

## Geodetiche – Teoria locale

In questo capitolo cominciamo ad analizzare le curve *geodetiche* su una varietà riemanniana, che sono le curve che localmente minimizzano la distanza tra loro due punti.

### 4.1. Geodetiche per una connessione affine

DEFINIZIONE 4.1.1. Sia  $\nabla$  una connessione affine su una varietà  $M$ , e sia  $\frac{D}{dt}$  l'associata derivata covariante lungo le curve. Una curva  $\gamma : I \rightarrow M$  (con  $I$  un intervallo di  $\mathbb{R}$ ) si dice *geodetica* per  $\nabla$  se  $\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) = 0$ , per ogni  $t \in I$  (talvolta si dice anche che  $\gamma$  è “autoparallela”).

OSSERVAZIONE 4.1.2. Sarebbe naturale aspettarsi che in una varietà riemanniana  $(M, g)$  si definiscano geodetiche le curve che minimizzano la distanza tra i punti della varietà, cioè i minimi  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  del funzionale lunghezza

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt,$$

così come in  $\mathbb{R}^n$ . Per la connessione di Levi–Civita, vedremo nella Proposizione 4.3.11 che ogni curva minimo di  $\mathcal{L}$  (ad estremi fissati), parametrizzata proporzionalmente alla sua lunghezza d'arco, soddisfa  $\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0$  e che una geodetica è un minimo di  $\mathcal{L}$  tra tutte le curve che uniscono ogni due suoi punti abbastanza vicini. Usiamo questa definizione (“differenziale”, contrapposta a quella “variazionale”) di geodetica, in quanto saremo interessati anche alle geodetiche “lunghe”, non necessariamente minimali  $\mathcal{L}$  tra ogni coppia di loro punti (in  $\mathbb{R}^n$  non ve ne sono, ma su una varietà riemanniana generica sì, si pensi semplicemente a una geodetica sulla sfera unitaria (che è intuitivamente – e vedremo effettivamente essere – un tratto di un cerchio massimo) più lunga di  $\pi$ , che quindi “supera” il punto antipodale a quello da cui parte, perdendo la minimalità tra i due suoi estremi). Inoltre, dal punto di vista variazionale (che svilupperemo nel Capitolo 6 e che terremo presente in vari commenti), il funzionale lunghezza è scomodo, poiché a crescita lineare e invariante per riparametrizzazione delle curve, il che produce una mancanza di compattezza quando se ne ricercano i minimi coi metodi diretti del calcolo delle variazioni (si veda [3], per esempio).

Introdurremo infatti nel Capitolo 6 un altro funzionale, *energia* di una curva

$$\mathcal{E}(\gamma) = \frac{1}{2} \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|^2 dt \quad (4.1)$$

i cui minimi coincideranno con i minimi del funzionale lunghezza, riparametrizzati proporzionalmente alla loro lunghezza d'arco. Inoltre, l'equazione di Eulero–Lagrange di  $\mathcal{E}$  sarà proprio  $\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0$ .

In coordinate locali, posto  $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)}$ , abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} \left( \dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)} \right) &= \ddot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{\gamma(t)} + \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(t)} \\ &= \left( \ddot{\gamma}^k(t) + \Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t) \dot{\gamma}^i(t) \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \Big|_{\gamma(t)}. \end{aligned}$$

Di conseguenza,  $\frac{D}{dt}\dot{\gamma}$  è identicamente nulla e  $\gamma$  è una geodetica se e solo se in coordinate locali è una soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie a coefficienti  $C^\infty$ , in forma normale (*equazione delle geodetiche*),

$$\ddot{\gamma}^k(t) = -\Gamma_{ji}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^j(t) \dot{\gamma}^i(t) \quad \text{per ogni } k \in \{1, \dots, n\}. \quad (4.2)$$

OSSERVAZIONE 4.1.3. Si noti che una soluzione  $\gamma$  di classe  $C^2$  di questo sistema è automaticamente  $C^\infty$ , dunque una curva di classe  $C^2$  che soddisfa  $\frac{D}{dt}\dot{\gamma} = 0$  è una geodetica.

Segue che le geodetiche sono tutte e sole le proiezioni mediante  $\pi : TM \rightarrow M$  delle curve integrali di un campo vettoriale  $\mathcal{G}$  su  $TM$  detto *campo vettoriale geodetico*. Infatti, consideriamo una carta coordinata  $(U, \varphi = (x^i))$  di  $M$  con corrispondenti campi coordinati  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$  su  $U$ , che induce naturalmente la carta coordinata  $(\pi^{-1}(U), \psi = (x^i, v^i))$  su  $TM$ , data da

$$\pi^{-1}(U) \ni v \mapsto \psi(v) = (\varphi(p), v^1, \dots, v^n) \in \varphi(U) \times \mathbb{R}^n,$$

per ogni  $v = v^1 \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p + \dots + v^n \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \in T_p M \subseteq \pi^{-1}(U)$ .

Con un abuso di notazione, siano  $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial v^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^n}$  i corrispondenti campi coordinati su  $\pi^{-1}(U)$  che soddisfano

$$\pi_* \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{e} \quad \pi_* \frac{\partial}{\partial v^i} = 0.$$

Consideriamo il campo vettoriale su  $\pi^{-1}(U)$  dato da

$$v^k \frac{\partial}{\partial x^k} - (\Gamma_{ji}^k \circ \pi) v^j v^i \frac{\partial}{\partial v^k},$$

al variare della carta locale considerata, siccome le equazioni geodetiche sono indipendenti dalla scelta delle coordinate su  $M$ , è possibile incollare questi campi vettoriali definiti localmente e ottenere un campo vettoriale su  $TM$  che denotiamo con  $\mathcal{G}$ . Segue facilmente che allora una curva  $t \mapsto \gamma(t) \in M$  è una

geodetica se e solo se  $t \mapsto \dot{\gamma}(t) \in TM$  è una curva integrale di  $\mathcal{G}$ .

Ciò ci permette di utilizzare i risultati della teoria dei flussi locali nello studio delle geodetiche e della mappa esponenziale che definiremo nel seguito. In particolare, si ha immediatamente la seguente proposizione, per il teorema di esistenza e unicità delle soluzioni di sistemi di ODE (si veda [73], per esempio).

**PROPOSIZIONE 4.1.4.** *Sia  $\nabla$  una connessione affine su  $M$ . Fissati  $p \in M$  e  $v \in T_pM$ , esiste una e una sola geodetica massimale  $\gamma_v : I \rightarrow M$  di classe  $C^\infty$  tale che  $I$  è un intervallo aperto contenente  $0 \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_v(0) = p$  e  $\dot{\gamma}_v(0) = v$ .*

D'ora in poi denoteremo sempre con  $\gamma_v$  la geodetica massimale uscente da  $p$  con velocità iniziale  $v$ .

Osserviamo che, per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la curva  $\sigma(t) = \gamma_v(\lambda t)$  è a sua volta una geodetica (si tratta di una verifica diretta della Definizione 4.1.1) che parte da  $p$  con velocità  $\lambda v$ . Di conseguenza,

$$\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t).$$

Geometricamente, questo significa che, se due geodetiche escono da uno stesso punto con velocità una multipla dell'altra, allora ciascuna si ottiene dall'altra tramite una riparametrizzazione affine (ogni riparametrizzazione affine di una geodetica è sempre una geodetica). In particolare, se  $\gamma_v$  è definita almeno fino a un tempo  $\tau > 0$ , allora  $\gamma_{\tau v}$  è definita almeno fino al tempo 1.

**OSSERVAZIONE 4.1.5.** Vediamo alcune conseguenze dell'Osservazione 3.6.2.

- Se  $S \subseteq M$  è una sottovarietà di  $(M, g)$  con la metrica indotta e consideriamo le rispettive connessioni di Levi-Civita, allora una curva  $\gamma : I \rightarrow S$  è una geodetica di  $S$  se e solo se si ha, per l'Esercizio 3.5.8,

$$0 = \frac{D^S}{dt} \dot{\gamma} = \left( \frac{D^M}{dt} \dot{\gamma} \right)^\top$$

in ogni punto di  $\gamma$ .

- Se  $f : M \rightarrow N$  è un'isometria tra due varietà riemanniane  $(M, g)$  e  $(N, h)$  e  $\gamma : I \rightarrow M$  è una geodetica rispetto alla connessione di Levi-Civita di  $M$ , allora  $f \circ \gamma : I \rightarrow N$  è una geodetica rispetto alla connessione di Levi-Civita di  $N$ .

La prima affermazione è immediata mentre la seconda segue notando che, per l'Osservazione 3.6.2, essendo  $\dot{\gamma}$  un campo parallelo lungo  $\gamma$ , si ha che  $df(\dot{\gamma}) = (f \circ \gamma)'$  è parallelo lungo  $f \circ \gamma$ .

**ESEMPIO 4.1.6.** Se  $S$  è un'ipersuperficie di  $\mathbb{R}^n$  e  $\gamma : I \rightarrow S$  è una geodetica per la connessione di Levi-Civita di  $S$ , associata alla metrica indotta dalla metrica canonica  $g_{\text{eucl}}$  di  $\mathbb{R}^n$ , si ha

$$0 = \frac{D^S}{dt} \dot{\gamma} = \left( \frac{D^{\mathbb{R}^n}}{dt} \dot{\gamma} \right)^\top = \ddot{\gamma}^\top,$$

in ogni punto di  $\gamma$ . In altre parole, l'accelerazione  $\ddot{\gamma}$  di una geodetica è un vettore normale alla ipersuperficie  $S$  in ogni suo punto. Viceversa, se ciò vale, la curva è una geodetica di  $S$ . Si veda [3, Sezione 6.4] dove tale conclusione viene ottenuta con i metodi del calcolo delle variazioni.

**ESERCIZIO 4.1.7.** Sia  $\pi : (\widetilde{M}, \widetilde{g}) \rightarrow (M, g)$  un rivestimento riemanniano e consideriamo sulle due varietà le rispettive connessioni di Levi-Civita. Si mostri che le geodetiche di  $(M, g)$  sono "proiezioni" di geodetiche di  $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$  e quelle di  $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$  sono "sollevamenti" di geodetiche di  $(M, g)$ .

**ESEMPIO 4.1.8.** Determiniamo le geodetiche su due varietà riemanniane particolarmente semplici:  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{S}^n$  (con le loro metriche canoniche e le relative connessioni di Levi-Civita).

Nel caso di  $\mathbb{R}^n$ , con l'usuale carta globale, i simboli di Christoffel sono identicamente nulli; pertanto, l'equazione delle geodetiche si riduce a

$$\ddot{\gamma}^k(t) = 0 \quad \text{per ogni } k \in \{1, \dots, n\}.$$

Le soluzioni di quest'equazione, cioè le geodetiche su  $\mathbb{R}^n$ , sono dunque date dai segmenti di rette affini.

Leggermente più complicato è il caso di  $\mathbb{S}^n$ , che conviene trattare come la sfera unitaria, sottovarietà riemanniana di  $\mathbb{R}^{n+1}$  nel modo usuale. Siano  $p$  un punto di  $\mathbb{S}^n$  e  $v$  un vettore non nullo in  $T_p\mathbb{S}^n$ . Indichiamo con  $\pi$  il 2-piano di  $\mathbb{R}^{n+1}$  contenente  $0, p$  e la retta per l'origine con direzione  $v$ . La riflessione  $\varphi$  rispetto al piano  $\pi$ , ristretta a  $\mathbb{S}^n$ , è un'isometria di  $\mathbb{S}^n$  in sé stessa che fissa  $p$  e  $v$ . Abbiamo visto che un'isometria di una varietà riemanniana mantiene le geodetiche, quindi, per unicità di queste ultime,  $\varphi$  deve mandare  $\gamma_v$  (la geodetica uscente da  $p$  con velocità iniziale  $v$ ) in sé stessa. Il luogo di punti fissi di  $\varphi$  è  $\pi \cap \mathbb{S}^n \simeq \mathbb{S}^1$ . Pertanto, la geodetica  $\gamma_v$  deve percorrere la circonferenza  $\pi \cap \mathbb{S}^n$  con velocità costante  $|v|$ .

**ESERCIZIO 4.1.9.** Applicando l'Esercizio 4.1.7 all'esempio precedente, si descrivano le geodetiche di  $\mathbb{T}^n$ ,  $\mathbb{RP}^n$  e della bottiglia di Klein, con le loro metriche canoniche (e connessioni di Levi-Civita) indotte dai rispettivi rivestimenti riemanniani universali  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{S}^n$  e  $\mathbb{R}^2$  (si veda inoltre [37, Sezione 2.82 e Esercizi 2.83]).

**ESERCIZIO 4.1.10.** Si descrivano le geodetiche (relative alla connessione di Levi-Civita) sul cono considerato nell'Esercizio 3.6.9.

**OSSERVAZIONE 4.1.11.** ??? SOMMERSIONI E GEODETICHE

**ESEMPIO 4.1.12.** ??? GEODETICHE DI  $\mathbb{CP}^n$

Definiamo ora l'insieme

$$\Omega = \{v \in TM : \text{la geodetica } t \mapsto \gamma_v(t) \text{ è definita almeno fino a } t = 1\}$$

e l'applicazione *esponenziale*  $\exp : \Omega \rightarrow M$  data da

$$\exp(v) = \gamma_v(1).$$

Inoltre, indicheremo con  $\exp_p$  la restrizione di  $\exp$  a  $\Omega_p = \Omega \cap T_pM$ , per ogni punto  $p \in M$ .

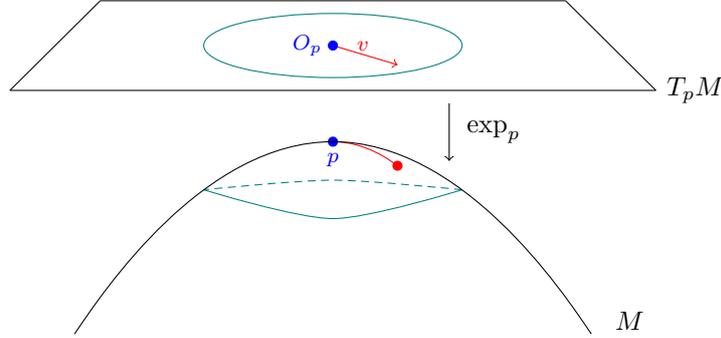


FIGURA 4.1

Seguendo le notazioni della Sezione 1.5, se  $\theta : D \subseteq TM \times \mathbb{R} \rightarrow TM$  è il flusso locale di  $\mathcal{G}$ , essendo  $\{O_p : p \in M\} \subseteq D_1$ , si ha allora che  $\exp = \pi \circ \theta_1$ . Per il teorema di dipendenza  $C^\infty$  dai dati iniziali delle soluzioni dei sistemi di ODE (in [73]) e la discussione immediatamente dopo la Proposizione 4.1.4, abbiamo allora i seguenti fatti.

**TEOREMA 4.1.13.** *Sia  $\nabla$  una connessione affine su  $M$ .*

- $\Omega$  è un intorno aperto di  $M \simeq \{O_p : p \in M\}$  in  $TM$  e  $\exp : \Omega \rightarrow M$  è di classe  $C^\infty$ ,
- per ogni  $p \in M$ , l'insieme  $\Omega_p$  è un intorno aperto stellato attorno all'origine in  $T_pM$ ,
- per ogni  $p \in M$  e  $v \in T_pM$ , la geodetica massimale uscente da  $p$  con velocità iniziale  $v$  è data da  $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$ .

Il differenziale di  $\exp_p : \Omega_p \rightarrow M$  nell'origine  $O_p$  di  $T_pM$  risulta particolarmente semplice da calcolare: identificando infatti  $T_{O_p}T_pM$  con  $T_pM$  nell'usuale modo canonico, si ha

$$(d \exp_p)_{O_p}(v) = \left. \frac{d}{dt} \exp_p(tv) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} \gamma_v(t) \right|_{t=0} = \dot{\gamma}_v(0) = v. \quad (4.3)$$

In altre parole,  $(d \exp_p)_{O_p}$  è l'identità di  $T_pM$ . Di conseguenza, applicando il teorema della funzione inversa, si ottiene il seguente risultato.

**PROPOSIZIONE 4.1.14.** *Sia  $\nabla$  una connessione affine su  $M$ . Per ogni  $p \in M$  esiste un intorno  $V_p$  di  $O_p$  in  $T_pM$  tale che detto  $U_p = \exp_p(V_p) \subseteq M$ , intorno di  $p \in M$ , la restrizione di  $\exp_p$  a  $V_p$  sia un diffeomorfismo tra  $V_p$  e  $U_p$ .*

Fissato  $p \in M$ , consideriamo la mappa  $\Phi : \Omega \rightarrow M \times M$  data da  $\Phi(v) = (\pi(v), \exp_{\pi(v)}(v))$  e calcoliamone il differenziale  $d\Phi_{O_p}$  nel punto  $O_p \in TM$ , origine di  $T_pM$ , identificando  $T_{O_p}TM = T_pM \times T_pM$ . Per la curva  $t \mapsto \sigma(t) = O_{\tau(t)}$ , dove  $\tau : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$  con  $\tau(0) = p$  e  $\tau'(0) = v \in T_pM$ , abbiamo  $\sigma'(0) = (v, O_p)$  e  $\Phi(\sigma(t)) = (\tau(t), \tau(t))$ , dunque

$$d\Phi_{O_p}(v, O_p) = d\Phi_{O_p}(\sigma'(0)) = (v, v),$$

mentre, per la curva  $t \mapsto \theta(t) = wt$  dove  $w \in T_pM$ , si ha  $\theta'(0) = (O_p, w)$  e  $\Phi(\theta(t)) = (p, \exp_p(tw))$ , da cui

$$d\Phi_{O_p}(O_p, w) = d\Phi_{O_p}(\theta'(0)) = (O_p, w),$$

per il fatto che  $(d\exp_p)_{O_p}$  è l'identità di  $T_pM$  (formula (4.3)).

Segue che la mappa  $\Phi$  ha differenziale invertibile in  $O_p$ , da cui (per il teorema della funzione inversa) è un diffeomorfismo in un intorno di  $O_p \in TM$  con un intorno di  $(p, p)$  in  $M \times M$ .

## 4.2. Coordinate normali e polari

*D'ora in poi, in tutto il testo, a meno che esplicitamente diversamente specificato, assumeremo sempre che  $(M, g)$  sia una varietà riemanniana connessa,  $n$ -dimensionale e che  $\nabla$  sia la sua connessione di Levi-Civita.*

Le geodetiche  $\gamma$  su una varietà riemanniana sono sempre parametrizzate per un multiplo della lunghezza d'arco, ovvero hanno velocità di modulo costante, infatti hanno la proprietà che la velocità è un campo parallelo lungo  $\gamma$  e per ogni connessione compatibile con la metrica abbiamo visto che i campi paralleli hanno modulo costante lungo tutta la curva. Precisamente, per la geodetica  $\gamma_v(t) = \exp_p(tv)$  uscente da  $p \in M$  con velocità  $v \in T_pM$  e definita sull'intervallo  $[0, a)$ , si ha

$$|\dot{\gamma}_v(t)|_{\gamma(t)} = |\dot{\gamma}_v(0)|_p = |v|_p,$$

dunque la sua lunghezza è  $a|v|_p$ .

**ESERCIZIO 4.2.1.** Si mostri che se la curva  $\sigma$  è una riparametrizzazione di una geodetica  $\gamma$  e  $\sigma$  è parametrizzata proporzionalmente alla sua lunghezza d'arco, allora è una riparametrizzazione affine di  $\gamma$ , in particolare anche  $\sigma$  è una geodetica.

Se consideriamo  $(T_pM, g_p)$  come una varietà riemanniana (isometrica a  $\mathbb{R}^n$ ), le sue geodetiche sono segmenti di retta e in particolare quelle uscenti da zero con velocità (che poi rimane costante in modulo)  $v \in T_pM$  sono date da  $t \mapsto tv$ . Indichiamo dunque con  $B_\varepsilon(O_p) \subseteq T_pM$  la palla metrica aperta, cioè  $B_\varepsilon(O_p) = \{v \in T_pM : |v|_p < \varepsilon\}$ . Dal Teorema 4.1.13 e dalla Proposizione 4.1.14 si deduce allora che, per  $\varepsilon > 0$  sufficientemente piccolo, la mappa esponenziale è ben definita sulla palla  $B_\varepsilon(O_p) \subseteq T_pM$  ed è un diffeomorfismo con l'immagine, che è un intorno del punto  $p \in M$ .

*D'ora in poi, in tutto il testo, assumeremo implicitamente che la mappa esponenziale sia definita nei punti dove ne discuteremo le proprietà.*

DEFINIZIONE 4.2.2. Definiamo il raggio di iniettività di  $p \in M$  come

$$\text{inj}(p) = \sup\{\varepsilon > 0 : \exp_p \text{ è un diffeomorfismo tra } B_\varepsilon(O_p) \text{ e un aperto di } M\}.$$

Si noti che per quanto detto sopra l'insieme di tali  $\varepsilon > 0$  non è vuoto, dunque  $\text{inj}(p)$  è ben definito e positivo per ogni  $p \in M$ .

Definiamo il raggio di iniettività di  $M$  come  $\text{inj}(M) = \inf_{p \in M} \text{inj}(p)$ .

DEFINIZIONE 4.2.3. Per  $\varepsilon < \text{inj}(p)$ , l'immagine di  $B_\varepsilon(O_p)$  tramite la mappa esponenziale  $\exp_p$  si dice *palla geodetica centrata in  $p$  di raggio  $\varepsilon$* . L'immagine  $S_\varepsilon(p)$  di  $\partial B_\varepsilon(O_p)$  si dice *sfera geodetica*. Analogamente abbiamo la *palla metrica di centro  $p$  e raggio  $r$*  data da  $B_r(p) = \{q \in M : d(p, q) < r\}$  e la *sfera metrica*  $\partial B_r(p) = \{q \in M : d(p, q) = r\}$ .

Infine, l'immagine di un intorno stellato di  $O_p$  su cui  $\exp_p$  è un diffeomorfismo si dice *intorno normale* di  $p$ .

PROPOSIZIONE 4.2.4. Per ogni  $p \in M$ , esiste un intorno  $U_p$  di  $p$  e  $\varepsilon > 0$  tali che,

- ogni geodetica di velocità unitaria uscente da punti di  $U_p$  è definita almeno sull'intervallo  $(-\varepsilon, \varepsilon)$ , inoltre per ogni coppia di punti  $q, m \in U_p$  esiste un unico vettore  $v \in T_q M$  con  $|v|_q < \varepsilon$  tale che  $\exp_q(v) = m$ . Chiamiamo  $\gamma_v$  la geodetica  $t \mapsto \exp_q(tv)$ , per  $t \in [0, 1]$  (si noti che  $\mathcal{L}(\gamma_v) = |v|_q < \varepsilon$ ),
- il vettore  $v \in TM$  (dunque anche la geodetica  $\gamma_v$ ) dipende in modo  $C^\infty$  da  $q$  e  $m$ .
- per ogni  $q \in U_p$ , la mappa  $\exp_q$  è un diffeomorfismo tra  $B_\varepsilon(O_q)$  e la sua immagine in  $M$ , cioè  $\text{inj}(q) \geq \varepsilon$ .

DIMOSTRAZIONE. Per l'argomento alla fine della sezione precedente, possiamo trovare un intorno  $V_p \subseteq M$  di  $p$  e  $\varepsilon > 0$  tale che l'aperto  $\mathcal{A} = \{v \in TM : \pi(v) \in V_p \text{ e } |v|_{\pi(v)} < \varepsilon\}$  sia contenuto nell'intorno di  $O_p$  in  $TM$  dove la mappa  $\Phi : \Omega \rightarrow M \times M$ , data da  $\Phi(v) = (\pi(v), \exp_{\pi(v)}(v))$ , è definita ed è un diffeomorfismo con un intorno di  $(p, p)$  in  $M \times M$ . Segue che per ogni  $q \in V_p$ , la mappa  $\exp_q = \pi_2(\Phi|_{\Omega \cap T_q M})$  è un diffeomorfismo tra  $\mathcal{A} \cap T_q M = B_\varepsilon(O_q)$  e la sua immagine in  $M$  ( $\pi_2 : M \times M \rightarrow M$  è la mappa di proiezione sul secondo fattore).

Se dunque consideriamo un intorno  $U_p \subseteq V_p$  di  $p$  tale che  $U_p \times U_p \subseteq \Phi(\mathcal{A})$ , ogni vettore della controimmagine  $\Phi^{-1}(U_p \times U_p) \subseteq \mathcal{A}$  ha modulo minore di  $\varepsilon$ . Dati dunque  $q, m \in U_p$ , il vettore  $v$  è dato da  $\Phi^{-1}((q, m))$ , per costruzione della mappa  $\Phi$ , inoltre se ci fosse un altro vettore  $w \in T_q M$  con  $|w|_q < \varepsilon$ , si avrebbe  $w \in \mathcal{A}$  e  $\Phi(w) = (q, m)$ , il che è impossibile in quanto la mappa  $\Phi$  è iniettiva, ristretta all'insieme  $\mathcal{A}$ .

Il secondo punto segue dalla regolarità data dal teorema della funzione inversa (la mappa  $\Phi$  è di classe  $C^\infty$ ) e dalla regolarità della mappa esponenziale. Il terzo punto si ha per costruzione e per la scelta  $U_p \subseteq V_p$ .  $\square$

**OSSERVAZIONE 4.2.5.** Si noti che il terzo punto implica che per ogni compatto  $K \subseteq M$  si ha  $\inf_{p \in K} \text{inj}(p) > 0$ . In particolare, se  $M$  è compatta  $\text{inj}(M) > 0$ . Si mostri per esercizio, usando la proposizione precedente che la funzione  $p \mapsto \text{inj}(p)$  è semicontinua inferiormente su  $M$  (in realtà è continua, come vedremo nella Proposizione 6.6.3).

Il fatto che la mappa esponenziale sia un diffeomorfismo in un intorno dell'origine consente di definire delle particolari coordinate su  $M$ , chiamate *coordinate normali*. Sia  $p \in M$ , e sia  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  una base ortonormale di  $T_p M$  rispetto alla metrica  $g_p$ . Sia inoltre  $\Phi : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'isomorfismo lineare dato dalla scrittura in coordinate rispetto alla base  $\mathcal{B}$ . Allora, considerata la palla geodetica  $B = \exp_p(B_\varepsilon(O_p))$ , per  $\varepsilon < \text{inj}(p)$ , le coordinate

$$(x^1(q), \dots, x^n(q)) = \Phi(\exp_p^{-1}(q)) \quad \text{per ogni } q \in B,$$

si dicono *coordinate normali centrate in  $p$  (o rispetto a  $p$ )*.

La base di campi coordinati associata è allora data (con un piccolo abuso di notazione) da

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_q &= d(\exp_p \circ \Phi^{-1})_{\Phi(\exp_p^{-1}(q))} \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\Phi(\exp_p^{-1}(q))} \right) \\ &= (d \exp_p)_{\exp_p^{-1}(q)} \left( d\Phi_{\Phi(\exp_p^{-1}(q))}^{-1} \left( \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\Phi(\exp_p^{-1}(q))} \right) \right) \\ &= (d \exp_p)_{\exp_p^{-1}(q)}(e_i), \end{aligned}$$

in quanto  $d\Phi_{\exp_p^{-1}(q)}(e_i) = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\Phi(\exp_p^{-1}(q))} \in T_{\Phi(\exp_p^{-1}(q))} \mathbb{R}^n$ . In particolare, se  $q = p$  abbiamo

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = (d \exp_p)_{\exp_p^{-1}(p)}(e_i) = (d \exp_p)_{O_p}(e_i) = e_i,$$

poiché come abbiamo visto nella sezione precedente  $(d \exp_p)_{O_p} : T_p M \rightarrow T_p M$  è l'identità.

Vediamo ora che in queste coordinate la metrica assume nel punto  $p \in M$  una forma particolarmente semplice.

**PROPOSIZIONE 4.2.6.** *In coordinate normali rispetto a un punto  $p \in M$ , valgono le seguenti identità:*

- $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ ,
- $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ , dunque  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}(p) = 0$ ,
- $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(p) = 0$ ,

per ogni  $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$  la base ortonormale scelta di  $T_p M$ . Cominciamo con la verifica della prima relazione, si ha

$$g_{ij}(p) = g_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right) = g_p((d \exp_p)_{O_p}(e_i), (d \exp_p)_{O_p}(e_j)) = g_p(e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Osserviamo ora che la geodetica  $\gamma_v$ , uscente da  $p$  con velocità iniziale  $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ , si scrive in coordinate normali come

$$\gamma_v^j(t) = t v^j.$$

Sostituendo questa scrittura nell'equazione delle geodetiche (4.2) e ponendo  $t = 0$ , si ottiene

$$v^i v^j \Gamma_{ij}^k(p) = 0.$$

Poiché questo ragionamento si applica per qualsiasi  $v \in T_p M$ , concludiamo che  $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ .

La terza relazione si ottiene infine dalla seconda, utilizzando la formula (3.1).  $\square$

OSSERVAZIONE 4.2.7. Le tre relazioni sono verificate in ogni punto in una qualunque carta coordinata per  $(\mathbb{R}^n, g_{\text{eucl}})$  (e tale proprietà caratterizzerà le varietà localmente isometriche a  $\mathbb{R}^n$ ), sottolineiamo che invece per una varietà generica  $(M, g)$  esse valgono *solo* nel punto  $p \in M$ , in coordinate normali centrate in  $p$ .

OSSERVAZIONE 4.2.8. Una conseguenza di questo risultato è che, fino al prim'ordine, non è possibile distinguere puntualmente la metrica  $g$  dalla metrica piatta di  $\mathbb{R}^n$  (non c'è un *invariante* differenziale puntuale per isometria). Vedremo invece che non sempre esistono delle coordinate in cui anche le derivate seconde di  $g$  si annullano (come in  $\mathbb{R}^n$ ), dal momento che le derivate seconde sono legate alla "curvatura" della varietà nel punto, che sarà invariante per isometria e un'ostruzione alla "piattezza" (Sezione 10.1 e in particolare Osservazione 10.2.10).

OSSERVAZIONE 4.2.9. Queste relazioni rendono spesso molto potente fare i calcoli in queste coordinate, in particolare nel punto  $p \in M$  centro delle coordinate normali, possiamo liberamente "alzare" o "abbassare" gli indici dei tensori e le derivate covarianti coincidono con le derivate in coordinate (si vedano per esempio i calcoli (4.7), (5.4), (5.11) o la dimostrazione della Proposizione 5.6.1).

Introduciamo un altro sistema di coordinate locali nell'intorno di un punto  $p \in M$ , le *coordinate polari*. Fissato  $\varepsilon < \text{inj}(p)$ , definiamo la mappa  $\Psi : (0, \varepsilon) \times \mathbb{S}_p^{n-1} \rightarrow M \setminus \{p\}$ , dove  $\mathbb{S}_p^{n-1} = \{v \in T_p M : |v|_p = 1\} \subseteq T_p M$  è la *sfera unitaria* di  $T_p M$ , come

$$\Psi(r, v) = \exp_p(rv).$$

Definiamo allora le coordinate polari riemanniane sulla palla geodetica “buca-  
ta”  $\Psi((0, \varepsilon) \times \mathbb{S}_p^{n-1}) \subseteq M$ , componendo  $\Psi^{-1}$  con  $(\text{Id}, \xi)$ , per una qualsiasi carta  
locale  $\xi = (\theta^1, \dots, \theta^{n-1})$  di  $\mathbb{S}_p^{n-1}$ , cioè

$$(r(q), \theta^1(q), \dots, \theta^{n-1}(q)) = (\pi^{(0, \varepsilon)}(\Psi^{-1}(q)), \xi(\pi^{\mathbb{S}_p^{n-1}}(\Psi^{-1}(q)))) .$$

Per esempio, si può prendere come carta per  $\mathbb{S}_p^{n-1}$  la proiezione stereografica  $\xi : \mathbb{S}_p^{n-1} \setminus \{w\} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ . In questo caso, le coordinate polari non risultano definite sui  
punti della geodetica uscente da  $p$  con velocità iniziale  $w$ . A livello di notazione,  
indicheremo con  $r$  l'indice relativo alla coordinata radiale  $r$  e con  $i \in \{1, \dots, n-1\}$   
l'indice relativo alle coordinate angolari  $\theta^1, \dots, \theta^{n-1}$  su  $\mathbb{S}_p^{n-1}$ .

OSSERVAZIONE 4.2.10. Detto in parole povere, le coordinate polari sono le  
coordinate normali scritte in coordinate polari di  $\mathbb{R}^n$ .

Scriviamo i campi coordinati in coordinate polari in un punto  $q = \Psi(r, v) = \exp_p(rv)$ , con  $|v|_p = 1$  e  $r \in (0, \varepsilon)$ . Si ha

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_q = d\Psi_{(r,v)} \left( \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_r, O_v \right) = (d \exp_p)_{rv}(v) = \frac{d}{dr} \exp_p(rv) = \dot{\gamma}_v(r) \quad (4.4)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \theta^i} \right|_q = d\Psi_{(r,v)} \left( 0, \left. \frac{\partial}{\partial \theta^i} \right|_v \right) = (d \exp_p)_{rv} \left( r \left. \frac{\partial}{\partial \theta^i} \right|_{rv} \right) \quad (4.5)$$

dove  $\left. \frac{\partial}{\partial \theta^i} \right|_{rv} \in T_{rv}T_pM$  coincide con  $\left. \frac{\partial}{\partial \theta^i} \right|_v \in T_v\mathbb{S}_p^{n-1} \subseteq T_vT_pM$ , identificando sia  
 $T_{rv}T_pM$  che  $T_vT_pM$  con  $T_pM$ , come sopra  $\gamma_v$  è la geodetica uscente da  $p$  con  
velocità iniziale unitaria  $v \in \mathbb{S}_p^{n-1}$  e  $O_v$  è l'origine di  $T_v\mathbb{S}_p^{n-1}$ . Segue allora che,  
avendo tale velocità norma costante lungo la geodetica uguale a 1,

$$\left| \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_q \right|^2 = g_q \left( \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_q, \left. \frac{\partial}{\partial r} \right|_q \right) = 1 .$$

ESERCIZIO 4.2.11. Si mostri che se  $X$  è un campo lungo la sottovarietà  $\mathbb{S}_p^{n-1}$   
di  $T_pM$ , allora  $X$  è tangente a  $\mathbb{S}_p^{n-1}$  se e solo se in ogni punto  $v \in \mathbb{S}_p^{n-1}$  si ha  
 $g_p(X_v, v) = 0$ .

Considerando  $(T_pM, g_p)$  come una varietà riemanniana (isometrica a  $\mathbb{R}^n$ ) e  
identificando canonicamente  $T_v(T_pM)$  con  $T_pM$ , per ogni  $v \in T_pM$ , in generale  
non ci si può aspettare che la mappa esponenziale (che soddisfa  $(d \exp_p)_{O_p} = \text{Id}$ )  
sia un'isometria tra gli aperti  $V_p$  e  $U_p$  dati dalla Proposizione 4.1.14, in quanto la  
metrica di  $M$  in un intorno di  $p \in M$  non è necessariamente piatta, come quella  
di  $(T_pM, g_p)$ . Tuttavia,  $(d \exp_p)_v$  conserva i prodotti scalari con vettori “radia-  
li”, per ogni  $v \in T_pM$ , come asserisce il seguente lemma che rende dunque le  
coordinate polari particolarmente rilevanti.

LEMMA 4.2.12 (Lemma di Gauss). *Siano  $p \in M$  e  $\varepsilon < \text{inj}(p)$ . Allora, per ogni  
 $v \in B_\varepsilon(O_p)$  e  $w \in T_pM$ , si ha*

$$g_{\exp_p(v)} \left( (d \exp_p)_v(v), (d \exp_p)_v(w) \right) = g_p(v, w) . \quad (4.6)$$

DIMOSTRAZIONE. Se  $v = 0$  la tesi è ovvia, consideriamo dunque  $v \neq 0$ . Mettiamoci in coordinate polari attorno a  $p$  nella palla geodetica di raggio  $\varepsilon > 0$  e supponiamo  $g_p(v, w) = 0$ , cioè  $w$  ortogonale a  $v$ . Ragionando allora come nell'Esercizio 4.2.11, si vede che  $w$  è un vettore tangente sia alla sfera  $|v|_p \mathbb{S}_p^{n-1}$  nel suo punto  $v$ , che alla sfera unitaria  $\mathbb{S}_p^{n-1}$  nel suo punto  $v/|v|_p$ . Estendiamo  $w$  a un campo vettoriale  $\bar{X}$  su tutta  $|v|_p \mathbb{S}_p^{n-1}$  e poi estendiamo  $\bar{X}$  a  $B_\varepsilon(O_p) \setminus \{O_p\}$  ponendo  $\bar{X}_{sz} = \bar{X}_z$ , per ogni  $z \in |v|_p \mathbb{S}_p^{n-1}$  e  $s \in (0, \varepsilon/|v|_p)$  (cioè  $\bar{X}$  è costante sui raggi dall'origine di  $T_p M$ ). Detto  $\Theta$  il diffeomorfismo dato da  $(r, z) \mapsto rz$ , poniamo  $X = \Theta^* \bar{X}$ , che è un campo vettoriale su  $(0, \varepsilon) \times \mathbb{S}_p^{n-1}$ .

Posto  $\bar{v} = v/|v|_p \in \mathbb{S}_p^{n-1}$ , sia  $\Psi(r, \bar{v}) = \gamma_{\bar{v}}(r) = \exp_p(r\bar{v})$ , da cui

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\exp_p(r\bar{v})} = \dot{\gamma}_{\bar{v}}(r) = \left( \Psi_* \frac{\partial}{\partial r} \right)_{\Psi(r, \bar{v})} = (d \exp_p)_{r\bar{v}}(\bar{v}).$$

Definiamo il campo vettoriale  $\widetilde{X}_{(r,z)} = rX_z$  per  $(r, z) \in (0, \varepsilon) \times \mathbb{S}_p^{n-1}$  e sia

$$Y_{\Psi(r,z)} = \left( \Psi_* \widetilde{X} \right)_{\Psi(r,z)} = (d \exp_p)_{rz}(r\bar{X}_{rz}).$$

Calcoliamo dunque, lungo la geodetica  $\gamma_{\bar{v}}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} g_{\gamma_{\bar{v}}} \left( Y, \frac{\partial}{\partial r} \right) &= \frac{d}{dr} g(Y, \dot{\gamma}_{\bar{v}}) \\ &= g \left( \frac{D}{dr} Y, \dot{\gamma}_{\bar{v}} \right) + g \left( Y, \frac{D}{dr} \dot{\gamma}_{\bar{v}} \right) \\ &= g \left( \nabla_{\dot{\gamma}_{\bar{v}}} Y, \dot{\gamma}_{\bar{v}} \right) \\ &= g_{\gamma_{\bar{v}}} \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} Y, \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &= g_{\gamma_{\bar{v}}} \left( \nabla_Y \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) + g_{\gamma_{\bar{v}}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial r}, Y \right], \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{2} Y_{\gamma_{\bar{v}}} g \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) + g_{\gamma_{\bar{v}}} \left( \left[ \frac{\partial}{\partial r}, Y \right], \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &= g_{\gamma_{\bar{v}}} \left( Y, \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{1}{r} \end{aligned}$$

in quanto  $\gamma_{\bar{v}}$  è una geodetica, dunque  $\frac{D}{dr} \dot{\gamma}_{\bar{v}} = 0$  e  $g \left( \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r} \right) = 1$ , inoltre

$$\left[ \frac{\partial}{\partial r}, Y \right] = \left[ \Psi_* \frac{\partial}{\partial r}, \Psi_* \widetilde{X} \right] = \Psi_* \left[ \frac{\partial}{\partial r}, rX \right] = \Psi_* X = \Psi_* \widetilde{X}/r = Y/r,$$

poiché  $\left[ \frac{\partial}{\partial r}, X \right] = 0$ , essendo  $X$  un campo su  $(0, \varepsilon) \times \mathbb{S}_p^{n-1}$  tangente a ogni sfera  $\{r\} \times \mathbb{S}_p^{n-1}$ , per  $r \in (0, \varepsilon)$  fissato e indipendente da  $r$ .

Ponendo allora  $a(r) = g_{\gamma_{\bar{v}}(r)} \left( Y, \frac{\partial}{\partial r} \right)$ , per ogni  $r \in (0, |v|_p]$ , si ha  $a'(r) = a(r)/r$ , da cui

$$a''(r) = a'(r)/r - a(r)/r^2 = 0$$

e poichè

$$\begin{aligned}
a'(r) &= g(Y/r, \dot{\gamma}_{\bar{v}}) \\
&= g(\Psi_* X, \dot{\gamma}_{\bar{v}}) \\
&= g((d \exp_p)_{r\bar{v}}(\bar{X}_{r\bar{v}}), (d \exp_p)_{r\bar{v}}(\bar{v})) \\
&= g((d \exp_p)_{r\bar{v}}(\bar{X}_v), (d \exp_p)_{r\bar{v}}(\bar{v})) \\
&= g((d \exp_p)_{r\bar{v}}(w), (d \exp_p)_{r\bar{v}}(\bar{v})),
\end{aligned}$$

si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} a'(r) = g((d \exp_p)_{O_p}(w), (d \exp_p)_{O_p}(\bar{v})) = g_p(w, v)/|v|_p = 0,$$

dato che  $(d \exp_p)_{O_p}$  è l'identità di  $T_p M$ . Da  $a'(r) \equiv 0$  in  $(0, |v|_p]$  segue che  $a'(r) = 0$  per  $r = |v|_p$ , che implica

$$g((d \exp_p)_v(w), (d \exp_p)_v(\bar{v})) = 0,$$

da cui la tesi.

Poiché poi

$$g_{\exp_p(r\bar{v})}((d \exp_p)_{r\bar{v}}(\bar{v}), (d \exp_p)_{r\bar{v}}(\bar{v})) = g(\dot{\gamma}_{\bar{v}}(r), \dot{\gamma}_{\bar{v}}(r)) = |\dot{\gamma}_{\bar{v}}(r)|_{\gamma_{\bar{v}}(r)}^2$$

è costante lungo  $\gamma_{\bar{v}}$ , uguale a 1, ponendo  $r = |v|_p$  abbiamo

$$g_{\exp_p(v)}((d \exp_p)_v(\bar{v}), (d \exp_p)_v(\bar{v})) = 1$$

da cui segue la tesi del lemma anche quando  $w$  è proporzionale a  $v$ .

Concludiamo dunque separando  $w \in T_p M$  nelle sue parti  $w_r = g_p(\bar{v}, w)\bar{v}$ , proporzionale a  $v$  e  $w_{\mathbb{S}_p^{n-1}} = w - w_r$ , ortogonale a  $v$  e applicando quanto mostrato sopra, essendo la formula (4.6) lineare in  $w$ .  $\square$

Il seguente corollario è allora immediato (lo si provi per esercizio, usando le formule (4.4) e (4.5)).

**COROLLARIO 4.2.13.** *In coordinate polari  $(r, \theta^1, \dots, \theta^{n-1})$  rispetto a un punto  $p \in M$ , si ha*

- $g_{rr} = 1$ ,
- $g_{ri} = 0$ , per  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

La metrica si può dunque scrivere localmente come

$$g = dr^2 + h_q = dr^2 + g_{ij} d\theta^i \otimes d\theta^j,$$

dove  $h_q$  è la metrica indotta da  $g$  nel punto  $q = \exp_p(rv)$  sulle sfere geodetiche  $\Psi(\{r\} \times \mathbb{S}_p^{n-1}) = \exp_p(r\mathbb{S}_p^{n-1})$ . In particolare, per ogni  $r \in (0, \varepsilon)$ , la geodetica  $\gamma_v$  è normale in  $\gamma_v(r)$  alla sfera geodetica  $S_r(p)$  di raggio  $r$ .

Si noti che  $dr^2 + g_{ij} d\theta^i \otimes d\theta^j$  non è una metrica prodotto in quanto le funzioni  $g_{ij} = g_{ij}(r, \theta)$  che determinano una metrica su  $\mathbb{S}_p^{n-1}$ , dipendono da  $r$ . Inoltre, tale metrica non è nemmeno una metrica warped in generale, a meno che  $g_{ij}(r, \theta) = f(r) \tilde{g}_{ij}(\theta)$ , per delle funzioni  $f$  e  $\tilde{g}_{ij}$ . Il caso di dimensione due è speciale, si mostri per esercizio che in tal caso si ha sempre una metrica warped.

Osserviamo inoltre che da questo corollario segue anche che in coordinate polari si ha  $g^{rr} = 1$ ,  $g^{ri} = 0$  e  $g^{ij}$  è la matrice inversa di  $g_{ij}$ , per  $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ .

ESERCIZIO 4.2.14. Si scrivano i simboli di Christoffel della connessione di Levi-Civita in coordinate polari. In particolare, si osservi che  $\Gamma_{rr}^r$  e  $\Gamma_{rr}^i$  sono tutti nulli, per ogni  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

### 4.3. La distanza riemanniana

Il funzionale lunghezza su una varietà riemanniana  $(M, g)$  è definito sulle curve  $\gamma : I \rightarrow M$  di classe  $C^1$  a tratti, come

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_I |\dot{\gamma}(t)| dt,$$

che sappiamo essere invariante per riparametrizzazione di  $\gamma$ , cioè se a  $\gamma$  sostituiamo la curva  $\tilde{\gamma} : J \rightarrow M$  data da  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \tau$ , con  $\tau : J \rightarrow I$  un diffeomorfismo, abbiamo  $\mathcal{L}(\tilde{\gamma}) = \mathcal{L}(\gamma)$ .

DEFINIZIONE 4.3.1. Per ogni coppia di punti  $p, q \in M$  definiamo la loro distanza riemanniana

$$d(p, q) = \inf \{ \mathcal{L}(\gamma) : \gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ di classe } C^1 \text{ a tratti con } \gamma(a) = p \text{ e } \gamma(b) = q \}.$$

ESERCIZIO 4.3.2. Il funzionale  $\mathcal{L}$  è ben definito anche se  $\gamma$  è semplicemente lipschitziana (essendo tali funzioni differenziabili quasi ovunque e considerando l'integrale di Lebesgue). Si mostri che

$$d(p, q) = \inf_{\gamma \in C_s^1} \mathcal{L}(\gamma) = \inf_{\gamma \in Lip} \mathcal{L}(\gamma) = \inf_{\gamma \in C^1} \mathcal{L}(\gamma),$$

dove gli estremi inferiori sono presi sulle curve  $\gamma$  in  $M$  che congiungono i punti  $p$  e  $q$ .

Mostriamo che  $d$  è una distanza che rende  $(M, d)$  uno spazio metrico la cui topologia è la stessa della topologia di  $M$  come varietà.

TEOREMA 4.3.3. La funzione  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  così definita è una distanza su  $M$ , chiamata distanza riemanniana e la topologia indotta da  $d$  coincide con la topologia di  $M$  come varietà.

DIMOSTRAZIONE. Cominciamo col dimostrare che  $d$  è effettivamente una distanza su  $M$ . La simmetria, la nonnegatività e la disuguaglianza triangolare sono ovvie dalla definizione, dobbiamo mostrare solo che se  $d(p, q) = 0$  allora  $p = q$ . Se  $p \neq q$ , sia  $(U, \varphi)$  una carta coordinata attorno a  $p$  che non contiene  $q$ ,

tale che  $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$  e  $\varphi(U) = B_{1/2}(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ , allora posto  $V = \varphi^{-1}(B_{1/2}(0)) \subseteq U$ , ogni curva di classe  $C^1$  a tratti  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  con  $\gamma(a) = p$  e  $\gamma(b) = q$  deve intersecare  $\partial V$  in  $\gamma(t_0)$ , per qualche  $t_0 \in (a, b)$ , possiamo inoltre supporre che  $\gamma(t) \in V$  per ogni  $t < t_0$ . Dunque, si ha

$$\mathcal{L}(\gamma) \geq \mathcal{L}(\gamma|_{[a, t_0]}) = \int_a^{t_0} \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt.$$

Per compattezza, esistono due costanti positive  $\alpha, \beta$  tali che

$$\alpha|v|_{\mathbb{R}^n}^2 \leq (\varphi_*g)_{\varphi(\tilde{p})}(v, v) \leq \beta|v|_{\mathbb{R}^n}^2$$

per ogni  $\tilde{p} \in V$  e  $v \in \mathbb{R}^n$  ed essendo  $\varphi : (V, g|_V) \rightarrow (B_{1/2}(0), \varphi_*g)$  un'isometria, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\gamma) &\geq \int_a^{t_0} \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \\ &= \int_a^{t_0} \sqrt{(\varphi_*g)_{\varphi(\gamma(t))}(d\varphi(\dot{\gamma}(t)), d\varphi(\dot{\gamma}(t)))} dt \\ &= \int_a^{t_0} \sqrt{(\varphi_*g)_{\varphi(\gamma(t))}((\varphi \circ \gamma)'(t), (\varphi \circ \gamma)'(t))} dt \\ &\geq \int_a^{t_0} \sqrt{\alpha |(\varphi \circ \gamma)'(t)|_{\mathbb{R}^n}^2} dt \\ &= \sqrt{\alpha} \int_a^{t_0} |(\varphi \circ \gamma)'(t)|_{\mathbb{R}^n} dt \\ &= \sqrt{\alpha} \mathcal{L}_{\mathbb{R}^n}((\varphi \circ \gamma)|_{[a, t_0]}) \\ &\geq \sqrt{\alpha}/2, \end{aligned}$$

in quanto  $\varphi \circ \gamma|_{[a, t_0]}$  è una curva in  $\mathbb{R}^n$  che va da 0 a  $\varphi(\gamma(t_0)) \in \partial B_{1/2}(0)$ , dunque  $|\varphi(\gamma(t_0))|_{\mathbb{R}^n} = 1/2$ . Segue che  $d(p, q) \geq \sqrt{\alpha}/2 > 0$ .

Con lo stesso argomento si mostra che per ogni  $\tilde{p} \in V$ , si ha

$$d(p, \tilde{p}) \geq \sqrt{\alpha} |\varphi(\tilde{p})|_{\mathbb{R}^n}$$

e se consideriamo la curva  $\gamma$  da  $p$  a  $\tilde{p}$  data da  $\gamma(t) = \varphi^{-1}(t\varphi(\tilde{p}))$ , per  $t \in [0, 1]$ ,

contenuta in  $V$ , abbiamo

$$\begin{aligned}
d(p, \tilde{p}) &\leq \mathcal{L}(\gamma) \\
&= \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{(\varphi_*g)_{\varphi(\gamma(t))}(d\varphi(\dot{\gamma}(t)), d\varphi(\dot{\gamma}(t)))} dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{(\varphi_*g)_{\varphi(\gamma(t))}((\varphi \circ \gamma)'(t), (\varphi \circ \gamma)'(t))} dt \\
&\leq \int_0^1 \sqrt{\beta |(\varphi \circ \gamma)'(t)|_{\mathbb{R}^n}^2} dt \\
&= \sqrt{\beta} \int_0^1 |\varphi(\tilde{p})|_{\mathbb{R}^n} dt \\
&= \sqrt{\beta} |\varphi(\tilde{p})|_{\mathbb{R}^n},
\end{aligned}$$

dunque,

$$\sqrt{\alpha} |\varphi(\tilde{p})|_{\mathbb{R}^n} \leq d(p, \tilde{p}) \leq \sqrt{\beta} |\varphi(\tilde{p})|_{\mathbb{R}^n}.$$

Essendo  $\varphi : V \rightarrow B_{1/2}(0)$  bigettiva, possiamo considerare la distanza  $d_*$  indotta da  $\varphi$  su  $B_{1/2}(0)$ , cioè  $d_*(x, y) = d(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y))$  per ogni  $x, y \in B_{1/2}(0)$ , che rende chiaramente la mappa  $\varphi$  un'isometria nel senso degli spazi metrici tra  $(V, d)$  e  $(B_{1/2}(0), d_*)$ . Poiché

$$\sqrt{\alpha} |\varphi(\tilde{p})|_{\mathbb{R}^n} \leq d_*(0, \varphi(\tilde{p})) \leq \sqrt{\beta} |\varphi(\tilde{p})|_{\mathbb{R}^n},$$

per ogni  $\tilde{p} \in V$ , segue che  $d_*$  e la norma euclidea determinano basi di intorni di  $0 \in \mathbb{R}^n$  compatibili, lo stesso quindi vale (essendo ovviamente  $\varphi$  un omeomorfismo tra  $V$  e  $B_{1/2}(0)$  sia con le topologie relative che con quelle indotte dalle metriche  $d$  e  $d_*$ , rispettivamente) per gli intorni di  $p \in M$  dati dalla topologia di varietà di  $M$  e dalla distanza  $d$ . Valendo ciò per ogni  $p \in M$ , concludiamo che la topologia indotta da  $d$  coincide con la topologia di  $M$  come varietà.  $\square$

**DEFINIZIONE 4.3.4.** Diremo che la varietà riemanniana è *completa* se lo spazio metrico  $(M, d)$  è completo.

Il seguente teorema “raffina” la Proposizione [4.2.4](#)

**TEOREMA 4.3.5 (Teorema degli intorni geodetici).** *Per ogni  $p \in M$ , esiste un intorno  $U_p$  di  $p$  e  $\varepsilon > 0$  tali che per ogni coppia di punti  $q, m \in U_p$  esiste un'unica geodetica  $\gamma$  (a meno di riparametrizzazioni affini) di lunghezza minore di  $\varepsilon$  che congiunge  $q$  a  $m$ . Inoltre,  $\mathcal{L}(\gamma) = d(q, m)$  e se  $\mathcal{L}(\sigma) = d(q, m)$ , per una curva  $\sigma$  di classe  $C^1$  a tratti, quest'ultima coincide con  $\gamma$ , a meno di riparametrizzazione.*

**DIMOSTRAZIONE.** Siano  $U_p \subseteq M$  e  $\varepsilon > 0$  dati dalla Proposizione 4.2.4. Riguardo alla prima parte del teorema, l'esistenza e l'unicità, a meno di riparametrizzazioni affini, della geodetica  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$  seguono allora da tale proposizione, dobbiamo solo dimostrare che  $\mathcal{L}(\gamma) = d(q, m)$ , cioè che ogni curva  $\sigma : [0, 1] \rightarrow M$  di classe  $C^1$  a tratti che congiunge  $q$  a  $m$  ha lunghezza maggiore o uguale a  $\gamma$ . Ciò è banale nel caso in cui  $q = m$ , dunque possiamo supporre che  $q$  e  $m$  siano distinti. Per il terzo punto della Proposizione 4.2.4, possiamo considerare delle coordinate polari  $(r, \theta)$  in  $q$  su  $B \setminus \{q\} = \exp_q(B_\varepsilon(O_q) \setminus \{O_q\}) \subseteq M$ , da cui  $m \in B \setminus \{q\}$  e  $\mathcal{L}(\gamma) = |\dot{\gamma}(0)|_{\gamma(0)} = r(m)$ . Se la curva  $\sigma$  arriva su  $\partial B$  per la prima volta in  $\sigma(t_0)$ , si ha  $\sigma(t) \in B$  per ogni  $t < t_0$  e, per il Corollario 4.2.13 al Lemma di Gauss, abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sigma) &\geq \mathcal{L}(\sigma|_{[0, t_0]}) \\ &= \int_0^{t_0} \sqrt{g_{\sigma(t)}(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t))} dt \\ &= \int_0^{t_0} \sqrt{dr^2(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) + h_{\sigma(t)}([\dot{\sigma}(t)]^\top, [\dot{\sigma}(t)]^\top)} dt \\ &\geq \int_0^{t_0} |(r \circ \sigma)'(t)| dt \\ &\geq r(\sigma(t_0)) \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con  $[\dot{\sigma}(t)]^\top$  la proiezione del vettore  $\dot{\sigma}(t) \in T_{\sigma(t)}M$  sul tangente alla sfera geodetica  $\exp_p(r(\sigma(t))\mathbb{S}_p^{n-1})$ , dunque  $\mathcal{L}(\sigma) > \mathcal{L}(\gamma)$ . Se invece  $\sigma$  è tutta contenuta in  $B$ , analogamente si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sigma) &= \int_0^1 \sqrt{g_{\sigma(t)}(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t))} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{dr^2(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) + h_{\sigma(t)}([\dot{\sigma}(t)]^\top, [\dot{\sigma}(t)]^\top)} dt \\ &\geq \int_0^1 |(r \circ \sigma)'(t)| dt \\ &\geq r(m) \\ &= \mathcal{L}(\gamma). \end{aligned}$$

L'uguaglianza si ha dunque solo se la curva  $\sigma$  è tutta contenuta in  $B$ , la funzione  $r \circ \sigma$  è monotona crescente e  $h_{\sigma(t)}(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t)) = 0$ , che implica  $\dot{\sigma}(t)$  proporzionale a  $\frac{\partial}{\partial r}$ , per ogni  $t \in (0, 1]$  dove  $\dot{\sigma}(t)$  esiste. Riparametrizzando  $\sigma$  proporzionalmente alla sua lunghezza d'arco, otteniamo che  $\dot{\sigma}(t) = \mathcal{L}(\gamma) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\sigma(t)}$ . In particolare,  $\sigma$  è di classe  $C^1$  ed è una curva integrale di  $\mathcal{L}(\gamma) \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{\sigma(t)}$ , di conseguenza è  $C^\infty$ . Per l'Esercizio 4.2.14 è allora una geodetica che connette  $q$  a  $m$  di lunghezza

$\mathcal{L}(\sigma) = \mathcal{L}(\gamma) = d(q, m) < \varepsilon$ , dunque per la Proposizione 4.2.4 coincide con  $\gamma$ .  $\square$

**COROLLARIO 4.3.6.** *Per ogni  $p \in M$ , se  $\varepsilon < \text{inj}(p)$ , la palla geodetica  $\exp_p(B_\varepsilon(O_p))$  coincide con la palla metrica  $B_\varepsilon(p)$  centrata in  $p \in M$  e di raggio  $\varepsilon$ , rispetto alla distanza  $d$ . In particolare, le geodetiche  $\gamma_v : [0, \varepsilon] \rightarrow M$  uscenti da  $p$  con velocità unitaria  $v \in \mathbb{S}_p^{n-1}$  sono minimali (si veda la Definizione 4.3.8).*

**DIMOSTRAZIONE.** Consideriamo delle coordinate polari in  $p$  sulla palla geodetica "bucata"  $B \setminus \{p\} = \exp_p(B_\varepsilon(O_p) \setminus \{O_p\}) \subseteq M$ , allora argomentando come nel teorema precedente, per ogni  $q \in B \setminus \{p\}$ , si ha che  $r(q)$  è proprio la distanza tra  $p$  e  $q$ , dunque l'ultimo punto segue e  $B \subseteq B_\varepsilon(p)$ . Non vi sono poi punti di  $B_\varepsilon(p)$  fuori da  $B$ , in quanto (sempre con lo stesso argomento) ogni curva da  $p$  che "esce" da  $B$  deve avere lunghezza maggiore di  $\varepsilon$ , da cui la tesi.  $\square$

Vediamo ora le proprietà locali della funzione distanza che seguono da questi risultati.

**PROPOSIZIONE 4.3.7.** *Valgono le seguenti affermazioni.*

- (1) **Regolarità della funzione distanza:** *Per ogni  $p \in M$ , esiste un intorno  $U_p$  di  $p$  tale che la funzione distanza  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  è  $C^\infty$  in  $U_p \times U_p \setminus D$ , dove  $D = \{(q, q) : q \in U_p\}$  e la funzione  $d^2$  è  $C^\infty$  in  $U_p \times U_p$ .*
- (2) **Regolarità della distanza rispetto a un punto:** *Per ogni  $p \in M$ , la funzione distanza  $d_p : M \rightarrow \mathbb{R}$  data da  $d_p(q) = d(p, q)$  è 1-lipschitziana e  $C^\infty$  in ogni palla "bucata"  $B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$ , con  $\varepsilon < \text{inj}(p)$ . La funzione  $d_p^2$  è  $C^\infty$  in tutta  $B_\varepsilon(p)$ .*
- (3) **Legame della distanza rispetto a un punto con le coordinate polari:** *In ogni palla "bucata"  $B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$  con  $\varepsilon < \text{inj}(p)$ ,  $d_p$  coincide con la funzione  $r$  e  $\nabla d_p(q)$  coincide con  $\frac{\partial}{\partial r}|_q$ . In particolare,  $|\nabla d_p(q)| = 1$  in ogni punto  $q$  di  $B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$ .*
- (4) **Curve integrali della distanza rispetto a un punto:** *Le geodetiche uscenti da  $p$  e parametrizzate in lunghezza d'arco, quindi di velocità unitaria, sono le curve integrali del campo  $\nabla d_p$  su  $B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$  e viceversa.*
- (5) **Legame della distanza rispetto a un punto con le coordinate normali:** *In coordinate normali  $(x^1, \dots, x^n)$  rispetto a  $p$  in  $B_\varepsilon(p)$  con  $\varepsilon < \text{inj}(p)$ , si ha  $d_p^2(q) = |x(q)|_{\mathbb{R}^n}^2$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** La 1-lipschitzianità di  $d_p$  è ovvia. Le proprietà di regolarità seguono dalla minimalità delle geodetiche data dal Teorema 4.3.5 e dalla loro dipendenza  $C^\infty$  al secondo punto della Proposizione 4.2.4 dai loro estremi. Si ha infatti che  $d^2(q, m) = |v_{q,m}|_q^2 = g_q(v_{q,m}, v_{q,m})$ , dove  $v_{q,m} \in T_q M$  è il vettore dato dalla Proposizione 4.2.4, per  $(q, m) \in U_p \times U_p$ . Ovviamente allora  $d$  è  $C^\infty$  fuori dalla "diagonale" di  $U_p \times U_p$  e  $d_p^2$  è una funzione  $C^\infty$  in un intorno di  $p$  in  $M$  (e  $d_p$  in tale intorno eccetto il punto  $p$ ). Tale intorno si estende

fino alla palla geodetica  $B_\varepsilon(p)$ . Infatti, in coordinate polari  $(r, \theta^1, \dots, \theta^{n-1})$  su  $B_\varepsilon(p) \setminus \{p\}$ , si ha  $d_p = r$ , mentre in coordinate normali su  $B_\varepsilon(p)$  è immediata l'identità  $d_p^2(q) = |x(q)|_{\mathbb{R}^n}^2$ , per costruzione delle stesse. Inoltre segue

$$\nabla d_p = g^{rr} \frac{\partial}{\partial r} + g^{ri} \frac{\partial}{\partial \theta^i} = \frac{\partial}{\partial r},$$

per la formula (2.4) e il fatto che  $g^{rr} = 1$ ,  $g^{ri} = 0$ . Da cui

$$|\nabla d_p|^2 = g\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = g_{rr} = 1.$$

La parte restante dell'enunciato segue da (4.4) che implica  $\frac{\partial}{\partial r}|_{\gamma_v(r)} = \dot{\gamma}_v(r)$  per ogni  $v \in T_p M$  con  $|v|_p = 1$  e  $r \in (0, \varepsilon)$ .  $\square$

**DEFINIZIONE 4.3.8.** Una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ , di classe  $C^1$  a tratti, è detta *minimale* (oppure che *minimizza la distanza*) se non vi sono curve più corte da  $\gamma(a)$  a  $\gamma(b)$ , ovvero se  $\mathcal{L}(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$ . Si dice *localmente minimale* (oppure che *localmente minimizza la distanza*) se, per ogni  $t \in [a, b]$ , esiste un suo intorno  $I \subseteq [a, b]$  tale che  $\gamma|_I$  sia minimale.

**OSSERVAZIONE 4.3.9.** Se  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  è minimale è anche localmente minimale. In realtà vale qualcosa di più forte, cioè che  $\gamma$  minimizza la distanza su un qualunque sottointervallo di  $[a, b]$ . Infatti, se per qualche  $t, s \in [a, b]$  esistesse una curva  $\tau$  da  $\gamma(t)$  a  $\gamma(s)$  più corta di  $\gamma|_{[t, s]}$ , allora a meno di riparametrizzare  $\tau$ , la curva

$$\gamma(\xi) = \begin{cases} \gamma(\xi) & \text{per } \xi \in [a, b] \setminus [t, s] \\ \tau(\xi) & \text{per } \xi \in [t, s] \end{cases}$$

sarebbe più corta di  $\gamma$ .

**OSSERVAZIONE 4.3.10.** Ovviamente in  $\mathbb{R}^n$  i concetti di minimale e localmente minimale coincidono, cosa che invece non vale in generale per una varietà riemanniana, come abbiamo visto per le geodetiche più lunghe di  $\pi$  della sfera unitaria, per esempio. Si vede facilmente (lo si mostri per esercizio) che se  $M$  è compatta vi sono sempre geodetiche localmente minimali ma non minimali (si tenga presente la proposizione seguente).

Dal Teorema 4.3.5 segue il seguente risultato.

**PROPOSIZIONE 4.3.11.** Una curva di classe  $C^1$  a tratti è una geodetica se e solo se è localmente minimale ed è parametrizzata per un multiplo della sua lunghezza d'arco.

**DIMOSTRAZIONE.** Supponiamo che  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  sia una geodetica e  $t_0 \in (a, b)$  allora, per unicità,  $\gamma$  è l'unica geodetica passante per  $p = \gamma(t_0)$  con velocità  $\dot{\gamma}(t_0)$ . Se consideriamo l'intorno  $U_p$  di  $p$  e  $\varepsilon > 0$  dati dal Teorema 4.3.5, per  $\delta > 0$  abbastanza piccolo, la restrizione  $\gamma|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$  è una geodetica tutta contenuta in  $U_p$  (in particolare i punti  $\gamma(t_0 - \delta), \gamma(t_0 + \delta)$  appartengono a  $U_p$ ) di lunghezza

minore di  $\varepsilon$ . Dunque è minimale in quanto allora deve coincidere con l'unica geodetica (a meno di riparametrazioni affini) minimale data da tale teorema che congiunge  $\gamma(t_0 - \delta)$  e  $\gamma(t_0 + \delta)$ . Analogamente si trattano i casi  $t_0 = a$  e  $t_0 = b$ .

Sia ora  $\sigma : [a, b] \rightarrow M$  localmente minimale e parametrizzata per un multiplo della sua lunghezza d'arco, scelto  $t_0 \in (a, b)$ , come prima consideriamo l'intorno  $U_p$  di  $p$  e  $\varepsilon > 0$  dati dal Teorema 4.3.5. Esistendo  $\delta' > 0$  tale che  $\sigma|_{[t_0-\delta', t_0+\delta']}$  è minimale, esiste  $\delta < \delta'$  tale che  $\sigma|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$  è sempre minimale (Osservazione 4.3.9), è tutta contenuta in  $U_p$  e ha lunghezza minore di  $\varepsilon$ . Per il Teorema 4.3.5 segue che  $\sigma|_{[t_0-\delta, t_0+\delta]}$  è una geodetica. Dall'arbitrarietà di  $t_0 \in (a, b)$  e poiché possiamo argomentare analogamente per  $t_0 = a$  e  $t_0 = b$ , possiamo quindi concludere che  $\sigma$  è una geodetica.  $\square$

Si noti che essendo le geodetiche curve di classe  $C^\infty$ , una curva  $C^1$  a tratti, localmente minimale e parametrizzata per un multiplo della sua lunghezza d'arco è  $C^\infty$ . Poiché i minimi a estremi fissati del funzionale lunghezza  $\mathcal{L}$  sono localmente minimali, per l'Osservazione 4.3.9, la Proposizione 4.3.11 è allora un *teorema di regolarità  $C^\infty$  "a meno di riparametrazione"* di tali minimi. In genere, nel calcolo delle variazioni, la regolarità dei minimi dei funzionali (in questo caso il funzionale *energia* (4.1), per la discussione nell'Osservazione 4.1.2, che è naturalmente ben definito sulle curve in  $W_{\text{loc}}^{1,2}$  una volta scritte in coordinate locali – dunque continue – e dove è naturale cercarne i minimi) si ottiene per via diversa, non avendo in generale a disposizione la "forza descrittiva" di un risultato come il Teorema 4.3.5 (e le Proposizioni 4.2.4 e 4.3.11), per esempio seguendo la linea in [3, Sezione 13.1].

**COROLLARIO 4.3.12.** *Le curve localmente minimali e di conseguenza quelle minimali, cioè i minimi a estremi fissati del funzionale lunghezza  $\mathcal{L}$  sulle curve  $C^1$  a tratti, sono geodetiche, dunque di classe  $C^\infty$ , una volta riparametrate proporzionalmente alla lunghezza d'arco.*

**OSSERVAZIONE 4.3.13.** Dal Teorema 4.3.5 e dalla Proposizione 4.3.11 segue che una geodetica  $t \mapsto \gamma_v(t)$ , uscente da  $p \in M$  con velocità iniziale  $v \in T_p$ , è minimale tra ogni suoi due punti per  $t \in [0, \text{inj}(p)/|v|_p]$ , ma potrebbe non esserlo più su intervalli più grandi. Si pensi ad esempio alle geodetiche sulla sfera unitaria, che sono minimali se e solo se sono lunghe al massimo  $\pi$ , cioè non superano il punto antipodale a quello di partenza, poi perdono tale proprietà, se "proseguono". Questo fenomeno, cioè che una soluzione delle equazioni di Eulero–Lagrange di un funzionale (in questo caso il funzionale *energia* (4.1), si veda la discussione nell'Osservazione 4.1.2) è minimo del funzionale se l'intervallo di definizione di tale soluzione è "piccolo" e non lo è più (generalmente) se l'intervallo supera una certa soglia, è "classico" nel calcolo delle variazioni e analizzato in dettaglio e in generale, con la teoria di Jacobi (si veda [3, Sezione 8.3], in particolare l'Osservazione 8.3.18, per esempio). Svilupperemo tale

teoria di Jacobi per le geodetiche nel Capitolo 6, collegando poi questo fenomeno (la sua presenza o assenza, come ad esempio in  $\mathbb{R}^n$  in cui le geodetiche non smettono mai di essere minimali) alla “curvatura” della varietà.

DEFINIZIONE 4.3.14. Definiamo in generale la *lunghezza* di una curva solo continua  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ , dove  $(X, d)$  è un qualsiasi spazio metrico, come

$$\mathcal{L}_I(\gamma) = \sup \{ d(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + \cdots + d(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \},$$

dove l'estremo superiore è calcolato al variare di  $k \in \mathbb{N}$  e di  $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ . Diremo allora che una curva è *rettificabile* se ha lunghezza finita.

Chiamiamo *distanza intrinseca* la funzione  $\delta : X \times X \rightarrow [0, +\infty]$  definita da

$$\delta(p, q) = \inf \{ \mathcal{L}_I(\gamma) \mid \gamma : [a, b] \rightarrow X \text{ rettificabile con } \gamma(a) = p \text{ e } \gamma(b) = q \}.$$

Si ha che  $(X, \delta)$  risulta essere ancora uno spazio metrico, detto *di lunghezza* (*length space*), se  $\delta = d$  (si veda [51, 96]).

Si noti che segue banalmente dalla definizione che la lunghezza  $\mathcal{L}_I(\gamma)$  di una curva è invariante per riparametrizzazione (come  $\mathcal{L}(\gamma)$ ).

ESERCIZIO 4.3.15. Si mostri (utilizzando le coordinate normali) che per una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  si ha  $|\dot{\gamma}(t_0)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(t_0+h), \gamma(t_0))}{|h|}$ , per ogni  $t_0 \in [a, b]$  in cui  $\dot{\gamma}(t_0)$  esiste. Di conseguenza, per una curva  $C^1$  a tratti  $\gamma$ , la disuguaglianza

$$\frac{d(\gamma(t_0+h), \gamma(t_0))}{h} \leq \frac{\mathcal{L}_I(\gamma|_{[t_0, t_0+h]})}{h} = \frac{\mathcal{L}_I(\gamma|_{[0, t_0+h]}) - \mathcal{L}_I(\gamma|_{[0, t_0]})}{h} \leq \frac{\int_{t_0}^{t_0+h} |\dot{\gamma}(t)| dt}{h}$$

per  $h > 0$  implica  $\frac{d}{dt} \mathcal{L}_I(\gamma|_{[0, t]}) \Big|_{t=t_0} = |\dot{\gamma}(t_0)|$ . Si deduca da questo che le lunghezze  $\mathcal{L}_I$  e  $\mathcal{L}$  coincidono, dunque denoteremo d'ora in poi anche la lunghezza intrinseca  $\mathcal{L}_I$  semplicemente con il simbolo  $\mathcal{L}$ .

Si utilizzi questo fatto per provare che se  $d$  è la distanza riemanniana di  $(M, g)$ , allora  $(M, d)$  è uno spazio metrico di lunghezza (si veda anche [17, Proposition 3.18]).

Estendiamo ora alcune nozioni, dicendo che una curva rettificabile  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  è *parametrizzata in lunghezza d'arco* se per ogni coppia di valori  $s \leq s' \in [a, b]$  si ha  $\mathcal{L}(\gamma|_{[s, s']}) = (s' - s)$ , *parametrizzata proporzionalmente alla (sua) lunghezza d'arco* se esiste  $c > 0$  tale che per ogni coppia di valori  $s \leq s' \in [a, b]$  si ha  $\mathcal{L}(\gamma|_{[s, s']}) = \int_s^{s'} |\dot{\gamma}(t)|_{\gamma(t)} dt = c(s' - s)$ , *minimale* se non vi sono curve rettificabili più corte di lei tra i suoi estremi  $p = \gamma(a)$  e  $q = \gamma(b)$  (dunque  $\mathcal{L}(\gamma) = d(p, q)$ ) e *localmente minimale* se, per ogni  $t \in [a, b]$ , esiste un suo intorno  $I \subseteq [a, b]$  tale che  $\gamma|_I$  sia minimale.

ESERCIZIO 4.3.16. Si provi che se una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  è rettificabile con  $\mathcal{L}(\gamma) > 0$ , allora si può riparametrizzare (in modo continuo) sullo stesso intervallo  $[a, b]$  proporzionalmente alla lunghezza d'arco e, cambiando l'intervallo,

in lunghezza d'arco. Si osservi poi che essendo la lunghezza di ogni curva rettificabile maggiore o uguale alla distanza tra i suoi estremi, nel primo caso la curva è lipschitziana di costante  $\mathcal{L}(\gamma)/(b-a)$ , nel secondo di costante 1.

ESERCIZIO 4.3.17. Si provi che una curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  lipschitziana è rettificabile e si ha

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt,$$

se  $(M, g)$  è una varietà Riemanniana (l'integrale – di Lebesgue – è ben definito in quanto  $\gamma$  è derivabile quasi ovunque in  $[a, b]$ , essendo lipschitziana).

Date queste definizioni, è possibile migliorare l'enunciato del Corollario 4.3.12.

PROPOSIZIONE 4.3.18. Sia  $(M, g)$  una varietà riemanniana e sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  una curva continua localmente minimale (o minimale). Allora, a meno di una riparametrizzazione continua,  $\gamma$  è una geodetica, dunque di classe  $C^\infty$ .

DIMOSTRAZIONE. Se  $\mathcal{L}(\gamma) = 0$ , la conclusione è ovvia. Sia  $\mathcal{L}(\gamma) > 0$  e supponiamo, senza perdita di generalità, che  $\gamma$  sia parametrizzata in lunghezza d'arco (Esercizio 4.3.16). Allora siccome  $\gamma$  è localmente minimale, per l'Osservazione 4.2.5 e il Teorema 4.3.5, esiste  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  tale che  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  è minimale e  $\mathcal{L}(\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}) = t_i - t_{i-1} \leq \varepsilon_0$ , per un fissato  $0 < \varepsilon_0 < \inf_{p \in \gamma([a, b])} \text{inj}(p)$ , indipendente da  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Per l'esercizio precedente e argomentando come nella parte finale della dimostrazione del Teorema 4.3.5, deduciamo prima che ogni curva  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  è di classe  $C^1$  (ricordando che  $\gamma$  è lipschitziana, per l'Esercizio 4.3.16, dunque differenziabile quasi ovunque), poi che ciascuna di esse è una geodetica parametrizzata in lunghezza d'arco.  $\square$

OSSERVAZIONE 4.3.19. Per molto tempo è stato naturale studiare le varietà con metodi unicamente analitici, mentre è ora chiaro che una larga parte di tale studio appartiene essenzialmente alla geometria "metrica" (cioè legata alla funzione distanza, che fornisce a una varietà riemanniana una struttura di spazio metrico compatibile con la topologia della varietà, come abbiamo visto) e l'apparato differenziale è solo un modo per semplificare le definizioni di alcune classi di oggetti e ottenere più facilmente vari risultati. Molte nozioni della geometria riemanniana sono state infatti estese a spazi metrici generali, distinguendo così le nozioni di natura realmente differenziale e quelle semplicemente "metriche". Si veda [18] per approfondire.

Concludiamo il capitolo con alcune definizioni e fatti relativi sempre legati alle geodetiche di una varietà riemanniana  $(M, g)$ .

DEFINIZIONE 4.3.20. Un sottoinsieme  $C \subseteq M$  si dice (geodeticamente) convesso se per ogni coppia di punti  $p, q \in C$ , esiste un'unica (a meno di riparametrizzazioni) geodetica minimale  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  che li congiunge in  $M$  ed è tutta contenuta in  $C$ .

Un sottoinsieme  $C \subseteq M$  si dice *totalmente convesso* se per ogni coppia di punti  $p, q \in C$ , ogni geodetica (anche non minimale)  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  che li congiunge è tutta contenuta in  $C$ .

Una sottovarietà  $S \subseteq M$  si dice *totalmente geodetica* se per ogni  $p \in S$  e vettore  $v \in T_p S \subseteq T_p M$ , la geodetica  $t \mapsto \gamma_v(t) = \exp_p^M(tv)$  è tutta contenuta in  $S$  (per tutti i  $t \in \mathbb{R}$  per i quali è definita).

Una funzione reale  $f$  definita su un sottoinsieme geodeticamente convesso  $C \subseteq M$  si dice (*strettamente*) *convessa* se per ogni geodetica minimale  $\gamma : [a, b] \rightarrow C$  che congiunge due punti di  $C$  si ha che la funzione  $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  è (*strettamente*) convessa.

**OSSERVAZIONE 4.3.21.** In  $\mathbb{R}^n$  i concetti di convessità, convessità geodetica e totale convessità coincidono in quanto tutte le geodetiche sono minimali, inoltre ogni sottovarietà connessa e totalmente geodetica è contenuta in un sottospazio affine della stessa dimensione. In generale, convessità e totale convessità sono due proprietà molto diverse, ad esempio si può mostrare che se  $M$  è compatta, non ha sottoinsiemi totalmente convessi diversi da  $\emptyset$  e tutta  $M$  (lo si dimostri per  $\mathbb{S}^{n-1}$ ).

**ESERCIZIO 4.3.22.** Si provi che una funzione  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$ , con  $C \subseteq M$  convesso, è convessa se e solo se il suo hessiano è dappertutto semidefinito positivo. Se tale hessiano è definito positivo, la funzione  $f$  è strettamente convessa.

**ESERCIZIO 4.3.23.** Si mostri che se  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  di classe  $C^2$ , con  $U$  aperto di  $M$ , ha hessiano definito positivo e ha minimo  $m = f(p) \in \mathbb{R}$  in  $p \in U$ , allora esiste  $\delta_0 > 0$  tale che per ogni  $\delta \in (0, \delta_0)$ , ogni sottolivello  $f^{-1}([m, m + \delta])$  è un aperto convesso contenuto in  $U$ .

Possiamo migliorare il Teorema 4.3.5 (degli interni geodetici) come segue.

**TEOREMA 4.3.24 (Teorema degli interni convessi – Whitehead).** Per ogni  $p \in M$ , esiste  $\delta_0 \in (0, \text{inj}(p))$  tale che se  $\delta \in (0, \delta_0)$ , la palla geodetica/metrica  $B_\delta(p)$  è geodeticamente convessa, inoltre per ogni coppia di punti  $q, m \in B_\delta(p)$  esiste un'unica geodetica minimale  $\gamma$  (a meno di riparametrizzazioni affini) di lunghezza minore di  $2\delta$ , che congiunge  $q$  e  $m$  ed è interamente contenuta in  $B_\delta(p)$ . Ogni altra curva minimale che congiunga  $q$  e  $m$ , coincide con  $\gamma$  a meno di riparametrizzazione.

**DIMOSTRAZIONE.** Innanzitutto, mostriamo che per ogni  $p \in M$ , se  $\delta > 0$  è abbastanza piccolo, la palla  $B_\delta(p)$  è geodeticamente convessa. Consideriamo delle coordinate normali  $(x^1, \dots, x^n)$  rispetto a  $p$  nella palla geodetica  $B_{\varepsilon'}(p)$ , per  $\varepsilon' < \text{inj}(p)$ . Dimostriamo che la funzione  $d_p^2$  (che ha minimo zero in  $p$ ) ha hessiano definito positivo in  $p$ . Essendo dunque una funzione  $C^\infty$ , il suo hessiano sarà definito positivo in un intorno aperto di  $p$  e la conclusione segue

dall'Esercizio 4.3.23. Nel punto  $p$  abbiamo

$$(\text{Hess } d_p^2)_{ij} = \nabla_{ij}^2 d_p^2 = \frac{\partial^2 d_p^2}{\partial x^i \partial x^j} = 2\delta_{ij}, \quad (4.7)$$

per la formula (3.17) e  $\nabla d_p^2(p) = 0$ , essendo  $p$  un punto di minimo di  $d_p^2$  e in quanto in coordinate normali  $d_p^2(x) = |x|_{\mathbb{R}^n}^2$  (Proposizione 4.3.7).

Scegliendo allora  $\delta_0 > 0$  abbastanza piccolo tale che la palla  $B_\delta(p)$  sia geodeticamente convessa per ogni  $\delta < \delta_0$ , la palla  $B_{\delta_0}(p)$  sia contenuta nell'aperto  $U_p$  dato dal Teorema 4.3.5 e  $2\delta_0 < \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  sempre dato da tale teorema, si ha la tesi osservando che ogni due punti appartenenti a  $B_\delta(p)$  hanno distanza minore di  $2\delta$  (per la disuguaglianza triangolare).  $\square$

DEFINIZIONE 4.3.25. Una geodetica  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$  si dice una *linea* (o una *retta*) se è minimale tra ogni coppia di suoi punti.

Una geodetica  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$  si dice un *raggio*, o una *semiretta* (da  $p = \gamma(0)$ ), se è minimale tra ogni coppia di suoi punti.

Una geodetica  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  si dice *chiusa* se  $\gamma(a) = \gamma(b)$  e  $\dot{\gamma}(a) = \dot{\gamma}(b)$ . Cioè  $\gamma$  è l'immagine di  $\sigma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$  con  $\nabla_{\dot{\sigma}} \dot{\sigma} = 0$ .

Vedremo nella Proposizione 6.1.12 che da ogni punto  $p$  di una varietà riemanniana completa (come spazio metrico, con la distanza  $d$ ) ma non compatta, esce almeno un raggio. Inoltre, che ogni classe di omotopia non banale del gruppo fondamentale di una varietà compatta contiene una geodetica chiusa che minimizza la lunghezza delle curve nella classe, Proposizione 6.1.13.

Dopo lo studio "locale" delle geodetiche su una varietà riemanniana di questo capitolo e delle conseguenze (locali) sulle funzioni distanza da un punto (Proposizione 4.3.7) è naturale porsi il problema dell'esistenza di geodetiche (minimali) tra due punti non necessariamente vicini e analizzare i motivi per cui una geodetica (possibilmente) smette di essere minimale, se troppo lunga. Inoltre, vorremmo studiare le proprietà della funzione distanza  $d_p$  non solo localmente, ma su tutta la varietà. Ci occuperemo di queste questioni con i metodi del calcolo delle variazioni nel Capitolo 6.