo allora P_{1212} e P_{1213} , abbiamo

$$\begin{aligned} P_{1212} &= -P_{1313} = P_{2323} = -P_{2121} = -P_{1212} = 0 \\ P_{1213} &= -P_{2223} - P_{3233} = 0 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato la proprietà trace-free e le simmetrie di P . Sempre per tali simmetrie, concludiamo che $P_{ijkl} = 0$ per ogni $i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}$. Quindi la formula (5.13) può essere vista come un caso particolare della formula (5.14), dicendo che in dimensione minore di 4 il tensore di Weyl è sempre nullo.

ESERCIZIO 5.5.4. Si scriva la norma al quadrato di $\overset{\circ}{\text{Ric}}$ e di S . Usando le formule degli Esercizi 5.3.6 e 5.5.1, si scriva la norma al quadrato del tensore di Riemann in termini della norma al quadrato di Ric, Weyl e di R^2 , oppure di S e Weyl.

ESERCIZIO 5.5.5. In dimensione $n = 3$, si esprimano R^2 e le norme al quadrato di \mathcal{R} , Riem, Ric, $\overset{\circ}{\text{Ric}}$ e S in termini degli autovalori del tensore di Ricci.

ESERCIZIO 5.5.6. Si scrivano il tensore di Ricci trace-free, il tensore di Schouten e il tensore di Weyl della varietà prodotto $(M \times N, g \times h)$ di due varietà riemanniane (M, g) e (N, h) .

ESERCIZIO 5.5.7. Usando la formula (5.14), si mostri che data una base ortonormale $\{e_i\}$ di $T_p M$, la base $\{e_i \wedge e_j\}$ di $\Lambda^2 T_p M$ diagonalizza la forma bilineare

simmetrica \mathcal{R}_p , nella Definizione 5.3.11, se e solo se tale base diagonalizza le forme analogamente associate al tensore di Weyl e a $\text{Ric} \otimes g$. Si osservi che se $\{e_i\}$ è una base ortonormale di $T_p M$ che diagonalizza una forma bilineare simmetrica h di $T_p M$, allora la base $\{e_i \wedge e_j\}$ di $\Lambda^2 T_p M$ diagonalizza la forma bilineare simmetrica analogamente associata a $h \otimes g_p$. Si concluda che allora se una varietà (M, g) ha tensore di Weyl nullo, ha operatore di curvatura puro (si veda la Sezione 5.3), ottenendo una dimostrazione alternativa del fatto che ogni varietà di dimensione $n = 3$ ha tale proprietà, in quanto $W = 0$ (si veda la discussione immediatamente seguente l'Osservazione 5.3.13).

Tutta la precedente discussione e in particolare, la decomposizione data dalla formula (5.15) (o (5.14)) vale in realtà, con gli stessi argomenti, per ogni tensore di curvatura algebrico. Dato un tensore di curvatura algebrico P su $T_p M$ sia Pic l'analogo per P del tensore di Ricci, cioè in coordinate $P_{ik} = g^{jl} P_{ijkl}$ e $P = g^{ik} P_{ik} = g^{ik} g^{jl} P_{ijkl}$ l'analogo della curvatura scalare per P . Abbiamo visto nella Proposizione 5.3.10 che P è determinato da $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ coefficienti, mentre Pic , che è una forma bilineare simmetrica, è determinata da $\frac{n(n+1)}{2}$ coefficienti e P da uno solo. Si ha dunque la seguente decomposizione ortogonale di $C_p(M)$.

TEOREMA 5.5.8. *Sia (M, g) una varietà riemanniana di dimensione $n > 2$ e sia $\mathcal{S}_0^2 M_p$ lo spazio delle forme bilineari simmetriche su $T_p M$ a traccia nulla. Allora vale la seguente decomposizione ortogonale dello spazio dei tensori di curvatura algebrici in p ,*

$$C_p(M) = \langle g_p \otimes g_p \rangle \oplus^\perp \mathcal{S}_0^2 M_p \otimes g_p \oplus^\perp \mathcal{W}_p$$

dove $\mathcal{W}_p \subseteq C(E)$ è lo spazio dei tensori di curvatura algebrici su $T_p M$ tali che ogni traccia è nulla, detto spazio dei tensori di Weyl.

Per ogni $P \in C_p(M)$, si ha la seguente somma di tensori mutuamente ortogonali,

$$P = \frac{P}{2n(n-1)} g \otimes g + \frac{1}{n-2} \overset{\circ}{\text{Pic}} \otimes g + W,$$

dove Pic è la forma bilineare simmetrica $\text{tr}^{1,3} P$, la cui traccia (che è la traccia "totale" di P) è P e di cui la versione trace-free è $\overset{\circ}{\text{Pic}} = \text{Pic} - P g_p / n$, infine W è un tensore di curvatura algebrico con ogni traccia nulla.

OSSERVAZIONE 5.5.9. Se $n = 1$ lo spazio $C_p(M)$ ha dimensione zero, se $n = 2$ lo spazio $C_p(M)$ ha dimensione uno,

$$C_p(M) = \langle g_p \otimes g_p \rangle$$

e

$$P = \frac{P}{4} g \otimes g,$$

per ogni $P \in C_p(M)$.

ESERCIZIO 5.5.10. Si consideri la mappa lineare $\Psi_g : \mathcal{S}_p^2 M \rightarrow C_p(M)$ dallo spazio delle forme bilineari simmetriche allo spazio dei tensori di curvatura algebrici su $T_p M$, data da $h \mapsto \Psi_g(h) = h \otimes g$. Si mostri che Ψ_g è iniettiva per $n > 2$ e si noti che la prima formula dell'Esercizio 5.5.1 esprime il fatto che la *contrazione di Ricci* $c_g : C_p(M) \rightarrow \mathcal{S}_p^2 M$, definita da $c_g(P)_{ik} = g^{jl} P_{ijkl}$ è l'aggiunta (o trasposta) di Ψ diviso 4.

OSSERVAZIONE 5.5.11. Per il Lemma 5.3.9 e l'esercizio precedente si ha allora,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^2(\Lambda^2 T_p M) &= \Lambda_p^4 M \oplus^\perp \langle g_p \otimes g_p \rangle \oplus^\perp \mathcal{S}_0^2 M_p \otimes g_p \oplus^\perp \mathcal{W}_p \\ &= \Lambda_p^4 M \oplus^\perp \Psi_g(\langle g_p \rangle) \oplus^\perp \Psi_g(\mathcal{S}_0^2 M_p) \oplus^\perp \mathcal{W}_p \\ &\simeq \Lambda_p^4 M \oplus^\perp \mathbb{R} \oplus^\perp \mathcal{S}_0^2 M_p \oplus^\perp \mathcal{W}_p, \\ C_p(M) &\simeq \mathbb{R} \oplus^\perp \mathcal{S}_0^2 M_p \oplus^\perp \mathcal{W}_p. \end{aligned}$$

Si può mostrare che questa decomposizione (del Teorema 5.5.8) è *irriducibile* rispetto all'azione di $SO(n, g_p)$, si veda [37, Sezione 3.K] per approfondire.

Legate alla decomposizione ortogonale (5.15) del tensore di Riemann, abbiamo le seguenti famiglie di varietà riemanniane:

- se $\overset{\circ}{\text{Ric}} = 0$ e $\overset{\circ}{\text{Weyl}} = 0$, la varietà (M, g) ha curvatura sezionale costante in ogni punto e vedremo che se $\dim(M) \geq 3$, ciò implica che la varietà (M, g) è a *curvatura costante* (Teorema 5.6.6),
- se $\dim(M) \geq 3$ e $\overset{\circ}{\text{Ric}} = 0$, il tensore di Ricci è proporzionale alla metrica in ogni punto e si dice che (M, g) è una *varietà di Einstein* (vedremo inoltre nel Teorema 5.6.8, che la costante di proporzionalità è indipendente dal punto),
- se $\dim(M) \geq 4$ e $\overset{\circ}{\text{Weyl}} = 0$ in ogni punto, mostreremo nella Sezione 10.2 che (M, g) è *localmente conformalmente flat* (LCF), cioè per ogni punto di M esiste un intorno e un cambio conforme della metrica g tale che la varietà risultante sia flat (piatta) in tale intorno (vale anche il viceversa, se (M, g) è LCF, allora $\overset{\circ}{\text{Weyl}} = 0$).

ESERCIZIO 5.5.12. Il prodotto di due varietà LCF (o con $\overset{\circ}{\text{Weyl}} = 0$) è ancora una varietà LCF (o con $\overset{\circ}{\text{Weyl}} = 0$)? E il prodotto di due varietà di Einstein è ancora una varietà di Einstein? Sotto quali condizioni?

Concludiamo questa sezione discutendo il concetto di segno della curvatura. È chiaro cosa significa che una varietà (M, g) ha curvatura scalare positiva/negativa o tensore di Ricci definito o semidefinito positivo/negativo, mentre per il tensore di Riemann abbiamo due possibilità di parlare del suo "segno": possiamo richiedere che tutte le curvature sezionali abbiano lo stesso segno oppure la positività/negatività della forma bilineare \mathcal{R} associata all'operatore di curvatura \mathcal{R} . Si ha (puntualmente), per ogni $X, Y \in \Gamma(TM)$,

$$\mathcal{R} \geq 0 \implies g(\mathcal{R}(X \wedge Y), X \wedge Y) \geq 0 \iff \text{Sec} \geq 0 \implies \text{Ric} \geq 0 \implies R \geq 0$$

(analogamente per le curvatures negative o se le disuguaglianze sono strette), la prima freccia e l'equivalenza seguente seguono dalla definizione di curvatura sezionale 5.4.1, la terza freccia formula (5.9) e l'ultima dal fatto che la curvatura scalare è la traccia del tensore di Ricci (quindi la somma degli autovalori nonnegativi dell'endomorfismo associato).

Se $n \geq 4$, nessuna di queste frecce è reversibile, si vedano gli esempi nella Sezione 5.8. Se $n = 2$ sono invece tutte equivalenti, per la discussione precedente sulla curvatura in dimensione due. Se $n = 3$, vi sono varietà con curvatura scalare positiva ma con tensore di Ricci con degli autovalori negativi (mostremo un esempio nel prossimo capitolo) mentre, sebbene la prima freccia sia un'equivalenza in quanto in dimensione tre ogni 2-vettore alternante (o forma) è semplice (Osservazione 5.3.13), la condizione $\text{Ric} \geq 0$ non implica che tutte le curvatures sezionali siano maggiori o uguali a zero (Esempio 5.8.20).

DEFINIZIONE 5.5.13. Diciamo che una varietà riemanniana ha curvatura positiva (nonnegativa, negativa, nonpositiva) se tutte le sue curvatures sezionali in ogni punto sono positive (maggiori o uguali a zero, negative, minori o uguali a zero).

5.6. La seconda identità di Bianchi

PROPOSIZIONE 5.6.1 (Seconda identità di Bianchi). *Vale la seguente identità:*

$$\nabla_X R(Y, Z, W, T) + \nabla_Y R(Z, X, W, T) + \nabla_Z R(X, Y, W, T) = 0,$$

per ogni $X, Y, Z, W, T \in \Gamma(TM)$.

In coordinate locali si ha

$$\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} = 0. \quad (5.18)$$

DIMOSTRAZIONE. Scriviamo il tensore di Riemann in coordinate normali centrate in $p \in M$,

$$R_{jklm} = \left(\frac{\partial \Gamma_{jl}^q}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^q}{\partial x^j} + \Gamma_{jl}^q \Gamma_{ks}^q - \Gamma_{kl}^q \Gamma_{js}^q \right) g_{qm},$$

allora nel punto p si ha

$$\nabla_i R_{jklm} = \frac{\partial R_{jklm}}{\partial x^i} = \frac{\partial^2 \Gamma_{jl}^m}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma_{kl}^m}{\partial x^i \partial x^j},$$

essendo tutti i simboli di Christoffel nulli in p e g_{ij} l'identità. Sommiamo i tre addendi

$$\begin{aligned} & \nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm} \\ &= \frac{\partial^2 \Gamma_{jl}^m}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 \Gamma_{kl}^m}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 \Gamma_{kl}^m}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 \Gamma_{il}^m}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial^2 \Gamma_{ik}^m}{\partial x^k \partial x^j} - \frac{\partial^2 \Gamma_{jl}^m}{\partial x^k \partial x^i} \\ &= 0, \end{aligned}$$

da cui la tesi. \square

OSSERVAZIONE 5.6.2. Per motivi evidenti la prima identità di Bianchi (5.5) è talvolta detta “identità di bianchi *algebraica*”, mentre la seconda, “identità di Bianchi *differenziale*”.

OSSERVAZIONE 5.6.3. Si noti che per ogni campo vettoriale X , il tensore $\nabla_X \text{Riem}$ è un tensore di curvatura algebrico e lo stesso vale per $\nabla_{X_1, \dots, X_k}^k \text{Riem}$, per ogni famiglia di campi vettoriali X_1, \dots, X_k . Analogamente, $\nabla_{X_1, \dots, X_k}^k \nabla \text{Riem}$ è un tensore di tipo $(0, 5)$ che soddisfa la seconda identità di Bianchi nelle sue prime tre variabili.

ESERCIZIO 5.6.4. Si mostri che la seconda identità di Bianchi vale anche se i tre indici di ∇Riem su cui si permuta sono quello relativo alla derivata covariante e i due della *seconda* coppia. Si mostri che il seguente tensore di tipo $(0, 5)$, definito in coordinate locali da

$$T_{ijklm} = \nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{lkim} + \nabla_l R_{ikjm}$$

è simmetrico negli indici k, m ma non è necessariamente nullo.

Sono di grande importanza anche le versioni “contratte” della seconda identità di Bianchi.

Contraendo l’identità in coordinate (5.18) con g^{kl} , otteniamo

$$0 = g^{kl} (\nabla_i R_{jklm} + \nabla_j R_{kilm} + \nabla_k R_{ijlm}) = g^{kl} \nabla_k R_{ijlm} - \nabla_i R_{jm} + \nabla_j R_{im}$$

cioè (per le simmetrie del tensore di Riemann)

$$g^{kl} \nabla_k R_{lmij} = \nabla_i R_{jm} - \nabla_j R_{im} \quad (5.19)$$

che possiamo scrivere come

$$\text{div Riem}_{mij} = \nabla_i R_{jm} - \nabla_j R_{im}.$$

Dunque, nel caso in cui $\text{div Riem} = 0$ si ha

$$\nabla_i R_{jm} = \nabla_j R_{im},$$

cioè il tensore ∇Ric è simmetrico.

Contraendo ulteriormente l’equazione (5.19) con g^{im} , otteniamo

$$-g^{kl} \nabla_k R_{lj} = g^{im} g^{kl} \nabla_k R_{lmij} = g^{im} \nabla_i R_{jm} - g^{im} \nabla_j R_{im}$$

cioè (poiché in tensore di Ricci è simmetrico)

$$2g^{kl} \nabla_k R_{lj} = \nabla_j R.$$

Si ha dunque la seguente identità detta *lemma di Schur*:

$$2 \text{div Ric} = dR. \quad (5.20)$$

Questa identità può essere scritta equivalentemente nella forma

$$\nabla^i \left(R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} \right) = 0 \quad \text{oppure} \quad \text{div} \left(\text{Ric} - \frac{R}{2} g \right).$$

Il tensore che appare nell'equazione

$$E = \text{Ric} - \frac{R}{2} g, \quad E_{ij} = R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij},$$

è detto *tensore di Einstein*.

Si può dimostrare che E è l'unico tensore a divergenza nulla che può essere "ottenuto" dalla metrica e dalla curvatura (dalle derivate prima e seconda del tensore metrico in coordinate) e gioca un ruolo centrale nelle *equazioni di Einstein* per il campo gravitazionale (si veda [91]).

OSSERVAZIONE 5.6.5. Uno dei motivi dell'importanza del tensore di Einstein $E = \text{Ric} - Rg/2$ (in particolare in relatività) è il fatto che è l'equazione di Eulero-Lagrange del *funzionale di azione di Einstein-Hilbert* su una varietà differenziabile M (detto anche *curvatura scalare totale*),

$$\mathcal{S}(g) = \int_M R_g d\mu_g$$

dove R_g è la curvatura scalare di (M, g) e μ_g la sua misura canonica, associate a una metrica g . Precisamente, si ha

$$\delta \mathcal{S}_g(h) = \frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{S}(g + \varepsilon h) \Big|_{\varepsilon=0} = - \int_M g(E_g, h) d\mu_g = - \int_M E_g^{ij} h_{ij} d\mu_g,$$

per ogni forma bilineare h su M (si veda [9, Capitolo 4]).

TEOREMA 5.6.6. *Sia (M, g) una varietà riemanniana connessa, di dimensione $n \geq 3$ con curvatura sezionale costante K_p per ogni $p \in M$, allora (M, g) ha curvatura costante (cioè la funzione $p \mapsto K_p$ è costante su M).*

DIMOSTRAZIONE. Per il Corollario 5.4.7, abbiamo $R_{ijkl} = K(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$ in coordinate locali, dunque per la seconda identità di Bianchi

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_h R_{ijkl} + \nabla_i R_{jhkl} + \nabla_j R_{hikl} \\ &= \frac{\partial K}{\partial x^h} (g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}) + \frac{\partial K}{\partial x^i} (g_{jk}g_{hl} - g_{jl}g_{hk}) + \frac{\partial K}{\partial x^j} (g_{hk}g_{il} - g_{hl}g_{ik}). \end{aligned}$$

Contraendo con g^{ik} otteniamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial K}{\partial x^h} (n-1)g_{jl} + \frac{\partial K}{\partial x^j} g_{hl} - \frac{\partial K}{\partial x^h} g_{jl} - \frac{\partial K}{\partial x^j} (n-1)g_{hl} \\ &= \frac{\partial K}{\partial x^h} (n-2)g_{jl} - \frac{\partial K}{\partial x^j} (n-2)g_{hl} \end{aligned}$$

e contraendo poi questa identità con g^{jl} , si ha

$$(n-2)(n-1)\frac{\partial K}{\partial x^h} = 0.$$

Perciò la funzione $p \mapsto K_p$ è costante, poiché $n \geq 3$ e $h \in \{1, \dots, n\}$. \square

DEFINIZIONE 5.6.7. Una varietà riemanniana (M, g) di dimensione $n \geq 3$ si dice *varietà di Einstein* se il suo tensore di Ricci è un multiplo della metrica, cioè $\text{Ric} = \lambda g$, per $\lambda \in C^\infty(M)$

Si noti che ciò è equivalente a richiedere che il tensore di Ricci trace-free, o il tensore di Schouten, o quello di Einstein siano proporzionali alla metrica.

TEOREMA 5.6.8. Sia (M, g) una varietà di Einstein con $\text{Ric} = \lambda g$, allora λ è costante. In particolare, la sua curvatura scalare è costante.

DIMOSTRAZIONE. Per la definizione di varietà di Einstein vale $R_{ij} = \lambda g_{ij}$ per qualche $\lambda \in C^\infty(M)$, prendendo quindi la traccia di questa equazione si ha $R = \lambda n$, da cui $\lambda = R/n$. Prendendo la divergenza del tensore di Ricci e usando il lemma di Schur (5.20) si ha

$$dR/2 = \text{div Ric} = \text{div}(\lambda g) = d\lambda,$$

da cui

$$dR/2 = dR/n$$

e la tesi segue, poiché $n \geq 3$, dunque $dR = 2d\lambda = 0$. \square

Dunque, le varietà di Einstein con $\text{Ric} = \lambda g$, vengono dette *di costante* λ . Talvolta, quelle di costante nulla si dicono *Ricci-flat* (o *Ricci-piatte*).

ESERCIZIO 5.6.9. Si mostri che se $n = 2$ si ha $\overset{\circ}{\text{Ric}} = S = E = 0$ e che se $n \geq 3$ e il tensore di Einstein è nullo, si ha $\text{Ric} = 0$, dunque (M, g) è una varietà di Einstein con costante zero (lo stesso vale se il tensore di Schouten è nullo).

DEFINIZIONE 5.6.10. Sia (M, g) una varietà riemanniana e S il suo tensore di Schouten. Definiamo il *tensore di Cotton* (talvolta detto anche di *Cotton-York*) come

$$C_{ijk} = \nabla_i S_{jk} - \nabla_j S_{ik} = \nabla_i R_{jk} - \nabla_j R_{ik} - \frac{1}{2(n-1)}(\nabla_i R g_{jk} - \nabla_j R g_{ik}),$$

cioè il tensore di Cotton “misura” la non-simmetria del tensore ∇S (che è simmetrico negli indici secondo/terzo).

DEFINIZIONE 5.6.11. Una forma bilineare simmetrica B su (M, g) si dice *di Codazzi*, se il tensore ∇B è simmetrico (vedremo il motivo di tale nome nell’Osservazione 7.3.10), cioè

$$\nabla_i B_{jk} = \nabla_j B_{ik}$$

per ogni terna di indici i, j, k .

Segue dunque che se B è un tensore di Codazzi, si ha

$$\operatorname{div} B = \nabla \operatorname{tr} B.$$

OSSERVAZIONE 5.6.12. Il tensore di Cotton C è zero se e solo se il tensore di Schouten S è un tensore di Codazzi.

ESERCIZIO 5.6.13. Si mostri per una generica forma bilineare simmetrica h su (M, g) , il tensore di curvatura algebrico $h \otimes h$ non soddisfa necessariamente la seconda identità di Bianchi (e analogamente $h \otimes g$). Si provi che invece tale identità è soddisfatta se h è un tensore di Codazzi (lo stesso per $h \otimes g$).

Una forma bilineare simmetrica h su (M, g) si dice *armonica* se è di Codazzi e ha divergenza nulla. È facile vedere che ciò è equivalente a essere di Codazzi e con traccia costante.

Per la seconda identità di Bianchi contratta $\nabla^i R_{ijkl} = \nabla_k R_{lj} - \nabla_l R_{kj}$, si ha che il tensore di Ricci è un tensore di Codazzi se e solo se il tensore di Riemann ha divergenza nulla. In tal caso, per il lemma di Schur (5.20), si ha che la curvatura scalare è costante, dunque il tensore di Ricci è armonico se e solo se $\operatorname{div} \operatorname{Riem} = 0$. Una varietà (M, g) con $\operatorname{div} \operatorname{Riem} = 0$ si dice che ha *curvatura armonica* (o *tensore di Riemann armonico*). Chiaramente, se $\nabla \operatorname{Riem} = 0$ il tensore di Riemann è armonico (essendo parallelo), ma vi sono varietà con curvatura armonica e $\nabla \operatorname{Riem}$ non nullo (si vedano [20, 27]).

ESERCIZIO 5.6.14. Si mostri per ogni forma bilineare h su una varietà di dimensione $n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\operatorname{div} (g \otimes h)_{jkl} = \nabla^i (g \otimes h)_{ijkl} = \operatorname{div} h_k g_{jl} + \nabla_k h_{jl} - \operatorname{div} h_l g_{jk} - \nabla_l h_{jk}.$$

Ovviamente, si ha $\operatorname{div} (g \otimes g) = 0$.

ESERCIZIO 5.6.15. Si mostri che se (M, g) ha curvatura armonica, allora $\nabla R = 0$, il tensore di Ricci trace-free $\overset{\circ}{\operatorname{Ric}}$ e il tensore di Schouten S sono di Codazzi (quindi il tensore di Cotton C è nullo), infine $\operatorname{div} \operatorname{Weyl} = 0$.

Una varietà (M, g) con $\operatorname{div} \operatorname{Weyl} = 0$ si dice che ha *tensore di Weyl armonico*.

PROPOSIZIONE 5.6.16. Se $n \geq 4$, allora

$$\operatorname{div} \operatorname{Weyl}_{jkl} = \frac{n-3}{n-2} C_{klj}.$$

Dunque, se $n \geq 4$ una varietà riemanniana ha *tensore di Weyl armonico* se e solo se il suo *tensore di Cotton* è nullo.

DIMOSTRAZIONE. Usando le formule (5.17) e (5.19), calcoliamo

$$\begin{aligned}
\nabla^i W_{ijkl} &= \nabla_k R_{lj} - \nabla_l R_{kj} + \frac{\nabla^i R}{(n-1)(n-2)} (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) \\
&\quad - \frac{1}{(n-2)} \nabla^i (R_{ik} g_{jl} + R_{jl} g_{ik} - R_{il} g_{jk} - R_{jk} g_{il}) \\
&= \left(1 - \frac{1}{n-2}\right) (\nabla_k R_{lj} - \nabla_l R_{kj}) \\
&\quad + \left[\frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{2(n-2)} \right] (\nabla_k R g_{jl} - \nabla_l R g_{kj}) \\
&= \frac{n-3}{n-2} (\nabla_k S_{lj} - \nabla_l S_{kj}) \\
&= \frac{n-3}{n-2} C_{klj},
\end{aligned}$$

che è quanto volevamo dimostrare. \square

Abbiamo detto nella sezione precedente che in dimensione $n \geq 4$, una varietà (M, g) è LCF se e solo se il suo tensore di Weyl è nullo. In dimensione $n = 3$, dove il tensore di Weyl è sempre nullo, (M, g) è LCF se e solo se il suo tensore di Cotton è nullo (dimostreremo questi fatti nella Sezione 10.2). In dimensione $n = 2$ invece, ogni varietà è LCF.

PROPOSIZIONE 5.6.17. *Ogni varietà riemanniana 2-dimensionale è localmente conformalmente flat.*

DIMOSTRAZIONE. Diamo una dimostrazione basata sulle coordinate polari, ne vedremo un'altra alternativa nella Sezione 10.2.

Data la superficie (M, g) e un suo punto p , per l'Osservazione 4.2.5 possiamo trovare un punto $q \in M$ tale che $p \in B_\varepsilon(q) \setminus \{q\}$ con $\varepsilon < \text{inj}(q)$. Consideriamo allora delle coordinate polari centrate in $q \in M$ su $B_\varepsilon(q) \setminus \{q\}$, la metrica si può dunque scrivere localmente come

$$g = dr^2 + h_m,$$

dove h_m è la metrica indotta da g nel punto $m = \exp_q(rv)$ sulle circonferenze geodetiche $\exp_q(r\mathbb{S}_q^1)$. Poiché due metriche su \mathbb{S}^1 sono sempre isometriche se determinano la stessa lunghezza della circonferenza, cambiando coordinate per ogni $r \in (0, \varepsilon)$ fissato, possiamo scrivere

$$g = dr^2 + \lambda^2(r)\sigma = dr^2 + \lambda^2(r) d\theta^2,$$

dove σ è la metrica canonica su \mathbb{S}^1 e $\lambda : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione mai nulla, dunque in $B_\varepsilon(q) \setminus \{q\}$ (quindi anche localmente attorno a p) la superficie è un prodotto warped.

Consideriamo una soluzione f dell'equazione differenziale ordinaria

$$f'(t) = \frac{\lambda(f(t))}{t}$$

in $(0, \varepsilon)$, che quindi non ha mai derivata nulla, essendo λ mai nulla, cioè è un diffeomorfismo tra due intervalli di \mathbb{R} . Facendo il cambio di variabile $r = f(t)$, nelle nuove coordinate (t, θ) per $B_\varepsilon(q) \setminus \{q\}$ abbiamo allora

$$g = [f'(t)]^2 dt^2 + \lambda^2(f(t)) d\theta^2 = [f'(t)]^2 (dt^2 + t^2 d\theta^2)$$

che dunque è una metrica conforme a

$$\tilde{g} = dt^2 + t^2 d\theta^2.$$

Nell'Esempio 2.1.2 e nell'Esercizio 2.3.7 abbiamo visto che questa è la metrica euclidea su un aperto di \mathbb{R}^2 , quindi la tesi segue. \square

OSSERVAZIONE 5.6.18. Facendo riferimento all'Osservazione 5.6.5, un altro interessante funzionale dipendente dalla metrica su una varietà differenziabile M (di dimensione $n \geq 4$) è il *funzionale di Weyl*

$$\mathcal{W}(g) = \int_M |\text{Weyl}|_g^2 d\mu_g.$$

Si può mostrare che

$$\delta\mathcal{W}_g(h) = - \int_M B_g^{ij} h_{ij} d\mu_g,$$

per ogni forma bilineare h (si veda [9, Capitolo 4]), dove il tensore B che rappresenta l'equazione di Eulero–Lagrange di \mathcal{W} si dice *tensore di Bach* ed è definito come

$$B_{ij} = \frac{1}{n-3} \nabla^k \nabla^l W_{ikjl} + \frac{1}{n-2} R^{kl} W_{ikjl} = g^{km} g^{ls} \left(\frac{1}{n-3} \nabla_{kl}^2 W_{imjs} + \frac{1}{n-2} R_{kl} W_{imjs} \right) \quad (5.21)$$

(si noti che è un tensore nelle derivate covarianti seconde della curvatura, quindi in coordinate si esprime in derivate fino alla quarta della metrica).

Si può chiaramente scrivere il primo termine di B come una “doppia divergenza” del tensore di Weyl, dunque per la Proposizione 5.6.16 abbiamo la seguente espressione del tensore di Bach in termini del tensore di Cotton (della sua divergenza)

$$B_{ij} = \frac{1}{n-2} (\nabla^k C_{kij} + R^{kl} W_{ikjl}) = \frac{1}{n-2} (g^{km} \nabla_m C_{kij} + g^{ls} g^{km} R_{kl} W_{imjs}). \quad (5.22)$$

5.7. La formula di Bochner

PROPOSIZIONE 5.7.1 (Formula di Bochner). *Vale la formula*

$$\Delta |\nabla f|^2 = 2 |\nabla^2 f|^2 + 2R(\nabla f, \nabla f) + 2g(\nabla \Delta f, \nabla f), \quad (5.23)$$

per ogni $f \in C^\infty(M)$.

DIMOSTRAZIONE. Calcoliamo in una base coordinata

$$\nabla_i \nabla_j \nabla_k f - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f = R_{ijkl} \nabla^l f$$

$$\nabla_i \nabla_j \nabla_k f = \nabla_i \nabla_k \nabla_j f$$

quindi

$$\nabla_i \nabla_k \nabla_j f - \nabla_j \nabla_i \nabla_k f = R_{ijkl} \nabla^l f,$$

da cui, contraendo con g^{ik} otteniamo

$$\Delta \nabla_j f - \nabla_j \Delta f = R_{jl} \nabla^l f.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \Delta |\nabla f|^2 &= g^{ik} \nabla_{ik}^2 |\nabla f|^2 \\ &= g^{ik} \nabla_i \nabla_k g(\nabla f, \nabla f) \\ &= 2g^{ik} \nabla_i (g^{jm} \nabla_k \nabla_j f \nabla_m f) \\ &= 2g^{ik} g^{jm} \nabla_i \nabla_k \nabla_j f \nabla_m f + 2g^{ik} g^{jm} \nabla_k \nabla_j f \nabla_i \nabla_m f \\ &= 2g^{jm} \Delta \nabla_j f \nabla_m f + 2|\nabla^2 f|^2 \\ &= 2g^{jm} (\nabla_j \Delta f + R_{ml} \nabla^l f) \nabla_m f + 2|\nabla^2 f|^2 \\ &= 2g(\nabla \Delta f, \nabla f) + 2R(\nabla f, \nabla f) + 2|\nabla^2 f|^2. \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE 5.7.2. Nella dimostrazione della formula di Bochner abbiamo ottenuto la seguente utile formula di scambio delle derivate,

$$\Delta \nabla f = \nabla \Delta f + R(\nabla f, \cdot)^\sharp.$$

OSSERVAZIONE 5.7.3. Se λ è un autovalore di $-\Delta$ su una varietà riemanniana compatta (M, g) di dimensione n , allora $\lambda \geq 0$. Infatti, se $-\Delta f = \lambda f$ abbiamo

$$\lambda \int_M f^2 d\mu = - \int_M f \Delta f d\mu = \int_M |\nabla f|^2 d\mu,$$

da cui $\lambda \geq 0$.

Si noti che $\lambda = 0$ se e solo se f è costante.

TEOREMA 5.7.4 (Lichnerowicz). Sia (M, g) una varietà riemanniana compatta di dimensione n e sia $\lambda > 0$ un autovalore positivo di $-\Delta$. Se $\text{Ric} \geq k(n-1)g$ con $k > 0$ (nel senso delle forme bilineari, cioè $\text{Ric} - k(n-1)g$ è semidefinita positiva) allora $\lambda \geq nk$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $f \in C^\infty(M)$ tale che $-\Delta f = \lambda f$, calcoliamo, usando la formula di Bochner (5.23),

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2} \int_M \Delta |\nabla f|^2 d\mu \\
&= \int_M |\nabla^2 f|^2 + R(\nabla f, \nabla f) + g(\nabla \Delta f, \nabla f) d\mu \\
&\geq \int_M |\nabla^2 f|^2 d\mu + k(n-1) \int_M |\nabla f|^2 d\mu - \lambda \int_M |\nabla f|^2 d\mu \\
&\geq \frac{1}{n} \int_M (\Delta f)^2 d\mu + (k(n-1) - \lambda) \int_M |\nabla f|^2 d\mu \\
&= -\frac{\lambda}{n} \int_M f \Delta f d\mu + (k(n-1) - \lambda) \int_M |\nabla f|^2 d\mu \\
&= (nk - \lambda) \frac{n-1}{n} \int_M |\nabla f|^2 d\mu,
\end{aligned}$$

dove abbiamo applicato la disuguaglianza $|\nabla^2 f|^2 = |\text{Hess } f|^2 \geq (\Delta f)^2/n$. Le tesi segue. \square

OSSERVAZIONE 5.7.5. Obata [65] ha poi provato che se esiste effettivamente un autovalore $\lambda = kn$, allora la varietà è la sfera di raggio $1/\sqrt{k}$.

OSSERVAZIONE 5.7.6. Nella dimostrazione abbiamo visto che vale la disuguaglianza (di Bochner)

$$\Delta |\nabla f|^2 \geq 2(\Delta f)^2/n + 2R(\nabla f, \nabla f) + 2g(\nabla \Delta f, \nabla f)$$

Se dunque f è una funzione armonica, cioè $\Delta f = 0$, abbiamo

$$\Delta |\nabla f|^2 = 2|\nabla^2 f|^2 + 2R(\nabla f, \nabla f) \geq 2R(\nabla f, \nabla f).$$

5.8. Esempi

Mostreremo nel Teorema 10.1.1 che le uniche varietà riemanniane n -dimensionali, complete e semplicemente connesse, con curvatura sezionale costante uguale a $K \in \{0, 1, -1\}$ sono:

- \mathbb{R}^n se $K = 0$,
- \mathbb{S}^n se $K = 1$,
- \mathbb{H}^n se $K = -1$.

con le loro metriche canoniche (standard) definite nella Sezione 2.3. Mostriamo in questa sezione che effettivamente la loro curvatura è costante, come detto.

ESEMPIO 5.8.1 (Spazio euclideo). Riassumiamo tutto quello che sappiamo sullo spazio euclideo $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$, in coordinate standard:

- $g_{\text{eucl}} = \delta_{ij} dx^i \otimes dx^j = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2$, dunque $g_{ij} = \delta_{ij}$ e $g^{ij} = \delta^{ij}$

- la distanza riemanniana è data da $d(x, y) = |x - y|$ e lo spazio metrico (\mathbb{R}^n, d) è completo,
- $\Gamma_{ij}^k = 0$ per ogni $i, j, k, \in \{1, \dots, n\}$ e ogni punto $x \in \mathbb{R}^n$,
- il trasporto parallelo di un vettore lungo un cammino è la semplice traslazione, in particolare l'olonomia di $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$ è nulla,
- le geodetiche sono le rette, le semirette e i segmenti di retta e sono sempre minimali tra qualunque loro due punti, precisamente, la geodetica uscente da $x \in \mathbb{R}^n$ con velocità iniziale $v \in T_x M \simeq \mathbb{R}^n$ è data dalla curva $t \mapsto x + tv$ ed è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$,
- la mappa esponenziale è data da $\exp_x(tv) = x + tv$,
- il raggio di iniettività di ogni punto, quindi di $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$ è uguale a $+\infty$,
- $\text{Riem} = 0$, cioè $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$ ha curvatura costante nulla.

ESEMPIO 5.8.2 (Sfera). Consideriamo la sfera unitaria $(\mathbb{S}^n, g_{\text{can}})$ con la sua metrica canonica, vista come la sottovarietà $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$, le sfere di raggio diverso da 1 si ottengono moltiplicando la metrica per un fattore positivo (si veda l'Esempio 2.3.1). Abbiamo visto che in coordinate locali date dalle proiezioni stereografiche, per esempio dal polo Nord $N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$, la metrica g_{can} si scrive

$$g_{\alpha\beta} = \frac{4}{(|x_N|^2 + 1)^2} \delta_{\alpha\beta}$$

e abbiamo osservato che è un cambio conforme della metrica euclidea di \mathbb{R}^n , topologicamente omeomorfo alla sfera \mathbb{S}^n privata di un punto (il polo Nord in questo caso). Notiamo inoltre che \mathbb{S}^n è uno spazio compatto e completo con la distanza data dalla metrica riemanniana.

Nell'Esempio 3.2.10 abbiamo calcolato i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita, in queste coordinate,

$$\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = \frac{2}{|x_N|^2 + 1} (x_N^{\alpha} \delta_{\beta}^{\gamma} + x_N^{\beta} \delta_{\alpha}^{\gamma} - x_N^{\gamma} \delta_{\alpha\beta}).$$

Le geodetiche di $(\mathbb{S}^n, g_{\text{can}})$ sono archi di cerchi massimi (Esempio 4.1.8) e la mappa esponenziale è definita su tutto $T\mathbb{S}^n$. Osserviamo che il raggio di iniettività in ogni punto $p \in \mathbb{S}^n$ vale π , infatti le geodetiche più lunghe di π superano il punto antipodale a p e la mappa esponenziale su una palla $B_r(O_p) \subseteq T_p\mathbb{S}^n$ con $r > \pi$ non è iniettiva (si mostri per esercizio che \exp_p ristretta alla palla $B_{\pi}(O_p)$ è invece un diffeomorfismo). Dunque $\text{inj}(\mathbb{S}^n) = \pi$.

Calcoliamo ora la curvatura di $(\mathbb{S}^n, g_{\text{can}})$. Poiché abbiamo l'espressione sopra dei simboli di Christoffel, potremmo procedere usando la formula (5.3) (lo si faccia per esercizio), come faremo per lo spazio iperbolico nell'esempio che segue, ma usiamo invece il fatto che $(\mathbb{S}^n, g_{\text{can}})$ è una sottovarietà di $(\mathbb{R}^{n+1}, g_{\text{eucl}})$, con la metrica indotta e sfruttiamo invece la formula (3.9) per la sua derivata di Levi-Civita.

Sia $\{e_i\}$ la base canonica di \mathbb{R}^{n+1} , dunque e_1, \dots, e_n è una base del tangente alla

sfera nel polo Nord $N = (0, \dots, 0, 1)$ e

$$\tilde{e}_i = \pi^{\mathbb{S}^n}(e_i) = e_i^\top = e_i - \langle x, e_i \rangle x = e_i - x^i x^j e_j$$

sono dei campi che estendono localmente in \mathbb{R}^{n+1} attorno a N i vettori e_i a campi tangenti alla sfera. Calcoliamo allora, per $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} [\tilde{e}_i, \tilde{e}_j] &= \frac{\partial}{\partial x^i}(-x^j x^m e_m) - \frac{\partial}{\partial x^j}(-x^i x^m e_m) \\ &= -\delta_{ij} x^m e_m - x^j \delta_{im} e_m + \delta_{ij} x^m e_m + x^i \delta_{jm} e_m \\ &= x^i e_j - x^j e_i \\ &= 0, \end{aligned}$$

nel punto N , in quanto se $x = N = (0, \dots, 0, 1)$, abbiamo $x^i = x^j = x^k = 0$, essendo $i, j, k \neq n+1$.

$$\begin{aligned} \nabla_{\tilde{e}_i}^{\mathbb{S}^n} \tilde{e}_j &= (\nabla_{\tilde{e}_i}^{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{e}_j)^\top \\ &= (\nabla_{e_i}^{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{e}_j - x^i x^s \nabla_{e_s}^{\mathbb{R}^{n+1}} \tilde{e}_j)^\top \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x^i}(-x^j x^m) e_m + x^i x^s \frac{\partial}{\partial x^s}(x^j x^m) e_m \right)^\top \\ &= [(-\delta_{ij} x^m - \delta_{im} x^j + x^i x^s (\delta_{sj} x^m + \delta_{sm} x^j)) e_m]^\top \\ &= (-\delta_{ij} x - x^j e_i + 2x^i x^j x)^\top \\ &= -x^j \tilde{e}_i, \end{aligned}$$

per ogni $x \in \mathbb{S}^n$ (abbiamo usato il fatto che in tali punti si ha $x^\top = 0$). Dunque, nel punto N si ha

$$\nabla_{\tilde{e}_k}^{\mathbb{S}^n} \nabla_{\tilde{e}_i}^{\mathbb{S}^n} \tilde{e}_j = \nabla_{\tilde{e}_k}^{\mathbb{S}^n} (-x^j \tilde{e}_i) = -\delta_{jk} \tilde{e}_i - x^j \nabla_{\tilde{e}_k}^{\mathbb{S}^n} \tilde{e}_i = -\delta_{jk} e_i,$$

da cui

$$R(\tilde{e}_i, \tilde{e}_k) \tilde{e}_j = -\delta_{jk} e_i + \delta_{ji} e_k.$$

Segue che

$$R_{ikjl} = \delta_{ji} \delta_{kl} - \delta_{jk} \delta_{il},$$

essendo $\{e_i\}$ una base ortonormale di $T_N \mathbb{S}^n$, cioè $\text{Riem}_N = g_N \otimes g_N / 2$. Quindi tutte le curvatures sezionali dei piani in $T_N \mathbb{S}^n$ sono uguali a 1. Avendo \mathbb{S}^n , per ogni coppia di suoi punti un'isometria in se stessa che manda il primo punto nel secondo, tutte le curvatures sezionali di tutti i piani contenuti in ogni suo spazio tangente sono uguali a 1 e \mathbb{S}^n ha curvatura costante uguale a 1.

Si ha dunque $R_{ijkl} = g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}$, cioè $\text{Riem} = g \otimes g / 2$ e

$$R_{ij} = (n-1) \delta_{ij}, \text{ cioè Ric} = (n-1)g \quad \text{e} \quad R = n(n-1).$$

ESEMPIO 5.8.3 (Spazio iperbolico). Nell'Esempio 2.3.2 abbiamo definito lo spazio iperbolico $(\mathbb{H}^n, g_{\text{can}})$ come il semispazio di \mathbb{R}^n ,

$$\mathbb{H}^n = \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n > 0\}$$

con la metrica

$$g_{\text{can}} = \frac{1}{(x^n)^2} g_{\text{eucl}} = \frac{1}{(x^n)^2} \sum_{i=1}^n dx^i \otimes dx^i,$$

che è chiaramente conforme a quella di \mathbb{R}^n ristretta al semispazio \mathbb{H}^n . Come per le sfere omotetiche a \mathbb{S}^n , le proprietà degli spazi (\mathbb{H}_c^n, g^c) , omotetici a $(\mathbb{H}^n, g_{\text{can}})$ si ottengono usando le relazioni (5.11) (ricordiamo che i simboli di Christoffel non cambiano per omotetia della metrica).

Nell'Esempio 3.2.10 abbiamo calcolato i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita,

$$\Gamma_{ij}^k = -\frac{1}{x^n} (\delta_i^n \delta_j^k + \delta_j^n \delta_i^k - \delta_{ij} \delta^{kn}),$$

osservando che se esattamente uno o tutti e tre gli indici i, j, k sono diversi da n , si ha $\Gamma_{ij}^k = 0$. Nei restanti casi si ha

$$\Gamma_{ij}^n = \frac{\delta_{ij}}{x^n} \quad \Gamma_{in}^k = -\frac{\delta_i^k}{x^n} \quad \Gamma_{nn}^n = -\frac{1}{x^n},$$

per ogni $i, j \neq n$.

Possiamo allora ricavare il tensore di curvatura per mezzo della formula (5.3) e calcolare le curvatures sezionali, essendo $g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2 = g_{ii}g_{nn} - g_{in}^2 = 1/(x^n)^4$,

$$R_{1212} = \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^2}{\partial x^2} - \frac{\partial \Gamma_{21}^2}{\partial x^1} + \Gamma_{11}^n \Gamma_{2n}^2 - \Gamma_{21}^n \Gamma_{1n}^2 \right) / (x^n)^2 = \Gamma_{11}^n \Gamma_{2n}^2 / (x^n)^2 = -1 / (x^n)^4$$

e

$$\begin{aligned} R_{1n1n} &= \left(\frac{\partial \Gamma_{11}^n}{\partial x^n} - \frac{\partial \Gamma_{n1}^n}{\partial x^1} + \Gamma_{11}^n \Gamma_{nn}^n - \Gamma_{n1}^1 \Gamma_{11}^n - \Gamma_{n1}^n \Gamma_{1n}^n \right) / (x^n)^2 \\ &= \left(-\frac{1}{(x^n)^2} + \Gamma_{11}^n \Gamma_{nn}^n - \Gamma_{n1}^1 \Gamma_{11}^n \right) / (x^n)^2 \\ &= -1 / (x^n)^4, \end{aligned}$$

da cui $\text{Sec}(\langle e_1, e_2 \rangle) = \text{Sec}(\langle e_1, e_n \rangle) = -1$ in ogni punto di \mathbb{H}^n . Analogamente si ha $R_{ijij} = R_{inin} = -1/(x^n)^4$ e $\text{Sec}(\langle e_i, e_j \rangle) = \text{Sec}(\langle e_i, e_n \rangle) = -1$, per ogni $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, quindi $(\mathbb{H}^n, g_{\text{can}})$ ha curvatura costante -1 , in quanto è omogeneo e isotropo (Osservazione 2.3.3), dunque per ogni punto $y \in \mathbb{H}^n$ e piano $\pi \in T_y \mathbb{H}^n$ esiste un'isometria $f : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{H}^n$ tale che $f(x) = y$ e $df_x(\langle e_1, e_2 \rangle) = \pi$, da cui $\text{Sec}(\pi) = -1$. Segue che $R_{ijkl} = -(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk})$, cioè $\text{Riem} = -g \otimes g/2$ e

$$R_{ij} = -\frac{n-1}{(x^n)^2} \delta_{ij}, \text{ cioè Ric} = -(n-1)g \quad \text{e} \quad \text{R} = -n(n-1).$$

La varietà riemanniana $(\mathbb{H}^n, g_{\text{can}})$ è completa e lo studio delle geodetiche è ben noto: fissiamo $x \in \mathbb{H}^n$ e una direzione $v \in T_x \mathbb{H}^n \simeq \mathbb{R}^n$. Vogliamo calcolare la traiettoria della geodetica γ uscente da x con velocità v , abbiamo, per la formula (4.2) e l'espressione dei simboli di Christoffel vista sopra,

$$\begin{cases} \ddot{\gamma}^i = 2\dot{\gamma}^n \dot{\gamma}^i / \gamma^n, & \text{per } i = 1, \dots, n-1 \\ \ddot{\gamma}^n = ((\dot{\gamma}^n)^2 - \sum_{k=1}^{n-1} (\dot{\gamma}^k)^2) / \gamma^n \end{cases} \quad (5.24)$$

con $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = v$.

Dobbiamo distinguere due casi: se v è parallelo all'asse x^n allora si vede facilmente che la soluzione (unica) γ deve soddisfare $\gamma^i = x^i$ per $i = 1, \dots, n-1$ e

$$\ddot{\gamma}^n = (\dot{\gamma}^n)^2 / \gamma^n,$$

che ha la soluzione $\gamma^n(t) = x^n e^{tv^n/x^n}$. Dunque γ è una semiretta parallela all'asse x^n .

Supponiamo adesso che v non sia parallelo all'asse x^n . Sia π il 2-piano affine di \mathbb{R}^n passante per x individuato dai vettori $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ e v , proviamo che il supporto di γ è la semicirconferenza ottenuta intersecando con \mathbb{H}^n l'unica circonferenza contenuta in π , passante per x tangente a v e che incontra l'iperpiano $x^n = 0$ formando un angolo retto.

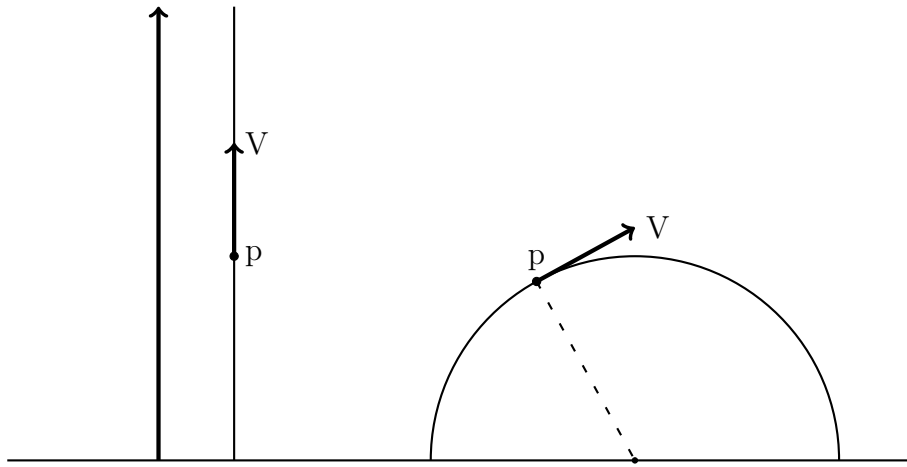


FIGURA 5.2

Prima di procedere con la dimostrazione, osserviamo che la metrica g_{can} è invariante rispetto alle isometrie euclidee di \mathbb{H}^n che non variano l'ultima componente. Di conseguenza non è restrittivo assumere $x = (0, \dots, 0, x^n)$ e $v = (v^1, 0, \dots, 0, v^n)$. Poiché la "traiettoria" della geodetica γ è invariante rispetto alla lunghezza del vettore v , possiamo anche assumere $v = (1, 0, \dots, 0, \lambda)$, per un

certo $\lambda \in \mathbb{R}$. Ci siamo dunque di fatto ridotti al caso del *piano iperbolico* di coordinate $(w, z) = (w, 0, \dots, 0, z)$ soltanto. La semicirconferenza descritta sopra è allora data dai punti $y \in \mathbb{H}^n$ tali che $y^i = 0$ per $i \in \{2, \dots, n-1\}$ e

$$(y^1 - \lambda x^n)^2 + (y^n)^2 = (x^n)^2(1 + \lambda^2),$$

mentre una curva γ parametrizzata proporzionalmente alla lunghezza d'arco (rispetto alla metrica g_{can}) che la descrive, ponendo $w(t) = \gamma^1(t)$ e $z(t) = \gamma^n(t)$, deve soddisfare

$$(w - \lambda x^n)^2 + z^2 = (x^n)^2(1 + \lambda^2) \quad \text{e} \quad \dot{w}^2 + \dot{z}^2 = z^2(1 + \lambda^2). \quad (5.25)$$

Si tratta quindi di utilizzare queste due formule per provare che la curva

$$\gamma(t) = (w(t), 0, \dots, 0, z(t))$$

soddisfa le equazioni (5.24), per delle funzioni $w, z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Le equazioni per γ^i con $i \in \{2, \dots, n-1\}$, sono automaticamente soddisfatte, dunque le equazioni che restano da verificare sono

$$\begin{cases} z\ddot{w} = 2\dot{w}\dot{z} \\ z\ddot{z} = \dot{z}^2 - \dot{w}^2 \end{cases} \quad (5.26)$$

Supponiamo che γ percorra la semicirconferenza in senso antiorario, dunque assumiamo $\dot{w} > 0$ e che siamo nel primo quarto di circonferenza, quindi $\dot{z} > 0$ e $w < \lambda x^n$, l'analisi per il secondo quarto è analoga.

Riscriviamo la prima equazione (5.25) come

$$z = \sqrt{(x^n)^2(1 + \lambda^2) - (\lambda x^n - w)^2}, \quad (5.27)$$

deriviamo e prendiamo il quadrato, ottenendo

$$\dot{z}^2 = \frac{(\lambda x^n - w)^2 \dot{w}^2}{(x^n)^2(1 + \lambda^2) - (\lambda x^n - w)^2} = \frac{(\lambda x^n - w)^2 \dot{w}^2}{z^2}. \quad (5.28)$$

Sostituiamo \dot{w}^2 utilizzando la seconda equazione (5.25) e semplifichiamo, ottenendo:

$$\dot{w}^2 = \frac{z^2}{(x^n)^2} ((x^n)^2(1 + \lambda^2) - (\lambda x^n - w)^2) = \frac{z^4}{(x^n)^2},$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato l'equazione (5.27). Quindi la quantità \dot{w}/z^2 è costante uguale a $1/x^n$. Di conseguenza, derivandola otteniamo la prima delle equazioni (5.26), cioè $\dot{w}z - 2\dot{w}\dot{z} = 0$. Dalla formula (5.28) abbiamo poi l'uguaglianza

$$z\dot{z} = (\lambda x^n - w)\dot{w}$$

che una volta derivata e sostituendo \ddot{w} per la prima delle equazioni (5.26), diventa

$$z\ddot{z} + \dot{z}^2 = (\lambda x^n - w)\ddot{w} - \dot{w}^2 = 2\frac{(\lambda x^n - w)}{z}\dot{w}\dot{z} - \dot{w}^2$$

e di nuovo per l'equazione (5.28), concludiamo

$$z\ddot{z} + \dot{z}^2 = 2\dot{z}^2 - \dot{w}^2,$$

che è la seconda equazione (5.28).

ESERCIZIO 5.8.4. Si mostri che nel modello del disco di Poincaré (si veda l'esempio 2.3.2) del piano iperbolico \mathbb{H}^2 , le curve geodetiche sono i diametri oppure gli archi di circonferenza che incontrano il bordo formando un angolo retto. Si descrivano poi le geodetiche di \mathbb{H}^n nell'analogo modello.

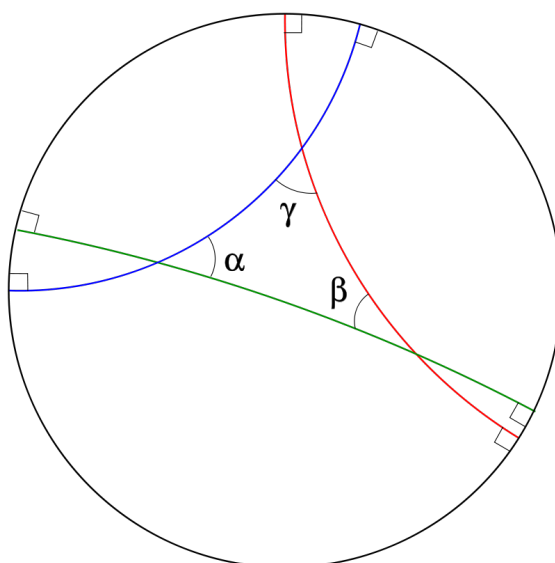


FIGURA 5.3

ESERCIZIO 5.8.5. Si calcolino i vari tensori/operatori di curvatura e le curvature sezionali dei prodotti riemanniani di spazi a curvatura costante.

ESEMPIO 5.8.6 (Metriche conformi). Consideriamo una varietà riemanniana (M, g) e un suo cambio conforme della metrica. Per comodità nei conti che seguono, si preferisce usualmente descrivere una metrica \tilde{g} conforme a g come $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$, per una funzione $\varphi \in C^\infty(M)$. Si noti che dunque $\tilde{g}^{ij} = e^{-2\varphi}g^{ij}$. Vediamo, nella seguente proposizione, come le quantità geometriche di \tilde{g} si esprimono in termini di quelle di g e delle derivate di φ (rispetto alla connessione di Levi-Civita ∇ di g).

PROPOSIZIONE 5.8.7. Siano (M, g) una varietà riemanniana e $\varphi \in C^\infty(M)$. Allora la metrica conforme $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$ ha:

(1) *Connessione di Levi-Civita*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + d\varphi(X)Y + d\varphi(Y)X - g(X, Y)\nabla\varphi$$

(2) *Tensore di Riemann*

$$\widetilde{\text{Riem}} = e^{2\varphi} \left\{ \text{Riem} - [\nabla^2 \varphi - d\varphi \otimes d\varphi + |\nabla\varphi|^2 g/2] \otimes g \right\}$$

(3) *Tensore di Ricci*

$$\widetilde{\text{Ric}} = \text{Ric} - (n-2)(\nabla^2 \varphi - d\varphi \otimes d\varphi) - (\Delta\varphi + (n-2)|\nabla\varphi|^2)g$$

(4) *Curvatura scalare*

$$\widetilde{\text{R}} = e^{-2\varphi} (\text{R} - 2(n-1)\Delta\varphi - (n-2)(n-1)|\nabla\varphi|^2)$$

(5) *Tensore di Weyl*

$$\widetilde{\text{Weyl}} = e^{2\varphi} \text{Weyl}$$

dove $\nabla\varphi$, $|\nabla\varphi|$ e $\nabla^2\varphi$ sono rispettivamente il gradiente, la sua norma e l'hessiano di φ rispetto alla metrica g .

DIMOSTRAZIONE. Per la formula (3.8) e $\tilde{g}^{ij} = e^{-2\varphi} g^{ij}$, abbiamo i simboli di Christoffel

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k + \delta_j^k \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \delta_i^k \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} - g^{kl} \frac{\partial\varphi}{\partial x^l} g_{ij},$$

da cui otteniamo immediatamente la formula per la connessione di Levi-Civita di (M, \tilde{g}) . Segue allora che il tensore di Riemann è dato da

$$\widetilde{\text{Riem}} = e^{2\varphi} (\text{Riem} - A \otimes g)$$

con

$$A = \nabla^2 \varphi - \nabla\varphi \otimes \nabla\varphi + |\nabla\varphi|^2 g/2.$$

Infatti,

$$\begin{aligned} & \tilde{\Gamma}_{ik}^m \tilde{\Gamma}_{jm}^l - \tilde{\Gamma}_{jk}^m \tilde{\Gamma}_{im}^l \\ &= \left(\Gamma_{ik}^m + \delta_k^m \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \delta_i^m \frac{\partial\varphi}{\partial x^k} - g^{mp} \frac{\partial\varphi}{\partial x^p} g_{ik} \right) \left(\Gamma_{jm}^l + \delta_m^l \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + \delta_j^l \frac{\partial\varphi}{\partial x^m} - g^{lq} \frac{\partial\varphi}{\partial x^q} g_{jm} \right) \\ & \quad - \left(\Gamma_{jk}^m + \delta_k^m \frac{\partial\varphi}{\partial x^j} + \delta_j^m \frac{\partial\varphi}{\partial x^k} - g^{mp} \frac{\partial\varphi}{\partial x^p} g_{jk} \right) \left(\Gamma_{im}^l + \delta_m^l \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} + \delta_i^l \frac{\partial\varphi}{\partial x^m} - g^{lq} \frac{\partial\varphi}{\partial x^q} g_{im} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{jk}^l}{\partial x^i} \\ &= \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \delta_k^l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} + \delta_i^l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial g^{lp}}{\partial x^j} \frac{\partial \varphi}{\partial x^p} g_{ik} - g^{lp} \frac{\partial \varphi}{\partial x^p} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - g^{lp} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^p} g_{ik} \\ & \quad - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \delta_k^l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^i} - \delta_j^l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial g^{lp}}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^p} g_{jk} + g^{lp} \frac{\partial \varphi}{\partial x^p} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + g^{lp} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^p} g_{jk}. \end{aligned}$$

Dunque, in coordinate normali di (M, g) in un generico punto, si ha $\Gamma_{ij}^k = 0$ e

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ik}^m \tilde{\Gamma}_{jm}^l - \tilde{\Gamma}_{jk}^m \tilde{\Gamma}_{im}^l &= \left(\delta_k^m \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \delta_i^m \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \delta_{ik} \right) \left(\delta_m^l \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + \delta_j^l \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} \delta_{jm} \right) \\ &\quad - \left(\delta_k^m \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} + \delta_j^m \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} \delta_{jk} \right) \left(\delta_m^l \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} + \delta_i^l \frac{\partial \varphi}{\partial x^m} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^l} \delta_{im} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{jk}^l}{\partial x^i} &= \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} + \delta_k^l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} + \delta_i^l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^l} \delta_{ik} \\ &\quad - \frac{\partial \Gamma_{jk}^l}{\partial x^i} - \delta_k^l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^j \partial x^i} - \delta_j^l \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^l} \delta_{jk}. \end{aligned}$$

Sviluppando i conti, concludiamo

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ijkl} &= \tilde{g}_{rl} \tilde{R}_{ijk}^r \\ &= e^{2\varphi} \left[R_{ijkl} + \delta_{jl} \nabla_i \varphi \nabla_k \varphi + \delta_{ik} \nabla_j \varphi \nabla_l \varphi - \delta_{il} \nabla_j \varphi \nabla_k \varphi - \delta_{jk} \nabla_i \varphi \nabla_l \varphi \right. \\ &\quad \left. - (\delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}) |\nabla \varphi|^2 - \delta_{jl} \nabla_{ik}^2 \varphi - \delta_{ik} \nabla_{jl}^2 \varphi + \delta_{il} \nabla_{jk}^2 \varphi + \delta_{jk} \nabla_{il}^2 \varphi \right] \\ &= e^{2\varphi} \left[R_{ijkl} - (\nabla^2 \varphi \otimes g)_{ijkl} + ((d\varphi \otimes d\varphi) \otimes g)_{ijkl} - |\nabla \varphi|^2 (g \otimes g)_{ijkl} / 2 \right] \\ &= e^{2\varphi} (R_{ijkl} - (A \otimes g)_{ijkl}). \end{aligned}$$

Per il tensore di Ricci abbiamo allora, per l'Esercizio 5.3.6,

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ik} &= \tilde{g}^{jl} \tilde{R}_{ijkl} \\ &= g^{jl} (R_{ijkl} - (A \otimes g)_{ijkl}) \\ &= R_{ik} - (n-2) A_{ik} - \text{tr } A g_{ik} \\ &= R_{ik} - (n-2) \nabla_{ik}^2 \varphi + (n-2) \nabla_i \varphi \nabla_k \varphi - (n-2) |\nabla \varphi|^2 g_{ik} / 2 \\ &\quad - (\Delta \varphi - |\nabla \varphi|^2 + n |\nabla \varphi|^2 / 2) g_{ik} \\ &= R_{ik} - (n-2) \nabla_{ik}^2 \varphi + (n-2) \nabla_i \varphi \nabla_k \varphi - (\Delta \varphi + (n-2) |\nabla \varphi|^2) g_{ik}, \end{aligned}$$

dunque per la curvatura scalare,

$$\tilde{R} = \tilde{g}^{ik} \tilde{R}_{ik} = e^{-2\varphi} (R - 2(n-1) \text{tr } A) = e^{-2\varphi} (R - 2(n-1) \Delta \varphi - (n-2)(n-1) |\nabla \varphi|^2).$$

Infine, calcoliamo il tensore di Weyl,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\text{Weyl}} &= \widetilde{\text{Riem}} + \frac{\widetilde{\text{R}}}{2(n-1)(n-2)} \widetilde{g} \otimes \widetilde{g} - \frac{\widetilde{\text{Ric}} \otimes \widetilde{g}}{n-2} \\
&= e^{2\varphi} \{ \text{Riem} - A \otimes g \} + e^{2\varphi} \frac{\text{R} - 2(n-1) \text{tr} A}{2(n-1)(n-2)} g \otimes g \\
&\quad - \frac{e^{2\varphi}}{n-2} \{ \text{Ric} \otimes g - (n-2) A \otimes g - \text{tr} A g \otimes g \} \\
&= e^{2\varphi} \left(\text{Riem} + \frac{\text{R}}{2(n-1)(n-2)} g \otimes g - \frac{\text{Ric} \otimes g}{n-2} \right) \\
&= e^{2\varphi} \text{Weyl}.
\end{aligned}$$

□

Si usa dunque dire che il tensore di Weyl è *conformalmente invariante*, in quanto la sua versione (1, 3) data da $\widetilde{W}_{ijk}^l = W_{ijkm} g^{ml}$ soddisfa

$$\widetilde{W}_{ijk}^l = \widetilde{W}_{ijkm} \widetilde{g}^{ml} = W_{ijkm} g^{ml} = W_{ijk}^l.$$

Avendo ogni spazio flat (come \mathbb{R}^n con la metrica canonica) tensore di Riemann nullo, ha anche tensore di Weyl nullo. Dunque, ogni spazio LCF, avendo localmente attorno a ogni suo punto un cambio conforme della metrica che lo rende flat, deve avere tensore di Weyl nullo. Come detto, vedremo il viceversa di questo fatto nella Sezione 10.2.

ESERCIZIO 5.8.8. Si calcolino i tensori di curvatura della sfera e dello spazio iperbolico, usando il fatto che le loro metriche sono localmente conformi alla metrica canonica di \mathbb{R}^n .

ESEMPIO 5.8.9 (Metriche warped). Calcoliamo la curvatura della varietà (M, g) dove $M = I \times N$ e $g = dt^2 + h^2(t, p)\sigma$ con σ metrica su N e $h : I \times N \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione positiva su un intervallo di \mathbb{R} per N . Ovviamente se la funzione h non dipende da $p \in N$, si ha la metrica warped $g_{\text{eucl}} \times^{h^2} \sigma$ su $I \times N$ (si veda l'Esempio 2.3.4), mentre se $(N, \sigma) = (\mathbb{S}^n, g_{\text{can}})$ stiamo descrivendo localmente (M, g) in coordinate polari, per il Lemma di Gauss (si veda la Sezione 4.2 e il Corollario 4.2.13).

Calcoliamo dunque,

$$g_{tt} = g^{tt} = 1 \quad g_{it} = g^{it} = 0 \quad g_{ij} = h^2 \sigma^{ij} \quad g^{ij} = h^{-2} \sigma^{ij}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{tt}^t &= 0 & \Gamma_{tt}^k &= 0 & \Gamma_{ti}^t &= 0 \\
\Gamma_{ij}^t &= -\sigma_{ij}h\partial_t h = -\frac{\partial_t h}{h}g_{ij} \\
\Gamma_{it}^k &= \frac{\partial_t h}{h}\delta_i^k \\
\Gamma_{ij}^k &= \sigma_{ij}^k + \frac{1}{h}(\delta_j^k\partial_i h + \delta_i^k\partial_j h - \sigma^{ks}\sigma_{ij}\partial_s h)
\end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con σ_{ij}^k i simboli di Christoffel della metrica σ su N . Per la formula (5.3), supponendo di essere in coordinate normali rispetto alla metrica σ attorno a un punto $p \in N$ (cioè $\sigma_{ij}^k = 0$), abbiamo

$$\begin{aligned}
R_{tttt} &= R_{ittt} = 0 \\
R_{itkt} &= (\partial_i\Gamma_{tt}^m - \partial_t\Gamma_{it}^m + \Gamma_{tt}^q\Gamma_{qi}^m - \Gamma_{it}^q\Gamma_{qt}^m)g_{mk} \\
&= -(\partial_t\Gamma_{it}^m + \Gamma_{it}^q\Gamma_{qt}^m)g_{mk} \\
&= -\left(\partial_t\frac{\partial_t h}{h}\delta_i^m + \frac{\partial_t h}{h}\delta_i^q\frac{\partial_t h}{h}\delta_q^m\right)g_{mk} \\
&= -\left[\partial_t^2 \log h + \left(\frac{\partial_t h}{h}\right)^2\right]g_{ik} \\
&= -\frac{\partial_t^2 h}{h}g_{ik} \\
&= -h\partial_t^2 h\sigma_{ik} \\
R_{ijkt} &= -R_{ijtk} \\
&= -\partial_i\Gamma_{jk}^t + \partial_j\Gamma_{ik}^t - \Gamma_{jk}^l\Gamma_{il}^t + \Gamma_{ik}^l\Gamma_{jl}^t \\
&= h\partial_{it}^2 h\sigma_{jk} - h\partial_{jt}^2 h\sigma_{ik} + \partial_t h(\sigma_{ik}\partial_j h - \sigma_{jk}\partial_i h) \\
&= h(\sigma_{jk}\text{Hess}_{it}h - \sigma_{ik}\text{Hess}_{jt}h) \\
&= \frac{g_{jk}\text{Hess}_{it}h - g_{ik}\text{Hess}_{jt}h}{h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{ijkl} &= (\partial_i \Gamma_{jl}^m - \partial_j \Gamma_{il}^m + \Gamma_{jl}^q \Gamma_{qi}^m - \Gamma_{il}^q \Gamma_{qj}^m) g_{mk} + (\Gamma_{jl}^t \Gamma_{ti}^m - \Gamma_{il}^t \Gamma_{tj}^m) g_{mk} \\
&= h^2 R_{ijkl}^\sigma + \left(\partial_i \left[\frac{1}{h} (\delta_j^m \partial_l h + \delta_l^m \partial_j h - \sigma^{ms} \sigma_{jl} \partial_s h) \right] \right. \\
&\quad \left. - \partial_j \left[\frac{1}{h} (\delta_i^m \partial_l h + \delta_l^m \partial_i h - \sigma^{ms} \sigma_{il} \partial_s h) \right] \right) g_{mk} \\
&\quad + \frac{1}{h^2} \{ (\delta_j^q \partial_l h + \delta_l^q \partial_j h - \sigma^{qs} \sigma_{jl} \partial_s h) (\delta_q^m \partial_i h + \delta_i^m \partial_q h - \sigma^{ms} \sigma_{qi} \partial_s h) \\
&\quad - (\delta_i^q \partial_l h + \delta_l^q \partial_i h - \sigma^{qs} \sigma_{il} \partial_s h) (\delta_q^m \partial_j h + \delta_j^m \partial_q h - \sigma^{ms} \sigma_{qj} \partial_s h) \} g_{mk} \\
&\quad - (\partial_t h)^2 (\sigma_{jl} g_{ik} - \sigma_{il} g_{jk}) \\
&= h^2 R_{ijkl}^\sigma - \frac{1}{h^2} (\partial_i h [\delta_j^m \partial_l h + \delta_l^m \partial_j h - \sigma^{ms} \sigma_{jl} \partial_s h] \\
&\quad - \partial_j h [\delta_i^m \partial_l h + \delta_l^m \partial_i h - \sigma^{ms} \sigma_{il} \partial_s h]) g_{mk} \\
&\quad + \frac{1}{h} (\delta_j^m \partial_{il}^2 h + \delta_l^m \partial_{ij}^2 h - \sigma^{ms} \sigma_{jl} \partial_{is}^2 h - \delta_i^m \partial_{jl}^2 h - \delta_l^m \partial_{ji}^2 h - \sigma^{ms} \sigma_{il} \partial_{js}^2 h) g_{mk} \\
&\quad + \frac{1}{h^2} (g_{ik} \partial_j h \partial_l h + g_{jl} \partial_i h \partial_k h - g_{il} \partial_j h \partial_k h - g_{jk} \partial_i h \partial_l h - |\nabla^\sigma h|_g^2 (g_{jl} g_{ik} - g_{il} g_{jk})) \\
&\quad - h^2 \frac{(\partial_t h)^2}{2} (\sigma \otimes \sigma)_{ijkl} \\
&= h^2 R_{ijkl}^\sigma - \frac{1}{h^2} (g_{jk} \partial_i h \partial_l h - g_{jl} \partial_i h \partial_k h - g_{ik} \partial_j h \partial_l h + g_{il} \partial_j h \partial_k h) \\
&\quad + \frac{1}{h} (g_{jk} \partial_{il}^2 h - g_{jl} \partial_{ik}^2 h - g_{ik} \partial_{jl}^2 h + g_{il} \partial_{jk}^2 h) \\
&\quad + \frac{1}{h^2} (g_{ik} \partial_j h \partial_l h + g_{jl} \partial_i h \partial_k h - g_{il} \partial_j h \partial_k h - g_{jk} \partial_i h \partial_l h - |\nabla^\sigma h|_g^2 (g_{jl} g_{ik} - g_{il} g_{jk})) \\
&\quad - h^2 \frac{(\partial_t h)^2}{2} (\sigma \otimes \sigma)_{ijkl} \\
&= h^2 R_{ijkl}^\sigma - \frac{|\nabla^\sigma h|_g^2 + (\partial_t h)^2}{2h^2} (g \otimes g)_{ijkl} + \frac{1}{h} (g_{jk} \partial_{il}^2 h - g_{jl} \partial_{ik}^2 h - g_{ik} \partial_{jl}^2 h + g_{il} \partial_{jk}^2 h) \\
&\quad + \frac{2}{h^2} (g_{ik} \partial_j h \partial_l h - g_{il} \partial_j h \partial_k h - g_{jk} \partial_i h \partial_l h + g_{jl} \partial_i h \partial_k h),
\end{aligned}$$

dove $\nabla^\sigma h$ è il gradiente di h rispetto soltanto a N .

Poiché i simboli di Christoffel σ_{ij}^k relativi a (N, σ) sono nulli, possiamo scrivere

$$R_{ijkl} = h^2 R_{ijkl}^\sigma - [|\nabla^\sigma h|_\sigma^2 + h^2 (\partial_t h)^2] (\sigma \otimes \sigma)_{ijkl} / 2 - h \left[\left(\text{Hess}^\sigma h - 2 \frac{dh^\sigma \otimes dh^\sigma}{h} \right) \otimes \sigma \right]_{ijkl}.$$

In particolare, se (N, σ) ha curvatura costante K , si ha $\text{Riem}^\sigma = K(\sigma \otimes \sigma) / 2$ e

$$R_{ijkl} = [Kh^2 - |\nabla^\sigma h|_\sigma^2 - h^2 (\partial_t h)^2] (\sigma \otimes \sigma)_{ijkl} / 2 - h \left[\left(\text{Hess}^\sigma h - 2 \frac{dh^\sigma \otimes dh^\sigma}{h} \right) \otimes \sigma \right]_{ijkl}.$$

Tracciamo con g per ottenere il tensore di Ricci, se N è $(n - 1)$ -dimensionale, abbiamo

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= g^{ik} R_{itkt} = -g^{ik} \frac{\partial_t^2 h}{h} g_{ik} = -(n-1) \frac{\partial_t^2 h}{h} \\
R_{it} &= g^{jl} R_{ijtl} + g^{tt} R_{ittt} = -g^{jl} \frac{g_{jl} \text{Hess}_{it} h - g_{il} \text{Hess}_{jt} h}{h} = -(n-2) \frac{\text{Hess}_{it} h}{h} \\
R_{ik} &= R_{itkt} + g^{jl} R_{ijkl} \\
&= -\frac{\partial_t^2 h}{h} g_{ik} + g^{jl} (h^2 R_{ijkl}^\sigma - (|\nabla^\sigma h|_\sigma^2 + h^2 (\partial_t h)^2) (\sigma \otimes \sigma)_{ijkl} / 2) \\
&\quad - h g^{jl} \left[\left(\text{Hess}^\sigma h - 2 \frac{dh^\sigma \otimes dh^\sigma}{h} \right) \otimes \sigma \right]_{ijkl} \\
&= R_{ik}^\sigma - \frac{\partial_t^2 h}{h} g_{ik} - (n-2) (\partial_t h)^2 \sigma_{ik} - (n-2) \frac{|\nabla^\sigma h|_\sigma^2}{h^2} \sigma_{ik} - \frac{\Delta^\sigma h}{h} \sigma_{ik} \\
&\quad + 2 \frac{|\nabla^\sigma h|_\sigma^2}{h^2} \sigma_{ik} - (n-3) \left(\frac{\text{Hess}_{ik}^\sigma h}{h} - 2 \frac{dh_i^\sigma dh_k^\sigma}{h^2} \right) \\
&= R_{ik}^\sigma - \frac{\partial_t^2 h}{h} g_{ik} - (n-2) (\partial_t h)^2 \sigma_{ik} - (n-4) \frac{|\nabla^\sigma h|_\sigma^2}{h^2} \sigma_{ik} - \frac{\Delta^\sigma h}{h} \sigma_{ik} \\
&\quad - (n-3) \left(\frac{\text{Hess}_{ik}^\sigma h}{h} - 2 \frac{dh_i^\sigma dh_k^\sigma}{h^2} \right)
\end{aligned}$$

e contraendo ancora per ottenere la curvatura scalare

$$\begin{aligned}
R &= \frac{R^\sigma}{h^2} - 2(n-1) \frac{\partial_t^2 h}{h} - (n-1)(n-2) \frac{(\partial_t h)^2}{h^2} \\
&\quad - (n-2)(n-5) \frac{|\nabla^\sigma h|_\sigma^2}{h^4} - 2(n-2) \frac{\Delta^\sigma h}{h^3}
\end{aligned}$$

Se la funzione h non dipende da $p \in N$, cioè g è la metrica warped $g_{\text{eucl}} \times^{h^2} \sigma$ su $I \times N$, le formule si semplificano notevolmente:

$$\begin{aligned}
R_{tttt} &= R_{ittt} = 0 \\
R_{itkt} &= -hh'' \sigma_{ik} \\
R_{ijkt} &= -R_{ijtk} = 0 \\
R_{ijkl} &= h^2 R_{ijkl}^\sigma - h^2 (h')^2 (\sigma \otimes \sigma)_{ijkl} / 2 \\
R_{tt} &= -(n-1) \frac{h''}{h} \\
R_{it} &= 0 \\
R_{ik} &= R_{ik}^\sigma - [hh'' + (n-2)(h')^2] \sigma_{ik} \\
R &= \frac{R^\sigma}{h^2} - 2(n-1) \frac{h''}{h} - (n-1)(n-2) \frac{(h')^2}{h^2}. \tag{5.29}
\end{aligned}$$

In particolare se (N, σ) ha curvatura costante K ,

$$\begin{aligned}
 R_{tttt} &= R_{ittt} = 0 \\
 R_{itkt} &= -hh''\sigma_{ik} \\
 R_{ijkk} &= -R_{ijtk} = 0 \\
 R_{ijkl} &= \{[K - (h')^2]h^2\}(\sigma \otimes \sigma)_{ijkl}/2 \\
 R_{tt} &= -(n-1)\frac{h''}{h} \\
 R_{it} &= 0 \\
 R_{ik} &= \{(n-2)[K - (h')^2] - hh''\}\sigma_{ik} \\
 R &= (n-1)\left[\frac{(n-2)[K - (h')^2] - 2hh''}{h^2}\right].
 \end{aligned}$$

Se (M, g) è una superficie, cioè $n = 2$, segue che (N, σ) ha curvatura nulla, essendo 1-dimensionale, dunque

$$\begin{aligned}
 R_{tttt} &= R_{1ttt} = 0 \\
 R_{1t1t} &= -hh''\sigma_{11} \\
 R_{111t} &= -R_{11t1} = 0 \\
 R_{1111} &= 0 \\
 R_{tt} &= -\frac{h''}{h} \\
 R_{1t} &= 0 \\
 R_{11} &= -hh''\sigma_{11} \\
 R &= -2\frac{h''}{h}.
 \end{aligned}$$

ESERCIZIO 5.8.10. Se g è la metrica warped $g_{\text{eucl}} \times^{h^2} \sigma$ su $I \times N$, con $n \geq 4$ e (M, g) è una varietà di Einstein di costante zero, cioè $\text{Ric} = 0$, si mostri che (N, σ) è una varietà di Einstein di costante nonnegativa. Cosa si può dire su (N, σ) e h , se (M, g) è una varietà di Einstein generica?

Se $n = 3$, sotto quali condizioni su h si ha che (M, g) è una varietà di Einstein?

ESEMPIO 5.8.11. Varietà riemanniane con $\text{Ric} = 0$ ma non flat, $\text{Riem} \neq 0$
 Consideriamo la varietà di Einstein $N = \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ con la metrica prodotto σ data dal prodotto delle metriche canoniche delle due sfere, che soddisfa $\text{Ric}^\sigma = g$. La metrica warped $g = g_{\text{eucl}} \times^{h^2} \sigma$ su $M = (0, 1) \times N = (0, 1) \times \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, per la

funzione $h(r) = r/\sqrt{3}$, soddisfa

$$\begin{aligned} R_{tttt} &= R_{ittt} = R_{itkt} = R_{ijkt} = -R_{ijtk} = 0 \\ R_{ijkl} &= r^2 R_{ijkl}^\sigma / 3 - r^2 (\sigma \otimes \sigma)_{ijkl} / 18 \\ R_{tt} &= R_{it} = 0 \\ R_{ik} &= R_{ik}^\sigma - \sigma_{ik} = 0 \\ R &= 0 \end{aligned}$$

per le formule (5.29). Dunque la varietà 5-dimensionale (M, g) è una varietà di Einstein con tensore di Ricci nullo, ma con $\text{Riem} \neq 0$, come si può vedere facilmente, considerando un 2-piano “misto” Ricci-flat. In particolare, $\text{Riem} = \text{Weyl}$, non nullo.

Questa costruzione non funziona in dimensione 4, in quanto necessiteremo di una varietà di Einstein 3-dimensionale di costante positiva e queste sono date soltanto dai quozienti delle 3-sfere con la metrica canonica. Si vede allora facilmente che la varietà (M, g) che si otterrebbe sarebbe flat, per l'Esercizio 2.3.7. Un esempio analogo in dimensione 4, più complesso, è dato dalle cosiddette *superfici K3*... ??? un esempio è dato da ... ??? CITARE WIKIPEDIA ??? CONGETTURE SULLE 3-EINSTEIN NULLE [48] ??? Ric = 0 ma Weyl $\neq 0$???

ESEMPIO 5.8.12 (Spazio di Schwarzschild). Lo spazio di Schwarzschild di massa m , visto nell'Esempio 2.3.19, dato dalla metrica

$$g_{\text{Schw}} = \frac{dr \otimes dr}{1 - \frac{2m}{r^{n-2}}} + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}}$$

su $M_{\text{Schw}} = ((2m)^{\frac{1}{n-2}}, +\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$, è un caso particolare di una classe di varietà riemanniane, prodotti warped della forma

$$\left(I \times \mathbb{S}^{n-1}, \frac{dr \otimes dr}{u^2(r)} + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}} \right),$$

dove I è un intervallo aperto contenuto in \mathbb{R}^+ e $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione positiva di classe C^∞ .

I simboli di Christoffel rispetto a un sistema di coordinate (r, θ^α) , per $\alpha \in \{1, \dots, n-1\}$ sono

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= -u'/u \\ \Gamma_{rr}^\gamma &= \Gamma_{\alpha r}^r = \Gamma_{r\alpha}^r = 0 \\ \Gamma_{\alpha r}^\gamma &= \Gamma_{r\alpha}^\gamma = \delta_\alpha^\gamma / r \\ \Gamma_{\alpha\beta}^r &= -ru^2 g_{\alpha\beta}^{\mathbb{S}^{n-1}} \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma &= \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \end{aligned}$$

dove $\bar{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ sono i simboli di Christoffel di \mathbb{S}^{n-1} . Segue che il tensore di Riemann, di Ricci e la curvatura scalare sono dati da

$$\begin{aligned} \text{Riem} &= \left[-\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2(1-u^2)}{2} g_{\mathbb{S}^{n-1}} \right] \otimes g_{\mathbb{S}^{n-1}} \\ \text{Ric} &= -(n-1) \frac{u'}{ru} dr \otimes dr + \left[(n-2)(1-u^2) - ruu' \right] g_{\mathbb{S}^{n-1}} \\ \text{R} &= -2(n-1) \frac{uu'}{r} + (n-1)(n-2) \frac{1-u^2}{r^2}. \end{aligned}$$

Queste formule sono conseguenza della seguente proposizione generale e delle formule dell'Esempio 5.8.2.

PROPOSIZIONE 5.8.13. *Per una varietà riemanniana della forma*

$$\left(I \times N, \frac{dr \otimes dr}{u^2(r)} + r^2 g_N \right),$$

dove I è un intervallo aperto contenuto in \mathbb{R}^+ , $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione positiva classe C^∞ e (N, g_N) è una varietà riemanniana $(n-1)$ -dimensionale, valgono le seguenti formule in un sistema di coordinate (r, y^α) , con $\alpha \in \{1, \dots, n-1\}$.

$$\begin{aligned} \Gamma_{rr}^r &= -u'/u \\ \Gamma_{rr}^\gamma &= \Gamma_{\alpha r}^r = \Gamma_{r\alpha}^r = 0 \\ \Gamma_{\alpha r}^\gamma &= \Gamma_{r\alpha}^\gamma = \delta_\alpha^\gamma / r \\ \Gamma_{\alpha\beta}^r &= -ru^2 g_{\alpha\beta}^N \\ \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma &= {}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Riem} &= r^2 \text{Riem}^N - \left[\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2 u^2}{2} g_N \right] \otimes g_N \\ \text{Ric} &= \text{Ric}^N - (n-1) \frac{u'}{ru} dr \otimes dr - \left[(n-2)u^2 + ruu' \right] g_N \\ \text{R} &= \frac{\text{R}^N}{r^2} - 2(n-1) \frac{uu'}{r} - (n-1)(n-2) \frac{u^2}{r^2}. \end{aligned}$$

DIMOSTRAZIONE. Le formule per i simboli di Christoffel si ottengono direttamente dalla formula (3.5).

La formula per il tensore di Riemann è un'uguaglianza tra i tensori di curvatura algebrici Riem e

$$T = r^2 \text{Riem}^N - \left[\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2 u^2}{2} g_N \right] \otimes g_N,$$

dunque, per dimostrare l'uguaglianza tra i due tensori basterà provare

$$R_{\alpha r \beta r} = T_{\alpha r \beta r}, \quad R_{\alpha \beta r \gamma} = T_{\alpha \beta r \gamma} \quad \text{e} \quad R_{\alpha \beta \gamma \delta} = T_{\alpha \beta \gamma \delta}.$$

Si ha, ponendo $g = \frac{dr \otimes dr}{u^2(r)} + r^2 g_N$,

$$\begin{aligned} R_{\alpha r \beta r} &= \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^r}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma_{r\beta}^r}{\partial y^\alpha} + \Gamma_{\alpha\beta}^r \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \Gamma_{r\gamma}^r - \Gamma_{r\beta}^r \Gamma_{\alpha r}^r - \Gamma_{r\beta}^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^r \right) g_{rr} \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^r}{\partial r} + \Gamma_{\alpha\beta}^r \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{r\beta}^\gamma \Gamma_{\alpha\gamma}^r \right) g_{rr} \\ &= \left(-u^2 g_{\alpha\beta}^N - 2ruu' g_{\alpha\beta}^N + ruu' g_{\alpha\beta}^N + u^2 g_{\alpha\beta}^N \right) \frac{1}{u^2} \\ &= -\frac{ru'}{u} g_{\alpha\beta}^N = -\left[\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2 u^2}{2} g_N \right]_{rr} g_{\alpha\beta}^N = T_{\alpha r \beta r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta r\gamma} &= \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha r}^\delta}{\partial y^\beta} - \frac{\partial \Gamma_{\beta r}^\delta}{\partial y^\alpha} + \Gamma_{\alpha r}^r \Gamma_{\beta r}^\delta + \Gamma_{\alpha r}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\delta - \Gamma_{\beta r}^r \Gamma_{\alpha r}^\delta - \Gamma_{\beta r}^\sigma \Gamma_{\alpha\sigma}^\delta \right) g_{\delta\gamma} \\ &= \left(\Gamma_{\alpha r}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\delta - \Gamma_{\beta r}^\sigma \Gamma_{\alpha\sigma}^\delta \right) g_{\delta\gamma} = \left(\frac{\delta_\alpha^N \Gamma_{\beta\sigma}^\delta}{r} - \frac{\delta_\beta^N \Gamma_{\alpha\sigma}^\delta}{r} \right) r^2 g_{\delta\gamma}^N \\ &= \left(\frac{1}{r} \Gamma_{\beta\alpha}^\delta - \frac{1}{r} \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \right) r^2 g_{\delta\gamma}^N = 0 = T_{\alpha\beta r\gamma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \left(\frac{\partial \Gamma_{\alpha\gamma}^\sigma}{\partial y^\beta} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma}{\partial y^\alpha} + \Gamma_{\alpha\gamma}^r \Gamma_{\beta r}^\sigma + \Gamma_{\alpha\gamma}^\tau \Gamma_{\beta\tau}^\sigma - \Gamma_{\beta\gamma}^r \Gamma_{\alpha r}^\sigma - \Gamma_{\beta\gamma}^\tau \Gamma_{\alpha\tau}^\sigma \right) g_{\sigma\delta} \\ &= r^2 R_{\alpha\beta\gamma\delta}^N + \left((-ru^2 g_{\alpha\gamma}^N) \frac{\delta_\beta^\sigma}{r} - (-ru^2 g_{\beta\gamma}^N) \frac{\delta_\alpha^\sigma}{r} \right) r^2 g_{\sigma\delta}^N \\ &= r^2 R_{\alpha\beta\gamma\delta}^N - r^2 u^2 g_{\alpha\gamma}^N g_{\beta\delta}^N + r^2 u^2 g_{\beta\gamma}^N g_{\alpha\delta}^N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta\gamma\delta} &= r^2 R_{\alpha\beta\gamma\delta}^N - \left[\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2 u^2}{2} g_N \right]_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta}^N - \left[\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2 u^2}{2} g_N \right]_{\beta\delta} g_{\alpha\gamma}^N \\ &\quad + \left[\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2 u^2}{2} g_N \right]_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma}^N + \left[\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2 u^2}{2} g_N \right]_{\beta\gamma} g_{\alpha\delta}^N \\ &= r^2 R_{\alpha\beta\gamma\delta}^N - r^2 u^2 g_{\alpha\gamma}^N g_{\beta\delta}^N + r^2 u^2 g_{\alpha\delta}^N g_{\beta\gamma}^N \end{aligned}$$

dunque, la formula per il tensore di Riemann è provata. Tracciando, otteniamo le formule per il tensore di Ricci e la curvatura scalare

$$\begin{aligned} R_{rr} &= g^{\alpha\beta} R_{r\alpha r\beta} = \frac{1}{r^2} g_N^{\alpha\beta} \left(-\frac{ru'}{u} g_{\alpha\beta}^N \right) = -(n-1) \frac{u'}{ru}, \\ R_{\alpha r} &= R_{r\alpha} = g^{rr} R_{\alpha r r r} + g^{r\beta} R_{\alpha r r \beta} + g^{\beta r} R_{\alpha\beta r r} + g^{\beta\gamma} R_{\alpha\beta r \gamma} = 0, \\ R_{\alpha\beta} &= g^{rr} R_{\alpha r \beta r} + g^{\gamma\sigma} R_{\alpha\gamma\beta\sigma} \\ &= u^2 \left(-\frac{ru'}{u} g_{\alpha\beta}^N \right) + \frac{1}{r^2} g_N^{\gamma\sigma} \left(r^2 R_{\alpha\gamma\beta\sigma}^N - r^2 u^2 g_{\alpha\beta}^N g_{\gamma\sigma}^N + r^2 u^2 g_{\gamma\beta}^N g_{\alpha\sigma}^N \right) \\ &= -ruu' g_{\alpha\beta}^N + R_{\alpha\beta}^N - u^2 g_{\alpha\beta}^N g_{\gamma\sigma}^N g_N^{\gamma\sigma} + u^2 g_{\gamma\beta}^N g_{\alpha\sigma}^N g_N^{\gamma\sigma} \\ &= R_{\alpha\beta}^N - ((n-2)u^2 + ruu') g_{\alpha\beta}^N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R &= g^{rr} R_{rr} + g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \\
&= u^2 \left(- (n-1) \frac{u'}{ru} \right) + \frac{1}{r^2} g_N^{\alpha\beta} (R_{\alpha\beta}^N - ((n-2)u^2 + ruu') g_{\alpha\beta}^N) \\
&= - (n-1) \frac{uu'}{r} + \frac{R^N}{r^2} - (n-1)(n-2) \frac{u^2}{r^2} - (n-1) \frac{uu'}{r} \\
&= \frac{R^N}{r^2} - 2(n-1) \frac{uu'}{r} - (n-1)(n-2) \frac{u^2}{r^2}.
\end{aligned}$$

□

Si ha allora che il tensore di Riemann, di Ricci e la curvatura scalare dello spazio di Schwarzschild di massa m sono dati da

$$\begin{aligned}
\text{Riem} &= \frac{m}{r^{n-2}} \left[- (n-2) \frac{dr \otimes dr}{1 - \frac{2m}{r^{n-2}}} + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}} \right] \otimes g_{\mathbb{S}^{n-1}} \\
\text{Ric} &= \frac{m(n-2)}{r^n} \left[- (n-1) \frac{dr \otimes dr}{1 - \frac{2m}{r^{n-2}}} + r^2 g_{\mathbb{S}^{n-1}} \right] \\
R &= 0,
\end{aligned}$$

ponendo $u = \sqrt{1 - \frac{2m}{r^{n-2}}}$ nelle formule precedenti. Il tensore di Weyl è nullo, per la sua invarianza conforme (punto (5) della Proposizione 5.8.7) ed essendo la metrica di Schwarzschild conforme a quella euclidea (flat), come visto nella formula (2.3) dell'Esempio 2.3.19. Segue dunque che

$$\text{Ric} = \overset{\circ}{\text{Ric}} \quad \text{e} \quad \text{Riem} = \frac{\overset{\circ}{\text{Ric}} \otimes g_{\text{Schw}}}{n-2},$$

per la decomposizione (5.15).

Esercizio 5.8.14. Si calcolino i tensori di curvatura dello spazio di Schwarzschild di massa m usando il fatto che la metrica è conforme a quella euclidea e la Proposizione 5.8.7.

Esempio 5.8.15.

??? Prodotti doubly warped

??? Esempi da [70, Capitolo 3], [71, Capitolo 4] ed esercizi a fine sezione.

Esempio 5.8.16. In dimensione $n \geq 3$ la curvatura scalare non determina il tensore di Ricci.

Consideriamo infatti le due varietà $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ e $\mathbb{S}_{\sqrt{3}}^3$, dove sulle sfere abbiamo le metriche canoniche, per l'Esercizio 5.4.14 e l'Osservazione 5.4.15, entrambe hanno curvatura scalare uguale a 2 ma il tensore di Ricci della prima è dato da $\text{Ric}^{\mathbb{S}^1} + \text{Ric}^{\mathbb{S}^2} \simeq \text{Ric}^{\mathbb{S}^2}$ (in quanto $\text{Ric}^{\mathbb{S}^1} = 0$), mentre quello della seconda da $\text{Ric}^{\mathbb{S}^3}$.

Esempio 5.8.17. In dimensione $n \geq 4$ il tensore di Ricci non determina le curvature sezionali.

Consideriamo le due varietà $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ e $\mathbb{S}^4_{\sqrt{3}}$ che hanno entrambe $\text{Ric} = g$, per l'Esercizio 5.4.14 e l'Osservazione 5.4.15, ma la prima varietà ha i piani misti di curvatura sezionale nulla (Esercizio 5.4.3), mentre tutte le curvatures sezionali della seconda sono uguali a $1/3$.

ESEMPIO 5.8.18. In dimensione $n \geq 4$ la curvatura sezionale $\text{Sec} > 0$ non implica $\mathcal{R} \geq 0$.

Consideriamo la varietà $(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, g_{\text{can}})$ (oppure $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, per $n \geq 2$) vista nell'Esempio 2.3.17. Mostriamo nell'Esempio 6.4.15 che ha tutte le curvatures sezionali positive, maggiori o uguali a 1, ma l'operatore di curvatura \mathcal{R} ha un autovalore nullo e la forma \mathcal{R} è soltanto *semidefinita* positiva. Perturbando allora localmente la metrica, è possibile ottenere una varietà riemanniana con curvatura positiva e operatore di curvatura \mathcal{R} che ha autovalori negativi).

ESEMPIO 5.8.19. In dimensione 3 il tensore di Ricci definito positivo $\text{Ric} > 0$ non implica curvatura nonnegativa $\text{Sec} \geq 0$.

Consideriamo infatti su $M = (-\delta, \delta) \times \mathbb{H}^2$ la metrica warped

$$g = g_{\text{eucl}} \otimes h^2 g_{\text{can}}^{\mathbb{H}^2} = dt^2 + h^2(t) g_{\text{can}}^{\mathbb{H}^2}$$

con $h : (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione positiva. Per i calcoli dell'Esempio 5.8.9 abbiamo allora

$$\begin{aligned} R_{1212} &= -[1 + (h')^2] h^2 < 0, \\ R_{tt} &= -2 \frac{h''}{h} & R_{it} &= 0 & R_{12} &= 0, \\ R_{11} &= R_{22} = -[1 + (h')^2 + hh''] . \end{aligned}$$

Se dunque h soddisfa

$$h'' < -\frac{1 + (h')^2}{h} < 0,$$

la varietà (M, g) ha tensore di Ricci definito positivo ma almeno una curvatura sezionale negativa. Ovviamente possiamo trovare tale h ad esempio risolvendo il problema di Cauchy $h'' = -2 \frac{1+(h')^2}{h}$ con $h(0) = 1$ e $h'(0) = 0$, localmente attorno a $t = 0$.

ESEMPIO 5.8.20. In dimensione 3 la curvatura scalare positiva $R > 0$ non implica tensore di Ricci semidefinito positivo $\text{Ric} \geq 0$ (dunque nemmeno $\text{Sec} \geq 0$). Consideriamo la stessa costruzione dell'esempio precedente, sempre per i calcoli dell'Esempio 5.8.9 abbiamo

$$\begin{aligned} R_{tt} &= -2 \frac{h''}{h} & R_{it} &= 0 & R_{12} &= 0, \\ R_{11} &= R_{22} = -[1 + (h')^2 + hh''] , \\ R &= -2 \left(\frac{1 + (h')^2 + 2hh''}{h^2} \right) . \end{aligned}$$

Se dunque h soddisfa

$$-\frac{1+(h')^2}{h} < h'' < -\frac{1+(h')^2}{2h},$$

sostituendo nelle equazioni sopra, si vede che $R > 0$ ma $R_{11} = R_{22} < 0$. Una possibilità è allora risolvere il problema di Cauchy $h'' = -\frac{3}{4}\frac{1+(h')^2}{h}$ con $h(0) = 1$ e $h'(0) = 0$, localmente attorno a $t = 0$ (si completino i dettagli per esercizio).

Riassumiamo nella seguente tabella alcune delle formule di questa sezione.

Metriche con curvatura costante K su varietà n -dimensionali	
	$\text{Sec}(\pi) = K$ $\text{Riem} = \frac{1}{2}Kg \otimes g$ $\text{Ric} = (n-1)Kg$ $\text{R} = n(n-1)K$
Metriche "risalate"	
$\tilde{g} = \lambda g \quad \lambda > 0$	$\widetilde{\text{Sec}}(\pi) = \text{Sec}(\pi)/\lambda$ $\widetilde{\text{Riem}} = \lambda \text{Riem}$ $\widetilde{\text{Ric}} = \text{Ric}$ $\widetilde{\text{R}} = \lambda^{-1}\text{R}$
Metriche conformi su varietà n -dimensionali	
$\tilde{g} = e^{2\varphi}g$	$\widetilde{\text{Riem}} = e^{2\varphi} \left\{ \text{Riem} - [\nabla^2\varphi - d\varphi \otimes d\varphi + \nabla\varphi ^2g/2] \otimes g \right\}$ $\widetilde{\text{Ric}} = \text{Ric} - (n-2)(\nabla^2\varphi - d\varphi \otimes d\varphi) - (\Delta\varphi + (n-2) \nabla\varphi ^2)g$ $\widetilde{\text{R}} = e^{-2\varphi}(\text{R} - 2(n-1)\Delta\varphi - (n-2)(n-1) \nabla\varphi ^2)$ $\widetilde{\text{Weyl}} = e^{2\varphi}\text{Weyl}$
Metriche warped su varietà n -dimensionali $I \times N$	
$g = dt^2 + h^2(t)g_N$	$\text{Riem} = h^2 \text{Riem}^N - [h h'' dt \otimes dt + \frac{1}{2} h^2 (h')^2 g_N] \otimes g_N$ $\text{Ric} = \text{Ric}^N - (n-1) \frac{h''}{h} dt \otimes dt - [h h'' + (n-2)(h')^2] g_N$ $\text{R} = \frac{\text{R}^N}{h^2} - 2(n-1) \frac{h''}{h} - (n-1)(n-2) \frac{(h')^2}{h^2}$
Metriche Schwarzschild "generalizzate" su varietà n -dimensionali $I \times N$	
$g = \frac{dr \otimes dr}{u^2(r)} + r^2 g_N$	$\text{Riem} = r^2 \text{Riem}^N - \left[\frac{ru'}{u} dr \otimes dr + \frac{r^2 u^2}{2} g_N \right] \otimes g_N$ $\text{Ric} = \text{Ric}^N - (n-1) \frac{u'}{ru} dr \otimes dr - \left[(n-2)u^2 + r u u' \right] g_N$ $\text{R} = \frac{\text{R}^N}{r^2} - 2(n-1) \frac{u u'}{r} - (n-1)(n-2) \frac{u^2}{r^2}$